ANNALEN
DER
PHYSIK

GEGRÜNDET 1799 DURCH F. A. C. GREN
UND FORTGEFÜHRT DURCH L. W. GILBERT,
J. C. POGGENDORFF, G. u. E. WIEDEMANN,
P. DRUDE

VIERTE FOLGE

BAND 86
DER GANZEN REIHE 391. BAND

KURATORIUM:
M. PLANCK, E. WARBURG

UNTER MITWIRKUNG
DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT
HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK

MIT SECHSUNDZWANZIG TAFELN

1 9 2 8

LEIPZIG · VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH

Gen. Coll. Inc.

530.5 x
An7
ser 4, v. 86

WITHDRAWN
from
OBERLIN COLLEGE
LIBRARY

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig

Inhalt

Vierte Folge. Band 86

Neuntes Heft

Seite

1. **Max Trautz und Otto Trautz.** Kritik der elektrischen Differentialmethode zur Messung von C_v an Gasen 1
2. **Ernst Dussler.** Eine experimentelle Methode zur Bestimmung des ballistischen Entmagnetisierungsfaktors 66
3. **Wilhelm Werner.** Über den Durchschlag fester Isolatoren. (Hierzu Tafel I und II.) 95
4. **H. E. Hollmann.** Über den Mechanismus von Elektronenschwingungen. (Hierzu Tafel III bis V.) 129

Redaktionsschluß am 5. Juni 1928

Zehntes Heft

1. **Gerhard Herzberg.** Über die Struktur der negativen Stickstoffbanden. (Hierzu Tafel VI und VII.) 189
2. **Otto Holtzmann.** Untersuchungen über die Diffusion der Kathodenstrahlen von 100 Volt Geschwindigkeit in gasförmigen Medien 214
3. **Gerhard Zwiebler.** Spektralphotometrische Untersuchungen über die Energie- und Helligkeitsverteilung in dem Querschnitt der positiven Säule in Neon und Helium 241
4. **G. Borelius, C. H. Johansson und J. O. Linde.** Die Gitterstrukturumwandlungen in metallischen Mischkristallen . . . 291
5. **M. J. O. Strutt.** Zur Wellenmechanik des Atomgitters . . . 319

Redaktionsschluß am 15. Juni 1928

Elftes Heft

1. **Hans H. Meyer.** Über die Faserstruktur des Bromsilbers in den Schichten photographischer Trockenplatten. (Hierzu Tafel VIII bis X.) 325
2. **Hans Toby.** Über die Vorgänge am System Halbleiter-Leiter (unter bes. Berücksichtigung der Feuchtigkeitsverhältnisse) 353

Seite

3. G. Szivessy und M. Richartz. Über die magnetische Doppelbrechung von Flüssigkeitsgemischen. (Hierzu Tafel XI.) . . 393
4. N. H. Frank. Die Fortpflanzung elektrischer Wellen in Kabeln mit zwei Isolationsschichten. (Hierzu Tafel XII.) 422
5. Sven Fagerberg. Die Kathodophosphoreszenz von Erbium in Calciumoxyd. (Hierzu Tafel XIII.) 435
6. Heinrich Schilling. Über die kleinsten Elektrizitätsträger in Gasen 447

Redaktionsschluß am 30. Juni 1928

Zwölftes Heft

1. Hans Jakob. Über das Intensitätsverhältnis der Hauptseriendubletts der Alkalimetalle. (Hierzu Tafel XIV und XV.) . . 449
2. Gerhard Peters. Zur Theorie der Temperatur- und Dichteabhängigkeit des Brechungsexponenten 494
3. A. Kupper. Zur Frage der Intensität von Spektrallinien . . 511
4. J. Stark. Intensitätsverhältnis der Ortho- und Paraserien in Beziehung zur Atomstruktur des Heliums. (Hierzu Tafel XVI.) 530
5. J. Stark. Ionisierung von Quecksilberatomen durch ihre Reaktion mit Heliumionen. (Hierzu Tafel XVII.) 541
6. F. W. Kallmeyer. Untersuchungen an Detektorkontakten . 547
7. F. W. Hehlgans. Über Piezoquarzplatten als Sender und Empfänger hochfrequenter akustischer Schwingungen. (Hierzu Tafel XVIII.) 587
8. Richard Gans. Zur Theorie der Brownschen Molekularbewegung 628

Redaktionsschluß am 10. Juli 1928

Dreizehntes Heft

1. A. Wigand und F. Wenk. Der Gehalt der Luft an Radium-Emanation, nach Messungen bei Flugzeugaufstiegen. (Hierzu Tafel XIX und XX.) 657
2. H. Hellmann und H. Zahn. Über Dielektrizitätskonstanten von Elektrolytlösungen 687
3. Alice Lemke. Experimentelle Untersuchungen zur W. Ritzschen Theorie der Transversalschwingungen quadratischer Platten 717
4. Frida Stadie. Probleme der Brownschen Molekularbewegung 751
5. Margarete Samuel. Über magnetische Eigenschaften des Kobalts 798

Redaktionsschluß am 28. Juli 1928

Vierzehntes Heft

Seite

1. K. H. Stehberger. Über Rückdiffusion und Sekundärstrahlung mittelschneller Kathodenstrahlen an Metallen 825
2. A. Wehnelt und G. Schmerwitz. Über die Zuverlässigkeit der Sondenmessungen im dunklen Kathodenraum der Glimmentladung 864
3. Edouard Ramelet. Über die neue, rein elektronische Verstärkung verwendende Zählmethode für Korpuskularstrahlen (Hierzu Tafel XXI bis XXV.) 871
4. Erich Kretzschmann. Die Supraleitfähigkeit nach Schrödingers Wellengleichung und Fermis Statistik 914

Redaktionsschluß am 4. August 1928

Fünfzehntes Heft

1. M. Le Blanc, K. Richter und E. Schiebold. Eine Prüfung der Tammannschen Theorie der Resistenzgrenzen am System Gold-Kupfer. Aufstellung neuer Gesichtspunkte 929
2. E. Blechschmidt und A. v. Hippel. Kathodenzerstäubungsprobleme. (IV. Mitteilung). Der Einfluß von Material und Zustand der Kathode auf den Zerstäubungsprozeß 1006

Redaktionsschluß am 16. August 1928

Sechzehntes Heft

1. Chr. Gerthsen. Einzelstreuung von *H*-Kernen in festen Körpern 1025
2. J. Stark. Folgerungen aus der atomistischen Konstitution der Lichtenergie 1037
3. Johann Gratsiatos. Über das Verhalten der radiotelegraphischen Wellen in der Umgebung des Gegenpunktes der Antenne und über die Analogie zu den Poissonschen Beugungserscheinungen 1041
4. H. E. Hollmann. Ein Röhrenoszillator für sehr kurze ungedämpfte Wellen. (Hierzu Tafel XXVI.) 1062
5. Ilse Wyneken. Die Energieverteilung im kontinuierlichen Spektrum des Aluminium-Unterwasserfunkens 1071
6. M. Reger und R. Seeliger. Über die Stromdichte des normalen Kathodenfalls II 1089

Redaktionsschluß am 25. August 1928

Nachweis zu den Figurentafeln

Tafel	I u. II.	W. Werner
„	III—V.	H. E. Hollmann
„	VI u. VII	G. Herzberg
„	VIII—X.	H. H. Meyer
„	XI.	G. Szivessy u. M. Richartz
„	XII.	N. H. Frank
„	XIII.	S. Fagerberg
„	XIV u. XV.	H. Jakob
„	XVI.	J. Stark
„	XVII.	J. Stark
„	XVIII.	F. W. Hehlgans
„	XIX u. XX.	A. Wigand u. F. Wenk
„	XXI—XXV.	E. Ramelet
„	XXVI.	H. E. Hollmann

1928 № 9

ANNALEN DER PHYSIK

VIERTE FOLGE. BAND 86

1. *Kritik der elektrischen Differentialmethode zur Messung von C_v an Gasen;*

von Max Trautz und Otto Trautz

II. Die experimentellen Abweichungen von den Prinzipien der C_v-Berechnung. Ihre Berücksichtigung und die dabei erreichbare Genauigkeit von C_v

Inhalt. Einleitung: Zweck, Prinzipien und Fehler der Methode. — I. Teil: Bedeutung, Empfindlichkeits- und Genauigkeitsgrenze der benutzten Differentialmanometrie. 1. Idealfall und praktische Wirklichkeit. 2. Abhängigkeit des Manometerausschlags von Anordnung und Manometer. A. Anordnung in den Flaschen. B. Anordnung der Verbindung zum Manometer. C. Differentialmanometer: a) Wahl zwischen Lamellenmanometer und Drucklibelle: 1. Allgemeines, 2. Einzelangaben, 3. Empfindlichkeit und Genauigkeit der Manometer; b) Ausschläge der Manometer: 1. Allgemeiner Verlauf. Zweck der Untersuchung, 2. Einzelausschläge. Das weitere Zeitgebiet, 3. Differentialausschläge. Das engere Zeitgebiet. 3. Der brauchbare Zeitabschnitt; die richtige Ausschlagsform; die Leistungsgrenze der Manometrie. — II. Teil: Die Genauigkeit der Konstanz der Wärmemengen innerhalb eines Doppelversuchs. — Absolute Heizwärmemessung: 1. Versuchsanordnung und Methode, 2. Einzelangaben, 3. Gegenseitiger Einfluß der Heizkörper, 4. Berechnung der Heizenergie aus Einzelausschlägen, 5. Zahlenangaben, 6. Zusammenfassung. A. Konstanz der Heizung. 1. Anordnungen zur Erzielung der Konstanz des Feldes und der Widerstände. C_v-Meßpraxis: a) Anordnung und Abmessungen; b) Schaltungen; c) Stufung von Heizverhältnis und Heizung; Normier- und Meßversuch; α) Grundzüge der praktischen Ausführung: α_1) Prinzip, α_2) Heizverhältnisstufung (Ölkapazität), α_3) Absolute Heizungsstufung (Empfindlichkeit); β) Einzelheiten der Meßpraxis. 2. Die Abweichungen vom grundsätzlichen Heizverfahren: a) Inkonstanz des Feldes innerhalb eines Doppelversuchs; b) Inkonstanz der Widerstände innerhalb eines Doppelversuchs: α) Infolge Änderung des Außenwiderstandes: α_1) Ideale Anordnung ohne Zusatzwiderstände, α_2) Verwendung von Zusatzwiderständen; β) Veränderung der Heizkörperwiderstände innerhalb eines Doppelversuchs: β_1) Änderung der Flaschentemperaturen. Temperaturkoeffizient des Apparates, β_2) Ungleichheit der Meßgase. B. Konstanz und Kleinheit der Wärmeverluste. I. Strahlungsverluste: a) Heizkörperstrahlung: α) Emission der Heizkörper, β) Absorption im Gas; b) Gasstrahlung. II. Leitungsverluste: 1. Wärmerest im Heizkörper. 2. Wärmeableitung in den Fuß („Fußverlust"). 3. Wärmeableitung vom Gas an das

Rohrsystem. 4. Wärmeableitung vom Mantelgas an die Flaschenwände: 1. Berechnungen aus der Temperaturleitfähigkeit: a) Allgemeine Fragestellung; b) Genäherte Berechnung; c) Übersichtstafel der Wärmeverluste in Prozenten. 2. Experimentelle Messungen über den Abfluß zur Wand: a) Frühere Arbeiten; b) Eigene Messung: Zeitlicher Druckverlauf bei adiabatischer Kompression: *α*) Messung von Wandverlust und Temperaturleitfähigkeit in Gasen; *β*) Zeitverlauf des Clément-Desormes-Versuches; *γ*) Direkte Messung des Wandverlusts im C_v-Apparat. 5. Einfluß des Verhältnisses Oberfläche : Volumen in der Ölflasche. a) Allgemeines; b) Beträge der Korrektion; c) Berechnung der $O:V$-Korrektion; d) Messung der zur Heizverhältnisänderung addierten Korrektion e) V-Änderung bei $O:V$-Änderung ist kompensiert. III. Strömungsverluste. Kinetische Energie des Wölkchens. IV. Arbeitsverluste am Differentialmanometer. C. Formulierung der Korrektionsglieder für Inkonstanz der Wärmemengen innerhalb eines Doppelversuchs. — III. Teil: Die Meßbereicherweiterung und die dabei erzielbaren Genauigkeiten von C_v. Mischgasmethode. A. Meßbereicherweiterung. B. Mischgasmethode. — Übersichtstafeln: 1. Kennzahlen des Apparates für C_v-Messung, Reproduzierbarkeit, Genauigkeit, Empfindlichkeit; 2. Wesentliche apparative Maßnahmen; 3. Wesentliche experimentelle Maßnahmen; 4. Zwecke und maßgebende Faktoren bei der Mischgasmethode; 5. Zweck der Verwendung von Serien- und Parallelschaltung; 6. Kurze Übersicht einer vollständigen C_v-Messung; 7. Gesamtübersicht der Korrektionen am gemessenen C_v; 8. Übersicht über Vorzeichen und Größe der Korrektionen an Beispielen. — Zusammenfassung.

Einleitung: Zweck, Prinzipien und Fehler der Methode

1. Die *Geschwindigkeit und das Gleichgewicht chemischer Vorgänge mit Gasen* sind nur dort und dann hinreichend berechenbar, wenn man über die spezifischen Wärmen der Gase theoretisch und experimentell weiterreichende Kenntnisse hat, als das heute meist der Fall ist.

Bei fast jedem Fortschritt in der *Thermodynamik und Kinetik der Gase*, soweit er empirischer Natur ist, bedarf man genauer Kenntnis der spezifischen Wärmen. Diese Notwendigkeit reicht bis in die Aufgaben der heutigen Atomdynamik hinein. Die Quantentheorie hat hier zuverlässige Tatsachen nötig.

Alle *wärmetechnischen Berechnungen für chemische Vorgänge mit Gasen* sind an die Kenntnis der spezifischen Wärmen auch in solchen Temperaturgebieten und an solchen Gasen gebunden, wo man die spezifischen Wärmen *nicht* messen kann, sondern nur theoretisch zu ermitteln vermag. Damit eine solche Theorie

ausreichend sicher arbeitet, muß sie im *meßbaren* Gebiet ausreichend scharf prüfbar sein, und sich auch auf solche Molekeln genähert anwenden lassen, von denen man nur die Formeln anschreiben kann. Beides ist nur möglich, wenn die Messungen im Meßbarkeitsbereich sicher und sehr genau sind.

Darin liegt die Begründung für die Breite und Tiefe, die man dem Unterbau dieser Arbeiten zu geben bestrebt sein wird.

2. Über die bisherigen Arbeiten vgl. E. Leonhardt[1]) und H. Scheuermann[2]) und M. Trautz.[3]) Daselbst sind die *Grundlagen der Methode* und ihre *Anordnung* nachzusehen, auf die wir uns im folgenden beziehen.

3. Die *zufälligen Fehler* der Methode ließen sich bisher im allgemeinen auf 0,4 v. T. herabdrücken.

Die *konstanten* Fehler zerfallen in zwei Gruppen.

Die der ersten (Gasunvollkommenheit u. dgl.) sind durch die Berechnung völlig auszuscheiden, und a. a. O. bereits behandelt.[3])

Die Fehler der zweiten Gruppe sind dadurch bedingt, daß die Prinzipien der Methode, worauf die Berechnung fußt, experimentell z. T. nicht streng erfüllt sind. Damit haben bekanntlich alle physikalischen Messungen zu kämpfen.

Vorliegende Arbeit befaßt sich mit der bisher offen gelassenen Frage, wieweit die gemessenen Zahlen als wahre C_v-Werte definiert sind. Wir prüfen, *wie weit experimentelles Abweichen von den der Berechnung zugrunde liegenden Prinzipien*[3]) *auf die Zahlwerte von C_v Einfluß übt*, und wie dieser Einfluß durch Korrektionen ausgeschieden werden kann.[4])

Für Unterstützung bei diesen Arbeiten danken wir der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft, der Gesellschaft der Freunde der Universität Heidelberg, der I. G. Farbenindustrie A.-G., der Zellstoffabrik Mannheim-Waldhof, der Firma Grünzweig und Hartmann-Ludwigshafen und anderen, die nicht genannt sein wollen.

---

1) E. Leonhardt, Inaug.-Diss. Heidelberg 1926.

2) H. Scheuermann, Inaug.-Diss. Heidelberg 1927.

3) M. Trautz, Ann. d. Phys. 83. S. 457—497. 1927.

4) Die Apparatur blieb, wo nichts anderes erwähnt wird, in der bei den Herren Leonhardt und Scheuermann (a. a. O.) beschriebenen Anordnung erhalten.

I. Teil: Die physikalische Bedeutung der benutzten Differentialmanometrie und ihre Empfindlichkeits- und Genauigkeitsgrenze

1. Idealfall und praktische Wirklichkeit

a) Im theoretischen Idealfall der Methode bestimmen wir den Kompensationsbetrag der Ölfüllung daraus, daß das Manometer beim Stromstoß dauernd *in Ruhe* bleibt.

b) In praxi wächst der Druck in beiden Flaschen auch bei richtiger Ölfüllung verschieden rasch, so daß die Manometerkuppe sich bewegt. Damit man nunmehr aus dem *Ausschlag* C_v ableiten kann, muß das Differentialmanometer[1]) eine Zeitlang oder wenigstens im Meßmoment den Ausschlag Null anzeigen (Nullmanometrie) oder es muß sich wenigstens aus seinem Zeitverlauf die Größe der Ölfüllung für gleiche Drucksteigerung in beiden Flaschen mittelbar ableiten lassen.

2. Abhängigkeit des Manometerausschlags von Anordnung und Manometer

Es ist die Frage: Wie hängt die *Ausschlagsform* und die *Beziehung*, wodurch man sie *mit der gesuchten Druckdifferenz Null* verknüpft, von der Anordnung in den Flaschen, von der der Zuleitungen zum DM und vom DM selbst ab?

A. Anordnung in den Flaschen

Die Anordnung in den Flaschen (Lage der Heizkörper, der Übertragungsrohre in den Flaschen, Form der letzteren) könnte unentstellte Übertragung des in den Flaschen jeweils herrschenden Druckes nach dem Verbindungsrohr hin beeinträchtigen. Ein Einfluß derart war nicht festzustellen, wohl aber einer auf den Zeitverlauf der Druckänderung.

Letzterer kann auch von Heizstromstärke, Heizkörperanordnung und Gasnatur abhängen. Beeinflußt das die Nullstellung des DM, so übt die Anordnung in den Flaschen Einfluß (vgl. S. 32) auf C_v.

B. Anordnung der Verbindung zum DM

Soweit Länge und Form des Druckübertragungswegs bei unseren Messungen überhaupt variierten, blieben sie ohne Ein-

1) Differentialmanometer wird künftig durch DM abgekürzt.

fluß auf Größe und Form des Manometerausschlags; das zeigten besondere Versuche.

Einseitige Zwischenschaltung eines 1 m langen, 3 mm weiten, an 50 Knickstellen noch engeren Glasrohrs zwischen Flasche und DM änderte selbst die hochempfindlichen Ausschläge des DM nicht. Ähnlich fielen Versuche von M. Trautz und E. Leonhardt mit mehreren Windungen eingeschalteten Druckschlauchs aus.

C. Differentialmanometer

Der Gasdruck gleicht sich während der ganzen Betätigung des DM — etwa mit Schallgeschwindigkeit — zwischen Flasche und DM aus, also rascher als das Flüssigkeits-DM diesen Druckänderungen folgen kann.

Die Masse auch der kürzesten benutzten Flüssigkeitssäule (2 cm lang) ist noch rund 15 mal größer als die der etwa 1 m langen Gassäule im Druckübertragungsrohr von der Flasche zum DM.

a) Wahl des Differentialmanometers

1. *Allgemeines*

Um noch kleinste Druckänderungen in der Flasche möglichst gleichzeitig angezeigt zu erhalten, verwandten wir ein möglichst *trägheitsloses* Manometer.

Feste Membranen und Fäden sind bekanntlich wegen elastischer Nachwirkungen und sprunghafter Änderungen wenig zuverlässig; besser sind Flüssigkeitsmembranen (*Seifenlamellen*); sie sind nur als Nullinstrumente brauchbar; ein Lichtstrahl als Zeiger wird dabei von der Lamelle reflektiert.

Das Flüssigkeitsmanometer als *Drucklibelle* (bewegliche Flüssigkeit in stark geneigtem U-Rohr oder stark gespreiztem V-Rohr) ist unter den *trägen* Manometern am empfindlichsten, kommt bei kurzer Flüssigkeitssäule dem trägheitslosen DM nahe.

Bei langer wird der Zeitverlauf des Ausschlags (Ausschlagsform) von ihrer Trägheit weitgehend (ballistisch) mitbestimmt.

α) Lamellenmanometer. Es diente nur dazu, über die Richtigkeit der Deutung von Ausschlägen des Flüssigkeits-DM Sicherheit zu erlangen, auf dem Weg über Vergleichsversuche.

Da Trägheit und Reibung der bewegten Teile bei ihm klein ist, so *gibt* es *Druckänderungen* in den Flaschen *praktisch gleichzeitig* mit ihrem Auftreten *an*.

Als Nullmanometer zeigte es Gleichheit des Drucks in beiden Flaschen noch im selben Augenblick dadurch an, daß der reflektierte Lichtstrahl wieder auf die gleiche Stelle fällt, wie vor dem Stromstoß (Nullinie, Nullzeit). Solange das DM im Verlauf des „Ausschlags“ *auf der Nullinie* verharrt („*Schleppung*“), ist der Druck beiderseits gleich. Das kann natürlich auch eintreten, solange der Druck in beiden Flaschen gleichmäßig wächst.

Der Ausschlag kann auch *die Nullinie schneiden* („*Nullschnitt*“), ohne dort zu verharren, was der „Schleppung“ auf Null immerhin ähneln und dann momentaner Druckgleichheit entsprechen kann.

Aus den *Umkehrzeiten* des Ausschlags, wenn also die Druckdifferenz nach der einen oder andern Seite hin ein Maximum hat, kann man manches schließen auf den Verlauf des Druckunterschieds in der Zeit, während die Heizwölkchen wandern.

Die *Ausschlagsform* läßt sich hier *eindeutig mit den Druckbefunden verknüpfen, auf denen die Berechnungsweise der Methode grundsätzlich beruht;* das ist beim Flüssigkeits-DM nicht so uneingeschränkt möglich.

Dagegen ist die *absolute Ausschlagsgröße* des Lamellen-DM nicht weiter verwendbar. Denn die Spannung der Lamelle ist unbekannt; die Ablenkung des Lichtstrahls hängt sehr von der Lage des Reflexpunktes ab; die Empfindlichkeit ändert sich im Ausschlagsgebiet stetig und meist auch mit der Zeit.

β) *Flüssigkeitsmanometer* (Drucklibelle):

1. *Statischer Ausschlag und Empfindlichkeit.* Die Drucklibelle zeigt die Druckdifferenz an, die gerade zwischen ihren Enden herrscht, falls sie konstant ist, oder ihre Änderung im Verhältnis zu Trägheit und Dämpfung des DM langsam genug geht („statische“ Ausschläge).

2. Kommt das Manometer den Druckänderungen nicht schnell genug nach, so hängt die Ausschlagsform von Trägheits- und Dämpfungsgrößen der Flüssigkeit ab.

Die *Trägheit* hängt von Länge und Dichte der Flüssigkeit ab.

Die *Dämpfung* verzögert ebenfalls die Reaktion des Manometers auf äußere Einwirkung und verringert sie. Sie hängt von der Flüssigkeitsreibung η, vom Rohrdurchmesser und vom Neigungswinkel des DM ab; letzteres dadurch, daß die Flüssigkeit bei kleinerem Neigungswinkel unter denselben (Verschiebungs-) Druckkräften schneller laufen muß.

Somit macht man zweckmäßig die Länge der Flüssigkeit klein, und die Dämpfung nicht zu groß. Man steigert die Ableseempfindlichkeit besser durch stärkere optische Vergrößerung als durch Neigen des Rohres.

2. *Einzelangaben über die benutzten Manometer und deren Anwendung*

α) *Lamellenmanometer.* Die Seifenlamelle[1]) hatte 2 cm Durchmesser und lag zwischen zwei kleinen Kammern mit hinreichend weiten Zuleitungsrohren von den Flaschen her und mit zwei planparallel geschliffenen Glasfenstern; der Lichtstrahl einer Weule-Bogenlampe geht durch einen Wassertrog und eine achromatische Linse, und wird dann von der Lamelle reflektiert auf einen geeignet liniierten Schirm.

Eine Lamelle hält bei vorsichtiger Behandlung mehrere Stunden und läßt sich schnell und leicht neu erzeugen. Die Reproduzierbarkeit damit erreichte bis jetzt erst 2 v. T. Beobachtung bisher nur subjektiv.[2])

Metallmembranmanometer verbieten sich für uns deshalb, weil bei der C_v-Methode je nach Gasnatur und sonstigen Bedingungen immer wieder auch Druckstöße von so großer Heftigkeit vorkommen, wie sie eine hinreichend empfindliche Membran nicht unbeschädigt aushält.[3]) Man könnte auch zuerst mit einem anderen Manometer so weit messen, bis diese Möglichkeit ausgeschlossen wäre, dann erst das empfindliche Metall-DM einschalten. Ob solche Umständlichkeit sich lohnt, ist zweifelhaft; denn die Flüssigkeits-DM scheinen für 0,4 v. T. bisher hinzureichen.

β) *Flüssigkeitsmanometer.* Ihre *Form* entsprach der Drucklibelle von 2° Neigung (Fig. 1a) (mindestens 2 cm lang) oder einem langen U-Rohr gleicher Neigung (das Instrument der Herren Grosskinsky und Scheuermann hatte eine Flüssigkeitslänge von 30 cm (Fig. 1c) oder einem U-Rohr mit einem wagrecht und einem senkrecht oder schräg ansteigenden Ast (Fig. 1b); das wagrechte Stück enthält das eine Ende der Flüssigkeit und eignet sich zur photographischen Aufzeichnung der Ausschläge, besonders auch für Druckaufnahmen an jeder Flasche für sich („Einzelausschläge"; adiabatische Kompression vgl. S. 10 und 50).

Die *Rohrweite* des DM ist mit 3 mm lichtem Dm günstig gewählt.

Der *Dampfdruck der Flüssigkeit* muß klein sein, so daß sie nicht merkliche Mengen Dampf in die Flaschen sendet. Bewährt hat sich Benzoesäureäthylester (spez. Gew. 1,06, Sdp. 212,9°); er benetzt gut, unterliegt aber im Feuchten der Hydrolyse und wird daher immer frisch verwendet.

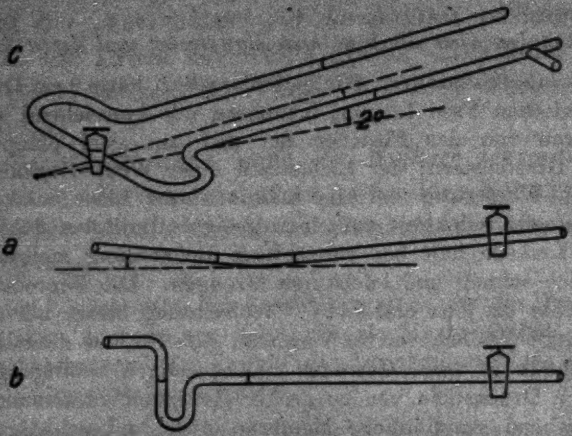
---

1) Rezept für die Seifenlösung: 2 g Seife, 30 g Wasser, 60 g Glycerin.

2) Hrn. Zürn danken wir für die Ausführung der Versuche mit dem Lamellenmanometer. Er hat noch Messungen mit der Drucklibelle und mit einem langschenkligen U-Rohr, an SO_2, angestellt, über die später a. a. O. berichtet werden wird.

3) Ein hierfür besonders konstruiertes Metallmanometer wäre auch zu kostspielig gewesen.

Die *Temperatur des DM*, an sich unwichtig, muß nur während de Messungen konstant bleiben, um nicht durch Änderung der Oberflächenspannung oder der Dichte von Flüssigkeit und angrenzendem Gas das DM aus der Ruhe zu bringen. Deswegen wird es bis auf den Lichtweg in Watte verpackt, samt allen Zuleitungen.



Formen des Flüssigkeitsmanometers.

Fig. 1

Zur *Ablesung* wird die beobachtete Flüssigkeitskuppe in Durchsicht beleuchtet mit einem kleinen Spiegel vom Fenster her oder von einer kleinen, 2 m entfernten Glühlampe; zur photographischen Registrierung mit einer Bogenlampe, deren Wärmestrahlung durch einen Wassertrog geschwächt wird.

Zur *photographischen Aufnahme* des Ausschlagsverlaufs auf rotierendem Film wird die Kuppe des wagerechten Manometerastes mit einem Mikroskopobjektiv verschiedener Vergrößerung (12—300fach) auf die wagrecht liegende Zylinderlinse des 2—4 m vom DM entfernten Registrators projiziert. Die Filmgeschwindigkeit läßt sich von 2—600 cm und mehr in der Minute stufen. Mit Geschick und Erfahrung kann man die Kuppe selbst bei den starken Vergrößerungen (auf 0,1—0,2 mm) scharf auf den Film abbilden.

Die *Zeitmarke* gibt je nach Geschwindigkeit eine elektromagnetische Stimmgabel (50 Per./Sek.), deren Schatten eine Wellenlinie auf das Film zeichnet, oder ein alle 5 Sek. nach der Rennuhr ausgelöster Lichtblitz einer kleinen Glühbirne.

Als *Gegenatmosphäre* auf der anderen Seite des Manometers (zwecks Unabhängigkeit von äußeren Druckschwankungen) dient bei Versuchen mit adiabatischer Kompression (vgl. S. 50) die andere Flasche, für die Druckaufnahmen der einzelnen Flaschen bei der C_v-Heizung („Einzelausschläge“ vgl. S. 10) aber eine Glasbirne (rund 300 cm³), in einem mit Wasser (Wärmegewicht) und Watte (Vermeidung von Strömungen im Wasser) gefüllten, in Watte gepackten Leerwandbecher.

3. *Empfindlichkeit und Genauigkeit der benutzten Manometer*

1 mm Ester = 0,0783 mm Hg = $1{,}03 \cdot 10^{-4}$ Atm.

1 mm Ausschlag macht bei

2° Neigung $7 \cdot 10^{-2}$ mm Ester = $5{,}5 \cdot 10^{-3}$ mm Hg,

12° Neigung gibt $^1/_6$,

30° Neigung oder ein Schenkel senkrecht, der andere wagrecht (zur Projektion auf den wagerechten Registratorspalt) entspricht $^1/_{14,4}$ der *Empfindlichkeit*, die wir für 2° gleich 1 setzten.

Da die *Ablesegenauigkeit* $^1/_{25}$ mm und neuerdings $^1/_{150}$ mm beträgt (Ablesemikroskop mit Hilfsskale darin), so kann man als *äußerstes*

$$7 \cdot 10^{-5} \text{ mm Hg} = 10^{-7} \text{ Atm.}$$

$$\text{bzw. } 1{,}2 \cdot 10^{-5} \text{ mm Hg} = 1{,}7 \cdot 10^{-8} \text{ Atm.}$$

noch messen. Noch weiter zu gehen, hat keinen Sinn, da alsdann die Temperaturschwankungen zu großen Einfluß gewinnen.

Die bei der C_v-Messung benutzte *Heizenergie* beläuft sich höchstens auf etwa $^1/_4$ cal, die 70 Liter um 0,015° (gleichmäßig) erwärmen würden. Das macht also im Ergebnis $5{,}4 \cdot 10^{-6}$ Atm. Drucksteigerung.

Die

10^{-7} Atm. Ablesegenauigkeit machen daran 2 v. T.

$1{,}7 \cdot 10^{-8}$ „ „ „ „ 0,4 v. T.

aus. Also ist die *Empfindlichkeit der C_v-Messung gleich 2 v. T.* bzw. *im äußersten Fall 0,4 v. T.*

Die *C_v-Messungen* haben diese Zahlen bestätigt.

Bemerkenswert ist, daß beim langen DM (30 cm, Leonhardt und Scheuermann) trotz der ursprünglich geringeren Ablesegenauigkeit zweifellos eine Empfindlichkeit und Reproduzierbarkeit von 0,4 v. T. des C_v-Wertes (d. h. eine so starke Abhängigkeit von einer Änderung der Ölfüllung) zu erreichen war.

b) Die Ausschläge der Manometer

1. *Allgemeiner Verlauf; Zweck der Untersuchung*

In den Flaschen werden Drucksteigerungen durch die Wärmemengen erzeugt, die durch Stromstoß in den Heizkörpern entwickelt werden. Ihre Wärmeabgabe ans Gas dauert eine gewisse Zeit, länger als der Stromstoß.

Da immerhin beide Heizkörper und ebenso auch Normier- und Meßgas stets verschieden sind, ist die Geschwindigkeit der Wärmeabgabe von der Folie ans Gas (Wölkchenausbildung) und damit auch der zeitliche Druckverlauf in den beiden Flaschen verschieden. Das DM soll den Verlauf der Druckdifferenz zwischen ihnen (Differentialausschläge) anzeigen.

Die Flasche mit der rascheren Wölkchenausbildung (meist die Ölflasche) „schlägt" zuerst. Mittlerweile hat sich auch in der anderen Flasche ein Wölkchen entwickelt. Die Druckdifferenz geht zurück und zwar bis auf Null, wenn das Ölvolumen richtig eingestellt ist. Hier bleibt es bei hinreichender Kleinheit oder Gleichheit der beiderseitigen Wärmeverluste, so lange beide Wölkchen gleichzeitig frei wandern, bis das eine (im allgemeinen Ölflasche, wo der Wölkchenweg kürzer) die obere Flaschenwand erreicht, so daß dann die andere Flasche stärker „schlägt".

Die Kurve Ausschlag gegen Zeit ist also im einfachen Fall eine *S*-Linie, die mitten in der *S*-Krümmung eine Strecke weit auf der Nullinie geschleppt ist.

Um die Deutung der Differentialausschläge zu prüfen, nimmt man den zeitlichen Druckverlauf in den Einzelflaschen („Einzelausschläge") und den zeitlichen Temperaturverlauf in den Heizkörpern auf.

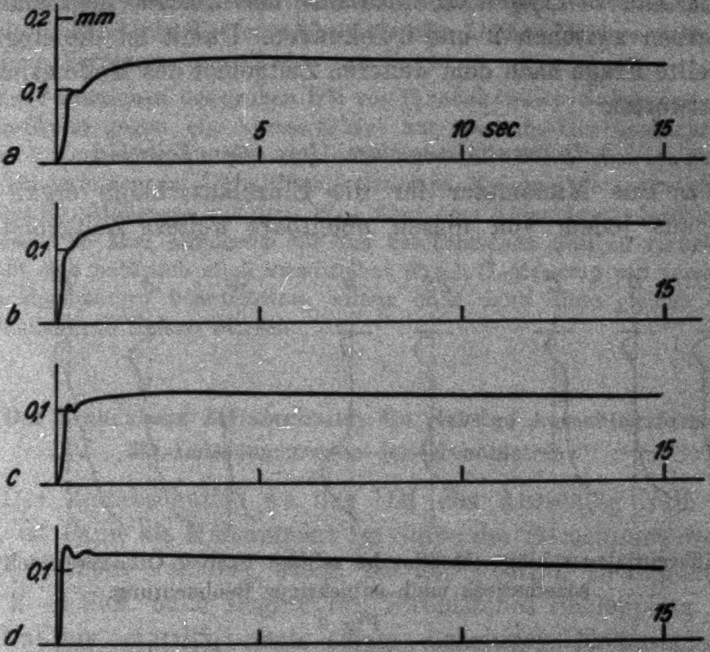
Das gibt ein Bild von Entstehung und Wanderung des Wölkchens. Über Wölkchenbeobachtungen mit Rauch wird a. a. O. berichtet werden.

2. *Einzelausschläge. Das weitere Zeitgebiet des Meßmaximums*

α) Die *Messung von Einzelausschlägen* hat den Zweck, allgemein den Druckverlauf in einer Flasche bei verschieden starkem Stromstoß und in verschiedenen Gasen so weit festzustellen, daß man das (weitere) *Zeitgebiet des maximalen Drucks*, wo also die maximale Wärmemenge im Gas ist (Wölkchen ausgebildet, noch frei wandernd) und C_v-Messung stattfinden kann und soll, erfährt.

β) Die Spitze im Anstieg der dabei beobachteten Kurve (Fig. 2) rührt von der *Eigenschwingung* der Manometerflüssigkeit und von der anfangs großen, dann nachlassenden Geschwindigkeit der Druckzunahme. Die Linie des mittleren Druckverlaufs kann man mitten durch die Spitzenschleife legen. Sie liegt in verschiedenen Gasen verschieden

hoch. Nimmt man ihre Höhe bei H_2, wo sie maximal ist, gleich 1, so wird sie bei $N_2 + H_2$ (1 : 1) gleich $^4/_5$—$^6/_7$, bei CO_2 und Luft $^2/_3$—$^3/_4$. Das ist übrigens für uns ohne Bedeutung. Die ersteren Gase haben eben während der ersten Schwingungshalbperiode dem Heizkörper schon mehr Wärme entzogen als die letzteren.



Einzelausschläge, aus Photogrammen zusammengezogen (Meßflasche 3 Amp. primär). Ordinate mm Estersäule;
a) CO_2; *b*) Luft; *c*) $N_2 + H_2$ 1 : 1; *d*) H_2.

Fig. 2

γ) *Vergleichung der Ausschlagskurven mit den Temperatur-Zeitkurven für die Heizkörper* ist nicht uneingeschränkt zulässig. Denn die Strom- und Abkühlungsverhältnisse waren verschieden; die Druckkurve ist am C_v-Apparat selbst aufgenommen, während die Temperaturkurven mit einer elektrisch und räumlich nur ziemlich ähnlichen Anordnung (schon eine geringe Verschiedenheit der Foliendicke übt z. B. bereits Einfluß) gemacht wurden.

Ferner ist in der Druckkurve auch der zeitlich abnehmende Kompressionswärme-Verlust an die Flaschenwand und das Nachhinken des Manometers (rund bis $^1/_4$ Sek.) enthalten.

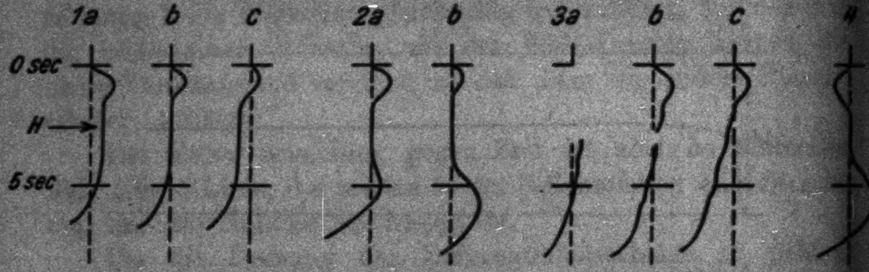
δ) Das *Maximum* des Manometerausschlags ist (abgesehen von H_2) frühestens nach etwa 3 Sek. erreicht. Am Heizkörper

war in Luft nach etwa 2 Sek. auf 1—5 v. H. genau kein Mehrtemperatur mehr zu erkennen. Aber nach dieser Zeit steigt der Einzelausschlag noch um 5—10 v. H., ehe er sein Maximum erreicht hat.

ε) Die *Zeit für das Maximum der Kurven* liegt im allgemeinen zwischen 2 und 6 Sekunden. Damit ist die eingangs gestellte Frage nach dem weiteren Zeitgebiet des Meßmaximums beantwortet.

3. *Differentialausschläge. Das engere Zeitgebiet*

α) Das Manometer für die Einzelausschläge ergab nur das aus jedem von diesen ableitbare weitere Zeitgebiet des



Differentialausschläge (Meßflasche schlägt nach *l*, Ölflasche nach *r*), schematisch nach subjektiver Beobachtung.
Fig. 3

Druckmaximums. Das Differentialmanometer war eine Größenordnung empfindlicher und zeigt das für die Messung von C_v maßgebende engere Zeitintervall gleichzeitigen Wanderns beider Wölkchen an. Sein Ausschlag entspricht einer Differenz von Einzelausschlägen einander entgegengeschalteter Flaschen. Fig. 3 gibt einige subjektiv gemachte Aufnahmen davon ($^1/_2$-Sek.-Metronom als Zeitmarke).

Steigen die Drucke in beiden Flaschen um gleich viel, so sieht man eine Haltestrecke *H* (vgl. 1., 2. und 4.); sind sie außerdem gleich groß, so liegt die Haltestrecke auf der Nullinie (1b, 2., 4); dies muß man mit Variation der Ölmenge erreichen.

Das erste Stück des Ausschlags entspricht (bei 1—3) der (an diesem Apparat zufällig) schnelleren Druckentwicklung in der Ölflasche. Es kehrt dann stets auf Null zurück. Das zweite darauffolgende Ausschlagen (2a) kommt bei manchen Anordnungen vor. Tritt das Meßflaschenmaximum erst später (Sek. 5) auf als das der Ölflasche (Sek. 3), so sehen die Ausschläge wie 3. aus. Sie sind zur C_v-Messung nicht

ohne Kritik brauchbar; darüber, ob man hier auch den *Nullschnitt* zur mittleren Zeit (Sek. 4, 3b) gelten lassen darf, und über verschiedene Ausschlagstypen in extrem verschiedenen Gasen (CO_2 und CH_4) später a. a. O.

Allenfalls läßt sich durch andere Energie- und Volumenstufung der Ausschlag bessern, weil sich eine absolut größere Wärmemenge verhältnismäßig schneller entwickelt als eine kleine. Andere stets verwendbare Verbesserungsmethoden vgl. S. 21.

Ein Vertauschen des großen DM von Grosskinsky-Scheuermann (30-cm-Säule) gegen ein kurzes (3 cm) hat am subjektiv beobachteten Differentialausschlag nur die Amplitude verstärkt. Die allgemeine Frage, ob Veränderungen am DM (Flüssigkeitslänge, Neigung) den gemessenen C_v-Wert des Meßgases auf dem Weg über eine Ausschlagsänderung beeinflussen, ist zum mindesten für den beschriebenen Fall zu verneinen. Sie läßt sich natürlich auch unmittelbar durch C_v-Messung mit verschiedenen Manometern beantworten, indem eben dann diese gleiche oder verschiedene C_v liefern werden.

3. Der brauchbare Zeitabschnitt; die richtige Ausschlagsform; die Leistungsgrenze der Manometrie

Der Zeitabschnitt, wo das DM den Ausschlag Null anzeigt, ist dann als Meßmoment im Sinne der Berechnungsweise der C_v-Methode definiert, wenn bei den jetzigen Bedingungen etwa 2—4 Sek. nach Beginn des Stromstoßes Schleppung auf der Nullinie eintritt, nach einem einseitigen Erstausschlag und gefolgt von einem anderen Ausschlag.

Man kann dies beim ersten Teil des Doppelversuchs durch geeignete Ölfüllung und Strombemessung stets erreichen. Soweit die (mittlere) spezifische Wärme des Meßgas(gemisch)es noch in den Meßbereich des Apparats (Volumenstufbarkeit in der Ölflasche) fällt, läßt es sich auch im zweiten Teil oft erzielen. Gelingt es hier nicht, weil die Wölkchenausbildung in beiden Teilen des Doppelversuchs zu verschieden ist, so hat man mit 2 Transformatoren und ungleichzeitigen Stromstößen (S. 19) zu arbeiten oder die Mischmethode heranzuziehen, das Meßgas also durch Mischung mit einem nach der anderen Seite abweichenden Gas, dem Normiergas hinreichend anzuähneln und dann zu messen.

Unter gewissen Bedingungen kann man auch mit Nullschnitt arbeiten (später a. a. O).

Die Leistung des wenig gedämpften und nicht sehr trägen Flüssigkeits-DM, das man zweckmäßig benutzt, ist so gut, daß man auf 0,4 v. T. an C_v kommt.

Wo die C_v-Messung diese Grenze nicht erreicht hat, da konnte das nur an anderen Faktoren liegen, aber nicht an der unzureichenden Leistung des Manometers.

II. Teil: **Die Genauigkeit der Konstanz der Wärmemengen innerhalb eines Doppelversuchs**

Sie hängt von der „Konstanz"[1]) der Heizung und von der der Verluste ab.

Zu ihrer Beurteilung bedarf man der mindestens genäherten Kenntnis des absoluten Betrags der bei einem Versuch benutzten Heizwärme:

Absolute Heizwärmemessung

1. Versuchsanordnung und Methode

Versuchsanordnung und *Methode* ergeben sich aus Fig. 4. Soweit möglich, gleichen die Abmessungen denen bei der C_v-Messung.

2. Einzelangaben über Eichung und Messung; Ergebnisse und Genauigkeiten

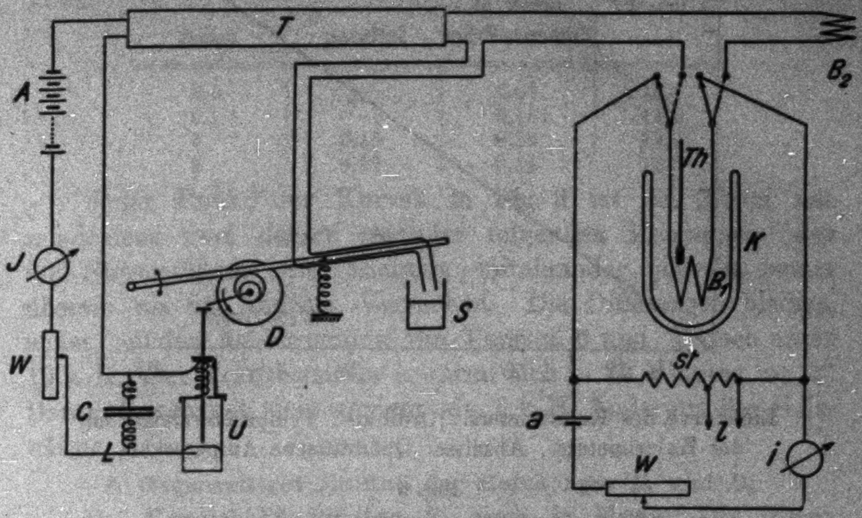
Das kleine mit Benzoesäureäthylester (Dampfdruck und spezifische Wärme klein) gefüllte Kalorimeter wurde mit 0,5, 0,4, 0,3, 0,2, 0,15 Amp. Strom im Eichwiderstand geeicht; die Spannungen an ihm ergab eine Lindeckschaltung. Die Eichkurve stellt die Temperatursteigerung/Minute gegen die Amp. bzw. gegen die cal/min dar (vgl. Fig. 5).

In der Hauptperiode gingen durch B_1 in der Minute je 30 Öffnungsstromstöße. Vergleichung dieser Kurven mit der Eichkurve lieferte die Abhängigkeit der *mittleren Energie (cal) eines Stromstoßes von der Primärstromstärke* (vgl. Fig. 6 und Tab. 1).

---

1) „Konstant" bedeutet weiterhin, daß hinreichende Gleichheit der betr. Größe *zwischen Normier- und Meßversuch* besteht.

Vor-, Haupt- und Nachperiode der Messungen währten 10—20 Min. Die erste Nachperiode ward zugleich Vorperiode für die folgende Messung usf.



Versuchsanordnung zur Messung der Heizwärme.
Fig. 4

Primärkreis: *A* Akkumulatorbatterie 30 Volt; *J* Amperemeter; *W* Regulierwiderstand; *U* Hg-Unterbrecher; *L* Selbstinduktion; *C* Kondensator 0,2 MF; *T* Transformator.

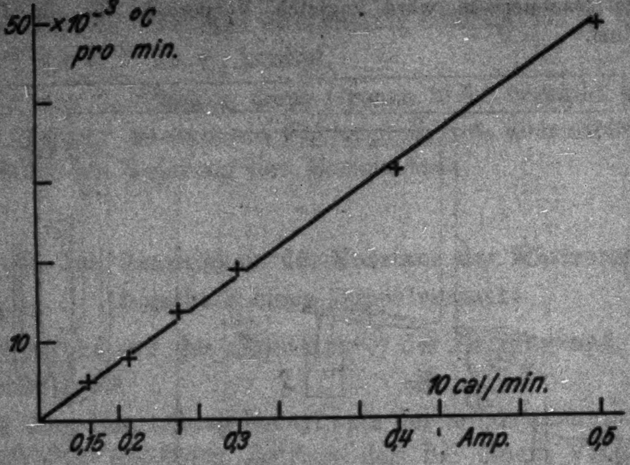
Sekundärkreis: *S* Hg-Schließkontakt; B_1 Heizkörper in *K* Kalorimeter (mit Rührer, Füllung 602 g Benzoesäureäthylester); *Th* Beckmannthermometer $^1/_{1000}$° C geteilt (mit Klopfer); B_2 Heizkörper in Luft.

Eichkreis: B_1 Heizkörper (als Eichwiderstand); *a* Akku-Batterie 4 Volt; *w* Regulierwiderstand; *i* Milli-Amperemeter; *st* Stöpselrheostat 10000 Ohm, davon 300 Ohm abgezweigt zum *l* Lindeck Kompensationsspannungsmesser (Siemens-Halske).

B_1 sind 4 hintereinander geschaltete Pt Streifen von 80·4·0,003 mm mit zusammen 3,96 Ohm, auf einem Glasgerüst und diente als Versuchswie auch als Eichwiderstand.

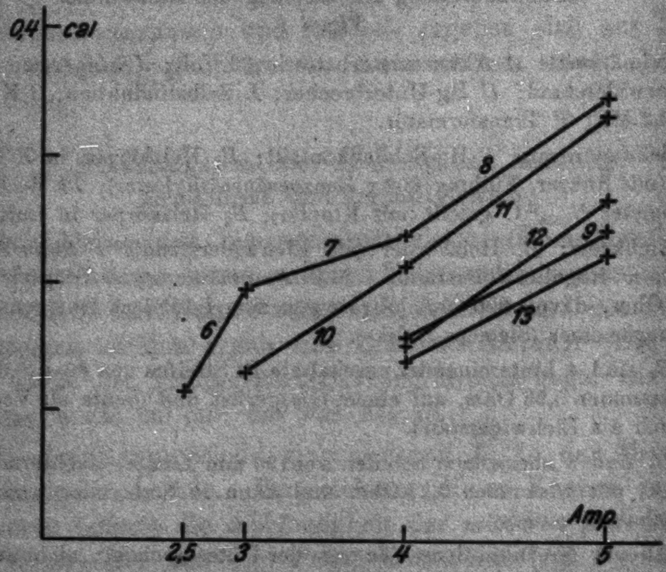
B_2 sind 3 ebensolche Streifen von 90 mm Länge, dachförmig aufgehängt, mit zusammen 3,27 Ohm und kann in Serie oder parallel zu B_1 geschaltet werden.

Daß nur die Induktionsstöße von der Unterbrechung, nicht auch die von der Schließung des Primärstromes, ins Kalorimeter gelangten, wurde dadurch erreicht, daß *S* sich automatisch öffnet, bevor der Nocken an der drehbaren Scheibe *D* den *U* herabdrückt, und *S* sich schließt, bevor *U* ausgelöst wird und durch mechanisches Herausreißen des Stiftes den Primärstrom unterbricht.



Eichkurve des Kalorimeters. Ordinate: Temperatursteigerung des Kalorimeters. Abszisse: Quadratische Ampereskala.

Fig. 5



Heizwärme pro Stromstoß gegen Primärstromstärke als Abszisse. Bei Versuch 6, 7, 8, 10, 11 liegen B_1 und B_2 in Serie.
„ „ 9, 12, 13 „ „ parallel.

Fig. 6

Tabelle 1

J Amp.	B parallel	B in Serie cal/Stromstoß	$10^3 \cdot$ cal/J^2
2,5	—	0,09	13,1
3	—	0,13	14,5
4	0,15	0,23	14,4
5	0,25	0,34	13,6

Jeder Punkt der Kurven in Fig. 6 ist ein Mittel aus mindestens zwei derart einander folgenden Messungen (also 600 Stromstößen). Sie stimmen miteinander jeweils besser überein als mit anderen Versuchen. Die Differenzen bleiben, außer bei den beiden ersten von Versuch 6 und 7, noch unter 10 v. H. Der Transformator erwärmt sich in 20 Minuten um 2°. Daraus berechnet sich weniger als 1 v. H. Änderung der Heizwärme.

3. Gegenseitiger Einfluß der Heizkörper B_1 und B_2

Bei Versuch 13 tauchte B_2 auch in Ester. Die Werte unterscheiden sich hier sinngemäß, aber (trotz der Kühlung in *Flüssigkeit*) sogar noch innerhalb der Versuchsfehler, von denen, die Versuche 12 bei sonst gleicher Anordnung ergeben hatte:

Sinken bei parallel liegenden Heizkörpern Temperatur und Widerstand von B_2 durch bessere Wärmeableitung während des Stromstoßes, so fließt weniger Energie nach B_1 und in das Kalorimeter.

4. Berechnung der Heizenergie aus Einzelausschlägen

Die am C_v-Apparat selbst benutzte *Heizenergie* wurde später *aus Einzelausschlägen*, und zwar aus ihren Druckmaxima bestimmt (vgl. S. 11) zum Vergleich mit den Kalorimeterergebnissen.

Auf gleiche Primärstromstärken bezogen, ist die Heizenergie noch kleiner (rund die Hälfte) als die kalorimetrische. Dieser Unterschied kommt von dem der Widerstandsverhältnisse im Sekundärkreis (Heizkörper- und Transformatorwiderstände) zwischen C_v-Messung und kalorimetrischer Messung, und davon, daß das Übersetzungsverhältnis des C_v-Transformators kleiner war als das des Kalorimetertransformators.

Auch die Einzelausschläge (Fig. 2) zeigen übereinstimmend, daß bei unseren Versuchsanordnungen die Heizenergie der Öffnungsstromstöße dem Quadrat der Primärstromstärke nahe proportional ist.

5. Zahlenangaben

Einige *Zahlenangaben* erläutern die Größenbeträge. Zuerst ein Beispiel: Film Nr. 4 ($^1/_3$ Amp. Meßfl. Luft). Maximalhöhe des Ausschlags auf dem Registrierfilm 38 mm; Vergrößerung 1:265; also Höhenverschiebung der Estersäule im Manometer 0,143 mm = $1{,}46 \cdot 10^{-5}$ Atm. Das Gasvolumen 70 Liter erfährt also eine Temperatursteigerung von $4{,}38 \cdot 10^{-3}$ Grad C. Das entspricht einer Energie von 0,07 cal.

Die Gleichung für die Mittelung von C_v zwischen Mantel und Wölkchen[1]) gibt damit selbst bei Einsetzung viel zu hoher Temperatur des $^1/_4$ l groß angenommenen Wölkchens, und eines extrem großen Temperaturkoeffizienten von C_v einen äußerst kleinen, vom Wölkchen stammenden Mehrbetrag am mittleren C_v (gegen das C_v des Mantels). Er überschreitet dann die Fehlergrenze erst um ihren eigenen Betrag 0,4 v. T. Also ist ganz gewiß, daß als Bezugstemperatur von C_v einwandfrei die Manteltemperatur genommen werden darf, und weil sie allein scharf meßbar ist, auch genommen werden muß. Ihr absoluter Betrag aber, auf den es ankommt, ist doch im allgemeinen nur auf 0,1° genau angebbar, so daß die eben angestellte Erwägung a fortiori gilt.

Notiz über *Widerstandsbeträge*.

Heizkörper Meßfl. . .	3,12 Ohm,	Heizkörper B_1	3,96 Ohm,
„ Ölfl. . . .	3,69 „	„ B_2	3,27 „
C_v-Transform.	0,65 „	Kalorim.-Transform. .	0,88 „

Der erstgenannte Heizkörper macht also am Gesamtwiderstand 42 v. H 49 v. H. aus.

Die Transformatoren haben folgende Widerstände:

alter (C_v-)Transf. prim.	1,37 Ohm,	neuer(Kalorim.)-Transf. prim.	1,48 Ohm,
„ sek.	0,65 „	„ sek.	0,88 „
Übersetz. Verh. wäre	0,47 „		0,6 „

falls sich die Windungszahlen wie die Widerstände verhalten, was genähert der Fall ist.

6. Zusammenfassung

a) Mit *0,25—0,05 cal* als *größter bzw. kleinster Heizenergie* zu rechnen, genügt für unsere Überschlags- und Korrektionsrechnungen; wir messen C_v mit etwa 2—4 Amp. Primärstrom-

1) Gleichung (10) bei M. Trautz, a. a. O. S. 477.

stärke; ihrem Quadrat sind diese Heizenergieen nahe proportional.

b) Die Temperaturänderungen im Gas bei der C_v-Messung (im Meß-Zeitgebiet) bleiben also allesamt so klein, daß

α) alle *Korrektionen auf ideales Gas* so anzusetzen sind wie für das Mantelgas[1];

β) die *Bezugstemperatur des ermittelten* C_v mit der des Mantelgases genauer zusammenfällt, als der absolute Betrag der letzteren gemessen werden kann, also jedenfalls genauer als 0,1° C.

A. Konstanz der Heizung

Grundsätzlich erzielt man sie durch „Konstanz" des Magnetfeldes, das die Energie enthält, und durch „Konstanz" der Widerstände. Praktisch aber hat man mit Abweichungen von der „Konstanz" zu tun.

1. Anordnungen zur Erzielung der Konstanz des Feldes und der Widerstände (C_v-Meßpraxis)

a) Anordnung und Abmessung

Eine bisher benutzte Anordnung zur C_v-Messung zeigt Fig. 7 (vgl. a. w. u. S. 20). Zur Heizung dient der *Öffnungsstromstoß des Transformators.* Deshalb muß der Primärstrom vor der Unterbrechung konstant sein, die letztere jeweils gleichartig betätigt werden, und der „Widerstand" des Sekundärkreises konstant sein.

Da die Energie praktisch ganz im Magnetfeld des Transformators liegt, so ist sie gut reproduzierbar bei den Stromstößen.

Der *Transformator* vom Übersetzungsverhältnis etwa 1, hat schweren Eisenkern und ausreichenden Drahtquerschnitt, geeignete Kapazität und Selbstinduktion parallel zum Unterbrecher.[2]

Der zylindrische Eisenkern ist lamelliert, 110 cm lang, von 14 cm Dm. Beide Windungen bestehen aus 2 mm dickem Draht, durch Ölpapier getrennt. Widerstand primär 1,37, sekundär 0,65 Ohm.

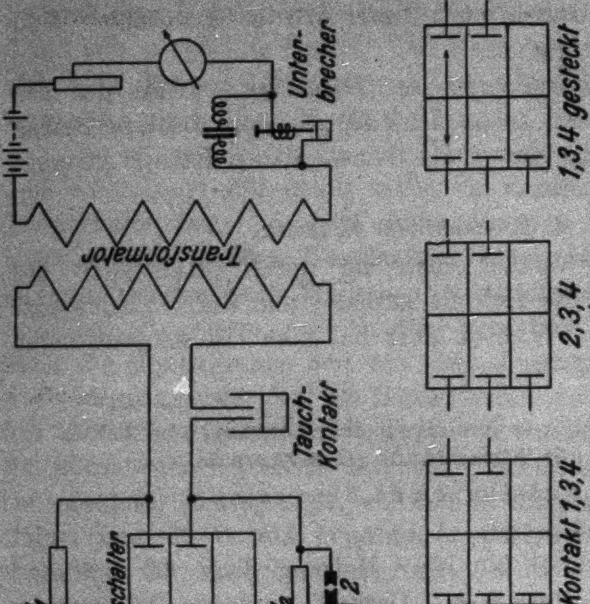
Den Primärstrom liefert eine Akkumulatorenbatterie von 30 Volt, die dafür allein benutzt werden soll. Die Stromstärken lagen bei den

1) M. Trautz, a. a. O.

2) M. Trautz, Lehrb. d. Chem. II. S. 37, sollte in Fig. 226 der Kondensator zum Unterbrecher, nicht zum Transformator parallel liegen.

verschiedenen Vorarbeiten zwischen 0,5 und 7 Amp., für die C_v-Messung zweckmäßig in der Gegend von 2—4 Amp.

Der elektromagnetisch ausgelöste *Unterbrecher* wirkt durch Herausreißen eines Eisenstabes aus ölbedecktem Hg.



Schaltung bei Messung von C_v (*a* Heizkörper in Serie, *b* parallel) und vom Widerstandsverhältnis der Heizkörper (*c*) und ihrer Stromzweige (*d* Parallel-, *e* Serienschaltung).
W_1 und W_2 Zusatzwiderstände; alle Steckkontakte sind bei C_v-Messung gezogen und werden nur zur Widerstandsmessung gesteckt. Hg-Tauchkontakt wird nur zum Öffnungsstrom bei der C_v-Messung geschlossen. Die Pfeile bedeuten die Verbindungen durch die Hg-Heber. Bei Serienschaltung liegt W_1 zum einen Heizkörper parallel, bei Parallelschaltung liegt W_1 vor dem anderen Heizkörper.

Fig. 7.

Alle *Leitungen* (Cu-Draht, 2 mm dick) liegen fest, sind tunlichst verlötet oder verschraubt.

Die *Heizkörper* haben einstweilen die bekannte Form [dachförmig nebeneinander gespannte 100 mm lange, 4 mm breite, 0,003 mm dicke

Pt-Foliestreifen[1])] und werden besser aus blanker Pt- (33 v. H.), Ag- (67 v. H.) Legierung gemacht.

Ein *Hg-Umschalter* im Sekundärkreis erlaubt die beiden Heizkörper in *einem* Handgriff zwischen parallel und Serie umzuschalten, gleichzeitig mit Umschaltung der Zusatzwiderstände, ohne daß Drahtverbindungen gelöst, also Widerstände geändert werden (vgl. S. 23). Er besteht aus 6 zu $^3/_4$ mit Hg gefüllten Glaströgen, worein drei Hg-gefüllte Glasheber (10 mm lichte W.) als Stromschlüssel eintauchen. 1 cm breite Cu-Blechstreifen führen den Strom zu. Eine Glashaube deckt das Ganze.

Die Widerstände im Sekundärkreis haben folgende Beträge:

Transformator	0,65 Ohm	Gesamte Leitung (16 m)	0,1 Ohm
Heizkörper Ölfl. . . .	3,69 „		
„ Meßfl. . .	3,12 „		

Zusatzwiderstände:

Präzisionsrheostat bis 1100 Ohm, Teilung 0,10 Ohm (W_1 in Fig. 7),
„ „ 11 „ „ 0,01 „ (W_2 „ „ 7).

Mit 300 bzw. 0,3 Ohm kommt man aus.

b) Schaltungen

Im einfachsten bisher allein angewandten Fall geht *ein* Stromstoß gleichzeitig durch beide parallel oder in Serie liegende Heizkörper. So ist das in Fig. 7.

Es gibt aber Gaspaare (vgl. S. 10ff.), wo es vorteilhaft oder nötig ist, die Stromstöße zu verschiedenen Zeiten („zeitlich gestuft“) in die Flaschen zu schicken.

Für diesen zweiten Fall dient entweder die gleiche Batterie für beide Stromstöße, von denen aber der zweite so stark verzögert sein muß, daß bei seinem Beginn die Wirkungen des ersten im Netz *ganz* erloschen sind.

Oder man trennt die Stromkreise beider Flaschen, nimmt also 2 Batterien. Die zeitliche Verzögerung kann hier beliebig sein.

Das ist mit 2 Transformatoren an Luft durch Hrn. Zürn (vgl. a. a. O.) untersucht worden. Man hat damit die Möglichkeit stets brauchbare Ausschlagsformen zu erhalten.

Wir betrachten hier nur den erstgenannten einfachsten Fall. Die „Konstanz“ des Heizenergieverhältnisses der beiden Flaschen zwischen Normier- und Meßversuch ist hier einfach zu erreichen; denn sie hängt da allein vom Widerstandsverhältnis der beiden Heizkörper ab.

Die Schaltung für diesen Fall und die Brückenschaltung zur Überwachung der Heizkörperwiderstände zeigen die Fig. 7.

---

1) M. Trautz, Lehrb. d. Chemie II S. 36. Fig. 225.

c) Stufung von Heizverhältnis und Heizung; Normier- und Meßversuch

α) *Grundzüge der praktischen Ausführung*

α_1) Prinzip

C_v ist verschieden zwischen Meßgas und Normiergas. Daher und insoweit sind Meßvolumen und Normiervolumen der Luft in der Ölflasche auch verschieden. Das dient zur *C_v-Messung*. Dabei wird die *Ersetzung des Normiergases durch das Meßgas in der Meßflasche durch Ölfüllungsänderung in der Ölflasche kompensiert in der Wirkung auf das DM.*

α_2) Heizverhältnisstufung (Ölkapazität).

Dieser Ölmengenstufung ist durch die Abmessungen der Ölflasche eine Grenze gezogen. Um sie ausnützen zu können, wählt man die Normierstellung des Öls in der Meßflasche so, daß für den Meßversuch der nötige Spielraum an Öl bleibt. Die Gasmenge in der Ölflasche ist also allgemein *nicht* der Normiergasmenge in der Meßflasche gleich. Sondern die *Nullstellung des DM* wird *durch Variation* des Energieverhältnisses, d. h. *des Stromstärkeverhältnisses* zwischen beiden Flaschen, und das letzte Stück (vgl. S. 22) durch kleine Ölmengen, *im Normierversuch erreicht.* Man macht dies durch Zusatzwiderstände W_1 bzw. W_2, bei Parallel- oder bei Serienschaltung der Heizkörper (vgl. Fig. 7 und S. 53).

α_3) Absolute Heizungsstufung (Empfindlichkeit)

Man muß aber auch die *absolute Energiezufuhr*, also die gesamte Primärstromstärke stufen können, um *Meßgasen großer Wärmekapazität* so viel *mehr Strom* zuführen zu können, daß die *Empfindlichkeit* des DM hinreicht. Dieser Strom muß also schon im Normierversuch verwendet werden; man stellt ihn mit den Zusatzwiderständen ein.

β) *Einzelheiten der Meßpraxis*

Betrachten wir jetzt die Praxis in den nötigen Einzelheiten:

Mit W_1 und W_2 (Fig. 7) in der bisherigen Anordnung kann man den Einfluß einer Stromstärkeänderung oder von Parallel- bzw. Serienschaltung auf $C_{v\,roh}$ an derselben Gasfüllung und bei fast oder ganz gleichem Heizverhältnis feststellen. Das ist nötig; denn z. B. bei Be-

ladung einer Gasfüllung mit Dämpfen fällt ihre Zusammensetzung von Füllung zu Füllung ungleich aus.

Ohne Zusatzwiderstände (und ohne Hg-Schalter) müßte man an jeden Normierversuch jeweils den zugehörigen Meßversuch anschließen, ohne dazwischen an der elektrischen Schaltung etwas ändern zu dürfen.

Mit den Zusatzwiderständen aber kann man die Normierversuche verschiedener Doppelversuche hintereinander durchführen mit verschiedenen Schaltungen und Stromstärken, und danach die zu diesen Normierversuchen gehörigen (d. h. je mit gleicher Schaltung, Stromstärke und Widerstand durchgeführten) Meßversuche machen.

Ziehen und Neueinstecken, sogar festes und loses Stecken aller Stöpsel in W_1 und W_2 bringt, wie Versuche lehrten, keine merkliche Ausschlagsänderung im Verlauf eines Doppelversuchs mit sich; ebensowenig die Umschaltung mit dem Hg-Schalter.

Geht man derart zu anderen Schaltungen und Stromstärken über, so soll man doch dabei zugleich das Ölvolumen möglichst wenig ändern sonst bleibt das Manometer längere Zeit unruhig (Öltemperatur).

Die Zusatzwiderstände ließen sich aber nicht so fein stufen, daß man damit bis auf 0,4 v. T. (an C_v) hätte regeln können. Diesen letzten kleinen Betrag stellt man daher doch mit Öl (Mengen unter 1 Liter) ein.

In praxi verfährt man bei den Normierversuchen z. B. so:

1a) Einstellen des Ölvolumens bei 3 Amp. und Parallelschaltung, auf ein bestimmtes W_2.

1b) Umschalten mit Hg-Umschalter auf Serienschaltung; Einstellen von W_1 so genau als möglich; den unter 1 Liter liegenden Rest mit Öl einstellen.

2a) Zu Parallelschaltung übergehen; bei 4 Amp. W_2 möglichst genau einstellen, den Rest mit Öl.

2b) Wieder bei Serieneinschaltung mit 4 Amp. W_1 einstellen, den Rest mit Öl.

Zu *jedem* dieser 4 Normierversuche gehört durch bestimmte Stromstärke, Schaltung und Widerstände *ein* bestimmtes Energieverhältnis und *ein* bestimmtes Luft (Normier-) Volumen in der Ölflasche. Mit jedem von diesen 4 Energieverhältnissen (reproduziert durch die beim Normierversuch verwendeten Stromstärken, Schaltungen und Widerstände) werden dann später die 4 Meßversuche gemacht, wovon jeder sein bestimmtes *Meßvolumen* ergibt. Jeder von diesen 4 Meßversuchen bildet mit *seinem* zugehörigen (unter den gleichen Verhältnissen angestellten) Normierversuch *einen Doppelversuch.* Das Verhältnis eines Meßvolumens zum zugehörigen Normiervolumen gibt das gesuchte Verhältnis von C_v-Meßgas zu C_v-Normiergas an.

Die 4 Doppelversuche stellen somit vier einzelne, voneinander in der besprochenen Hinsicht unabhängige C_v-Messungen am selben Gas dar.

Bei allen in diesem ersten Abschnitt besprochenen Verfahren haben wir angenommen, daß das Heizverhältnis der beiden Heizkörper konstant bleibe, wenn man die äußeren Bedingungen für Stromzufuhr und Stromleiter konstant hält. Der Berechnung haben wir die Annahme der Konstanz dieser und aller anderen, bei Inkonstanz C_v entstellenden Größen zugrunde gelegt. In Wirklichkeit sind aber diese Bedingungen nicht ganz erfüllt, so daß Abweichungen vom Grundprinzip der Messung auftreten.

2. Die Abweichungen vom grundsätzlichen Heizverfahren

Sie können in „Inkonstanz“ des Feldes oder der Widerstände liegen.

a) Inkonstanz des Feldes innerhalb eines Doppelversuchs

Eine Abhängigkeit des C_v von der Primärstromstärke kommt daher, daß die Heizkörper und ihre Gasumgebung nie gleich sind. Sie ist um so größer, je mehr sich die Schicksale der Heizkörper schon während einer Hälfte eines Doppelversuchs, d. h. zwischen Öl- und Meßflasche voneinander unterscheiden. Die Primärstromstärke muß also hinreichend reproduzierbar eingestellt werden können; wie genau, das hängt von verschiedenen apparativen Größen ab; die Genauigkeit darf um so geringer sein, je symmetrischer die beiden Hälften des Sekundärkreises sind, insbesondere was Heizkörperwiderstand und Meßgasnatur anlangt. Wie groß die Abhängigkeit vom Primärstrom ist, wie genau man ihn einstellen muß, läßt sich leicht feststellen:

Muß man z. B. bei Variation des Primärstroms von 4 auf 3,5 Amp. das Normiervolumen von 70 Liter um 0,7 Liter = 1 v. H. verkleinern, um wieder Nullausschlag am DM zu bekommen, so wird man zwischen 4 und 3,5 Amp. das Normiervolumen auf 0,4 v. T. (der Fehlergrenze) konstant erhalten mit einer Einstellgenauigkeit des Primärstroms auf $^1/_{25}$ von der Differenz 0,5 Amp. (also auf 0,02 Amp.). Der Präzisionsstrommesser und ein kreuzgewickelter Doppelschiebewiderstand erlauben noch auf 1 bzw. $^1/_2$ Milli-Amp. einzustellen.

Dem Beispiel ist bereits starke Verschiedenheit der Heizkörperwiderstände zugrunde gelegt (ungefähr 15 v. H.)

Ein an C_v merklicher Einfluß der Temperatur des Eisenkerns auf das Feld kommt nicht mehr in Frage.

b) „Inkonstanz“ der Widerstände innerhalb eines Doppelversuchs

α) *Infolge Änderung des Außenwiderstandes*

α_1) Ideale Anordnung ohne Zusatzwiderstände

Der Außenwiderstand, d. h. der außerhalb der Flaschen liegende Teil des Sekundärkreises kann seinen Widerstand *so* ändern, daß das *Verhältnis der Heizenergieen beider Flaschen jeweils in beiden Teilen eines Doppelversuchs verschieden* wird. Auf die „Konstanz“ dieses Verhältnisses kommt es aber gerade an.

Die Änderungen können durch lose Kontakte oder durch Temperaturänderungen der beteiligten Widerstände entstehen. Letztere sind möglich, weil beide Teile eines Doppelversuchs im allgemeinen an aufeinanderfolgenden Tagen stattfinden (4 v. T. Änderung pro Grad bei Cu oder Pt).

In Betracht kommen nur Außenwiderstandsänderungen *der* Leitungsteile, die bei einer Messung nicht den Stromzweigen beider Flaschen gemeinsam sind und auch nur in *dem* Maß, als sie die beiden Stromzweige *verschieden* treffen. M. a. W. die Reproduzierbarkeit wird dann eben schon gestört sein, wenn die „mittleren“ Widerstände der Stücke, die beiden Strom*zweigen nicht* gemeinsam sind, sich zwischen beiden Teilen des Doppelversuchs um mehr als 0,4 v. T. ihres Betrags unterscheiden. Das wäre überhaupt nur bei Parallelschaltung möglich; da die nicht gemeinsamen Stücke des Außenwiderstands nur sehr kleine Anteile an den Stromzweigen ausmachen, fallen die durch ihre *Temperatur*änderung erzeugten Widerstandsänderungen in die Fehler.

So wird z. B. eine Änderung der Transformatortemperatur in *den* Fällen nichts ausmachen, wo nur einer benützt wird bei gleichzeitigem Stromstoß durch beide Heizkörper; die Wirkung käme nur der einer geringen Variation des Primärstroms gleich (vgl. S. 24). Aber auch noch bei ungleichzeitigen Stromstößen macht sie nichts aus, da sich die Temperatur in den Sekunden der Verzögerung nicht so stark ändert (vgl. a. a. O.).

Man wählt vorteilhaft den Außenwiderstand im Verhältnis zu dem der Heizkörper so klein als möglich (vgl. a. S. 34).

α_2) Verwendung von Zusatzwiderständen

Die Verwendung von Zusatzwiderständen bringt nichts Neues: Die „mittleren“ Widerstände der Stromzweige müssen

auf 0,4 v. T. ihres Betrags konstant sein. Die Zusatzwiderstände erschweren dies nicht.

Ihr Temperaturkoeffizient (Manganin) ist nur $^1/_{200}$ von dem für Cu oder Pt; der Vorschaltwiderstand ist nur sehr klein im Verhältnis zu dem des zugehörigen Heizkörpers; der Nebenschluß nimmt nicht viel vom Strom auf, $\sim ^1/_5 - ^1/_{10}$ und weniger.

β) Veränderung der Heizkörperwiderstände innerhalb eines Doppelversuchs

Die *Konstanz des Heizenergieverhältnisses* auf 0,4 v. T. verlangt *Konstanz des Widerstandsverhältnisses* der Heizkörper auf 0,4 v. T. Diese kann durch Änderung der Flaschentemperaturen oder durch verschiedene Kühlwirkung der Meßgase gestört werden.

β_1) Änderung der Flaschentemperaturen

Der Einfluß aufs Widerstandsverhältnis ergibt sich aus Gleichung (1), worin W und t die Widerstände und Flaschentemperaturen, α die mittleren Temperaturkoeffizienten des Heizkörperwiderstandes über die Temperaturzuwüchse $t_1' - t_1$ und $t_2' - t_2$.

	Ölflasche		Meßflasche	
Normierversuch . . .	W_1	t_1	W_2	t_2
Meßversuch	W_1'	t_1'	W_2'	t_2'
	α_1		α_2	

Dann sollte das Widerstandsverhältnis W_1'/W_2' im Meßversuch dem im Normierversuch W_1/W_2 gleich sein. Nun ist jedenfalls:

$$\frac{W_1'}{W_2'} = \frac{W_1}{W_2} \cdot \frac{[1 + \alpha_1 (t_1' - t_1)]}{[1 + \alpha_2 (t_2' - t_2)]},$$

was für solche α-Produkte, die klein sind gegen 1, übergeht in:

$$(1) \qquad = \frac{W_1}{W_2} [1 + \alpha_1 (t_1' - t_1) - \alpha_2 (t_2' - t_2)].$$

Also bleibt W_1'/W_2' solange hinreichend genau gleich W_1/W_2, als sich der Klammerausdruck von 1 um nicht mehr als 0,4 v. T. unterscheidet, solange also

$$\alpha_1 (t_1' - t_1) - \alpha_2 (t_2' - t_2) \leqq 0{,}0004$$

ist. α ist für Pt = 0,004 und fällt von 0—100° um 1,5 v. H. von 0,004.

Die Temperaturänderungen der Flaschen, die vorkommen, lassen sich immer so zerlegen, daß sie unter die folgenden Beispiele 1—4 fallen:

1. Gleiche Temperaturen: $t_1 = t_2$; gleiche Zuwüchse $t_1' - t_1 = t_2' - t_2$, also auch gleiche Temperaturkoeffizienten $\alpha_1 = \alpha_2$. Dann ändert sich das Widerstandsverhältnis *nicht*, auch wenn es anfänglich nicht eins war, die Widerstände also verschieden waren.

2. Ebenso bei

$$t_1 \mp t_2; \quad t_1' - t_1 = t_2' - t_2; \quad \alpha_1 = \alpha_2.$$

3. Das Widerstandsverhältnis *ändert sich* aber für

$$t_1 \mp t_2; \quad t_1' - t_1 \mp t_2' - t_2; \quad \alpha_1 = \alpha_2$$

und zwar um

$$\alpha_1 (t_1' - t_1) - \alpha_2 (t_2' - t_2) = \alpha [(t_1' - t_1) - (t_2' - t_2)]$$
$$= \alpha [(t_1' - t_2') - (t_1 - t_2)].$$

Soll dies bei $\alpha = 0{,}004$ unter $0{,}0004$ bleiben, so darf die Differenz der Temperaturzuwüchse, oder was dasselbe, die Änderung der Temperaturdifferenz $0{,}1^0$ nicht übersteigen, unabhängig von Anfangswiderständen und -temperaturen.

4. Es ändert sich auch für

$$t_1 \mp t_2; \quad t_1' - t_1 = t_2' - t_2; \quad \alpha_1 \mp \alpha_2$$

und zwar um:

$$\alpha_1 (t_1' - t_1) - \alpha_2 (t'_2 - t_2) = (t_1' - t_1)(\alpha_1 - \alpha_2).$$

Soll dies unter $0{,}0004$ bleiben, so dürfte selbst bei 10^0 Temperaturzuwuchs beider Flaschen ihre Temperaturdifferenz $t_1 - t_2$ bei Pt noch 66^0 C erreichen.

So große Zuwüchse zwischen Normier- und Meßversuch und Differenzen zwischen Öl- und Meßflasche kommen aber bei uns nicht entfernt vor.[1]) Somit ist für die Erhaltung des Widerstandsverhältnisses bloß Fall 3 von praktischer Bedeutung mit der Forderung:

Produkt aus Änderung der Temperaturdifferenz zwischen Normier- und Meßversuch in den Temperaturkoeffizienten des Heizkörperwiderstands $\leqq 0{,}0004$. Dabei übt die Temperaturverschiedenheit zwischen den Flaschen nur verschwindenden, Widerstandsgleichheit oder -ungleichheit der Heizkörper gar keinen Einfluß auf C_v.

---

1) Auch nicht bei Messung des Temperaturkoeffizienten von C_v an Motyldampf ($Fe(CO)_5$), vgl. a. a. O.

5. Dieser Fall

$$t_1' \neq t_2; \quad t_1' - t_1 \neq t_2' - t_2; \quad \alpha_1 \neq \alpha_2$$

läßt sich stets durch Zerlegung auf die bereits besprochenen zurückführen. Der Temperatureinfluß wird viel kleiner bei Heizkörpern mit kleinerem *Temperaturkoeffizienten* des Widerstands.

Günstig sind blanke Streifen aus 33 v. H. Pt und 67 v. H. Ag; ihr Widerstand ist 2,7mal so groß, der Temperaturkoeffizient mindestens 10mal so klein als bei Pt. Dadurch vergrößert sich die erlaubte Temperaturdifferenzänderung mindestens auf das 10fache der Angaben unter 3. und 4. auf S. 27. Es scheint allerdings zurzeit, daß dies Material sich nicht ganz so dünn, nur auf 4 μ leidlich gleichmäßig auswalzen läßt, während man mit Pt auf 3 μ kommt. Dann ginge die Wärmeabfuhr ins Gas vielleicht etwas langsamer als bei Pt.

Das Widerstandsverhältnis ändert sich mit der Flaschentemperatur auch aus dem Grunde, weil *Oberfläche*, *Querschnitt* und *Form* der Heizkörper niemals gleich ist. Daher verläuft ihre Temperaturänderung beim Stromstoß verschieden und ändert damit das Widerstandsverhältnis.

Deshalb bestimmt man, wenn nötig, den ganzen Einfluß der Flaschentemperaturen direkt experimentell: man stellt cet. par. bei verschiedenen Temperaturen und Temperaturdifferenzen die ihnen entsprechenden Normiervolumina fest und kann dann jeweils das zur veränderten Temperatur des Meßversuchs gehörige Normiervolumen tabellarisch daraus entnehmen: „Temperaturkoeffizient des Apparats". Man hat dann außerdem C_v-Normiergas als Funktion der Temperatur nötig.

Man kontrolliert das Widerstandsverhältnis stets außerdem noch durch unmittelbare Messung auf 0,4 v. T. (vgl. S. 22).

β_2) Ungleichheit der Meßgase

Die beiden Heizkörper erhitzen sich während des Stromstoßes, der[1]) rund $^1/_7$ Sek. dauert, unter Widerstandserhöhung und führen gleichzeitig Wärme an das Gas ab, verschieden rasch je nach seiner Natur. Sie erfahren also während des Stromstoßes in verschiedenen Gasen verschiedene Widerstandserhöhungen. Das hat Verschiedenheiten der *zugeführten* Heizenergien zur Folge (solche der Wärme*verluste* vgl. S. 36, 40).

1) M. Trautz und K. Hebbel, Ann. d. Phys. 74. S. 308. 1924.

In der Ölflasche bleiben im ganzen Doppelversuch Stromstärke und Gasumgebung gleich. Somit wird das Heizverhältnis zwischen Normier- und Meßversuch nur durch Verschiedenheit des Meßgases vom Normiergas geändert. Es genügt deshalb allein die Meßflasche im Meßversuch mit ihr im Normierversuch zu vergleichen.

Dabei braucht das Normiergas (in der Meßflasche) dem Gas in der Ölflasche (Luft) nicht gleich zu sein.

Den Einfluß der Gasnatur auf die Temperatursteigerung der Heizfolie beobachtete Herr Zürn am zeitlichen Temperaturverlauf der Heizfolien bei und nach dem Stromstoß. Er maß diesen an ihrer Längenausdehnung und fand z. B. als Mittel der Maximaltemperatur über der Zimmertemperatur an Pt-Folie (100 : 4 : 0,008 mm) bei 4 Amp.:

H_2	Luft	CO_2
71°	93°	97°

Zur Berechnung des Einflusses auf das Widerstandsverhältnis darf man in erster Näherung annehmen, daß die Temperatur*kurve* und damit auch die Widerstands*kurve* der Folie während des Stromstoßes in verschiedenen Gasen ähnliche prozentuale Verschiedenheit aufweist wie die Temperatur*maxima* darin.

Um 10° verschiedene Temperaturmaxima wären danach mit rund 10 · 4 v. T. = 4 v. H. Inkonstanz des Heizkörperwiderstands, bzw. des Energieverhältnisses verbunden.

Bei Pt-Ag-Heizkörpern fiele diese Wirkung auf $^1/_{10}$—$^1/_{20}$; die Maxima der Temperaturzuwüchse dürften sich hier zwischen Normier- und Meßgas noch um 1—2° unterscheiden, ohne das Heizverhältnis an C_v merklich zu stören.

Wir setzen für allgemeine Beurteilung des Meßgasfehlers an der Energiezufuhr zu den Heizkörpern die Bezeichnungen an:

	Ölflasche	Meßflasche
Normierversuch . . .	$W_1\ t_1\ \partial_1\ w_1$	$W_2\ t_2\ \partial_2\ w_2$
Meßversuch	$W_1'\ t_1'\ \partial_1'\ w_1'$	$W_2'\ t_2'\ \partial_2'\ w_2'$

W sind die Widerstände der Heizkörper zu Beginn des Stromstoßes, w ihre mittleren wirksamen Widerstände

$$= \frac{1}{i^2} \int i^2\, d\, W$$

während eines Stromstoßes, t ihre Temperaturen vor dem Stromstoß; die mittlere wirksame Temperatursteigerung während eines Stromstoßes, die also die Differenz $w - W$ erzeugt, ist mit ∂ bezeichnet. Der Temperaturkoeffizient des Widerstands, α ist innerhalb der vorkommenden Temperaturänderungen derselbe Mittelwert, also konstant.

Für die Widerstände gilt allgemein:

$$w_1 = W_1(1 + \alpha\,\vartheta_1); \quad w_2 = W_2(1 + \alpha\,\vartheta_2);$$
$$w_1' = W_1'(1 + \alpha\,\vartheta_1'); \quad w_2' = W_2'(1 + \alpha\,\vartheta_2').$$

Da sich Verschiedenheiten der Ausgangstemperaturen t, wie auf S. 27 geschehen, unabhängig behandeln lassen, setzen wir alle Temperaturen t im folgenden einander gleich, also: $t_1 = t_2 = t_1' = t_2'$. Also auch $W_1' = W_1$; $W_2' = W_2$.

Damit C_v auf 0,4 v. T. gleich sei, muß mindestens gelten:

$$\frac{w_1'}{w_2'} = \frac{w_1}{w_2} \text{ auf 0,4 v. T. genau.}$$

Die Veränderung der Kühlwirkung in der Meßflasche beim Meßversuch gegenüber dem Normierversuch ändert den Widerstand in der Meßflasche wie auch die Stromstärke im Sekundärkreis.

1. Zuerst fassen wir nur die *Widerstandsänderung* ins Auge und denken uns die Strombelastung der Heizkörper konstant gehalten. Die zugehörigen ϑ seien mit $\bar{\vartheta}$ bezeichnet, die w mit $\bar{w}$.

Dann wird die Differenz

$$\frac{w_1}{w_2} - \frac{\bar{w}_1'}{\bar{w}_2'} = \bar{\Delta} = \alpha\left((\vartheta_1 - \vartheta_2) - (\bar{\vartheta}_1' - \bar{\vartheta}_2')\right).$$

Da der Strom konstant angenommen ist, so wird $\vartheta_1 = \bar{\vartheta}_1'$, so daß sich die Formel auf $\bar{\Delta} = \alpha(\bar{\vartheta}_2' - \vartheta_2)$ vereinfacht.

$\bar{\Delta}$ darf höchstens 0,4 v. T. am Widerstandsverhältnis w_1/w_2 ausmachen.

Wir berechnen diesen Betrag überschlagsmäßig, für Serienschaltung. Die Höchsttemperatursteigerung ist rund 100° (vgl. S. 29), die mittlere vielleicht 80°, so daß $\vartheta_2 = 80$.

Der Unterschied der Kühlwirkung ist praktisch zwischen H_2 und CO_2 am größten, kommt aber, da H_2 mit abgeänderter Heizvorrichtung gemessen werden muß, nie in Frage. Der größte praktisch in Betracht kommende Unterschied ist 2,5 mal so klein. Er macht am Maximum 10°, am Mittel also etwa 8° aus, mit Pt-Heizkörpern.

Damit wird $\bar{\vartheta}_2' - \vartheta_2 = 8$; da Pt ein $\alpha = 0{,}004$ aufweist, so würde ein Korrektionsglied $\bar{\Delta} = 1{,}2$ v. H. erzeugt.

2. Tatsächlich ändert sich aber auch die *Stromstärke* im Verhältnis

$$(w_1' + w_2' + w_a) : (w_1 + w_2 + w_a).$$

Darin ist w_a der Außenwiderstand des Sekundärkreises, gleich rund 2 Ohm, während $w_1 = w_2 =$ rund 3 Ohm ist.

So kommt man für das soeben berechnete Beispiel auf 0,45 v. H. Stromänderung (beim Meßversuch Abnahme), was 0,9 v. H. Energieänderung entspricht.

Diese Änderung trifft $\overline{\partial_1}'$ und $\overline{\partial_2}'$ in gleicher Weise, wenn man Proportionalität dieser Größen zur Energiezufuhr voraussetzt, was sicher genähert richtig ist.

So wird dann $\partial_1' - \partial_2'$ um 0,9 v. H. kleiner gegenüber $\overline{\partial}_1' - \overline{\partial}_2'$ indem ∂_1' wie ∂_2' um denselben Prozentsatz kleiner sind. Also ist auch Δ um 0,9 v. H. kleiner als $\overline{\Delta}$, und die allgemeine Formel:

$$\Delta = \alpha[(\partial_1 - \partial_2) - (\partial_1' - \partial_2')]$$

läßt sich ohne Fehler vereinfachen zu $\Delta = \alpha(\partial_2' - \partial_2)$.

Die Korrektion für die Stromstärkeänderung (erzeugt von Temperatur- und Widerstandsänderung durch das Meßgas) fällt somit auch in diesem schon extremen Fall in die Fehler; dies wäre selbst bei H_2 gegen CO_2 noch ebenso.

Die Korrektion am Energieverhältnis und also auch an C_v ginge im zuletzt erwähnten Fall, bei H_2 gegen CO_2 auf 3 v. H. herauf. Verwendung von Pt-Ag-Heizkörpern aber setzt sie selbst da auf $^1/_{10}$ bis $^1/_{20}$ davon herab; dividiert man dies durch 2,5 (vgl. oben), so kommt man bereits auf 1—0,6 v. T., also hart an die Fehlergrenze.

Diese Erwägungen schließen Näherungsannahmen über Gesetzmäßigkeiten der Kühlwirkung ein, genügen aber.

Man beseitigt diesen Fehler durch a) Verringerung von α, b) von ∂_2' und ∂_2 einzeln, oder c) von ihrer Differenz auf einmal, oder wählt d) eine Methode (Serien- und Parallelschaltung), wo die Korrektion einmal in der einen, das andere Mal ebenso groß in der anderen Richtung auftritt.

a) *Erniedrigung des Temperaturkoeffizienten* des Widerstands: zweckmäßig mit Pt-Ag-Heizkörpern (vgl. S. 28).

b) *Erniedrigung der Temperatursteigerungen ∂ selbst*: durch Herabsetzung der Strombelastung und Wärme besser ans Gas abführende Heizkörper.

1. *Minimale Stromheizung.* Der Verringerung der *Primärstromstärke* ist eine untere Grenze gezogen durch die Bewegungen des DM, die von unvermeidlichen Temperaturschwankungen

im C_v-Apparat herrühren, und durch seine begrenzte Empfindlichkeit.

Der Vergrößerung des *Gesamtquerschnitts* der Heizkörper (mehr Heizfolien) ist eine obere Schranke gezogen, weil mit wachsender Masse des Heizkörpers in ihm Wärme länger und reichlicher hinterbleibt als sonst.

Für die minimale Stromerhitzung sei das Verhältnis Energie : Masse der Heizkörper so klein als möglich. Einigermaßen im Widerspruch dazu steht:

2. *Optimaler Wärmeabfluß.* Hier macht man das Verhältnis *Oberfläche zu Querschnitt* tunlichst zu einem Maximum. Zweitens muß man *Form und Lagerung der Heizkörper* optimal für Abfluß der Wärme wählen.

Dabei ist Vorbedingung der C_v-Messung eine hinreichend pilzförmige Wolke am Heizkörper, sonst steigt sie zu rasch hoch; deshalb legt man z. B. die Heizfolien nicht hochkant und wählt nicht einfach einen Draht u. dgl. Im übrigen unterteilt man die Folien in möglichst dünne und schmale Streifen.

Die heutige Form und Abmessung, sowie das Material der Heizkörper erlaubt bereits an die Fehlergrenze 0,4 v. T. zu kommen.

Form und räumliche Anordnung kann durch geduldige Empirie wohl noch verbessert werden.

c) *Erniedrigung der Differenz der Temperaturzuwüchse* erzielt man, indem man Meßgas und Normiergas durch Beimischungen auf ähnliche Kühlwirkung bringt: *Mischgasmethode.*

Menge und C_v der Zusatzgase muß bekannt sein. Man dosiert manometrisch im allgemeinen leicht mit der erforderlichen Genauigkeit und kontrolliert dies zweckmäßig mit Präzisionsgasanalysen. Prozentuale Genauigkeit im gesuchten C_v (vgl. S. 59). Meist verliert man an Genauigkeit.

In rohester Annäherung erfährt man über den Einfluß von Zumischungen auf die Kühlwirkung einiges, wenn man Reibung und Wärmeleitung der Gasmischungen, die man herstellen will, ausrechnet.[1])

Wie nahe man an identische Kühlwirkung kam, wird experimentell unmittelbar mittels C_v-Messung quantitativ festgestellt.

---

1) M. Trautz, Ann. d. Phys. 82. S. 227ff. 1927.

d) *Quantitative Ausscheidung* aller *von Unsymmetrie der Heizkörper* herrührenden *„Inkonstanz" des Energieverhältnisses*, durch *Serien- und Parallelschaltung.*

Ob die Unsymmetrie von den Heizkörpern selbst oder von ihrer verschieden kühlenden Umgebung kommt, ist gleichgültig.

Wir führen die Erwägungen für verschiedene Grade der Näherung durch.

I. Die Widerstände w_1, w_2, w_1', w_2' seien temperaturabhängig und alle verschieden, aber $\frac{w_1}{w_2}$ und $\frac{w_1'}{w_2'}$ sollen davon, ob man Parallel- oder Serienschaltung anwendet, nicht abhängen und zwischen beiden Schaltungen soll die Stromstärke in jedem Heizkörper für sich so nahe dieselbe sein, daß die w-Verhältnisse von ihr nicht mehr abhängen.

Dann *verteilt* sich die Stromenergie bei Serienschaltung im Verhältnis der Widerstände, bei Parallelschaltung im umgekehrten Verhältnis. Ist $w_1' = w_1 + dw_1$; $w_2 = w_2 + dw_2$, so wird für

Serienschaltung $\frac{w_1 + dw_1}{w_2 + dw_2} - \frac{w_1}{w_2} = \varDelta_s$ (= Fehler absolut),

Parallelschaltung $\frac{w_2}{w_1} - \frac{w_2 + dw_2}{w_1 + dw_1} = \varDelta_p$ (= „ „).

Zieht man die Gleichungen für w_1' und w_2' von S. 30 bei, so wird:

$$-\alpha[(\partial_2' - \partial_2) - (\partial_1' - \partial_1)] = \varDelta_p \cdot \frac{w_1}{w_2} = \varDelta_s \frac{w_2}{w_1}$$

Die relativen, in Bruchteilen von $\frac{w_1}{w_2}$, bzw. von $\frac{w_2}{w_1}$ ausgedrückten Fehler sind also gleich nach beiden Seiten. Sind die durch sie entstellten C_v-Werte φ_1 und φ_2, so muß also für $w_1 = w_2$

$$\frac{\varphi_1 - C_v \text{ wahr}}{C_v \text{ wahr}} = \frac{C_v \text{ wahr} - \varphi_2}{C_v \text{ wahr}}$$

sein. Also erhält man, je genauer $w_1 = w_2$, um so genauer auch:

$$C_v \text{ wahr} = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}.$$

Wichtig ist jetzt zur Beurteilung genauerer Näherung die Größenordnung von $\varphi_1 - \varphi_2$. Als Maß dafür dient die Differenz

der zu gleichen Normiervolumen gehörigen Meßvolumina zwischen Serien- und Parallelschaltung. Bei dieser Gelegenheit ist erforderlich, aus Einzelausschlägen zu bestimmen, um wieviel man die Primärstromstärke abändern muß beim Übergang von Serien- zur Parallelschaltung, falls man bei letzterer genähert dieselbe Heizkörperbelastung erhalten will, wie sie bei der ersteren geherrscht hatte. Eine Näherung genügt.

In einem recht extremen Fall, zwischen dem wasserstoffreichen und wasserstoffähnlichen CH_4 einerseits, Luft anderseits, erhält man $\varphi_1 - \varphi_2$ etwa gleich 1 Liter (vgl. auch w. u.). Das ist zur Gewinnung des Einzelfehlers zu halbieren, was 500 cm³, also nur das 20 fache der kleinsten mit dem DM noch feststellbaren Volumenänderung 25 cm³. Daraus würde folgen, daß man diese Fehlerkorrektion bloß auf 5 v. H. ihres Betrages genau zu kennen braucht.

Wir lassen aber jetzt Voraussetzung I fallen.

II. Die Widerstandsverhältnisse w_1/w_2 und w_1'/w_2' sollen jetzt zwischen Parallel- und Serienschaltung verschieden sein.

Mit andern Worten, die gestrichenen Größen (Meßversuch) wären jetzt für Serie und Parallel etwa durch s und p zu unterscheiden, so daß die symmetrische Gleichung mit Δ_p und Δ_s ihre Geltung verlieren kann. Die ungleiche Widerstandssteigerung (in den ungleich kühlenden Gasen) beeinflußt rückwirkend die sie erzeugende Temperatur; sie vergrößert die Temperaturdifferenz bei Serien-, verkleinert sie bei Parallelschaltung, so daß:

$$|(\vartheta'_{2s} - \vartheta'_{1s})| > |(\vartheta'_{2p} - \vartheta'_{1p})|$$

Statt dessen war bisher Gleichheit beider Differenzen angenommen.

Bei 10° mittlerem Kühlungsunterschied ($= \vartheta_2' - \vartheta_1'$) betrüge diese Korrektion etwa 0,4°.

Diese Korrektion auf zweite Näherung macht bei Pt-Heizkörpern also nur 4 v. H. der ersten Korrektion aus, bei Pt-Ag somit nur $^1/_{10}$—$^1/_{20}$ davon.

Eine weitere Unsymmetrie (vgl. auch S. 26) rührt von Proportionalität des Wärmeabflusses ins Gas während des Stromstoßes zum erzeugten Temperaturüberschuß. Dieser Fehler fällt bei Pt-Ag ganz bestimmt unter 5 v. H. der ersten Korrektion.

Daß die Abhängigkeit der Fehler vom Temperaturkoeffizienten α wirklich diese erwartete Größe hat, bewies Messung mit Pt und mit Pt-Ag an Methan; die Öldifferenzen bei Parallel- und Serienschaltung waren rund 1000 (bei Pt) und 100 cm³ bei Pt-Ag (der Pt-Ag-Heizkörper war dicker als der Pt-Körper). Diese Messungen verdanken wir Hrn. Zürn.

Schaltete man die einen Hälften der beiden Heizkörper gleichen Widerstands zueinander in Serie, die anderen parallel, was aber (vgl. später a. a. O.) aus anderen Gründen nicht günstig ist, so wäre die Korrektion selbsttätig in *einer* einzigen Messung vollzogen. Man bedient sich aller anderen vorteilhaften Mittel (Pt-Ag; gleiche Heizkörper; gleiche Stromstärken, kleiner Außenwiderstand usf.).

Damit ist der Meßgasfehler am Heizkörper grundsätzlich und praktisch unter 0,4 v. T. herabgedrückt, soweit er die Energie*zufuhr* angeht.

Über andere Messungen mit Parallel- und Serienschaltung, an den Beispielen Luft, N_2, CH_4 und SO_2 behandelt, wird a. a. O. berichtet.

Zwei andere Meßgasfehler am Heizkörper rühren von Ungleichheit der Energie*verluste* zwischen beiden Teilen des Doppelversuchs, der Strahlung zur Wand und der Wärmeableitung in den Heizkörperfuß. Beide wirken so, daß sie die Folgen der (Normier- und Meß-) Gasverschiedenheit (den fehlerhaften Energiegewinn des weniger kühlenden Gases bei Serie, sein fehlerhaftes Energiedefizit bei Parallel; vgl. S. 34) bei Serienschaltung verringern, bei Parallelschaltung, wiewohl um weniger, verstärken.

B. Konstanz und Kleinheit der Wärmeverluste

Selbst wenn weitgehend gleiche Energiemengen in die Heizkörper kommen, so bleibt es möglich, daß die sie umgebenden Gase im Meßmoment nicht gleich stark beheizt sind. Denn die für das Gas bestimmte Wärme geht ihm teils durch Strahlung, teils durch Leitung verloren, teils auch erreicht sie das Gas im Meßmoment noch nicht, und letztenteils geht sie in sichtbare Massenbewegung des Wölkchens und der Manometerflüssigkeit über. Deshalb ist experimentell und theoretisch abzuleiten, wie groß die davon herrührenden Korrektionen sind und wie genau man sie bestimmen kann, wie genau also das C_v-Ergebnis ausfällt.

Nennen wir das Wärmeverhältnis für die

	Ölflasche	:	Meßflasche
im Normierversuch . . .	M_1	:	M_2
im Meßversuch	M_1'	:	M_2'

so fordert das Prinzip der Messung, daß

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{M_1'}{M_2'}.$$

Mit andern Worten: Die Wärmemenge, die dem Gas in einer Flasche zugeführt wird, darf sich zwischen Normier- und Meßversuch nur im selben Verhältnis ändern, wie es gleichzeitig in der anderen Flasche geschieht.

D. h. die Gleichung bleibt auch dann noch richtig, wenn man beide Seiten mit demselben Bruch a/b multipliziert, oder wenn man die eine Seite mit a/a, die andere mit b/b multipliziert.

Beiden Flaschen darf also in beiden Teilen des Doppelversuchs ohne Schaden für die Genauigkeit Wärme verloren gehen, dürfte sogar im Heizkörper zurückbleiben, wenn nur zwischen Normier- und Meßversuch für jede Flasche einzeln das Verhältnis der Ausdrücke:

$$\text{Gesamtwärme} \cdot \left(1 - \frac{\text{Wärmeverlust} + \text{Wärmerest}}{\text{Gesamtwärme}}\right),$$

und da wir Konstanz der einer Flasche zugeführten Gesamtwärme (vgl. S. 35) ohnehin als erreichbar ansehen, auch der Ausdruck:

$$\text{Wärmeverlust} + \text{Wärmerest} = V + R$$

konstant bleibt. Das ist praktisch hinreichend genau zu erzielen, wenn $V + R$ hinreichend *klein* bleibt.

Bei R ist das stets möglich, für die Verluste V aber hat man unter Umständen Korrektionen anzubringen und deshalb jedenfalls ihren Betrag zu ermitteln.

Um diese Verluste genauer als im folgenden möglich beurteilen zu können, sind Messungen der Heizkörpertemperatur beim Stromdurchgang und ihres zeitlichen Ganges, in verschiedenen Gasen, mit verschiedenem Material für die Heizkörper, unter Variation ihrer Abmessungen und Lage vorgenommen worden.

Darüber, über das Wegfallen des Wärmerests, über die Strahlung der Heizkörper, über die Wärmeableitung in die metallischen Zuleitungen wird a. a. O. berichtet werden.

I. Strahlungsverluste

a) Heizkörperstrahlung

Die daher stammenden Fehler rühren von der Ungleichheit der *Emission* der Heizkörper zwischen beiden Teilen des Doppelversuchs (vgl. S. 35) und von der Verschiedenheit der Strahlungs*absorption* zwischen Meß- und Normiergas.

α) *Emission der Heizkörper*

Ist sie, absolut genommen, hinreichend klein, so fallen alle Strahlungsfehler weg. Ihr Betrag läßt sich streng nur für einen schwarzen Körper, genähert auch noch für einen grauen berechnen, als welchen man den blanken Pt- (und wohl auch den blanken Pt–Ag-) Heizkörper nach den Messungen von O. Lummer ansehen darf.

Die Emission des Heizkörpers hängt vom umgebenden Gas ab, da es den Temperaturverlauf des Streifens mit bestimmt; daher auch von der Wärmeübergangszahl an der Heizkörperoberfläche. Die Emission kann also künstlich gestuft werden durch Wahl von *Strombelastung*, *Gasmantel*, *Material* und *Oberfläche* des Heizkörpers. Von diesen allen hängt die Temperatur, von ihr und der Oberfläche die Strahlung ab.

Für eine Überschlagsrechnung nehmen wir als höchste Temperatur 100° und zwar für die Zeitdauer von 0,02 Sekunden an.[1]

Die Herren O. Lummer und F. Kurlbaum[2]) haben zwischen $T = 654$ und $T = 492$ einerseits, $T = 1761$ andererseits ein T^5-Gesetz gültig befunden für die Strahlung blanken Platins.[3]) Deshalb ist die Extrapolation dieser Formel um 200° abwärts bis Zimmertemperatur, gewiß nicht erheblich unsicher.

Die Emissionsfläche der jetzigen Heizkörper beträgt 24 cm². Die Gesamtemission wird damit $24 \cdot 1{,}4 \cdot 10^{-16} \cdot T^5$ cal/sec. Für die kurze Maximumszeit berechnen sich so Beträge, die wegen der verschiedenen Kühlwirkung verschiedener Gase verschieden, aber noch in der Fehlergrenze liegen:

1) M. Trautz u. K. Hebbel, Ann. d. Phys. 74. S. 308. 1924.

2) O. Lummer, Grundlagen und Ziele der Leuchttechnik. München und Berlin, Oldenbourg 1918.

3) Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 17. S. 106—111. 1898.

Luft	4 Amp.	93°	u. Zimmertemp.	$4{,}8 \cdot 10^{-5}$ cal	= 0,2 v. T. von 0,23 cal,	
H_2	4 „	71°	„ „	$2 \cdot 10^{-5}$ cal weniger,		
					= 42 v. H. weniger als in Luft,	
CO_2	4 „	97°	„ „	$0{,}38 \cdot 10^{-5}$ cal mehr		
					= 8 v. H. mehr als in Luft,	
Luft	8 „	46°	„ „	$1{,}8 \cdot 10^{-5}$ cal	= 0,1 v. T. von 0,13 cal.	

Aber während der Abkühlungszeit strahlt der Heizkörper noch, so daß die Gesamtstrahlung, nach den Kurven (vgl. S. 29) extrem zu schätzen

in H_2	den 3fachen Betrag	= 0,6 v. T.		der Heizenergie
in Luft	„ 10—15 „	„ = 2—3 „		
in CO_2	„ 10—20 „	„ = 2—4 „		

ausmacht. Die Temperaturerhöhung im schlechter abführenden Gas ist größer und dauert länger als im besser leitenden; der Strahlungsverlust ist also auch größer und wirkt somit nachträglich der von gleicher Ursache bewirkten Heizverhältnisänderung entgegen (vgl. S. 35). Der Einfluß der Strahlungsverluste auf die Heizkörpertemperaturen selbst ist bereits in den Temperatur-Zeitkurven mit enthalten (vgl. S. 29).

β) Strahlungsabsorption im Gas

Der sehr starken Temperaturabhängigkeit der Strahlungsemission der Heizkörper steht praktisch vollkommene Temperaturunabhängigkeit der Strahlungsabsorption im Gas gegenüber. Hängt dies auch von der spektralen Intensitätsverteilung ab, die mit der Temperatur nach kurzen Wellen wandert, so ändert das doch in dem kleinen Temperaturbereich an der Gesamtabsorption sicher wenig. Während also die Emission rasch mit der Strombelastung der Heizkörper steigt, hängt die Absorption von dieser nicht wesentlich ab, sondern verzehrt cet. par. voraussichtlich stets etwa gleiche Bruchteile der emittierten Strahlung.

Die Strahlungsabsorption im Gas liegt, wo sie überhaupt merklich vorkommt, im langwelligen Infrarot. Bei großen und vielatomigen Molekeln mit entwickelten thermischen Freiheiten stark und dann einflußreich, wird sie in anderen Fällen oft nur mäßige Bereiche der Gesamtstrahlung umfassen oder wie bei Luft oder vollends bei H_2 unmerklich sein.

Soweit die Emission in Normier- und Meßgas gleich ist, kann nur der Bruchteil davon Fehler bedingen, der in Normier- und Meßgas verschieden absorbiert wird.

Man bestimmt den aus Verschiedenheit von Emission und Absorption zwischen Normier- und Meßgas entspringenden Fehler bei unserer Methode direkt experimentell aus der Stromstärkeabhängigkeit der sonst mit allen Korrektionen versehenen $C_{v\,roh}$-Werte durch Extrapolation auf Stromstärke Null.

b) Gasstrahlung

Für sie ist die soeben angestellte Erwägung wenig verändert zu wiederholen.

Die Gasstrahlung, d. h. die Strahlung vom erwärmten Gas aus, also in erster Linie die vom *Wölkchen*, ist selbst bei seinen höchsten Temperaturen so klein, daß sie stets zu vernachlässigen ist, zumal der Gasmantel die Wölkchenstrahlung bevorzugt absorbiert.

Hrn. W. Nusselt[1]) verdankt man die Feststellung, daß unterhalb von 500° von Gemischen aus etwa 47 v. H. CO, 47 v. H. CO_2 und 1,7 v. H. H_2O für seine Methoden merkliche Gasstrahlung nicht ausgesandt wurde. Nun sind 100° ungefähr die höchste Mehrtemperatur, die unsere *Heizkörper*, und auch nur für kurze Zeit, annehmen. Daher werden irgend merkliche *Gas*mengen auch nicht für irgend merkliche Zeiten auf 100° kommen. Die Temperatur des Wölkchens läßt sich mit 2° (im ersten Moment ~10°) über der Wandtemperatur schätzen. Also kommt danach eine irgend merkliche Gasstrahlung durchaus nicht in Betracht, natürlich auch dann nicht, wenn das ganze Gas, wie das bei Hochtemperaturversuchen der Fall, hoch erhitzt ist; denn es kommt nur auf den Temperaturüberschuß an, der am Heizkörper vorübergehend erzeugt wird.

Die *Gasmantel*strahlung ist stets neben der des Wölkchens zu vernachlässigen wegen des ungeheuer geringen Temperaturüberschusses des Gasmantels über die der Wand.

Der Strahlungsfehler kann also bis zu Promillen gehen, ist hinreichend genau zu ermitteln und bis auf 0,4 v. T. genau zu beseitigen.

---

1) W. Nusselt, Forschungsarbeiten auf dem Gebiet des Ingenieurwesen Nr. 264, hrsg. v. Ver. D. Ing. Der Wärmeübergang in der Verbrennungskraftmaschine 1923. S. 15.

II. Leitungsverluste

Im Meßmoment könnte ein Rest der Stromwärme noch im Heizkörper bzw. in seinen Füßen enthalten sein, weil die Wärmeabfuhr zum Gas zu langsam geht; dieser *Wärmerest* (vgl. S. 36) ist bei richtigem Verfahren auf 0,4 v. T. genau Null.

Die Wärme geht auch nicht gewünschte Wege. Aus dem Heizkörper in seinem Fuß: „*Fußverlust*", aus dem Gas nach den Wänden des druckübertragenden Rohrs: „*Rohrverlust*" und nach der Flaschenwand: „*Wandverlust*".

1. Wärmerest im Heizkörper

Hätte der Wärmerest, unabhängig von der Gasnatur, in der Meßflasche immer denselben Betrag, so gäbe das keinen Fehler; andernfalls wirkte nur seine Verschiedenheit zwischen Normier- und Meßversuch.

Nach 1,8—3,5 Sekunden, je nach der Gasnatur, ist die ganze Heizwärme bis auf 0,4 v. T. genau abgeflossen (Belege vgl. später a. a. O.).

Bei ungleichzeitigen Stromstößen ist der Wärmerestfehler dadurch vermieden, daß der schwächeren Wärmeabführung (Abkühlung der Folie) mehr Zeit zur Verfügung steht. Ausreichende Haltedauer des DM auf der Nullinie (vgl. S. 10) ist ebenfalls ein Beleg für das Fehlen eines merklichen Wärmerestes.

2. Wärmeableitung in den Fuß: „Fußverlust"

Auch er kann für die Genauigkeit der C_v-Methode nur insoweit eine Rolle spielen, als der in die Zuleitungen abfließende Wärmebetrag bei verschiedener Gasfüllung cet. par. verschieden ausfällt. Er hängt von Art und Querschnitt des Fußes, von der Heizkörpertemperatur und damit von allen Größen, die sie beeinflussen (Kühlwirkung der Gase, Heizkörperform usf. vgl. S. 32) ab.

Am kleinsten ist er bei optimaler Kühlung, bei nur zwei Zuleitungsstellen (ein sehr langer Foliestreifen), bei kleiner Wärmeleitfähigkeit des Heizkörpermaterials (Pt = 0,17, Pt—Ag = *0,074*, Konstantan 0,054 cal·cm^{-1}·sec^{-1}·grad^{-1}). Er nimmt voraussichtlich mit Erhöhung der Strombelastung relativ ab.

Eine Überschlagsrechnung lehrt einiges über die Größenordnung: Zuleitungen Ag 2 mm dick. Folie Pt 4 mm breit, 0,003 mm. Ein Handversuch mit dieser Folie, die elektrisch im Dunkeln stationär zu schwacher Glut erhitzt wurde, ließ das angepaßte Auge eine 2—3 mm weit reichende Einflußzone der Zuleitungen erkennen.

Man berechnet hier den Wärmeverlust bei einem Temperaturgefälle der letzteren 3 mm von 50° und 0,1 Sekunden Dauer für die 6 Zuleitungsstellen zusammen auf $1{,}8 \cdot 10^{-3}$ cal = 0,85 v. H. (von 0,2 cal) Heizenergie; für 100° und 0,02 Sekunden auf $7 \cdot 10^{-4}$ cal = 0,35 v. H. (von 0,2 cal).

Um den Fußverlust ausreichend genau zu berechnen (hierüber a. a. O.), kann man den Zeitverlauf der mittleren Temperaturänderung im Heizkörper (vgl. S. 29) photographisch messen.

In erster Näherung kann man auch mit Proportionalität zwischen mittlerer Heizkörpertemperatur und Fußverlust rechnen.

3. Wärmeableitung vom Gas an das Rohrsystem

Bei der großen Temperaturleitfähigkeit der Gase und der Enge der von der Flasche nach dem DM usf. führenden Rohre ist bis zum Meßmoment (2—4 Sekunden) die in ihnen durch die Gaskompression bei der Heizung erzeugte Wärme größtenteils in die Rohrwandung abgeflossen; die Kompression darin geht gewiß beinahe isotherm.

Das Volumen der Rohre soll deshalb möglichst klein gegen das übrige Mantelvolumen sein. Kompression und Kompressionswärme sind der Heizenergie proportional, deren Änderung also den Betrag des Fehlers nicht ändert.

Sie sind aber zwischen Normier- und Meßgas verschieden, weil sie von dem C_v-Wert der Gase abhängen. Das kommt so zustande:

Erwärmt man 1 Mol Gas inmitten einer im Verhältnis zu ihm sehr großen Gasmenge, so dehnt es sich bei praktisch konstantem Druck aus. Hat es die Molarwäre C_p und führt man gerade diese Wärmemenge zu, so leistet es die Arbeit R, die im Mantelgas als adiabatische Kompressionswärme auftritt. Wärme im Betrag C_v bleibt in dem ins Auge gefaßten Mol (Wölkchen) zurück, sofern man keine Wärmeableitung, Verluste usf. annimmt.

Allgemein, also *unabhängig von der Größe der Heizenergie, wird immer der Bruchteil R/C_p von ihr als Kompressionswärme*

im Mantelgas frei und *steigert seine Temperatur homogen um* einen Betrag

$$\Delta T = \frac{(\text{cal Heizenergie}) \cdot \frac{R}{C_p}}{(\text{Molzahl}) \cdot C_v}.$$

Dies ΔT hängt, sofern das Wölkchen klein ist gegen den Mantel, von der Wölkchengröße und von seiner (Über-)Temperatur nicht ab. Sie wird um so kleiner, je kleiner die Heizenergie und je größer die Masse des Mantelgases.

ΔT ist $C_v \left(\frac{C_v}{R} + 1\right)$ verkehrt proportional.

Von der Heizenergie wird also bei jedem Gas der Bruchteil R/C_p (bei Luft also $^2/_7$) als adiabatische Kompressionswärme im Gasmantel frei. Das *Volumen des Rohrsystems* war bei unserem Apparat 1 v. H. des Gesamtvolumens. Also wird auch 1 v. H. der Kompressionswärme (bei Luft = 3 v. T. der Gesamtwärme) im Röhrenvolumen abgeleitet, unabhängig von Gasnatur und Heizstärke.

Daß infolge Kontraktion bei dieser Abkühlung des Rohrinhalts noch Gas in die Röhren nachströmt und auch seine Wärme abgibt, fällt in die Fehler. Denn selbst wenn ΔT 0,1° wäre, so betrüge die Kontraktion in den Röhren erst 0,3 v. T. ihres Volumens gleich 0,003 v. T. des Gesamtvolumens.

Der wahre Verlust in den Röhren ist also 1 v. H. von R/C_p und der Verlustunterschied zwischen Normier- und Meßgasfüllung ist daher 1 v. H. von (R/C_p-Normiergas–R/C_p-Meßgas). Er muß unter 0,04 liegen, um C_v nicht über 0,4 v. T. zu beeinflussen; für Luft als Normiergas und Meßgase mit $6 > C_v > 4$ fällt also jede Korrektion weg. Bei größerem (kleinerem) C_v-Meßgas fiele C_v zu klein (groß) aus. Dieser Fehler läßt sich also mit Gewißheit innerhalb von 0,4 v. T. genau rechnerisch korrigieren, an Hand von Wärmeleitungsberechnungen.

Er korrigiert sich sogar größtenteils selbsttätig. Denn in der Ölflasche ändert sich zwischen Normier- und Meßversuch das gesamte Luftvolumen, und damit der relative Anteil des Röhrenvolumens; so ändert sich der Anteil des Rohrverlustes an der Heizenergie in gleicher Richtung wie bei der Meßflasche. Das Rohrvolumen macht auch hier rund 1 v. H. des Gesamt-

volumens aus, so daß der Wärmeverlust darin rund $^3/_7$ v. H. ausmacht. Er ändert sich aber mit dem Luftvolumen über dem Öl verkehrt proportional C_v-Meßgas. Daher wird der Unterschied beider Korrektionen, der als Korrektion an C_v anzubringen ist:

$$\Delta r = \left[\left(\frac{v}{V}\right)_M \cdot \left(\frac{R}{C_{p_N}} - \frac{R}{C_{p_M}}\right)\right] - \left[\left(\frac{v}{V_N}\right)_0 \cdot \frac{R}{C_{p\,L}}\left(1 - \frac{C_v \text{ Normiergas}}{C_v \text{ Meßgas}}\right)\right].$$

Darin ist v das jeweilige Röhrenvolumen, V das zugehörige Gesamtgasvolumen, mit Weiser M auf die Meßflasche, mit O auf die Ölflasche und mit N auf den Normierversuch darin bezogen. C_{p_N} ist auf Normiergas, C_{p_M} auf Meßgas zu beziehen, C_{p_L} wird im allgemeinen $= C_{p_N}$ sein und bezieht sich immer auf Luft.

Die erste Differenz bezieht sich auf die Meßflasche, die zweite auf die Ölflasche.

Dieser Fehler Δr läßt sich also immer genügend genau berichtigen.

4. Wärmeableitung vom Mantelgas an die Flaschenwände

Sie rührt praktisch fast nur von der anfangs adiabatischen Kompression des Mantelgases. Die Frage nach der Schnelligkeit des Wärmeabflusses an die Flasche entspricht also, von einem durch Strahlungsabsorption bedingten Korrektionsglied 2. Ordnung abgesehen, der nach dem Zeitverlauf des bekannten, zur $\varkappa$-Bestimmung dienenden Versuchs von Clément und Desormes. Darüber später a. a. O. Hier geben wir nur eine kurze Übersicht, die zur Größenordnung führt. Bei unserer Anordnung können außer reiner Wärmeleitung Strömung, Gasreibung und Wärmeübergang an der Wand mitbestimmend sein.

Wir fragen zunächst nach der *reinen Wärmeleitung* vom Gas aus an die Flaschenwände, die bis zur Ablesung am DM stattfindet.

Der Wärmeabfluß zur Wand wurde rechnerisch und experimentell ermittelt.

1. *Berechnungen des Wärmeabflusses zur Wand für verschiedene Zeiten und Abstände aus der Temperaturleitfähigkeit des Gases*

a) *Allgemeine Fragestellung*

Die hydrodynamische Grundgleichung $\frac{\partial t}{\partial z} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$ verknüpft die zeitliche Temperaturänderung $\partial t/\partial z$ an einer Stelle x mit der dort herrschenden Temperaturgefälleänderung $\partial^2 t/\partial x^2$. Die Temperaturleitfähigkeit $a = \frac{\lambda}{c \cdot \gamma}$ (λ = Wärmeleitfähigkeit; c = spez. Wärme; γ = Dichte) steht in den Wärmeverlustformeln symmetrisch mit der Zeit.

Darf man Strömung, Strahlung und besondere Wärmeübergangshindernisse an Phasengrenzen (wie sie die Wärmeübergangszahl enthält) vernachlässigen, so reichen die Gleichungen der Wärmeleitung grundsätzlich hin, um den zeitlichen Temperaturverlauf an allen Punkten in der wärmeleitenden Schicht zu berechnen.

Die Strahlung des Gases haben wir bestimmt zu vernachlässigen. Die Strömung an der Wand ist wegen der Kleinheit des Temperaturgefälles gewiß sehr klein, so daß wir von ihr mindestens genähert absehen dürfen. Wärmeübergangshindernisse an der Wand selbst nehmen wir nicht an. Bestehen sie, so können sie den berechneten Verlust nur verkleinern. Vom Einfluß der Heizkörperstrahlungsabsorption im Gas sehen wir ab.

Qualitativ rückt bei der C_v-Messung das sehr rasch (durch adiabatische Kompression) zwischen Wand und Gas entstehende Temperaturgefälle im weiteren Verlauf der Zeit in das Gas hinein und nimmt dabei ab (Wärmekapazität der Wand praktisch unendlich).

b) *Genäherte Berechnung des Wärmeabflusses vom Gas an die Wand für ebene und zylindrische Schicht*

In beiden Fällen bleibt die Wandtemperatur während des Wärmeaustausches praktisch konstant.

Beim Ausgleich eines Temperatursprungs $T_1 - T_0$ an der Grenzebene zwischen zwei unendlichen Räumen A und B von jeweils homogener Temperatur stellt sich an ihr sofort eine „Mittel"temperatur T_m her, die während des weiteren Wärme-

austausches erhalten bleibt. Ihre Lage zwischen T_0 und T_1 wird bestimmt durch das Wärmeeinströmungsvermögen (benannt von Hrn. Gröber) b der Stoffe A und B:

$$b = \sqrt{\lambda c \gamma}\,.$$

T_m teilt den anfänglichen Temperatursprung im umgekehrten Verhältnis der b.[1])

Begrenzte Räume verhalten sich ebenso, solange die von der Grenzfläche aus nach beiden Seiten wandernde Temperaturänderung noch nicht die äußere Begrenzung erreicht hat. Das trifft bei uns zu für hinreichend kurze Zeiten nach Beginn des Ausgleichs. Auch gilt es noch für nicht ebene Grenzfläche, solange noch die Schicht, worin das Temperaturgefälle liegt, hinreichend genau als eben angesehen werden kann.

Bestehen die beiden Schichten, wozwischen der Temperaturausgleich stattfindet, wie bei den C_v-Flaschen aus Gas und Glas (Email), so ist das Verhältnis $b_{\text{Luft}} : b_{\text{Glas}} = 1 : 200$. D. h. die Temperatur der Emailoberfläche ändert sich höchstenfalls nur um $^1/_{200} = 0{,}5$ v. H. der anfänglichen Temperaturdifferenz zwischen Mantelgas und Flaschenwand. In praxi ist die Änderung sogar geringer, da die Wärmezufuhr vom Gas infolge begrenzter Schichtdicke verstärkt abnimmt, und das Eisen unter der 0,5 mm dicken Emailschicht ihren Wärmegewinn noch besser ableitet.

Das Temperaturgefälle liegt also fast vollkommen im Gas, die Wandtemperatur bleibt konstant.

Auch würde danach eine blanke Eisenwandfläche statt Email den Wärmeverlust kaum vergrößern.

Wir denken uns die Flaschenwand eben ausgebreitet, sehen von einem Randeinfluß ab und beziehen uns auf bestimmte Dicke der Gasschicht.

Liegt die homogene Anfangstemperatur einer ebenen unendlich erstreckten Schicht um Θ^0 über der konstant gehaltenen Temperatur der Ausgleichsfläche, ist t die gesuchte Temperatur im Abstand x von dieser Fläche nach der Zeit z seit Beginn des Wärmeausgleichs, so gilt[2]) genähert:

---

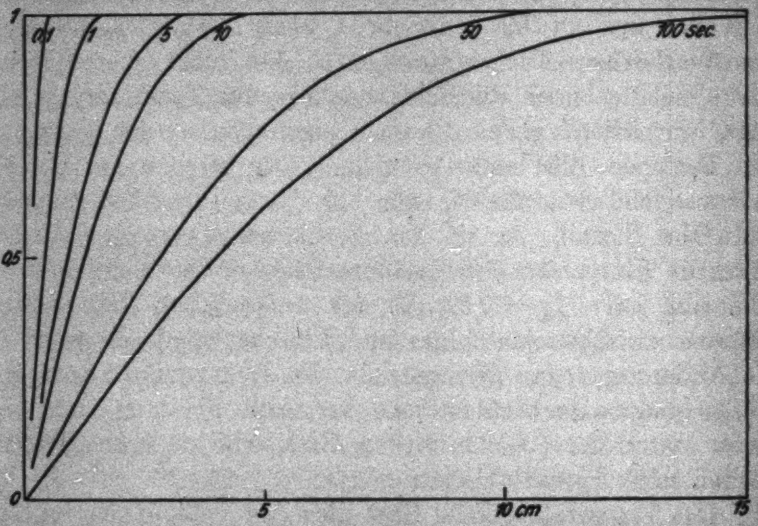
1) H. Gröber, Wärmeleitung und Wärmeübergang. Springer, 1921.

2) W. E. Byerly, An elementary treatise on Fouriers series etc. Ginn. Co. 1893.

$$t = \frac{2\Theta}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{x}{2\sqrt{a z}} - \frac{x^3}{3(2\sqrt{a z})^3} + \frac{x^5}{5\cdot 2!(2\sqrt{a z})^5} - \frac{x^7}{7\cdot 3!(2\sqrt{a z})^7} + - \ldots\right]$$

Fig. 8 zeigt den örtlichen und zeitlichen Temperaturverlauf für Luft.

Bei hinreichend kurzen Zeiten und hinreichender Seitenerstreckung, so daß der Randeinfluß klein genug bleibt, gilt

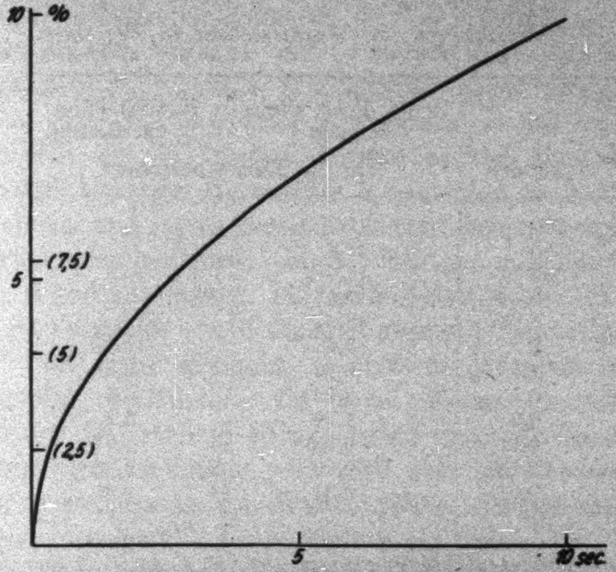


Temperaturverteilung in einer Luftschicht nach verschiedenen Zeiten des Austauschs. Ordinate: Temperatur, homogene Anfangstemperatur = 1, Wandtemperatur = 0; Abszisse: Abstand von der Wand; Parameter: Zeit nach Beginn des Austauschs.

Fig. 8

das auch noch für eine Schicht endlicher Dicke (z. B. für eine 15 cm dicke Luftschicht noch bei 100 Sekunden). Man erhält dann den zu einer bestimmten Zeit durch die Ausgleichsfläche abgeflossenen Wärmeverlust in Bruchteilen des in der Schicht enthalten gewesenen Wärmeüberschusses in Gestalt des prozentualen Anteils, den das durch die t-Kurve abgeschnittene Eck an der Gesamtfläche ausmacht. Fig. 9 stellt diesen prozentualen Wärmeverlust einer ebenen Luftschicht von 15 cm Dicke in Abhängigkeit von der Zeit dar; das erste nur auf kleine Zeiten bezügliche

Stück von dieser Kurve kann auch für den Kreiszylinder so gut wie für die ebene Schicht benutzt werden. Nur verdoppeln sich die angegebenen prozentualen Wärmeverluste, sofern man einen Kreiszylinder betrachtet, der die gleiche Wärme abgebende Fläche hat wie die planparallele Schicht,



Wärmeverlustkurve einer 15 cm dicken Luftschicht. Ordinate: Verlust in Prozenten des Wärmeüberschusses, bzw. Verlust der Meßflasche (Luft) in Prozenten der Kompressionswärme (vgl. S. 51).
Abszisse: Zeit nach Beginn des Austauschs.
Fig. 9

und dessen Radius der Dicke der ebenen Schicht gleichkommt. Denn dann verhalten sich cet. par. die Wärmekapazitäten von ebener Schicht und Zylinder wie 2 : 1.

Diese Umrechnung kann natürlich nur dann gelten, wenn der Wärmeaustausch nur die äußerste Zylinderschicht merklich betraf, also nur für die ersten Zeiten.

Bei größeren Tiefen (5 cm und mehr) bzw. längeren Zeiten (über 1 Sekunde) wird der wirkliche Wärmeverlust kleiner als ihn die obige Formel (S. 46) für die Ebene angibt, so daß man dann streng für den Zylinder rechnen muß.

Oder man verfährt unmittelbar experimentell (vgl. w. u. und später a. a. O.); auch der Fall kommt in Frage, daß im Gasmantel ein erheblicher Bruchteil der Heizkörperstrahlung absorbiert wird und dadurch die Temperaturverteilung gegenüber der hier betrachteten etwas abändert.

c) *Übersichtstafel der Wärmeverluste in Prozenten*

Zeit Sekunden	15 cm dicke ebene Schicht	Kreiszylinder 15 cm Radius
	für die Ebene berechnet	
100	31,0	
50	21,8	
30	17,0	
10	9,8	
5	6,9	(14)
3	5,4	(10,8)
1	3,10	6,2
0,5	2,18	4,4
0,3	1,70	3,4
0,1	0,98	1,96
0,05	0,69	1,38
0,01	0,31	0,62

2. *Experimentelle Messungen über den Abfluß zur Wand*

a) *Frühere Arbeiten*

A. Witz[1]) maß die Zeit-Temperaturkurve eines durch kurzen, tunlichst adiabatischen Druckstoß erwärmten oder abgekühlten Gases in Abhängigkeit vom Temperaturgefälle Gas-Wand, von der Gasnatur, von der Wärmeleitfähigkeit der Wand, und vom Verhältnis Oberfläche zu Volumen. Er maß die Temperaturen in zwei aufrechten blanken Gußeisenzylindern (125 und 200 mm Durchmesser; 400 mm Höhe) manometrisch und fand die Wärmeleitfähigkeit des Gases praktisch ohne Einfluß auf den Wärmeverlust an der Wand, die der Wand aber sehr wohl. Die Druckänderungen waren so hoch, daß auch Strahlung z. T. merklich war. Das kommt für uns nicht in Frage.

1) A. Witz, Ann. de chim. et de phys. V. 15. S. 433—529. 1878.

Das Zeitgesetz für den Abfall der „Übertemperatur" t_1 auf t_2 im Zeitabschnitt Z zwischen 0° und 40° in der Gegend von Atmosphärendruck: $\log t_2 = \log t_1 \left(\frac{\alpha + \beta t_2}{\alpha + \beta t_1}\right) - 1{,}48 \cdot Z \cdot \alpha \cdot \log e$, worin die Apparatkonstanten $\alpha = 0{,}11$ und $\beta = 0{,}0016$, bestätigte sich gut für das kleinere Gefäß. Darin war das Verhältnis Oberfläche zu Volumen $O : V = 3{,}7$ dm²/Liter.

Bei unseren Gefäßen ist $O : V$ derzeit 1,4—1,7; die Temperaturüberschüsse unseres Mantelgases gegen die Wand berechnen sich für homogene Erwärmung sicher zu hoch mit 0,007. Mit der Witzschen Formel ergäbe sich daraus für Luft, daß von der Heizwärme 5 Sekunden nach Beginn des Stromstoßes und unter der sehr übertriebenen Annahme, daß die Erwärmung praktisch sofort vollzogen sei, rund 7,3 v. H. an die Wand abgeflossen sei (nach 3 Sek. 4,5 v. H.).

Alle Versuche von Witz sind aber mit Temperaturgefällen von 5° und mehr gemacht, so daß da jedenfalls erhebliche Strömungen stattfanden. Da seine Formel herauf bis zu einigen 50° Unterschied gültig bleibt, muß sie diesen Einfluß ausgiebig berücksichtigen. Er wird aber bei unseren C_v-Messungen, besonders an der Wand, viel schwächer sein. Denn das Temperaturgefälle bleibt kleiner als 0,01°.

Für die C_v-Methode gibt also die Formel von Witz für die Wärmeübertragung Werte, die wohl nur die Größenordnung treffen.

Herr W. Nusselt[1]) verknallte Gasmischungen in kugelförmigen (20 und 60 cm Dm) Stahlgußgefäßen, maß den Druckverlauf manometrisch und schloß daraus auf die Temperaturen; er fand die Wärmeübergangszahl durch Leitung (S. 34 u. 35):

$$a_b = 0{,}0730 \cdot \lambda_m \sqrt[3]{\left(\frac{\gamma_m}{\eta_m}\right)^2 \frac{\Theta}{T_m}} \; .$$

Darin ist 0,073 empirisch verpaßt, λ_m die Wärmeleitzahl in kcal $\cdot\, m^{-1} \cdot h^{-1} \cdot$ grad^{-1}, γ_m die Dichte in kg $\cdot\, m^{-3}$, η_m die innere Reibung in kg $\cdot$ cm^{-2}, T_m die zwischen Ausgangs- und Endtemperatur gelegene mittlere Bezugstemperatur für diese Größen, Θ das Temperaturgefälle zwischen Gas und Wand. Diese Wärme-

1) W. Nusselt, Forschungsarbeiten auf dem Gebiet des Ingenieurwesens. Heft 264. Ver. Deutscher Ingenieure. Berlin 1923.

übergangszahlen fallen für H_2, CO_2 und Luft fast gleich aus, im Einklang mit der Erfahrung von Witz, daß die Gasnatur wenig Einfluß habe; Reibungsgrößen und Dichten verdecken die Wärmeleitungsunterschiede in der Nusseltschen Formel so ziemlich. Übrigens ist auch nach seinen Erfahrungen keine Geltung der Formel für den Beginn des Wärmeaustausches anzunehmen.

Der Unterschied zwischen unseren experimentellen Bedingungen und denen bei Hrn. Nusselt ist so groß, daß wir die Ergebnisse nicht miteinander verknüpfen.

b) *Eigene Messung: Zeitlicher Druckverlauf bei adiabatischer Kompression*

α) Messung von Wandverlust und Temperaturleitfähigkeit in Gasen

Es scheint, daß Wärmeausgleichsmessungen zwischen festen Wänden praktisch unendlicher Wärmekapazität, und einem Gasraum mit so überaus geringer Übertemperatur, wie sie bei der C_v-Methode erzeugt wird, noch nicht vorliegen. Der Wärmeabfluß läßt sich bei uns sehr nahe einer Wandreaktion vergleichen, die sich im Gas wegen seiner geringen Wärmeleitung nur langsam abspielt.

Deshalb sind eingehende Messungen mit solchen Anordnungen in Aussicht genommen. Sie bieten einen Weg zur Messung nicht nur der benötigten Korrektionen für Wandverlust und Rohrverlust in einem, sondern auch der wahren (nicht mittleren) Temperaturleitung der Gase und ihres Temperaturkoeffizienten.

β) Zeitverlauf des Clément-Desormes-Versuchs

Durch rasche adiabatische Kompression des Gases (Einpressen kleiner Gasmengen) in der Meßflasche erzeugten wir kleine Temperatursteigerungen, ähnlich wie sie bei der C_v-Messung selbst durch adiabatische Kompression des Mantelgases zustande kommen. Der Manometerausschlag der gesamten Kompression, wovon hier $^2/_7$ (bei Luft; adiabatische Erwärmung) mit der Zeit verlorengehen, würde im Idealfall also dem Ausschlag bei einer C_v-Heizung vor „Ankunft" des Wölkchens gleich sein (bei der auch $^2/_7$ der Wärme im Mantel sitzt).

Zusammenfassend sind die Ergebnisse der Versuche:

1. Bei unseren C_v-Messungen hängt die Größe der Wärmeableitung von der Gasnatur ab, wahrscheinlich etwa im Verhältnis der Temperaturleitfähigkeiten.

2. Der Wärmeverlust ist ungefähr so groß, wie er sich unter Näherungsannahmen für reine Wärmeleitung berechnet. Bei den C_v-Messungen ist die Turbulenz an der Wand gewiß klein, so daß die Verluste hier den Temperaturleitfähigkeiten entsprechen werden.

3. Die Verlustzahlen sind noch zu hoch, weil bei allen bisherigen Kompressionsversuchen Überdruck und Temperaturgefälle an der Wand schon zu Beginn des Ausgleichs der Temperatur ganz ausgebildet ist, was auch den Berechnungen zugrunde liegt. Bei den C_v-Messungen aber bilden sich Überdruck und Temperaturgefälle erst allmählich aus und erreichen erst im Zeitintervall des Meßmoments ihr Maximum. Das kann auch mit der Kompression kopiert werden. Der Verlust wird dadurch, wie man aus den Zeitkurven (vgl. S. 11) ableitet, um ungefähr 20—25 v. H. erniedrigt. Daher hat man bei Luftfüllung mit einem

Verlust in 5 Sekunden von 10,5 v. H. der Mantelwärme
" " 3 " " 7,5 " " "
= rd. 2 v. H. der Gesamtwärme

zu rechnen. Änderung der Temperaturleitfähigkeit um 15 v. H. ändert den Verlust um 10 v. H.; die Änderung auf 3 v. H. zu kennen, reicht also hier hin.

4. Für manche Gase kennt man heute die Temperaturleitfähigkeit noch nicht genügend, um die Korrektion für den Wärmeverlust bis auf 0,4 v. T. genau anzubringen.

Im allgemeinen bedingt dies aber kaum eine größere C_v-Unsicherheit als ein oder wenige Promille.

Bei der Mischgasmethode kann man durch Mischung mit anderen Gasen entgegengesetzten Verhaltens ein Meßgas mit gleicher Temperaturleitfähigkeit wie die des Normiergases herstellen und so die Korrektion umgehen.

γ) Direkte Messung des Wandverlusts im C_v-Apparat

Man kann die Differenz der Wärmeverluste zwischen beiden Flaschen und zwischen Normier- und Meßversuch unmittelbar im C_v-Meßapparat feststellen. Dazu setzt man die Gasbüretten unten an, womit man die adiabatischen Kompressionen ausführt. Am Zeitverlauf des Differentialausschlags am DM verfolgt man die Änderung der Verlustdifferenz. Das ist ein

direkter Weg zur Messung des Wandverlustfehlers unter den Verhältnissen der C_v-Messung.

Die Tatsache ist wichtig, daß man die volle Korrektion an den gemessenen C_v-Zahlen ohne Schwierigkeit auch später noch, sobald die Temperaturleitfähigkeitsmessungen vorliegen werden, anbringen kann.

5. Einfluß des Verhältnisses Oberfläche : Volumen in der Ölflasche auf den Wärmeverlust

a) *Allgemeines*

Entsprechend der C_v-Verschiedenheit von Normiergas und Meßgas ändert sich in der Ölflasche das Luftvolumen und das Verhältnis Oberfläche : Volumen zwischen Normier- und Meßversuch, und damit der Wärmeverlust an der Flaschenwand, der O/V nahe proportional ist.

b) *Beträge der Korrektion*

O/V kann sich in der jetzigen Ölflasche (nicht ganz geeigneter Form) zwischen 1,4 und 1,7 dm²/Liter ändern, d. h. extrem um 20 v. H.; der Wärmeverlust ist rd. 2 v. H. der Heizenergie, so daß von hier aus extrem nur Promille oder Bruchteile davon als Fehler auftreten (vgl. Fig. 10).

c) *Berechnung der O/V-Korrektion*

Die Änderungen von O/V kann man aus den Abmessungen der Ölflasche auf 2 v. H. genau ausrechnen, was also weitaus genügt. Den Wärmeverlust selbst erhält man mit der Differentialmethode genau genug.

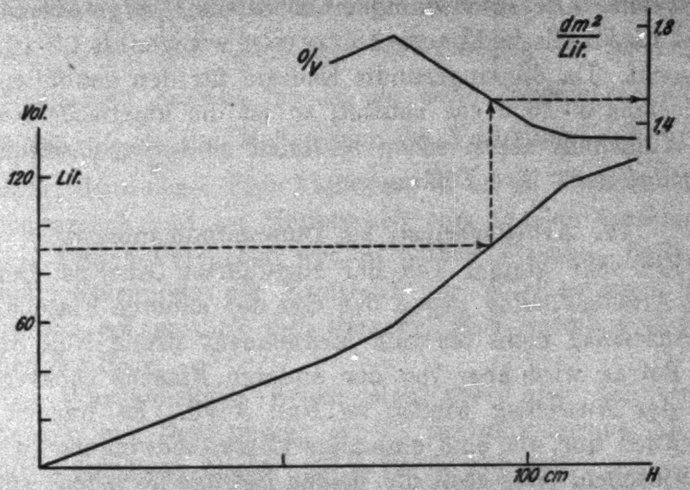
Im äußersten Fall braucht er sogar nur auf 10 v. H. sicher zu sein, während bei 10 (5) v. H. C_v-Verschiedenheit des Meßgases schon 50 (100) v. H. Genauigkeit hinreichen.

Ist z. B. C_v-Meßgas 10 v. H. größer als C_v-Normiergas, also auch das Meßvolumen 10 v. H. größer als das Normiervolumen (z. B. 77 statt 70 L.), so fällt O/V der Ölflasche um 3,5 v. H. von 1,73 auf 1,67. Der Wärmeverlust der Ölflasche (rd. 2 v. H. der Heizenergie) wird also um 3,5 v. H. kleiner; das sind 0,7 v. T. der Heizenergie; C_v-Meßgas wird dann 0,7 v. T. zu hoch. Zur sicheren Korrektion braucht hier der Wärmeverlust der Ölflasche nur auf 50 v. H. genau bekannt zu sein.

d) *Messung der zur Heizverhältnisänderung addierten Korrektion*

Mißt man mit großem und kleinem Normiervolumen, so bekommt man verschiedene C_v-Werte. Bringt man an beiden

die Korrektion für die Rohrvolumina an (S. 41), so erhält man zwei C_v-Werte, die abhängen vom Heizverhältnis und von O/V, welche beiden Verhältnisse für die beiden C_v immer gleich-



Oberfläche: Volumen in der Ölflasche, aufgetragen gegen das Luftvolumen. *H* Höhe des Ölstands unter der Flaschendecke.

Fig. 10

zeitig verschieden sind. Man kann sie nur noch rechnerisch trennen und hat also damit noch eine gewisse Kontrolle (s. S. 22).

e) *V-Änderung bei O/V-Änderung ist kompensiert*

Dieselbe Energie heizt in der Ölflasche bei Normier- und Meßversuch verschiedene Luftmengen. Daß demgemäß zwischen beiden Versuchen die Temperatursteigerung und ihr Gefälle gegen die Flaschenwand verschieden ist, hat deshalb keinen Einfluß auf C_v, weil in der Meßflasche infolge der C_v-Verschiedenheit dieselbe Änderung eintritt. Über den Einfluß von O/V bei verschiedener Ölfüllung, der am Beispiel von SO_2 behandelt wurde, sind Messungen gemacht worden, worüber a. a. O. berichtet wird.

III. Strömungsverluste: Kinetische Energie des Wölkchens

Ein Teil der Heizwärme geht in kinetische Energie des Wölkchens und dadurch beschleunigter Teile des Mantelgases über. Ohne Wölkchen kann man nicht messen. Also liegt in diesem Prinzip der Messung eine Durchbrechung anderer

Prinzipien von ihr; daß dies aber in die Fehler fällt, sieht man aus folgendem:

Die Masse der Wolke ist höchstens 10^{-2} Mol, also rund 0,3 Gramm. Die Geschwindigkeit höchstens $^1/_4$ m in 4 Sekunden, so daß die kinetische Energie 18 erg, also weniger als $1,5 \cdot 10^{-7}$ cal ausmacht. Da die eingesandte Energie für den gewählten Fall mindestens $5 \cdot 10^{-2}$ cal beträgt, so ist die kinetische Energie des Wölkchens selbst schon bestimmt zu vernachlässigen und a fortiori auch ihre Differenzen.

IV. Arbeitsverluste am Differentialmanometer

Ein sehr kleiner Teil der zugeführten Energie dient zu einer Arbeitsleistung gegen das Gas der anderen Flasche, weil der Ausschlag nicht bis zum Meßmoment streng Null bleibt. Der Betrag wird aber von der anderen Flasche rückvergütet, weil der Ausschlag wieder zu Null wird. Es handelt sich wesentlich nur um eine einmalige Energieschwingung zwischen den Flaschen. Wie groß die beiden Beträge höchstens sind, ist leicht abzuschätzen. Da der Druck 1 Atm. fast konstant bleibt, so ist nur der Volumenzuwachs (3 Skt. = $^1/_8$ mm Länge = 0,8 mm^3) mit höchstens $0,8 \cdot 10^{-6}$ Liter anzusetzen, was bei isothermer Änderung rund $2 \cdot 10^{-5}$ cal ausmacht; das fällt auch bei kleinsten Heizenergien in die Fehler.

Eine Arbeitsleistung nach außen kommt wegen der Abgeschlossenheit der Apparatur nicht in Frage.

C. Formulierung der Korrektionsglieder für Inkonstanz der Wärmemengen innerhalb eines Doppelversuchs

Für die Berechnung der C_v-Messung mit den prinzipiellen Formeln[1]) wird die Konstanz des wirklichen Heizverhältnisses $\frac{M_1}{M_2} = \frac{M_1'}{M_2'}$ gefordert. Weil aber weder die Heizung, noch die Verluste im allgemeinen solche Zahlenwerte haben, daß dies streng erfüllt wäre, so entstehen Fehler.

Diese Abweichungen des gefundenen C_v vom wahren C_v sind den Abweichungen von der Konstanz des Heizverhältnisses notwendig so lange hinreichend proportional, als sie hinreichend klein sind.

In der Tat sind sie immer so klein, daß es mithin ge-

1) Vgl. M. Trautz, Ann. d. Phys. u. E. Leonhardt. Inaug.-Diss. Le

nügt, die Abweichungen von der Konstanz des Heizverhältnisses festzustellen.

Wir drücken sie durch Fehlerfaktoren $1 + f$ aus, die wir den Heizenergien Q beifügen. Wäre das ideale Heizverhältnis $\frac{M_1}{M_2} = \frac{Q_0}{Q_m}$, wo sich der Zähler auf die Öl-, der Nenner auf die Meßflasche bezieht, so ist es beim Normierversuch im Verhältnis $\frac{1+f_0}{1+f_m}$, im Meßversuch im Verhältnis $\frac{1+f_0'}{1+f_m'}$ abzuändern; denn ohne diese Faktoren ist es in Wirklichkeit im Normierversuch und im Meßversuch vom idealen verschieden. Denn in beiden Versuchen und in beiden Flaschen finden individuelle Störungen der Konstanz der Wärmemengen statt, teils schon gelegentlich der Heizung, teils vermöge der ungleichen Verluste.

Die Wärmemengen heben sich aber aus den Grundgleichungen zur Berechnung von C_v insoweit heraus, als das Verhältnis konstant bleibt. Also ist C_v roh mit

$$\frac{(1+f_m)(1+f_0')}{(1+f_0)(1+f_m')} = 1 + (f'_0 - f_m') - (f_0 - f_m)$$

zu multiplizieren, um das wahre C_v zu erhalten. Die f bedeuten dabei die absoluten Beträge der Bruttoverluste beim betreffenden Meßmoment, in Bruchteilen der Mengen 1 ausgedrückt; m. a. W. die positiv gezählten relativen Verlustfaktoren.

Jedes f setzt sich aus den Teilfehlern zusammen, die wir jetzt zusammenstellen wollen.

a) Δ_t (vgl. S. 26, 33) und

b) $\Delta_p = - \Delta_s$ (vgl. S. 33) werden durch Messung bei Serie- und Parallelschaltung experimentell bestimmt und ausgeschieden.

c) Wärmeverlustfehler treffen die 2 Zustände (Normier- und Meß-Z.) in den 2 (Öl- u. Meß-)Flaschen.

Wir formulieren sie so:

α) Der Strahlungsfehler

Δ_{Str} wird aus der Stromstärkeabhängigkeit des sonst vollständig korrigierten C_v roh durch Extrapolation auf die Stromstärke Null bestimmt.

β) Der Fußverlust

Δ_F läßt sich bei zweckmäßigen, zweifüßigen Heizkörpern z. T. ganz vermeiden. Wird andernfalls aus ihren Abkühlungskurven bestimmt.

γ) Die Verluste an Kompressionswärme sind zweierlei:

1. Der von praktisch isothermer Kompression bedingte Rohrverlust (vgl. S. 41); er hängt nach 1 sec von der Zeit nicht mehr ab.

$$\Delta_r = \left[\left(\frac{v}{V}\right)_M \cdot \left(\frac{R}{C_{p_N}} - \frac{R}{C_{p_M}}\right) - \left(\frac{v}{V_N}\right)_O \cdot \frac{R}{C_{p_L}} \cdot \left(1 - \frac{C_v\text{-Normiergas}}{C_v\text{-Meßgas}}\right)\right].$$

2. Auch noch nach den Wartefristen hängt von der Zeit merklich ab der Betrag der nach der Flaschenwand abgeführten adiabatisch erzeugten Kompressionswärme. Er hängt weiter von der Inkonstanz des O/V und der Wartefrist sowie von der Verschiedenheit zwischen Meß- und Normiergas ab.

Nennen wir y die Bruchteile der abgeführten Kompressionswärme. Dann entsprechen dem

Normierversuch		Meßversuch	
Zeit z (Wartefristen)		Zeit z'	
$f_0 = \left(y_0 \frac{R}{C_L}\right)$,	$f_m = \left(y_m \frac{R}{C_N}\right)$;	$f_0' = \left(y_0' \frac{R}{C_L}\right)$,	$f_m' = \left(y_m' \cdot \frac{R}{C_M}\right)$
Ölflasche	Meßflasche	Ölflasche	Meßflasche

a) Ein y, nämlich y_m wird für Luft (als benütztes Normiergas z. B.) aus der Wärmeleitung berechnet. Wäre das Meßgas eines von Temperaturleitfähigkeit l' (gegen die von Luft mit l), so wäre $(y_m)_{z \cdot l'/l}$ statt $(y_m)_z$ zu setzen. Der Weiser gibt an, auf welche Wartefrist man sich beziehen muß. So findet man f_m.

b) Die Größe y_0 ist offenbar gleich

$$y_0 = (y_m)_z \cdot \frac{\frac{O}{V}\ \text{Ölflasche Normierversuch}}{\frac{O}{V}\ \text{Meßflasche}}.$$

Damit kennt man f_0.

c) Es wird:

$$y_0' = (y_m)_{z'} \cdot \frac{\frac{O}{V}\ \text{Ölflasche Meßversuch}}{\frac{O}{V}\ \text{Meßflasche}}$$

Damit kennt man f_0'.

d) Für konstante Wartefrist wird $y_m' = (y_m)_{z \cdot l'/l}$. Für die allgemeinere inkonstante aber:

$$(y_m') = (y_m)_{z' \cdot l'/l}.$$

Damit kennt man f_m'.

So wird der **Gesamtfehler**, den die Ableitung **adiabatischer Kompressionswärme** bedingt:

$$\Delta_w = -\left[(y_m)_z \cdot \frac{\frac{O}{V}\text{ Ölflasche Normierversuch}}{\frac{O}{V}\text{ Meßflasche}}\,\frac{R}{C_L} - (y_m)_z \cdot \frac{v''}{l} \cdot \frac{R}{C_N}\right]$$

$$+ \left[(y_m)_{z'} \cdot \frac{\frac{O}{V}\text{ Ölflasche Meßversuch}}{\frac{O}{V}\text{ Meßflasche}}\,\frac{R}{C_L} - (y_m)_{z'} \cdot \frac{v'}{l} \cdot \frac{R}{C_M}\right].$$

Dieser Ausdruck ist meist zu allgemein. Für Luft = Normiergas wird

$$\Delta_w = -\left[(y_m)_z \cdot \frac{R}{C_L} \cdot \frac{\frac{O}{V}\text{ Ölflasche Normierversuch} - \frac{O}{V}\text{ Meßflasche}}{\frac{O}{V}\text{ Meßflasche}}\right]$$

$$+ \left[(y_m)_{z'} \cdot \frac{\frac{O}{V}\text{ Ölflasche Meßversuch}}{\frac{O}{V}\text{ Meßflasche}}\,\frac{R}{C_L} - (y_m)_{z'} \cdot \frac{v'}{l} \cdot \frac{R}{C_M}\right].$$

Behält man die letzte Voraussetzung bei und setzt noch $z = z'$, so wird:

$$\Delta_w = -\left[(y_m)_z \cdot \frac{R}{C_L} \cdot \left(\frac{\frac{O}{V}\text{ Ölfl. Normierv.} - \frac{O}{V}\text{ Ölfl. Meßvers.}}{\frac{O}{V}\text{ Meßflasche}} - 1\right)\right]$$

$$+ \left[(y_m)_z \cdot \frac{v'}{l} \cdot \frac{R}{C_m}\right].$$

Dies ist die meist benützte Formel. Der Übersichtlichkeit wegen sind an die Molarwärmen hier die Weiser p nicht mehr angehängt; es handelt sich immer um C_p (wegen der adiabatischen Kompression). Δ_w aber ist der Faktor, womit C_v zu multiplizieren ist, um die additive Korrektion zu erhalten, die man $C_{v\,\text{roh}}$ zuzufügen hat.

Die Ungleichheit der Wartefristen zwischen beiden Teilen des Doppelversuchs, die zwischen Stromstoßbeginn und Beginn des Ableseintervalls am DM verstreicht, haben wir darin bereits berücksichtigt; es trat statt der Zeit z eine Zeit z' zu l'/l

als Bezugszeit. Die Zeiten z und z' unterscheiden sich kaum um mehr als $^1/_2$ sec, wie Messung zeigt. Das macht in dem schon extremen Fall von CO_2 erst 10 v. H. an der für $z = z'$ berechneten Korrektion aus, bedingt also selbst hier nur 1 v. T. an C_v. Die Differenz $z - z'$ auf $^1/_4$ sec genau zu kennen, reicht also selbst hier für $^1/_2$ v. T. Genauigkeit an C_v hin. Bei kleineren Δ_w genügt noch wesentlich geringere Genauigkeit der Kenntnis von $z - z'$.

III. Teil: **Die Meßbereicherweiterung und die dabei erzielbaren Genauigkeiten von C_v (Mischgasmethode)**

A. Meßbereicherweiterung

Das Luftvolumen der Ölflasche kann man zwischen rund 60 Liter und 120 Liter stufen, so daß man in der Meßflasche noch ein Meßgas messen kann, dessen C_v doppelt oder halb so groß ist als C_v-Normiergas.

I. Gewöhnlich nimmt man Luft ($C_v = 5$) als Normiergas. Damit kann man also mit einer Fehlergrenze von 0,4 v. T. nach unten noch Edelgase messen, nach oben bis zu einem $C_v = 10$.

II. Zur Messung größerer C_v kann man entweder

a) ein bereits gemessenes Gas mit größerem C_v als Normiergas verwenden und so in zweiter Stufe bis zu $C_v = 20$, in einer dritten noch darüber (höher als $C_v = 30$ ist nicht nötig, da die Körper hier flüssig oder fest bei Zimmertemperatur) kommen, wobei sich der prozentuale Fehler verdoppelt bzw. verdreifacht. Oder

b) man mischt die zu messenden Gase („Prüfgase") mit anderen („Beigasen") von bekanntem C_v (*Mischgasmethode*). Dem verringerten Anteil an Prüfgas entsprechend ist natürlich auch die Genauigkeit seines C_v verringert.

Bei einer Genauigkeit des C_v-Meßgasgemisches von 0,4 v. T. erhält man C_v-Prüfgas auf den Bruchteil Δ genau:

$$\Delta\text{-Prüfgas} = 0{,}0004\left(1 + \frac{C_v \cdot \text{Molproz. Beigas}}{C_v \cdot \text{Molproz. Prüfgas}}\right).$$

Um für das C_v-Prüfgas diese Genauigkeit zu bekommen, muß anderseits C_v-Beigas auf den Bruchteil:

$$\Delta\text{-Beigas} = 0{,}0004\left(1 + \frac{C_v \cdot \text{Molproz. Prüfgas}}{C_v \cdot \text{Molproz. Beigas}}\right)$$

genau bekannt sein.

Dasselbe Δ-Prüfgas (Δ-Beigas) gilt für die nötige Genauigkeit, womit man die Konzentration kennen muß an Prüf- (Bei-) Gas in Molproz. (= Volproz.) Meßgas ausgedrückt.

Z. B. wird bei N_2 als Beigas sogar noch
ein $C_v = 30$ bei 2 Proz. Prüfgaskonz. auf 3,7 v. T. genau,
„ $C_v = 40$ „ 1 „ „ „ 5 „ „ „
was den vom Mischverfahren allein herrührenden Fehler anlangt; oder man braucht, wenn man 2 v. H. H_2 einem Gas mit $C_v = 10$ beimischt, C_v H_2 nur auf 4 v. H. genau zu kennen.

B. Die Mischgasmethode

Man handhabt hier die C_v-Messung im ganzen wie bei reinen Gasen. Fragestellungen, Berechnungsweisen, Genauigkeitsfragen sind a. a. O.[1]) behandelt. Nur die Wirkung des Mischverfahrens auf die DM-Ausschläge bleibt zu besprechen.

Die *Wirkung des Mischverfahrens auf die Wärmeabgabe ans Gas.* Man behandelt hier zweckmäßig getrennt:

1. Die Wirkung auf die *Abkühlungsgeschwindigkeit der Heizkörper.* N_2 mit kleinem Zusatz eines Dampfes wird nur wenig anders isolieren als etwa reiner N_2. Daher wird der Zeitverlauf der Abkühlung des Heizkörpers sich nicht erheblich ändern; meist dürfte die Änderung fast oder auch ganz in der Fehlergrenze bleiben. Da es aber auf die Differenz der Abkühlungsgeschwindigkeiten ankommt, wenn man die Differentialausschläge betrachtet, vor allem ihr Anfangsstück, so wird dieses den Einfluß nicht selten merken lassen. Kühlt es besser, schlägt es zu früh.

2. Die *Strahlungsemission* wird deshalb auch in der Hauptsache gleich bleiben, wohl innerhalb der Fehlergrenze. Allenfalls kann sie durch die Kühlung bei Zusatz von sehr wasserstoffreichen und deshalb wasserstoffähnlichen Dämpfen etwas verringert werden. Dann kommt der Ausschlag von dem betreffenden Gas her zu früh.

3. Die *Strahlungsabsorption* dagegen, weil im wesentlichen *un*abhängig von der Temperatur, kann sich bei kleinen Dampfzusätzen recht stark ändern, so daß es zu merklichem Wärmegewinn des Gases aus der Strahlung, also zu einem zu kleinen C_v kommt, und zu einem zu frühen Ausschlag von ihm.

Man darf also, namentlich aus den Erstausschlägen folgendes schließen:

1) M. Trautz, a. a. O., S. 483—489.

Gas schlägt früh Ursachen:	Gas schlägt spät Ursachen:
I. Starke Infrarotabsorption (z. B. bei OH im Dampf)	Schwache Infrarotabsorption (Wenig entwickelte thermische Freiheiten)
oder II. Große Temperaturleitung Das gemessene C_v wird zu klein	*oder* Kleine Temperaturleitung C_v wird zu groß

Übersichtstafeln

1. Kennzahlen des Apparats für C_v-Messung Reproduzierbarkeit, Genauigkeit, Empfindlichkeit

I. *Differentialmanometrie*

Rohrweite	3 mm
Flüssigkeitslänge . .	20—30 mm
Neigung	2°
Flüssigkeit	Benzoesäureäthylester
Empfindlichkeit . . .	1 mm = $5{,}5 \cdot 10^{-3}$ mm Hg = $7{,}2 \cdot 10^{-6}$ Atm.
Ablesegenauigkeit . .	$^1/_{150}$ mm Ester
Empfindlichkeitsgrenze	$1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Atm.
Reproduzierbarkeit . .	2 v. T. für statische Ausschläge 0,4 v. T. für nicht statische Ausschläge

II. *Heizung*

Heizenergie extrem (Wandverlust rund 2 v. H. davon) .	0,05—0,25 cal
Primärstromstärke im Mittel	2—4 Amp.
Stromstoßdauer rund	$^1/_7$ Sek.
Meßmoment nach Stromunterbrechung rund	2—4 Sek.
Höchsttemperatursteigerung des Heizkörpers rund . . .	50—100°
Wölkchentemperatur über der Manteltemperatur rund .	2°
Manteltemperatursteigerung maximal	0,003°

Bezugstemperatur des gemessenen C_v ist die Manteltemperatur. Alle Korrektionen auf ideales Gas sind für die Bedingungen des Mantelgases anzusetzen.

Drucksteigerung	$5 \cdot 10^{-5}$
Volumen der Ölflasche	60—120 Liter
Volumen der Meßflasche rund	70 Liter

III.

Empfindlichkeitsgrenze an C_v . . . . 0,4 v. T.
zugleich maximale Absolutgenauigkeit.

2. Wesentliche apparative Maßnahmen (Übersicht)

I. *Manometrie*

Flüssigkeits-Differentialmanometer mit
kurzer Säule, nicht zu starker Rohrneigung, kleiner Dämpfung, konstanter Temperatur, betrachtet mit stärkerer optischer Vergrößerung.

II. *Heizung*

Heizkörper mit kleinem Temperaturkoeffizienten des Widerstands (Pt–Ag)
aus langen, dünnen, schmalen Streifen,
mit (großer Oberfläche) möglichst tiefer Temperatur,
beide Heizkörper möglichst gleich, nur 2 Zuleitungen.
Rohrvolumen zwischen den Flaschen klein.
Form der Ölflasche so, daß O/V bei der Ölvariation konstant bleibt.

3. Wesentliche experimentelle Maßnahmen (Übersicht)

I. *Manometrie*

Schleppung auf Null beobachtet } zur Kontrolle photograph.
allenfalls Nullschnitt „ } registriert
erreichbar mit *Variation der Ölfüllung* und der *Strombelastung* und wenn nötig mit *Mischgasmethode*, oder *zeitlicher Stromstoßstufung*.

II. *Heizung*

„Konstanz" des Primärstroms (bei den bisherigen Heizkörpern auf 0,02 Amp.; bei untereinander ähnlicheren reicht geringere Genauigkeit aus). Er sei so klein als möglich.

„Konstanz" der Flaschentemperaturdifferenz, soweit möglich.

Mehrere Doppelversuche nebeneinander im selben Apparat am selben Gas (Ölvolumen dabei möglichst wenig variieren).

Serie- und Parallelmessung (Eliminierung des Meßgasfehlers am Heizkörper). Wenn nötig Mischgasmethode für möglichst gleiche Heizkörperkühlung.

4. Zwecke und maßgebende Faktoren bei der Mischgasmethode

a) für	b) für	c) für	d) für
Gleichzeitig wandernde gleiche *Wölkchenform geeigneter Art*	Gleiche Heizkörperkühlung	Gleiche Wandableitung	Meßbereicherweiterung (*Dampfdruck*)
maßgebend: *Wärmeleitungen und Reibung*		maßgebend: *Temperaturleitung*	
Geeignete Wölkchen*form* ist unerläßliche Meßbedingung. Bekämpfung von [Ungleichzeitigkeit der Wölkchenwanderung]	Bekämpfung von „Inkonstanz" [der Energieverteilung], d. Strahlungsverlusts [d. Fußverlusts, d. Wärmerests]	Bekämpfung von „Inkonstanz" des Wandverlusts	

[ ] bedeutet, daß der Fehler apparativ vermeidbar und also diese Korrektionen zu umgehen sind.

5. Zweck der Verwendung von Serien- und Parallelschaltung ist die Bekämpfung der „Inkonstanz" der Energieverteilung vom Meßgas und von der Änderung der Flaschentemperaturdifferenz her.

6. Kurze Übersicht einer vollständigen C_v-Messung

(Umständlicherer Fall: Das Prüfgas ein Dampf)

1. Überschlagsberechnungen der zu erwartenden Dampfkonzentration (aus dem Dampfdruck) und das C_v-Meßgas; gegebenenfalls auch (aus der Wärmeleitfähigkeit) der nötigen Beigasmengen zur Erzielung gleicher Heizkörperkühlung (evtl. mit Vorversuch dafür). Dementsprechend dosiert man für die Meßversuche die Gase bei der Füllung [Gase manometrisch, Dämpfe durch die Temperatur des Kondensats, durch welches man das (Haupt-) Gas perlen läßt].

2. Durchführung der C_v-Messung in mehreren Doppelversuchen (3 und 4 Amp., bei Parallel- und Serienschaltung der Heizkörper).

Aus den Normier- und Meßvolumina erhält man C_v-Meßgas nach:

$$C_v\text{-}\mathit{Meßgas} = C_v\text{-Normiergas}\cdot\frac{(\text{Meßvol.}\cdot\text{Dichte}\cdot\text{Spann.-Koeff.})\cdot\text{Meßgas}}{(\text{Normiervol.}\cdot\text{Dichte}\cdot\text{Spann.-Koeff.})\cdot\text{Normiergas}}$$

3. Apparative und experimentelle Korrektionen sind daran anzubringen.

[Δ_p ($= \Delta_t$) wird aus der C_v-Messung selbst entnommen (Δ_t in Δ_p enthalten) (Differenz von C_v-Messung bei Parallel- und Serienschaltung).]

Δ_{Str} wird genähert mit der Wärmeleitfähigkeit berechnet, sofern nicht experimentell bestimmt oder infolge Mischgasmethode entbehrlich.

Δ_w wird mit der Temperaturleitfähigkeit der Gase berechnet.

Δ_r und $\Delta_{O/V}$ erhält man mit dem C_v-Wert der Gase.

4. Aus dem so korrigierten C_v-*Meßgas* wird das gesuchte C_v-*Prüfgas* unter Benutzung der Konzentrationen berechnet. Diese kennt man aus der Dosierung bei der Füllung oder aus der Präzisionsanalyse des Meßgases.

Analyse, statt chemisch, möglichst durch Tiefkühlung und Kondensatwägung, und tunlichst mittels Restgasmethode.

Die nötige Genauigkeit der Konzentrationsmessungen geben die Größen Δ_P und Δ_B an.

5. C_v-Prüfgas wird so optimal auf seinen Bruchteil Δ_P genau erhalten.

7. Gesamtübersicht der Korrektionen am gemessenen C_v

1. Inkonstanz der *Flaschentemperatur* (S. 27):

$$|\Delta_t| = \alpha\,[(t_1' - t_1) - (t_2' - t_2)] = \alpha\,[(t_1' - t_2') - (t_1 - t_2)]$$

bei Parallschaltung $+ \Delta_t$,

bei Serienschaltung $- \Delta_t$,

oder: Experimentelle Bestimmung von Δ_t aus Parallel- und Serienmessung.

[2.] Inkonstanz der *Energieverteilung* (S. 33):

$$\Delta_p \cdot \frac{W_1}{W_2} = \Delta_s \cdot \frac{W_2}{W_1} = -\alpha[(\vartheta_1 - \vartheta_2) - (\vartheta_1' - \vartheta_2')],$$

$$\text{genügend genau} = -\alpha(\overline{\vartheta}_2' - \vartheta_2)$$

oder genauer: Experimentelle Bestimmung aus Parallel- und Serienmessung, wobei

$$C_v \text{ wahr} = \frac{C_v \text{ par.} + C_v \text{ ser.}}{2} \text{ für } w_1 = w_2 .$$

Verlustkorrektionen

3. Inkonstanz des *Strahlungsverlustes* (S. 55):

Δ_{Str} wird aus der Stromstärke–Abhängigkeit des sonst vollständig korrigierten $C_{v\,roh}$ durch Extrapolation auf Stromstärke Null bestimmt.

[4.] Inkonstanz des *Fußverlustes* (S. 55):

Δ_F' läßt sich bei zweckmäßigen zweifüßigen Heizkörpern zum Teil vermeiden. Wird andernfalls aus ihren Abkühlungskurven bestimmt.

5. Inkonstanz der *Rohrableitung* (S. 41 u. 57):

$$\Delta_r = \left[\left(\frac{v}{V}\right)_M \cdot \left(\frac{R}{C_{p_N}} - \frac{R}{C_{p_M}}\right)\right] - \left[\left(\frac{v}{V_N}\right)_O \cdot \frac{R}{C_{p_L}} \cdot \left(1 - \frac{C_v\text{-Normiergas}}{C_v\text{-Meßgas}}\right)\right].$$

6. Inkonstanz des *Wandverlustes* (S. 57):

$$\Delta_w = -\left[(y_m)_s \cdot \frac{R}{C_{p_L}} \cdot \frac{\frac{O}{V}\text{ Ölflasche Normierversuch} - \frac{O}{V}\text{ Meßflasche}}{\frac{O}{V}\text{ Meßflasche}}\right]$$

$$+\left[(y_m)_{s'} \cdot \frac{R}{C_{p_L}} \cdot \frac{\frac{O}{V}\text{ Ölflasche Meßversuch}}{\frac{O}{V}\text{ Meßflasche}} - (y_m)_{s'} \cdot \frac{v}{l} \cdot \frac{R}{C_{p_M}}\right]$$

für Luft als Normiergas.

7. *Genauigkeit der Mischgasmethode.* Umrechnung der Konzentrationen bei ihr. Genauigkeit des gemessenen C_v-Prüfgas und nötige Genauigkeit seiner Konzentration

$$\Delta_P = 0{,}0004\left(1 + \frac{C_v \text{ Molproz. Beigas}}{C_v \text{ Molproz. Prüfgas}}\right).$$

Nötige Genauigkeit des C_v-Beigases und der Beigaskonzentration

$$\Delta_B = 0{,}0004\left(1 + \frac{C_v \text{ Molproz. Prüfgas}}{C_v \text{ Molproz. Beigas}}\right).$$

Die in Klammern gesetzten Nummern sind bei der Mischgasmethode für hinreichend gleiche Heizkörperkühlung entbehrlich.

8. Übersicht über Vorzeichen und Größe der Korrektionen an Beispielen.

Gas	Prüfgas: Molproz. im Meßgas	Prüfgas: Molarwärme C_v	Meßgas mittl. Molarwärme C_v	Wärmeleitfähigkeit: Prüfgas $\lambda \cdot 10^4$	Wärmeleitfähigkeit: Meßgas $\lambda \cdot 10^4$	Meßgas Temperaturleitfähigkeit $a \cdot 10^1$	$\Delta_p = -\Delta_s$ bei Pt-Ag v. T.	Δ_F v. T.	Δ_{Str} v. T.	Δ_r v. T.	Δ v. T
Luft	100	4,98	4,98	0,56	0,56	2,54	—	—	—	—	–
N_2	100	4,99	4,99	0,56	0,56	2,52	—	—	—	—	–
O_2	100	4,99	4,99	0,57	0,57	2,56	—	—	—	—	−0,
CO_2	100	6,89	6,89	0,33	0,33	1,073	−1,6∼2	−2∼ 5	−1	−0,6	+7,
H_2	100	4,87	4,87	4,1	(ungenau)	18,9	+2∼8	+5∼12	+2	+0,1	−32
CH_4	100	6,52	6,52	0,72	0,72	2,48	0∼+0,6	+0∼ 1	+0,3	−0,5	+1,
C_6H_6	3,3	21,8	5,55	0,25	0,64	2,60	0 ∼ 0,4	+1,1	+0,4	−0,2	+0,
Äthylacetat	3,2	30	5,8	0,23	0,66	2,57	0 ∼ 0,4	+1,4	+0,4	−0,3	+3,
Aceton	9,2	19	6,3	0,26	0,62	2,20	0 ∼ 0,4	+0,8	+0,3	−0,5	+2,
Ar	100	3,07	3,07	0,39	0,39	2,85	−1,0-1,2	−1,4-3,4	−0,6	+1,6	−0,

Die stark eingerahmten Korrektionen können bei zweckmäßiger Anordnung verschwinden, so daß nur die Strahlungskorrektion Δ_{Str} und die beiden Leitungskorrektionen Δ_r und Δ_w übrigbleiben.

Mangelhafte Vollständigkeit und Ungenauigkeit derjenigen Zahlen, deren man für die Korrektionen bedarf, d. h. eben die Spärlichkeit der Wärmeleitungsmessungen bedingt, daß sich die Korrektionen in dieser Tafel nicht so genau auswerten lassen, wie es heute sonst möglich wäre.

Zusammenfassung

1. Experimentell und theoretisch wurde untersucht, welche *Voraussetzungen für die Berechnung von C_v-Messungen* (mit der elektrischen Differentialmethode) nach den in der ersten Abhandlung[1]) gegebenen Formeln *nicht streng erfüllt* sind und deshalb konstante methodische Fehler bedingen.

2. Experimentell und theoretisch wurde festgestellt, wie und mit welchen Hilfsmitteln man sich der gewünschten *Erfüllung der Voraussetzungen* am meisten *annähert.* Manche Fehler lassen sich selbsttätig beseitigen.

3. Die konstanten Fehler rühren von *mangelhafter Gleichheit der beim Differentialverfahren verglichenen Erscheinungen* zwischen beiden Teilen des Doppelversuchs.

1) Vgl. M. Trautz, Ann. d. Phys. 83. S. 457—497. 1927.

4. *Ausdrücke für die Bestimmung dieser Fehler* und Wege zu ihrer experimentellen Ermittlung werden zusammengestellt.

5. Eine Übersicht zeigt die *Ungefährbeträge* dieser Fehler, worunter der von Wärmeableitung zur Flaschenwand herrührende am größten sein kann.

6. Die Fehler lassen sich, sofern man nicht zur Messung von Gasmischungen genötigt ist, *unter* $^1/_2$ *Promille* bringen; damit ist die Aufgabe, *der Reproduzierbarkeit eine gleiche Genauigkeit der absoluten* C_v*-Werte an die Seite zu stellen*, praktisch durchführbar gelöst. Als besonders wichtige Zusatzaufgabe, Nebenergebnis der Korrektionsbestimmung, erscheint die Verbesserung der heutigen Kenntnisse über die wahre Wärmeleitung der Gase.

(Eingegangen im April 1928)

2. *Eine experimentelle Methode zur Bestimmung des ballistischen Entmagnetisierungsfaktors; von Ernst Dussler*[1])

1. Einführung in das Problem

Das erste Ziel jeder ferromagnetischen Untersuchung ist die Auffindung des Zusammenhangs zwischen der Magnetisierung und dem magnetisierenden Feld. Wenn das zu untersuchende Material homogen und isotrop ist und Ellipsoidgestalt besitzt, so ergeben sich keinerlei Schwierigkeiten, da man diesen Fall mathematisch vollkommen beherrscht.

Will man aber die mühsame Herstellung von Ellipsoiden umgehen oder ist diese wegen der oft bei der mechanischen Bearbeitung eintretenden Veränderung der magnetischen Eigenschaften unmöglich, so ist man darauf angewiesen, die Probe in der gegebenen, im häufigsten Fall, kreiszylindrischen Gestalt zu untersuchen. Auch hier ist die Messung der Magnetisierung noch leicht, doch der Bestimmung des wahren Feldes setzen sich große Schwierigkeiten entgegen.

Im folgenden soll eine Methode beschrieben werden, die diese Schwierigkeit überwindet und die durch Messungen an Ellipsoiden und kreiszylindrischen Stäben begründet wurde, jedoch auch bei beliebig zylindrischer oder quaderförmiger Gestalt der Probe Anwendung finden kann.

Ein magnetisierter Stab kann als aus vielen Dipolen bestehend gedacht werden, deren Achsen mit der Stabachse zusammenfallen und deren Pole symmetrisch zur Stabmitte liegen. Um ein qualitatives Bild der Verhältnisse zu bekommen, genügt es also, einen Dipol zu betrachten. In Fig. 1 ist ein Dipol $A'B'$ des Stabes AB dargestellt. Das äußere, d. h. das aus den Dimensionen der Magnetisierungsspule berechnete Feld $\mathfrak{H}$ macht den Stab am Ende A negativ und bei B positiv magne-

1) I. Teil der Tübinger Dissertation des Verfassers.

tisch. In den Punkten P_1, P_2 und P_3 ist das vom Dipol allein herrührende Feld gezeichnet. Es ist von Punkt zu Punkt verschieden. Insbesondere ist es für alle Punkte der Achse (z. B. P_1) und der Äquatorebene (z. B. P_3) dem ursprünglichen Feld $\mathfrak{H}$ entgegengesetzt parallel. In allen anderen Punkten zwischen A' und B' läuft es wenigstens mit einer Komponente dem Feld $\mathfrak{H}$ entgegen; überall also schwächt es dieses um einen von Punkt zu Punkt verschiedenen Betrag $\mathfrak{H}_e$. Man be-

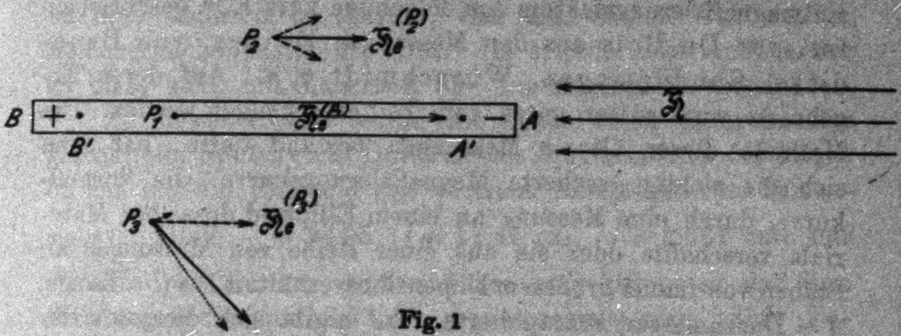


Fig. 1

zeichnet diese Größe als das vom Dipol herrührende *entmagnetisierende Feld.*

Für das Innere eines Ellipsoids ist $\mathfrak{H}_e$ ortsunabhängig und proportional der Magnetisierung J, also:

$$\mathfrak{H}_e = N \cdot J.$$

Den Porportionalitätsfaktor N bezeichnet man als den *Entmagnetisierungsfaktor des Ellipsoids.*

Formal kann man das entmagnetisierende Feld $\mathfrak{H}_e^{(P)}$ eines zylindrischen Stabes im Aufpunkt P ebenfalls in der Form darstellen:

$$\mathfrak{H}_e^{(P)} = N \cdot J,$$

wobei aber N vom Ort und, wie sich zeigen wird, vor allem auch von der Suszeptibilität abhängig ist.

Von besonderer Wichtigkeit ist der Wert von N für die Stabmitte, der sog. *ballistische Entmagnetisierungsfaktor* [1]), ballistisch deshalb genannt, weil er gestattet das zur ballistisch

1) Erstmalig definiert bei Joseph Würschmidt, „Theorie des Entmagnetisierungsfaktors und der Scherung von Magnetisierungskurven", S. 43. Sammlung Vieweg, Heft 78. 1925.

gemessenen Magnetisierung gehörende wahre Feld im Stab

$$\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H} - \mathfrak{H}_e = \mathfrak{H} - NJ$$

zu bestimmen.

Der in der Literatur sich findende *magnetometrische Entmagnetisierungsfaktor* ist eine Korrektionsgröße allgemeinerer Art, wie später gezeigt werden wird.

2. Beschreibung und Begründung der Methode

Es liegen bereits einige Bestimmungen[1]) des ballistischen Entmagnetisierungsfaktors (im folgenden kurz E.F. geschrieben) vor, von Du Bois aus den Messungen Ewings, von Benedicks, Shuddemagen, Würschmidt u. a. Auf deren Ergebnisse wird weiter unten zum Teil eingegangen werden. Die Methode dieser älteren Messungen bestand darin, daß man sich die richtig gescherte Magnetisierungskurve, die Normalkurve, durch eine Messung an einem Ellipsoid desselben Materials verschaffte oder sie aus einer Reihe von Messungen an Stäben von immer größerem Dimensionsverhältnis l/d (l = Länge, d = Durchmesser) extrapolierte. NJ ergibt sich dann als der horizontale Abstand ($\mathfrak{H}$-Achse horizontal, J-Achse vertikal) der Punkte gleicher Magnetisierung der Normalkurve und der ungescherten Kurve. Ähnlich entnahm Würschmidt die Werte NJ aus dem Abstand der nach der Erschütterungsmethode erhaltenen Punkte der idealen[2]) Magnetisierungskurve von der J-Achse.

Prinzipiell davon verschieden ist die hier zu beschreibende Methode, welche gestattet für jeden einzelnen Punkt der Magnetisierungskurve direkt den E.F. zu messen und die vor allem weder Homogenität noch Isotropie des zu untersuchenden Materials voraussetzt. Sie beruht auf dem *Satz vom stetigen Übergang der Tangentialkomponente der Feldstärke von einem Medium zum andern.*[3]) Die Feldstärke im Stab, unmittelbar

1) H. du Bois, Magnetische Kreise. S. 45. 1894; C. Benedicks Ann. d. Phys. 6. S. 726. 1901; C. L. B. Shuddemagen, Proc. Amer. Acad. 43. S. 185. 1907; J. Würschmidt, a. a. O. S. 50.

2) E. Gumlich u. R. Steinhaus, Verh. d. Dtsch. Phys. Ges. S. 369. 1915; J. A. Ewing, Magnetische Induktion S. 110. 1892.

3) Dieser Satz wurde, wie dem Verfasser nachträglich bekannt wurde, bereits von E. Gumlich u. W. Rogowski (Elektrot. Ztschr. 1912. S. 262) zur Feldmessung beim Epsteinschen Apparat und von E. Gumlich (Arch. f. Elektrot. 2. S. 465. 1914) zur Messung des Feldes bei der Joch-Isthmusmethode in ähnlicher Weise angewendet.

unter der Oberfläche, ist gleich der außerhalb des Stabes unmittelbar über der Oberfläche. Dies gilt auch noch für einen Aufpunkt, der eine endliche Entfernung von der Oberfläche hat, wenn nur die Abstände Pol-Aufpunkt und Pol-Stabmitte nahe gleich sind. Diese Bedingung ist für die Punkte nahe der Stabmitte bei zylindrischen Stäben von großem Dimensionsverhältnis (im folgenden kurz D.V. geschrieben) sehr vollkommen, bei solchen mit kleinerem mit einer gewissen Annäherung erfüllt. Es muß also möglich sein, das wahre Feld im Stab dadurch zu messen, daß man seinen Wert an der Staboberfläche bestimmt. Über die erforderliche Annäherung an diese kann mit Sicherheit nur das Experiment entscheiden.

Zu diesem Zwecke wurde eine Anzahl enger hintereinander geschalteter Spulen vom Durchmesser 2,91 mm und der Länge 35 mm auf ein Ellipsoid aus weichem Remystahl vom Dimensionsverhältnis $\frac{l}{d} = 24{,}95$ ($l = 17{,}47$ cm, $d = 0{,}661$ cm) mit Paraffin parallel zur großen Achse aufgekittet, so daß ihre Windungsfläche parallel zur Äquatorebene war. Ihre Zuleitungen waren mit einem empfindlichen ballistischen Galvanometer verbunden. Zur Ausführung einer Messung wurden die Spulen über einen Glasstab geschoben und achsenparallel in das homogene Feld einer langen Magnetisierungsspule gebracht. Der beim Kommutieren des Feldes $\mathfrak{H}$ entstehende Induktionsausschlag E ist proportional diesem Feld und der Windungsfläche. Nachdem dieser Ausschlag durch eine Gegeninduktion kompensiert war, wurde der Glasstab durch das Ellipsoid ersetzt. Jetzt erhält man beim Kommutieren des Feldes einen dem ursprünglichen entgegengesetzten Ausschlag e, der ein Maß für die Entmagnetisierung NJ ist. Es ergibt sich

$$NJ = -\frac{\mathfrak{H}}{E}\cdot e$$

$$|N| = \left|\frac{\mathfrak{H}\,e}{E\,J}\right|.$$

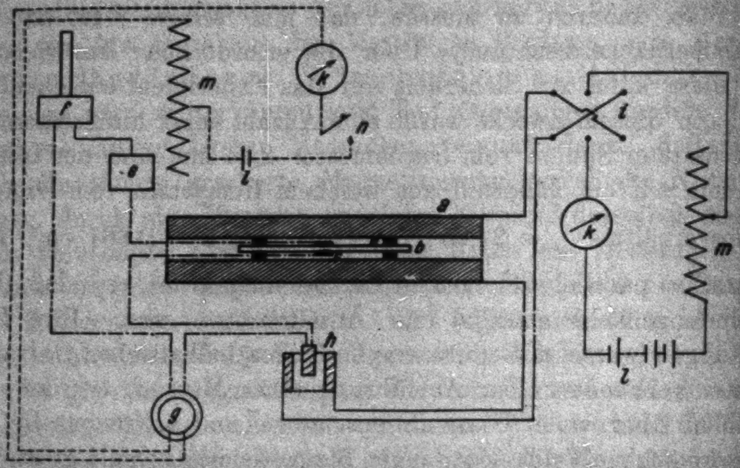
Zum Teil wurde auch ohne Kompensation gearbeitet, dann ergibt sich

$$\mathfrak{H}_0 = \frac{\mathfrak{H}}{E}\cdot e',$$

wenn e' der vom wahren Feld $\mathfrak{H}_0$ erzeugte Kommutierungsausschlag ist. Im allgemeinen wurde bei den folgenden

Messungen die Methode verwendet, welche die kleinsten Galvanometerausschläge ergab.

In Fig. 2 ist die Versuchsanordnung schematisch gezeichnet. Die Bedeutung der einzelnen Teile folgt aus der Unterschrift der Figur. Die Entfernungen zwischen der Magnetisierungsspule *a*, der Kompensationsspule *h* und dem Eichnormal *g* betrugen je 2,5—5 m. Außerdem lag die Magnetisierungsspule horizontal, während die Kompensationsspule vertikal gestellt



a Magnetisierungsspule, *b* Eisenstab, *c* Spulen zur Messung der Entmagnetisierung, bzw. Sekundärspule zur Messung der Magnetisierung. *d* Hartgummihalter, *e* Stöpselrheostat, *f* ballistisches Galvanometer, *g* Normal der wechselseitigen Induktion von 0,01 Henry, *h* Kompensationsspulen, *i* Kommutator, *k* Milliamperemeter, *l* Akkumulatoren, *m* Schiebewiderstände, *n* Stromschlüssel.

Fig. 2

war. Dadurch wurde eine gegenseitige Beeinflussung verhindert, was auch durch den direkten Versuch bestätigt wurde.

Die Magnetisierung J des Ellipsoids wurde magnetometrisch bestimmt. Die in diese Messung eingehende Horizontalkomponente des Erdfeldes wurde mit Hilfe einer Normalspule von 6 Windungen und 13,06 cm Durchmesser, also genau berechenbarem magnetischem Moment, an Ort und Stelle, unmittelbar vor der Messung festgestellt.

Der so gemessene Wert N war aber noch um etwa 20 Proz. kleiner wie der aus dem D.V. berechnete. Es wurden

deshalb die Spulen systematisch verkleinert. Bei einem Durchmesser von 1,4—1,6 mm und einer Länge von 20 mm betrug die Abweichung nur noch etwa 8 Proz.

Schließlich ergaben Spulen von 18 mm Länge und 0,9 bis 1,0 mm Dicke Werte, die mit dem theoretischen gut übereinstimmten, wie Tab. 1 zeigt. Bei der Mittelbildung wurden die einzelnen Werte entsprechend ihrer Genauigkeit mit verschiedenem Gewicht eingesetzt.[1]) Die Spulen waren mit einer dünnen Seidenpapierunterlage auf das Ellipsoid gekittet, so daß die fernsten Teile der dicksten Spule um 1,18 mm von der Staboberfläche entfernt waren.

Tabelle 1

J	NJ	Genauigkeit v. NJ in %	N[2])	Genauigkeit v. N in %	Beob.-theoret. Wert in %
91,2	5,75	4	0,063	6	7
248	15,8	2	0,062	4	5,5
445	25,8	1	0,058	3	−1,2
625	36,0	0,7	0,058	2,7	−1,2
790	45,5	0,5	0,0575	2,5	−2

Mittel der gemessenen Werte $N = 0{,}0591$
Theoretischer Wert $N = 0{,}0587$

Die Theorie liefert für das auf der Ellipsoidoberfläche herrschende Feld $\mathfrak{H}_0'$ in einem Punkt mit den auf die Ellipsoidachsen bezogenen Koordinaten x, y (x-Achse = Rotationsachse)

$$\mathfrak{H}_0' = \mathfrak{H}_0 + 4\pi J \cdot \left(\frac{d}{l}\right)^4 \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^2.$$

$\mathfrak{H}_0$ bedeutet wieder das wahre Feld im Innern des Ellipsoids. Die Enden der Meßspulen reichten demnach in ein Gebiet, in dem die Entmagnetisierung NJ höchstens um $^1/_2$ Proz. kleiner ist wie am Äquator. Die obige Messung kann also mit Recht als einwandfreie Begründung der Meßmethode angesehen werden.

Das benutzte Ellipsoid ist mit guter Annäherung ein mathematisches, denn berechnetes und durch Auftriebsbestimmung gemessenes Volumen unterscheiden sich nur um 0,8 Proz.

---

1) Bei der Berechnung des in der vorläufigen Mitteilung in der Ztschr. f. Phys. **44**. S. 286. 1927 angegebenen Wertes $N = 0{,}0586$ wurde die etwa 2 Proz. betragende Unsicherheit von J nicht berücksichtigt.

2) Zur sicheren Entscheidung, ob der Gang, den N zeigt, reell ist, reichte die Meßgenauigkeit nicht aus.

Das ist wesentlich, denn ein zweites Ellipsoid, bei dem sich beide Volumina um mehr als 2 Proz. unterscheiden, gab um 4 Proz. zu kleine Werte für *N*. Das ist verständlich, wenn man bedenkt, daß der E.F. des gleichdimensionierten zylindrischen Stabes um 20 Proz. kleiner ist.

3. Abhängigkeit des Entmagnetisierungsfaktors eines kreiszylindrischen Stabes von der Suszeptibilität

Einen weiteren Beweis für die Brauchbarkeit der Methode lieferten Messungen an einem homogenen Elektrolyteisenstab vom D.V. $\frac{l}{d} = 50$ ($d = 3{,}85$ mm). Die Magnetisierung wurde hier und bei allen folgenden Messungen ballistisch bestimmt. Die Empfindlichkeit des verwendeten ballistischen Galvanometers wurde vor oder nach jeder Messung mit Hilfe eines in den Sekundärkreis dauernd eingeschalteten Normals von 0,01 Henry wechselseitiger Induktion festgestellt (Fig. 2). Eine lange Primärspule lieferte ein homogenes Feld. Die Sekundärspule hatte eine Länge von 6 mm.

Zur Messung der Entmagnetisierung wurden zunächst die weiteren Spulen von 2,91 mm Durchmesser und 35 mm Länge benutzt. Schon diese ergaben gute Näherungswerte, wie Tab. 2

Tabelle 2

Experimentelle Werte			Theoretische Werte	
J	$\varkappa$	$10^4 \cdot N$	$\varkappa$	$10^4 \cdot N$
—	—	—	∞	149
169	89	132	—	—
528	118	110	—	—
763	109	110	100	122
1008	105	102	—	—
1320	75	101	50	111
1426	50	88	—	—
1469	37	75	—	—
1494	29	64	20	85
1518	20	51	—	—
1545	16	45	10	63
1590	11	39	—	—
1618	8	35	5	42
1663	5	33	—	—
1690	4	28	—	—
1709	3	28	—	—
1713	3	27	2	31
1722	2	—	—	—

zeigt. Links stehen die gemessenen Werte, rechts zum Vergleich Würschmidts berechnete Näherungswerte und der für die Suszeptibilität $\varkappa \to \infty$ genau berechnete Wert $N = 0{,}0149$.

Die theoretisch verlangte Abnahme des E.F. mit abnehmender Suszeptibilität ist deutlich zu erkennen. Allerdings sind die experimentellen Werte noch wesentlich kleiner. Eine größere Anzahl von Messungen an Stäben von anderen D.V. gab dasselbe Ergebnis.

Um festzustellen, ob eine bessere Annäherung zu bekommen ist, wurde die Entmagnetisierung NJ desselben Stabes jetzt mit den kürzeren Spulen von 0,9—1,0 mm Durchmesser bestimmt. Das Ergebnis zeigt Tab. 3. In der zweiten Spalte stehen die zu NJ proportionalen Galvanometerausschläge. Sie sind auf etwa $^1/_{10}$ Skalenteile sicher, da jeder Wert das Mittel aus mindestens zwei Ablesungen darstellt und die Güte des Skalenbildes

Tabelle 3

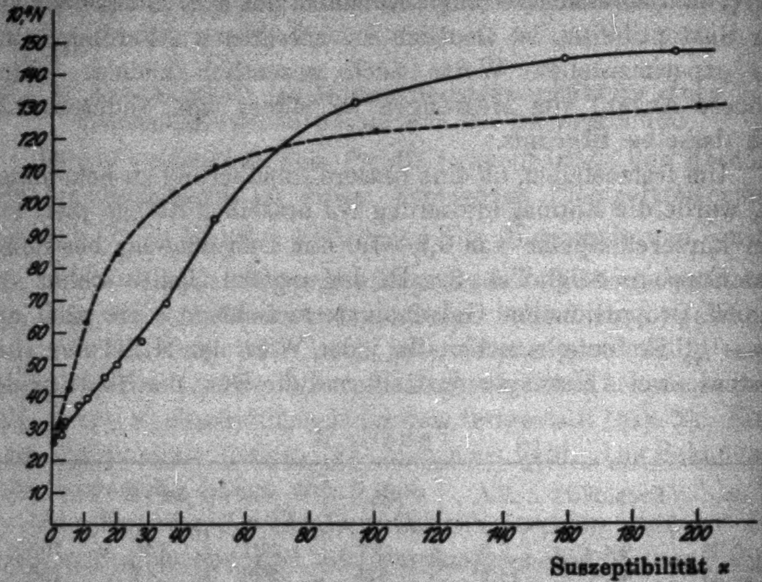
$\mathfrak{H}$	Prop. NJ	NJ	$\mathfrak{H}_0$	J	$10^4 \cdot N$	$\varkappa$
10,28	2,4	7,6	2,7	521	146	193
20,57	4,5	14,3	6,3	998	144	158
30,85	5,35	16,95	13,9	1303	131	93,8
41,14	4,2	13,3	27,8	1411	95	50,8
51,42	3,15	9,97	41,45	1441	69	34,8
61,70	2,65	8,4	53,3	1471	57	27,6
82,27	2,34	7,4	74,9	1501	50	20,1
102,8	2,2	7,0	95,8	1525	46	15,9
154,3	1,95	6,2	148,1	1568	39	10,6
205,7	1,85	5,9	199,8	1597	37	8,0
411,4	1,7	5,4	406,0	1670	32	4,1
617,1	1,5	4,75	612,3	1690	28	2,8

Theoretischer Wert $\underset{\varkappa \to 0}{N} = 0{,}0025$

$^1/_{10}$ Skalenteil ziemlich sicher zu schätzen erlaubte. Die Werte der Magnetisierung J sind auf ± 1 Proz. richtig, die Anfangswerte des E.F. also auf etwa 3—5 Proz. Allerdings ergibt sich daraus das wahre Feld nur mit einer $2—2\,^1/_2$ mal geringeren Genauigkeit. Vergleicht man den für die höchste Suszeptibilität erhaltenen Wert $N = 0{,}0145$ mit dem von Würschmidt genau berechneten $N = 0{,}0149$ für $\varkappa = \infty$, so sieht man, daß beide Werte gut übereinstimmen.

In Fig. 3 ist N als Funktion von $\varkappa$ aufgezeichnet (ausgezogene Kurve), daneben Würschmidts Näherungskurve (ge-

strichelt). Beide Kurven zeigen etwa denselben Verlauf. Insbesondere streben beide nach demselben Grenzwert für verschwindend kleine Suszeptibilität, nämlich nach $N = 0{,}0025$.



Der Entmagnetisierungsfaktor N eines Elektrolyteisenstabes vom Dimensionsverhältnis $l/d = 50$ als Funktion der Suszepitibilität $\varkappa$ nach der Messung (ausgezogene Kurve, Punkte o). Zum Vergleich Würschmidts theoretische Näherungswerte. Gestrichelte Kurve, Punkte ●)

Fig. 3

Dieser Wert läßt sich leicht berechnen, wenn man homogene Magnetisierung des Stabes voraussetzt. Der Polarabstand ist in diesem Fall gleich der Stablänge l, die Polstärke gleich $\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot J$. Nach dem Coulombschen Gesetz ist dann die Stärke des entmagnetisierenden Feldes in der Stabmitte:

$$\lim_{\varkappa \to 0} \mathfrak{H}_e = \lim_{\varkappa \to 0} NJ = \frac{2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot J}{\left(\frac{l}{2}\right)^2} = 2\pi \left(\frac{d}{l}\right)^2 \cdot J,$$

$$\lim_{\varkappa \to 0} N = 2\pi \cdot \left(\frac{d}{l}\right)^2.$$

Für das D.V. $\frac{l}{d} = 50$ gibt dies $N = 0{,}0025$. Die vollkommene Übereinstimmung des aus der Messung extrapolierten und des so berechneten Wertes beweist rückwärts, daß bei

Sättigung ein zylindrischer Stab homogen magnetisiert ist. Auffallend ist, daß sich die experimentelle Kurve und die theoretische durchschneiden. Diese Abweichung ist nur scheinbar, denn die wahre, aus den Näherungswerten extrapolierte theoretische Kurve liegt durchweg etwas höher, wie der Vergleich des genau berechneten Wertes $N = 0{,}0149$ und des experimentellen $N = 0{,}0146$ zeigt. Die Erklärung dafür wird zum Teil später bei der Diskussion der Materialabhängigkeit des E.F. gegeben werden, wo sich zeigt, daß die ($N, \varkappa$-)Kurve für ein bestimmtes D.V. mit wachsender Suszeptibilität um so stärker ansteigt, je geringer die maximale Suszeptibilität des Materials ist. Würschmidts Rechnung gründet sich aber auf die experimentell festgestellte Verteilung der Magnetisierung längs eines harten Stahlstabes. Außerdem ist zu bedenken, daß die so erhaltene Verteilungskurve durch den von Würschmidt benutzten mathematischen Ansatz zwar gut angenähert, aber nicht vollkommen wiedergegeben wird. Insbesondere geht ein Fehler von $^1/_2$ Proz. bei der Messung von J/J_0 (J_0 maximale Magnetisierung in der Stabmitte, J Magnetisierung in einem um $l/10$ seitlich der Stabmitte gelegenen Punkt) mit 11 Proz. in N ein. Schließlich mußte Würschmidt die vereinfachende Annahme machen, daß die Suszeptibilität längs des ganzen Stabes konstant ist, was in Wirklichkeit sicher nicht erfüllt ist; vielmehr nimmt die wirksame Suszeptibilität mit zunehmender Entfernung von der Stabmitte ab, was für einen Elektrolyteisenstab direkt experimentell nachgewiesen wurde (vgl. S. 91 dieser Abhandlung). Dies wirkt aber ebenfalls im Sinne der obigen Abweichung.

Aus dieser Betrachtung folgt, daß eine vollkommene Identität beider Kurven gar nicht zu erwarten ist, daß aber aus demselben Wert von N für hohe Suszeptibilität, demselben Grenzwert für verschwindende Suszeptibilität und dem gleichen Gang beider Kurven die prinzipielle Richtigkeit der verwendeten Meßmethode folgt.

4. Die Konstruktion der Spulen und ihre Brauchbarkeit

Die Spulen bestanden aus 0,4 mm dicken, 18 mm langen Glasstäbchen. An den Enden waren kleine Glaskügelchen angeschmolzen, um ein Abgleiten der Wicklung zu verhindern.

Diese bestand aus zwei Lagen 0,1-mm-Emaildraht. Die Zuleitungen wurden gut verdrillt und außerhalb der Magnetisierungsspule hintereinander geschaltet. Im folgenden seien diese Spulen kurz als *Nadelspulen* bezeichnet.

Die etwas mühsame Herstellung dieser Spulen machte es wünschenswert, eine einfachere Konstruktion aufzufinden. Es bewährte sich die folgende Methode. Ein Pappstreifen von 0,3 mm Dicke, 20 mm Länge und einer Breite etwas größer als der Stabumfang wurde mit zwei Lagen 0,1-mm-Emaildraht bewickelt und mantelartig so um den Stab herumgelegt, daß die Windungsfläche senkrecht zur Stabachse zu liegen kam. Durch Paraffinieren erhielt diese *Mantelspule* (wie sie kurz genannt sei) die nötige Festigkeit. Mit ihr wurden die obigen Messungen an dem Elektrolyteisenstab wiederholt. Es ergaben sich vollkommen dieselben Werte, weshalb bei den folgenden Untersuchungen an homogenen Stäben diese Mantelspulen benutzt wurden.

Bei der Verwendung der Nadelspulen ist darauf zu achten, daß kein Paraffin zwischen Seidenpapierunterlage und Spulen gelangt. Die Mantelspulen krümmen sich beim Umlegen um den Stab leicht an einer Stelle zu stark und lassen dadurch einen freien Raum zwischen sich und dem Stab, was zu Fehlern Anlaß gibt. Allgemein ist zur Anwendung der Methode erforderlich, daß die Staboberfläche möglichst glatt ist, um ein dichtes Anliegen der Spulen zu gewährleisten und um diese beim Aufschieben und Abziehen vor Verletzung zu schützen.

Die Mantelspulen haben den Nadelspulen gegenüber den Vorteil leichterer und schnellerer Herstellung und größerer Windungsfläche, können aber nur für *eine* Stabdicke benutzt werden, während die Nadelspulen durch Erwärmen leicht abgelöst und auf einen Stab von anderer Dicke aufgekittet werden können. Außerdem sind die Mantelspulen mit Sicherheit nur für homogene Stäbe und hier nur in der Stabmitte brauchbar, weil nämlich beim Umlegen der Spulen um den Stab die Windungen der konvexen Seite sich leicht gegenüber denen auf der konkaven seitlich verschieben, wodurch eine Windungsfläche normal zur Stabachse entsteht, was überall dort, wo eine Normalkomponente der Magnetisierung vorhanden ist, das Meßergebnis vollständig fälschen kann, wie Versuche gezeigt haben.

Nur in Ausnahmefällen gelingt es bei kurzen Spulen, das Verschieben der Windungen zu verhindern. Eine Windungsfläche normal zur Stabachse läßt sich leicht dadurch feststellen, daß man mit der betreffenden Spule an zwei symmetrisch zur Stabmitte gelegenen Punkten die beim Kommutieren des magnetisierenden Feldes entstehenden Galvanometerausschläge mißt. Je nachdem sie ungleich oder gleich sind, ist eine solche vorhanden oder nicht.

5. Abhängigkeit des Entmagnetisierungsfaktors vom Dimensionsverhältnis bei konstanter Stabdicke

Der oben benutzte Elektrolyteisenstab wurde nun nacheinander durch Verkürzen an beiden Enden auf die D.V. 40, 35, 24,6, 9,1 und 5,5 gebracht. Jedesmal wurde die Magnetisierung J ballistisch und die Entmagnetisierung NJ mit einer 10 mm langen Mantelspule gemessen. In der Tab. 4 sind die Ergebnisse aufgeschrieben.

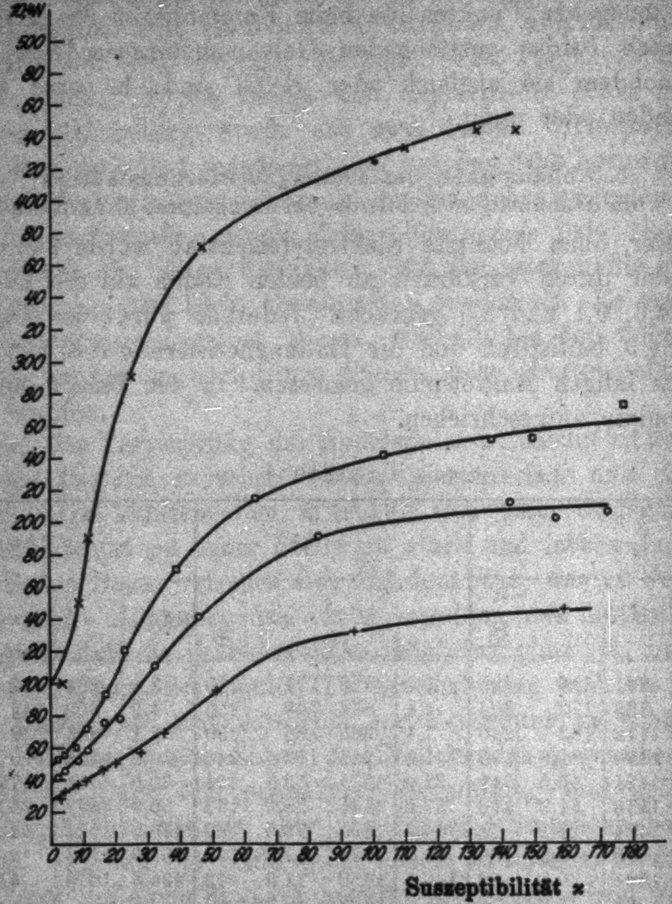
Tabelle 4

$\frac{l}{d} = 40$				$\frac{l}{d} = 35$				$\frac{l}{d} = 24{,}6$			
$\mathfrak{H}_0$	J	$\varkappa$	$10^4 \cdot N$	$\mathfrak{H}_0$	J	$\varkappa$	$10^4 \cdot N$	$\mathfrak{H}_0$	J	$\varkappa$	$10^4 \cdot N$
2,5	391	156	200	1,8	318	177	270	3,0	394	132	460
4,6	789	172	204	4,4	654	149	250	4,2	602	144	440
7,8	1112	142	210	7,1	965	136	250	6,1	806	132	440
16,1	1330	82,8	190	11,9	1225	103	240	10,8	1188	110	430
31,2	1421	45,5	140	22,0	1374	62,5	214	30,0	1411	47,0	370
45,6	1456	31,9	110	37,2	1446	39,0	170	60,0	1485	24,8	290
70,6	1494	21,2	78	64,6	1498	23,2	120	125,8	1554	12,4	190
92,2	1520	16,5	75	88,6	1528	17,3	93	182,0	1595	8,77	150
145,2	1566	10,8	58	143,0	1580	11,0	72	394,8	1674	4,24	100
197,5	1598	8,09	51	195,2	1609	8,26	60				
403,8	1669	4,13	45	402,0	1688	4,22	56				
610,1	1694	2,77	41	607,1	1717	2,82	58				
815,8	1701	2,08	41	813,6	1723	2,11	53				
$\lim\limits_{\varkappa \to 0} N = 0{,}0039$				$\lim\limits_{\varkappa \to 0} N = 0{,}0051$				$\lim\limits_{\varkappa \to 0} N = 0{,}010$			

Sämtliche Messungen zeigen die Abnahme des E.F. mit der Suszeptibilität und die Erreichung des theoretischen Grenzwertes $N = 2\pi\left(\frac{d}{l}\right)^2$, der in der letzten Zeile der Tabelle angeschrieben ist. Besonders deutlich ist dies in Fig. 4 zu er-

kennen, wo für die verschiedenen D.V. N als Funktion von $\varkappa$ gezeichnet ist.

In Fig. 5a sind die Magnetisierungskurven sämtlicher Stäbe aus den gemessenen $\mathfrak{H}_0$- und J-Werten eingezeichnet. Sie



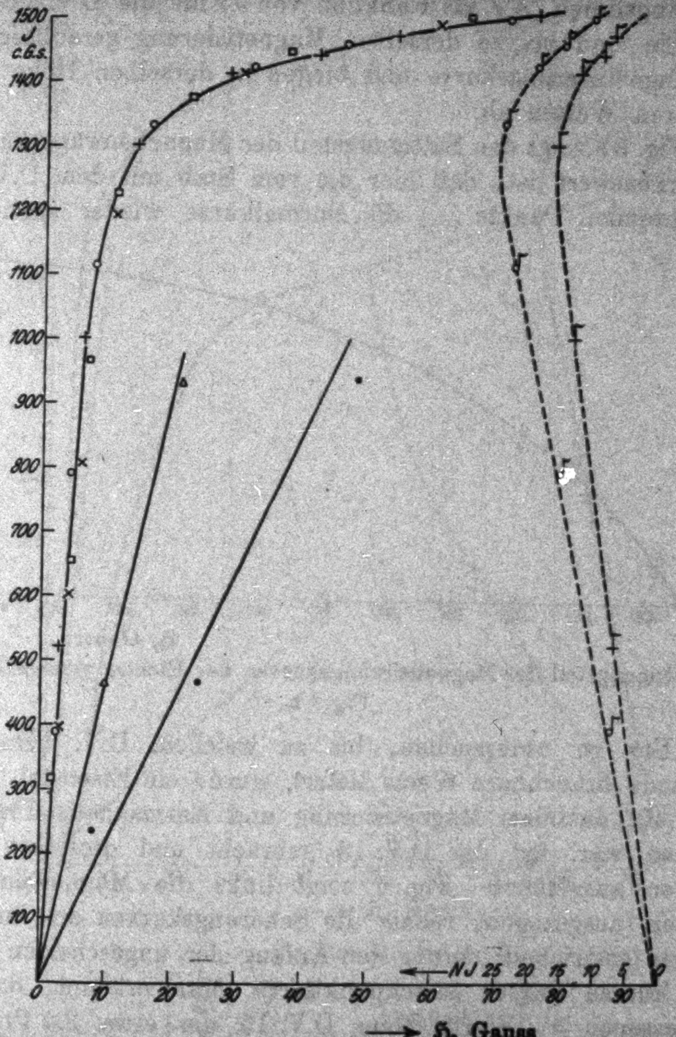
(N, $\varkappa$)-Kurven der Elektrolyteisenstäbe vom

Dimensionsverhältnis	50	40	35	24,6
Punkte	+	○	□	×

Fig. 4

fallen alle in eine Kurve zusammen (ausgezogene Kurve links) bis herab zum D.V. 24,6, mit nur geringen Abweichungen. Dagegen liegen die ($\mathfrak{H}_0$, J) Punkte der Stäbe vom D.V. 9,1 und 5,5 nicht mehr auf derselben Kurve, sondern zu weit rechts. Die gemessenen Werte NJ sind um 7,5 Proz. bzw. 8—10 Proz.

zu klein. Der Grund dieser Abweichung ist darin zu suchen, daß diese kurzen Stäbe keine definierten Pole mehr besitzen; die ganze Oberfläche ist vielmehr mit Kraftlinienquellen und



Magnetisierungskurven der Elektrolyteisenstäbe vom Dimensionsverhältnis l/d – 50 bis 5,5.

d = 3,85 mm l/d	50	40	35	24,6	9,1	5,5
Punkte	+	○	□	×	△	●

Scherungskurven der Elektrolyteisenstäbe vom Dimensionsverhältnis 50 u. 40

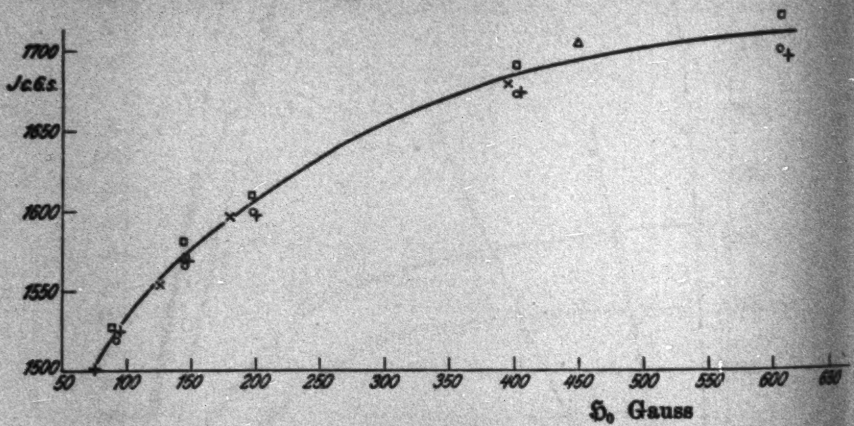
Punkte ⌐ ⌐

Fig. 5a

Senken besetzt und es existiert am Äquator keine Zone homogener Magnetisierung von merklicher Ausdehnung.

Die gestrichelten Kurven rechts in Fig. 5a sind die Scherungslinien (NJ als Funktion von J) für die D.V. 50 und 40. Sie sind bis zu derselben Magnetisierung geradlinig wie die Magnetisierungskurve und biegen in derselben Höhe nach kleineren Werten ab.

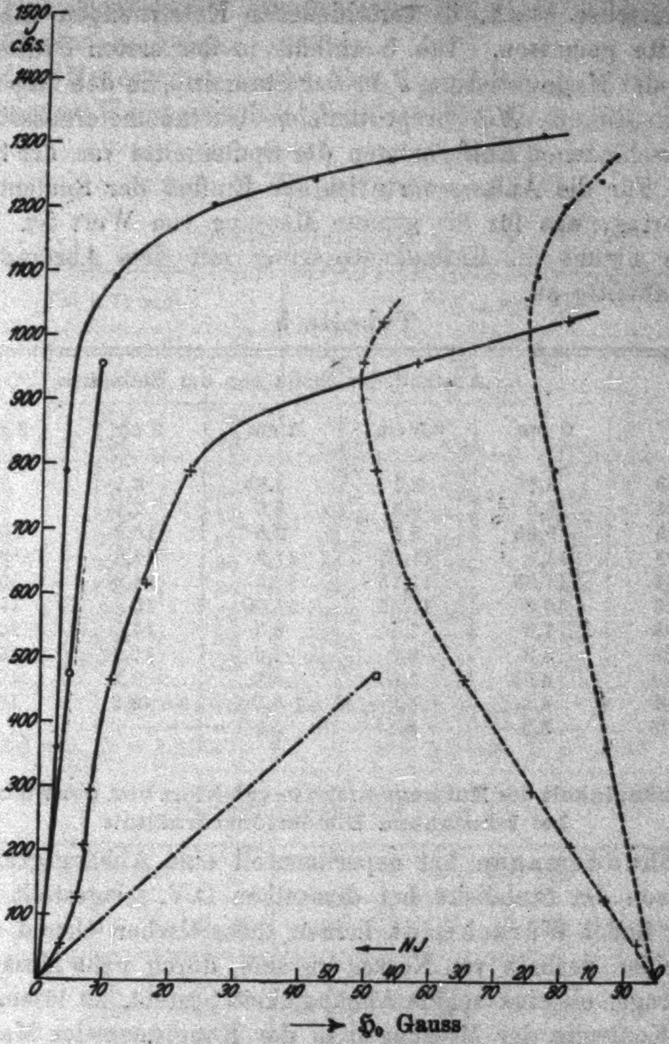
Fig. 5b zeigt den Sättigungsteil der Magnetisierungskurven. Bemerkenswert ist, daß hier die vom Stab mit dem D.V. 9,1 herrührenden Punkte (△) die Normalkurve wieder erreichen.



Sättigungsteil der Magnetisierungskurven der Elektrolyteisenstäbe
Fig. 5b

Um zu untersuchen, bis zu welchem D.V. herab die Methode brauchbare Werte liefert, wurde ein Eisenstab I vom D.V. 40, nachdem Magnetisierung und Entmagnetisierung gemessen war, auf das D.V. 15 gebracht und dieselben Messungen ausgeführt. Fig. 6 zeigt links die Magnetisierungskurven (ausgezogen), rechts die Scherungskurven des längeren Stabes (gestrichelt), ferner den Anfang der ungescherten Kurve des kurzen Stabes (strichpunktiert). Man erkennt, daß die gemessenen NJ-Werte beim D.V. 15 um etwa 3,5 Proz. zu klein erhalten wurden. Zu dieser Messung wurde eine nur 0,5 cm lange Mantelspule benützt.

Der Einfluß der Länge der Spulen wurde im Laufe der Messungen noch besonders untersucht. Beim Elektrolyteisenstab vom D.V. 35 wurde die Entmagnetisierung NJ mit einer 1 cm langen Mantelspule, die keine Windungsflächen normal



Punkte

Eisenstab I: $\frac{l}{d} = 40$ ● (geschert, $d = 4$ mm); $\frac{l}{d} = 15$ ○ (geschert, $d = 4$ mm); $\frac{l}{d} = 15$ □ (ungeschert, $d = 4$ mm)

Eisenstab II: $\frac{l}{d} = 20$ + ($d = 6{,}45$ mm)

Fig. 6

zur Stabachse besaß, in verschiedenen Entfernungen von der Stabmitte gemessen. Tab. 5 enthält in der ersten Spalte die Werte der Magnetisierung J in der Stabmitte, in den folgenden Spalten die zu NJ proportionalen Galvanometerausschläge bei verschiedenen Entfernungen der Spulenmitte von der Stabmitte. Für die Anfangswerte ist der Einfluß der Spulenlänge nur gering, was für die genaue Messung von Wert ist. Allgemein nimmt die Entmagnetisierung mit dem Abstand von der Stabmitte zu.

Tabelle 5

J	Abstand der Spule von der Stabmitte				
	0 cm	0,5 cm	1 cm	2 cm	3 cm
318	3,35	3,1	3,35	3,3	3,5
654	6,5	6,5	6,6	7,1	7,2
965	9,65	9,4	9,6	10,2	10,5
1225	11,9	11,45	11,9	12,5	13,1
1374	11,95	11,75	12,5	14,2	15,3
1446	10,0	10,45	11,85	15,2	17,6
1498	7,2	7,7	9,3	14,1	20,0
1528	5,8	6,3	7,6	11,9	19,0
1580	4,55	5,0	6,3	9,2	15,0
1609	4,2	4,7	5,7	8,2	12,7
1688	3,5	4,1	5,0		

6. Abhängigkeit des Entmagnetisierungsfaktors von der Stabdicke bei konstantem Dimensionsverhältnis

Shuddemagen hat experimentell eine Abhängigkeit des E.F. von der Stabdicke bei demselben D.V. festgestellt. Dagegen findet Würschmidt keinen theoretischen Grund dafür. Es schien deshalb von Nutzen zu sein, durch neue Messungen die Frage, ob eine solche Abhängigkeit besteht, zu lösen. Um eine Kontrolle der Messungen in der Kongruenz der Magnetisierungskurven zu haben, wurde von einem Stab mit $d = 6{,}71$ mm und $\frac{l}{d} = 50$ und 30 Magnetisierung und Entmagnetisierung gemessen und daraufhin der Stab auf den Durchmesser $d = 3{,}27$ mm abgedreht und bei dem D.V. 50 und 30 dieselben Messungen ausgeführt. Der Stabdurchmesser schwankte dabei längs des Stabes in allen Fällen um höchtens 0,02 mm. Zur Messung der Entmagnetisierung wurde für die dicken Stäbe eine 2 cm lange doppellagige, für die dünnen eine 1 cm lange

einlagige Mantelspule benutzt, um möglichst entsprechende Verhältnisse zu haben.

Das Meßergebnis geben Tab. 6 und Fig. 7 wieder. Die gemessenen Werte des E.F. N zeigen für die Anfangsuszepti-

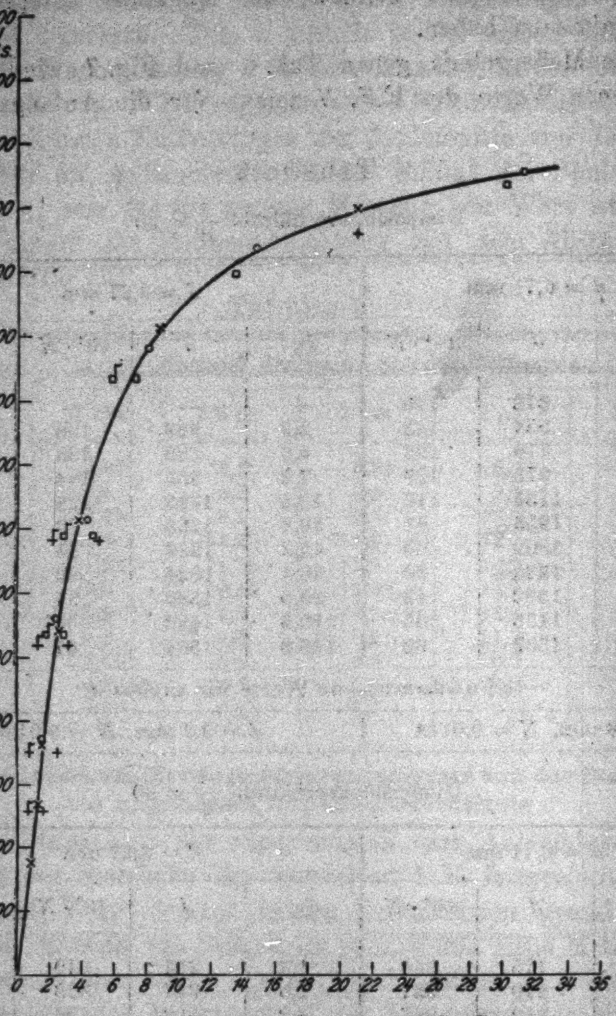
Tabelle 6

Dimensionsverhältnis $\frac{l}{d} = 50$

$d = 6{,}71$ mm			$d = 3{,}27$ mm			
$\mathfrak{H}_0$	J	$10^4 \cdot N$	$\mathfrak{H}_0$	J	$10^4 \cdot N$	$10^4 \cdot N'$
1,5	372	145	—	—	—	—
2,4	554	143	2,9	533	138	145
4,2	716	133	4,6	688	133	147
8,0	978	129	7,2	935	144	146
14,7	1135	112	13,4	1093	128	—
31,0	1255	81	29,8	1233	93	—
47,1	1302	60	45,3	1286	75	—
42,0	1335	50	60,4	1324	62	—
97,1	1392	42	95,0	1385	57	—
132,2	1435	35	130,6	1432	46	—
201,0	1502	32	198,8	1501	47	—
Shuddemagens Werte für großes $\varkappa$						
$d \geqq 6$ mm, $N = 0{,}0144$			$d = 3{,}2$ mm, $N = 0{,}0166$			

Dimensionsverhältnis $\frac{l}{d} = 30$

$d = 6{,}71$ mm			$d = 3{,}27$ mm			
$\mathfrak{H}_0$	J	$10^4 \cdot N$	$\mathfrak{H}_0$	J	$10^4 \cdot N$	$10^4 \cdot N'$
0,8	175	349	1,6	257	340	355
1,2	270	337	2,5	347	323	351
1,5	362	337	3,2	518	336	352
2,6	544	330	5,0	680	330	351
3,8	713	330	20,9	1156	295	—
8,7	1013	321	37,2	1250	250	—
20,9	1195	284	78,6	1346	180	—
38,8	1276	229	115,9	1405	153	—
81,5	1367	157	187,8	1480	123	—
119,6	1419	124	—	—	—	—
192,3	1489	91	—	—	—	—
Shuddemagens Werte für großes $\varkappa$						
$d \geqq 6$ mm, $N = 0{,}0344$			$d = 3{,}2$ mm, $N = 0{,}0382$			



Abhängigkeit des Entmagnetisierungsfaktors N von der Stabdicke bei konstantem Dimensionsverhältnis

$\frac{l}{d}$	d mm	gemessene Punkte	Mit Shuddemagens N gescherte Kurven
50	6,71	○	
	3,27	□	□́
30	6,71	×	
	3,27	+	+́

Fig. 7

bilität nur einen geringen Einfluß der Stabdicke. Dagegen ergeben sich bei kleinerer Suszeptibilität für die dünnen Stäbe wesentlich größere Werte. Wie die Fig. 7 zeigt, liegen die mit den gemessenen Koordinaten eingezeichneten Punkte der Magnetisierungskurven der dünnen Stäbe etwas zu tief, bzw. zu weit rechts, d. h. aber, daß für sie die Entmagnetisierung zu klein gemessen wurde. Der Fehler ist von der Größe der Meßungenauigkeit, nämlich etwa 5 Proz. Es wird dabei angenommen, daß sich die magnetischen Eigenschaften durch das Abdrehen nicht geändert haben. Entnimmt man aus den Kurven die Werte von N, die völlige Kongruenz der Kurven der dünnen mit denen der dicken Stäbe bewirken, so ergeben sich die in Spalte N' stehenden Größen. Sie sind etwas größer wie die entsprechenden für die dicken Stäbe, jedoch kleiner wie die von Shuddemagen für Stäbe vom Durchmesser 3,2 mm bestimmten (vgl. die Tab. 6). Tatsächlich liegen die mit seinen Werten gescherten Kurvenpunkte zu weit links, wie Fig. 7 zeigt.

Ein Grund, warum bei kleiner Suszeptibilität die E.F. der dünnen Stäbe so merklich größer sind wie die der dicken, ist nicht mit Sicherheit anzugeben. Immerhin scheint ein Einfluß der bei den dünneren Stäben relativ größeren Oberfläche nicht ausgeschlossen zu sein.

7. Materialabhängigkeit der Scherungskurve und des Entmagnetisierungsfaktors

Für die Praxis ist die Kenntnis des Verlaufs der Scherungskurve einer Probe von besonderer Wichtigkeit. Shuddemagen gibt die Regel, daß diese zwischen $J = 100$ cgs-Einheiten und $J = 800$ cgs-Einheiten geradlinig verläuft, der Entmagnetisierungsfaktor also konstant ist. Daß dieser Regel keine allgemeine Bedeutung zukommen kann, folgt schon aus der oben beschriebenen Abhängigkeit des E.F. von der Suszeptibilität. Danach ist zu erwarten, daß die Scherungskurve solange geradlinig ist, solange die Suszeptibilität nahe konstanten Wert hat, also auch die Magnetisierungskurve linear verläuft. Tatsächlich folgt auch aus einer Reihe von Messungen an Stäben von verschiedenem Material und D.V., daß die Gerad-

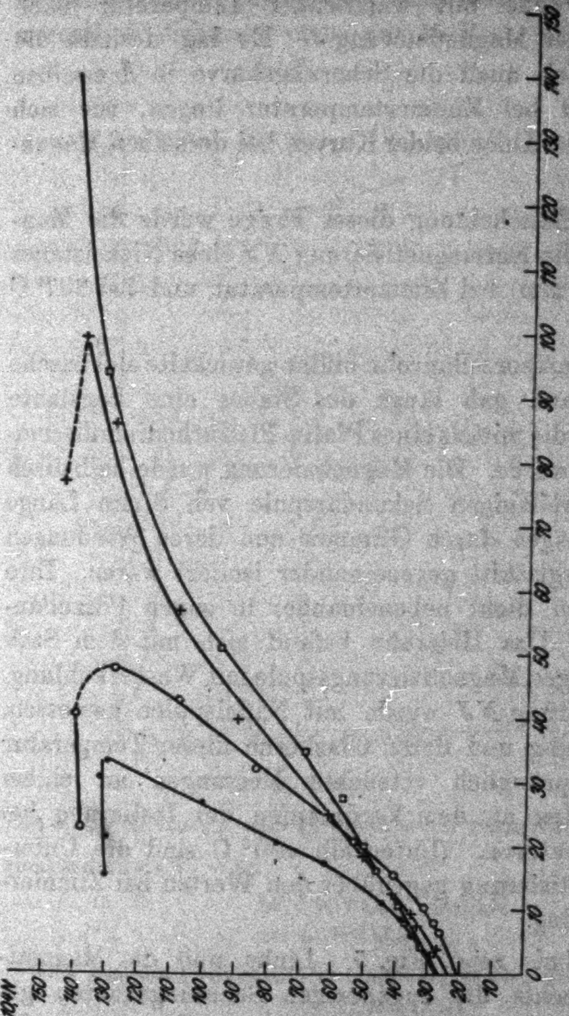
linigkeit der Scherungskurve aufs engste mit dem linearen Verlauf der Magnetisierungskurve verknüpft ist: Das Knie der Scherungskurve liegt bei derselben Magnetisierung wie das der Magnetisierungskurve, also bei verschiedenen Materialien in verschiedener Höhe. Als Beispiel betrachte man die Kurven in Fig. 5a für die D.V. 50 und 40 (Punkte ϝ und ɣ) und vergleiche damit die Kurven der Fig. 6, die zwei verschiedenen Eisenstäben zugehören. Ganz links sind die Magnetisierungskurven des Weicheisenstabes I, bei den D.V. 40 und 15, ganz rechts die Scherungskurve des längeren Stabes (Punkte ● und ○). In der Mitte der Figur sind die Magnetisierungs- und Scherungskurve eines Eisenstabes II vom D.V. 20 (Punkte +). Die Scherungskurve des Elektrolyteisens ist bis $J = 1100$ cgs-Einheiten, die des Eisenstabes I bis $J = 950$ und die des Eisenstabes II nur bis $J = 550$ geradlinig.

Diese Materialabhängigkeit der Scherungskurve ist eine selbstverständliche Folge der Abhängigkeit des E.F. von einer Materialfunktion, der Suszeptibilität.

Ganz anders liegt die Frage, ob einer bestimmten Suszeptibilität bei festem D.V. eindeutig ein bestimmter E.F. zugeordnet ist. Diese Frage ist leider zu verneinen. In Fig. 8 sind vier (N, $\varkappa$)-Kurven verschiedener Materialien, vom D.V. 50 gezeichnet, eines Elektrolyteisenstabes vom Durchmesser $d = 3{,}85$ mm, eines Eisen- und Silberstahlstabes mit $d = 4$ mm und eines Nickelstahlstabes mit $d = 5{,}51$ mm. Die Messungen an Eisen und Silberstahl wurden mit denselben Mantelspulen ausgeführt, um möglichst große relative Genauigkeit zu erzielen. Sämtliche Kurven zeigen, daß das Material einen großen Einfluß auf den Verlauf der ($N, \varkappa$)-Kurve hat. Sie steigt mit wachsender Suszeptibilität um so schneller an, je geringer die maximale Suszeptibilität ist, was bereits bei der Diskussion der (N, $\varkappa$)-Kurve des Elektrolyteisens vorwegnehmend gesagt wurde. Jedoch streben sämtliche Kurven nach dem gleichen Grenzwert für verschwindende Suszeptibilität.

Drei der Kurven zeigen ein besonders merkwürdiges Verhalten: Ein und derselben Suszeptibilität gehören zwei ganz verschiedene Werte N zu, je nachdem diese Anfangssuszeptibilität ist oder jenseits des maximalen Wertes dieser Größe liegt.

Die Stäbe aus Eisen, Nickelstahl und Silberstahl waren gezogene Drähte von gut glatter Oberfläche und zeigten in ihrer ganzen Länge Dickenschwankungen von 0,02—0,03 mm.



Materialabhängigkeit der $(N, \varkappa)$-Kurve beim Dimensionsverhältnis $\frac{l}{d} = 50$

Material	Durchmesser	Punkte
Elektrolyteisen	$d = 3,85$ mm	□
Eisen	$d = 4$ mm	×
Silberstahl	$d = 4$ mm	○
Nickelstahl	$d = 5,71$ mm	●

Fig. 8

Der Elektrolyteisenstab war abgedreht und hatte etwas größere Durchmesserschwankungen (0,02—0,04 mm).

Die Genauigkeit der Absolutwerte des E.F. liegt zwischen 8 Proz. für die kleinste Anfangssuszeptibilität und 2 Proz. bei mittlerer Suszeptibilität.

8. Temperaturabhängigkeit der Scherungskurve; Temperaturunabhängigkeit des Entmagnetisierungsfaktors

Bekanntlich wandert das Knie der Magnetisierungskurve ferromagnetischer Stoffe mit wachsender Temperatur nach kleineren Werten der Magnetisierung J. Es lag deshalb die Frage nahe, ob sich auch die Scherungskurve in demselben Sinne ändert, denn bei Zimmertemperatur liegen, wie sich oben ergeben hat, die Kniee beider Kurven bei derselben Magnetisierung.

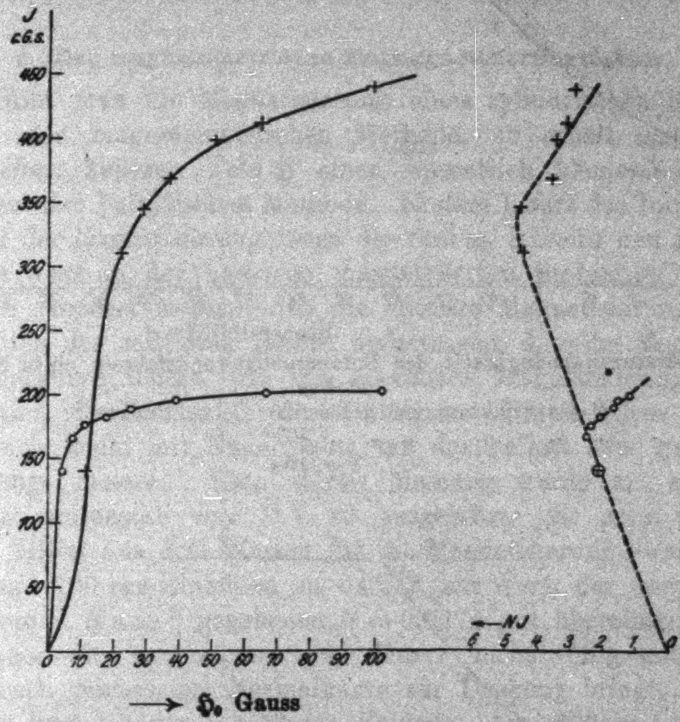
Zur sicheren Entscheidung dieser Frage wurde die Magnetisierung J und die Entmagnetisierung NJ eines Nickelstabes vom D.V. 35 ($d = 4$ mm) bei Zimmertemperatur und bei 307° C gemessen.

Eine auf ein Hartporzellanrohr bifilar gewickelte elektrische Heizung aus Pt-Band gab längs des Stabes eine konstante Temperatur (± 1°), die mittels eines Platin-Platinrhodiumthermoelements gemessen wurde. Die Magnetisierung wurde ballistisch mit Hilfe einer zweilagigen Sekundärspule von 6 mm Länge bestimmt, deren Lagen durch Glimmer und deren Windungen durch Kaolinwasserglaskitt gegeneinander isoliert waren. Ihre Zuleitungen wurden dicht nebeneinander in engen Porzellanröhren zugeführt. Das Heizrohr befand sich mit dem Stab im Innern einer langen Magnetisierungsspule mit Wasserkühlung. Die Entmagnetisierung NJ wurde mit Nadelspulen gemessen, deren Emailisolierung und deren Glaskerne dieser Temperatur standhielten. Ursprünglich versuchte Messungen an einem Eisenstab scheiterten an dem Verdampfen der Isolierung bei den hohen Temperaturen. (Unterhalb 400° C sind die Unterschiede der Magnetisierung gegenüber den Werten bei Zimmertemperatur zu gering.)

Das Meßergebnis zeigt Fig. 9. Links sind die Magnetisierungskurven, rechts die zugehörigen Scherungskurven gezeichnet. Man erkennt, daß auch bei höherer Temperatur die Kniee beider Kurven in derselben Höhe liegen. Selbst die verschiedene Schärfe der Kniee der Magnetisierungskurven findet sich bei den Scherungskurven wieder.

Viel wichtiger ist jedoch ein anderes Ergebnis der Messungen, nämlich die Unabhängigkeit des E.F. N von der Tem-

peratur. In Fig. 10a ist N als Funktion der Suszeptibilität $\varkappa$ aufgetragen, bei Zimmertemperatur und bei 307° C. Die Meßgenauigkeit der N-Werte beträgt 15—20 Proz. Die wahren Felder $\mathfrak{H}_0$ sind wegen der Kleinheit der Entmagnetisierung wesentlich sicherer, etwa auf 10 Proz. bei den kleinsten und



Die Magnetisierungs- u. Scherungskurven eines Nickelstabes vom Dimensionsverhältnis $\frac{l}{d} = 85$

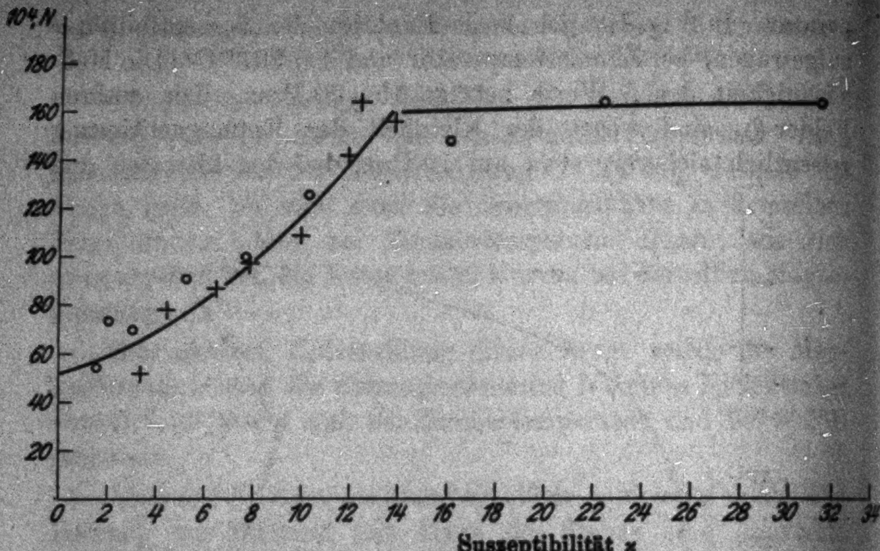
bei 20° Cels. Punkte +
bei 307° Cels. „ o

Die Magnetisierungskurven sind ausgezogen, die Scherungskurven gestrichelt

Fig. 9

2 Proz. bei den größten Werten. Man erkennt, daß in Fig. 10a alle Punkte unabhängig von der Temperatur um einen Kurvenzug liegen.

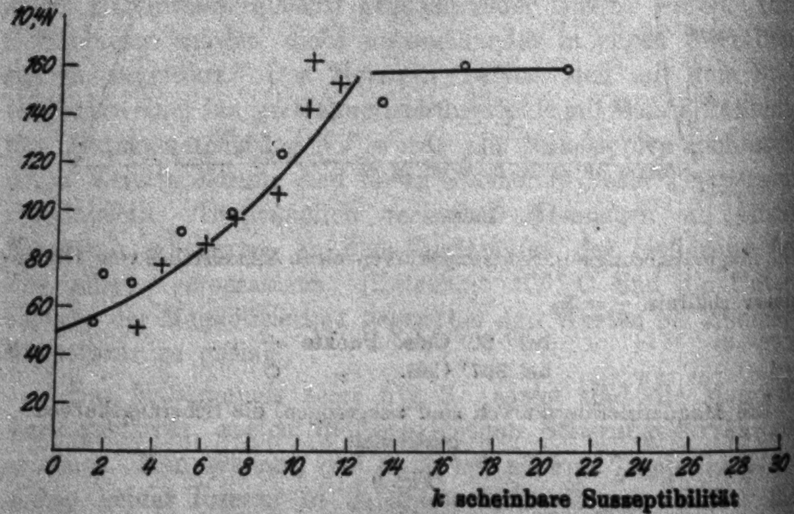
Auch die Kurve, die den E.F. als Funktion der schein-



Temperaturunabhängigkeit des Entmagnetisierungsfaktors eines Nickelstabes

N als Funktion von $\varkappa$ bei 20° Cels. Punkte ×
" " " " " " 307° " " ○

Fig. 10a



Temperaturunabhängigkeit des Entmagnetisierungsfaktors eines Nickelstabes

N als Funktion der scheinbaren Susseptibilität k
bei 20° Cels. Punkte +
bei 307° Cels. Punkte ○

Fig. 10b

baren Suszeptibilität $k = \frac{J}{\mathfrak{H}}$ darstellt, ist unabhängig von der Temperatur (Fig. 10b). Dieses Ergebnis ist vor allem deshalb wichtig, weil es gestattet, auch für Messungen bei höherer Temperatur zylindrische Stäbe zu verwenden, wenn man die $(N, \varkappa)$- bzw. (N, k)-Kurve bei gewöhnlicher Temperatur kennt.

9. Der magnetometrische Entmagnetisierungsfaktor

Mißt man die Magnetisierung eines zylindrischen Stabes nach der magnetometrischen Methode, so erhält man bei demselben äußeren Feld $\mathfrak{H}$ einen wesentlich kleineren Wert wie bei der ballistischen Methode. Erstere liefert das Integralmittel der Magnetisierung längs des Stabes, letztere den maximalen Wert in der homogen magnetisierten Stabmitte. Man könnte zunächst meinen, daß die mittlere Magnetisierung, als Funktion des mittleren Feldes aufgetragen, dieselbe Magnetisierungskurve liefere wie die maximale Magnetisierung als Funktion des Feldes in der Stabmitte. Das mittlere Feld läßt sich leicht mit Nadelspulen von der halben oder ganzen Stablänge messen. Eine solche Messung wurde an einem Elektrolyteisenstab vom D.V. 40 ausgeführt. Es ergab sich N im Mittel aus drei Werten für die Magnetisierung zwischen 300 und 700 cgs-Einheiten zu 0,0272, ein Wert, der zwar mit dem von R. Mann[1]) gegebenen $N = 0{,}0274$ gut übereinstimmt, der aber die magnetometrische Kurve nicht völlig mit der ballistisch gemessenen Normalkurve zur Deckung bringt. Die erstere liegt bei etwas größeren Feldern. Am größten ist der Unterschied im Kurvenknie. Der Wert $N = 0{,}0272$ ist also etwas zu klein. Nach anderen Messungen ist der voll korrigierende Wert um 0,002 größer. Erst nahe der Sättigung fallen die magnetometrische und die ballistische Kurve wieder zusammen.

Dieses Ergebnis kann so gedeutet werden, daß die für die Magnetisierung parallel zur Stabachse wirksame Suszeptibilität (bei einem Elektrolyteisenstab) nach den Stabenden zu abnimmt, vielleicht unter dem Einfluß der Normalkomponente der Magnetisierung.

---

1) R. Mann, Inaug.-Diss. Berlin, 1895; Phys. Rev. 3. S. 359. 1896.

Der magnetometrische E.F., der die magnetometrisch gemessene Kurve mit der Normalkurve zur Deckung bringt, korrigiert also nicht nur auf das wahre Feld, sondern gleichzeitig auf die wahre Suszeptibilität, ist also anders definiert wie der ballistische E.F., weshalb eine direkte Messung nach derselben Methode nicht in Frage kommt.

Zusammenfassung der Ergebnisse

Überblickt man die Ergebnisse der beschriebenen Messungen, so läßt sich folgendes feststellen:

1. Der Entmagnetisierungsfaktor eines kreiszylindrischen Stabes von bestimmtem Dimensionsverhältnis ist keine Konstante, sondern eine Funktion der Suszeptibilität. Er wird mit abnehmender Suszeptibilität $\varkappa$ in der Regel kleiner und erreicht für einen verschwindend kleinen Wert von $\varkappa$ einen Grenzwert, der sich zu $2\pi\cdot\left(\frac{d}{l}\right)^2$ berechnet.

2. Ist die Anfangssuszeptibilität kleiner wie die maximale, so hat der Entmagnetisierungsfaktor für sie einen größeren Wert wie für dieselbe Suszeptibilität bei höherer Magnetisierung.

3. Der Entmagnetisierungsfaktor hängt bei konstantem Dimensionsverhältnis und konstanter Suszeptibilität vom Material ab und zwar so, daß er für dieselbe Suszeptibilität einen um so größeren Wert hat, je kleiner die maximale Suszeptibilität ist (abgesehen von ganz kleinen Suszeptibilitäten, wo die Abweichungen innerhalb der Meßunsicherheit liegen).

4. Bei mittlerer und kleiner Suszeptibilität ist der Entmagnetisierungsfaktor größer für dünne Stäbe wie für dicke von gleichem D.V.

5. Der Entmagnetisierungsfaktor ist unabhängig von der Temperatur.

6. Die Scherungskurve verläuft bis zu derselben Magnetisierung geradlinig wie die Magnetisierungskurve. Mit weiter wachsender Magnetisierung biegt sie nach kleineren Werten ab.

Aus den Untersuchungen geht hervor, daß für genaue magnetische Messungen an kreiszylindrischen Stäben in freier

Spule nur die ballistische Methode in Betracht kommt, und daß man in jedem einzelnen Fall den E.F. von Punkt zu Punkt der Magnetisierungskurve bestimmen muß. Dies ist nach der mitgeteilten Methode mit genügender Genauigkeit möglich.

Die beschriebene Methode ist mit Erfolg bereits auf Messungen an Eiseneinkristallen angewendet worden.[1])

Die vorstehende Arbeit wurde im Physikalischen Institut der Universität Tübingen ausgeführt. Ich bin dessen Leiter, Hrn. Prof. Dr. Walther Gerlach, für das große Interesse, mit dem er den Fortschritt meiner Arbeit verfolgte, und für das freundliche Entgegenkommen, mit dem er mir die nötigen Hilfsmittel zur Verfügung stellte, zu großem Dank verpflichtet, den auszusprechen ich an dieser Stelle nicht versäumen möchte. Ein wesentlicher Teil der Mittel konnte durch die Hilfe des Elektrophysikausschusses der Notgemeinschaft beschafft werden, wofür auch hier bestens gedankt sei.

Physikalisches Institut Tübingen, März 1928.

Nachtrag

Kürzlich hat W. Wolman[2]) mit Hilfe des magnetischen Spannungsmessers von Rogowski und Steinhaus[3]) eine Methode ausgearbeitet, mit der es ebenfalls gelingt, magnetische Messungen in freier Spule auszuführen. Es wird dabei das wahre Feld durch Messung des magnetischen Spannungsabfalls längs des von der Sekundärspule überdeckten Teils der Probe bestimmt. Diese Methode ist wie die unsrige auch auf Messungen nach der Joch- und Isthmusmethode anwendbar, erfordert jedoch ein ebenflächig begrenztes Probestück, während die Methode der Mantel- oder Nadelspulen dieser Einschränkung nicht bedarf. Dafür ist die relative Genauigkeit von Wol-

---

1) E. Dussler und W. Gerlach, Ztschr. f. Phys. 44. S. 279. 1927; E. Dussler, Diss. II. Teil.

2) W. Wolman, Über ein Verfahren der Eisenprüfung mit dem magnetischen Spannungsmesser. Messungen an Eiseneinkristallen. Diss. Aachen 1927. Arch. f. Elektrotechn. 19. Heft 3. 1928.

3) W. Rogowski und W. Steinhaus, Arch. f. Elektrotechn. 1. S. 141. 1912.

mans Methode der unsrigen bei sehr kleinen Feldern überlegen; bei mittleren und höheren Feldern ist sie merklich dieselbe.

Wolman hat sein Verfahren auch zur Untersuchung von Eiseneinkristallen benutzt. Über den Vergleich seiner Ergebnisse mit denen von W. Gerlach und dem Verfasser siehe II. Teil der Dissertation des Verfassers.[1])

1) Erscheint in Ztschr. f. Phys. (im Druck).

(Eingegangen am 6. April 1928.)

3. *Über den Durchschlag fester Isolatoren;*
von Wilhelm Werner

(Hierzu Tafel I und II)

Inhalt: Einleitung. — Versuchsanordnung. — Versuchsresultate. — Folgerungen und ergänzende Versuche. — Zusammenfassung.

Einleitung

Die Ursachen, die zur Zerstörung eines Isolators durch elektrische Beanspruchung führen, sind noch ungeklärt, obwohl ihre Kenntnis für die zu immer höheren Spannungen schreitende Technik Grundlage für eine richtige Isolation wäre, die, wie man sagen kann, das schwierigste Problem der Hochspannungstechnik bedeutet.

Für die Erscheinungen des elektrischen Durchschlags bei Gasen glaubte man bis vor kurzem, durch die Theorie der Stoßionisation von Townsend eine befriedigende Lösung gefunden zu haben. Doch Messungen von Prof. Dr. Rogowski in Aachen[1]) und ältere (noch nicht veröffentlichte) Messungen von Dr. Spiller im Physikalischen Institut der hiesigen Universität zeigen, daß der Durchschlag in einer Zeit von weniger als 10^{-6} Sek. erfolgt, so daß für Ausbildung einer Ionenlawine nach der Townsendschen Theorie gar keine Zeit ist. Somit werden auch die Vorstellungen über den Durchschlag von Gasen einer Korrektur bedürftig.

Bei Versuchen über Durchschlagsfestigkeit von Flüssigkeiten stellte Dr. Spiller[2]) bei mikroskopischer Betrachtung der Funkenstrecke fest, daß der Funkendurchschlag durch eine Kette von Gasblasen zwischen den Elektroden erfolgt.

Auch durch Strömenlassen der Flüssigkeit konnte bei reinem Material diese Kettenbildung nicht verhindert werden.

---

1) W. Rogowski, Fachber. d. 31. Jahresversammlung d. V.D.E., Wiesbaden 1926, S. 77.

2) E. Spiller, Dissertation 1921.

In der gleichen Arbeit wurde außerdem untersucht, ob dem Durchschlag eine zeitliche Zunahme der Stromstärke vorangeht. Diese konnte jedoch trotz Anwendung verschiedener Methoden nicht ermittelt werden, was unabhängig auch Rogowski mit viel feineren Methoden fand.

Des weiteren wurde in der Arbeit festgestellt, daß bezüglich des Ohmschen Widerstandes bei ruhender und strömender Flüssigkeit keine Unterschiede zu ermitteln waren.

Zur Erklärung der beim Durchschlag von Flüssigkeiten auftretenden Erscheinungen, insbesondere des außerordentlich großen Einflusses des Druckes, hat Günther-Schulze[1]) die Theorie aufgestellt, daß die in den Flüssigkeiten enthaltenen Ionen durch die zum Durchbrechen des Dielektrikums benutzten hohen Feldstärken eine solche Geschwindigkeit erhalten, daß sie durch die hohe Reibung in der Flüssigkeit eine Reibungswärme entwickeln, die mikroskopische Dampfblasen erzeugt. In diesen soll dann die Funkenentladung durch Stoßionisation einsetzen.

Bei festen Stoffen, bei denen offenbar obige Theorie nicht anwendbar ist, ist die Unbestimmtheit noch viel größer als bei Gasen und Flüssigkeiten. Hier sind die einzelnen Beobachter nicht nur zahlenmäßig zu verschiedenen Ergebnissen gelangt, sondern haben auch ganz verschiedene Gesetzmäßigkeiten gefunden.

So werden z. B. als Abhängigkeit der Durchschlagsspannung von der Dicke des Dielektrikums angegeben:

Almy[2]) $U = a\,d + b,$

Kinzbrunner[3]) $U = a\sqrt{d}\,,$

Baur[3]) $U = d^{\frac{2}{3}},$

Mosciki[4]) bei Verstärkung des Randes

$$U = a\,d,$$

1) A. Günther-Schulze, Die dielektrische Festigkeit von Gasen, Flüssigkeiten und festen Körpern, Helios 27. 8. 1922. S. 411.

2) J. Almy, Ann. d. Phys. 1. S. 508. 1900.

3) Vgl. E. Mündel, Zum Durchschlag fester Isolatoren, Archiv f. Elektrotechn. 1925. 4. Heft.

4) J. Mosciki, Über Hochspannungskondensatoren, E. T. Z. 1904. S. 527.

ohne Randverstärkung $U = a\sqrt{d}$,
Wagner[1]) $U = a\,d$

Schumann[2]) fand für die Abhängigkeit der Durchbruchsfeldstärke von der Dicke des Dielektrikums bei Glas u. a. die Formel

$$E = \frac{1}{a\,d + b}.$$

Nach dieser Formel würde die Spannung, die der Isolator auszuhalten vermag, bei noch so großer Dicke einen bestimmten Wert nicht überschreiten können, denn aus

$$E = \frac{U}{d} = \frac{1}{a\,d + b}$$

folgt

$$U = \frac{d}{a\,d + b}$$

und für

$$d = \infty$$

wird

$$U = \frac{1}{a}.$$

In vorstehenden Gleichungen bedeuten U = Durchschlagsspannung, E = Durchbruchsfeldstärke, d = Dicke des Prüfobjektes, a, b Konstanten, die für das von Prof. Schumann untersuchte Glas die Werte $a = 0{,}000\,771$, $b = 0{,}000\,214$ haben.

Für das von Prof. Dr. Schumann untersuchte Glas ergibt sich als höchste Durchschlagsspannung $U \cong 1300$ kV.

Diese Beispiele sind jedoch nur ein Auszug von dem, was über das Problem des Durchschlags veröffentlicht wurde.

Bei dieser Unbestimmtheit ist man natürlich zu sehr verschiedenen Auffassungen über die Ursachen des Durchschlags gekommen. Es war bisher nicht möglich, die verschiedenen Ergebnisse von einheitlichem Gesichtspunkt aus zu verstehen.

1922 ist eine quantitativ ziemlich weit durchgebildete

1) K. W. Wagner, Der physikalische Vorgang beim elektrischen Durchschlag von festen Isolatoren, Sitzungsber. d. Akad. d. Wissensch. 1922. S. 438.

2) W. O. Schumann, Ztschr. f. techn. Physik 1925. Nr. 9. S. 443.

Theorie des Durchschlags fester Körper von K. W. Wagner[1]) veröffentlicht worden. Wagner gibt bekanntlich als Ursache des Durchschlags das Labilwerden des thermisch-elektrischen Gleichgewichtes an. Nach Wagner sind in jedem Isolator leitende Kanäle vorhanden, die durch den sie durchfließenden Strom sich erhitzen und dadurch wieder besser leiten. Dieser Vorgang steigert sich, bis der Isolator durchbrennt.

Diese Theorie vermag jedoch nicht alle Erscheinungen, die man beim Durchschlagen fester Körper beobachtet, zu erklären. So berichtet Voege[2]) bereits 1904, daß Glas von gleicher Zusammensetzung und Stärke

bei 78 kV durchschlug, wenn die Versuche in Petroleum,
„ 69 „ „ „ „ „ „ Leinöl,
„ 100 „ „ „ „ „ „ dickflüssigem Paraffinöl

ausgeführt wurden.

Nach der Wagnerschen Theorie dürften bei diesen Versuchen keine irgendwie erheblichen Unterschiede der Durchschlagsspannungen vorhanden sein.

Prof. Dr. Schumann[3]) hat Versuche angestellt, um die Wagnersche Theorie zu prüfen. Mit Hilfe der Schlierenmethode stellt er u. a. fest, daß die Erwärmung des Glases kurz vor dem Durchschlag weniger als 10° C beträgt. Diese Übertemperatur genügt aber nicht, um einen Durchschlag nach der Wagnerschen Theorie hervorzurufen.

Es sei schließlich hierzu noch vorweg bemerkt, daß bei Versuchen, die ich in siedender flüssiger Luft, also bei —193° C ausgeführt habe, die Durchschlagsspannungen für Glas, Glimmer, Zelluloid u. a. m. viel niedriger sind als in Öl bzw. Luft bei Zimmertemperatur, trotzdem die Wärmeableitung in der flüssigen Luft doch sicher eine größere ist als bei Zimmertemperatur, man also nach der Wagnerschen Ansicht hätte das Gegenteil erwarten müssen.

Prof. Dr. Nernst hat mich auf folgende Punkte aufmerksam gemacht, nach denen ein Durchschlag nach der Wagnerschen Auffassung bei meinen Versuchen nicht in Frage kommen kann:

---

1) K. W. Wagner, Ber. d. Akad. d. Wissensch. 1922. S. 438.
2) W. Voege, E. T. Z. 1904. S. 1034.
3) W. O. Schumann, Ztschr. f. techn. Phys. 1925. Nr. 9. S. 445.

1. Um bei der geringen Energie einer geladenen Leydener Flasche eine Erwärmung um viele hundert Grad hervorzurufen, müßten die Kanäle ungeheuer dünn sein; die Wärmeleitung, wie leicht zu berechnen, läßt aber solche ungeheuer dünnen Kanäle nicht zu.

2. Bei Verwendung von wenig Energie zeigen sich keine Schmelzperlen.

3. Die Erscheinungen bei den Versuchen mit Glas bzw. Schwefel zeigen keine prinzipiellen Unterschiede, obwohl Schwefel überhaupt nicht leitend wird.

In einer in Leningrad ausgeführten Arbeit[1]), die sich ebenfalls mit der Prüfung der Wagnerschen Theorie befaßt, teilen die Verfasser mit, „daß die Wagnersche Theorie für Glas bei Temperaturen von über 100° C durch das Experiment bestätigt wird". Unterhalb dieser Temperatur soll nach den Verfassern für den Wärmedurchschlag ein anderer Mechanismus eintreten, über den sie nunmehr systematische Untersuchungen anstellen wollen. Sie berichten u. a., daß sie bei Glas Versuche in flüssiger siedender Luft gemacht haben, wobei die Durchschlagsspannungen etwa 10—20 Proz. niedriger waren als bei Zimmertemperatur. Diese Versuche zeigen also ebenfalls, daß bei meinen Versuchen die Theorie von Wagner nicht anwendbar ist.

Die einzige Theorie des Durchschlags fester Körper konnte also allgemeingültig durch das Experiment nicht bestätigt werden, und das übrige experimentelle Material ist so vielseitig, daß es schwer ist, hier etwas Wesentliches herauszufinden.

Günther-Schulze[2]) unterscheidet bei festen Körpern drei Arten von dielektrischen Festigkeiten.

1. Reißfestigkeit, dasjenige Mindestpotentialgefälle, durch das die Bindung zwischen den Ladungen eines Dielektrikums zerrissen wird, so daß eine Entladung, ein Funken, durch das Dielektrikum geht.

2. Stoßfestigkeit, dasjenige Mindestpotentialgefälle, bei dem die unselbständige Entladung in eine selbständige, sich selbst steigernde Entladung, einen Funken, übergeht.

---

1) L. Inge u. A. Walther, Ztschr. f. Phys. 87. S. 292.

2) A. Günther-Schulze, Jahrbuch f. Radioaktivität u. Elektronik 1923. S. 92.

3. Thermodielektrische Festigkeit eines Pseudodielektrikums ist dasjenige Mindestpotentialgefälle, bei dem das Gleichgewicht zwischen Leitfähigkeit und Temperatur labil wird, so daß der Strom über jedes Maß hinaussteigt.

Was die von Günther-Schulze definierte Reißfestigkeit betrifft, so zeigen Berechnungen von Prof. Rogowski[1]) bezüglich des Steinsalzes verglichen mit den Versuchsresultaten, daß die Feldstärken, die bei den bisher gemessenen Durchschlägen auftreten, bei weitem nicht ausreichen, um die Bindung zwischen den einzelnen Ionen zu zerstören.

Bei der Zerstörung eines Isolators durch Überschreiten der elektrischen Reißfestigkeit, wie auch durch Labilwerden des thermoelektrischen Gleichgewichtes müßten die Durchschläge stets dort erfolgen, wo im Isolator die größte Feldstärke herrscht.

Auch bei der, durch die Definition von Günther-Schulze gegebenen, Stoßfestigkeit müßten die Durchschläge stets an der Stelle der größten Feldstärke erfolgen.

Das ist aber, wie im folgenden näher gezeigt werden wird, nicht der Fall.

Versuchsanordnung

Es sollten zunächst Durchschlagsversuche bei festen Körpern bei tiefen Temperaturen ausgeführt werden. Die Versuche sollten in flüssiger Luft und dann in flüssigem Wasserstoff ausgeführt werden.

Zunächst möchte ich die Versuchsanordnung beschreiben.

Als Elektroden wurden Kugeln gewählt, um einigermaßen definierte Verhältnisse zu haben. Ich möchte versuchen, kurz einen Überblick über die Feldverteilung zu geben.

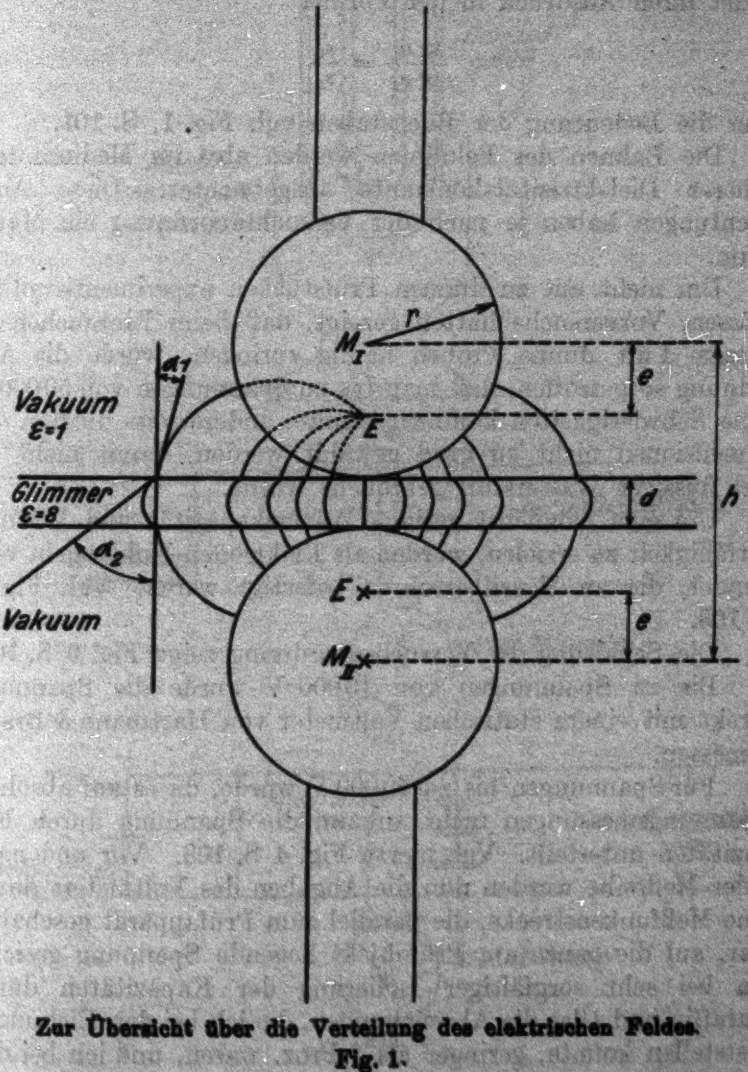
Fig. 1 zeigt einen Schnitt durch die Versuchsanordnung. Als Elektroden wurden Kugeln von 1 cm Durchmesser angenommen. Für den Verlauf der Feldlinien wurden ferner Verhältnisse zugrunde gelegt, wie sie auftreten, wenn Glimmer (Dielektrizitätskonstante = 8) im Vakuum (Dielektrizitätskonstante = 1) untersucht wird. Die Feldlinien treten senkrecht aus den Elektroden aus, denkt man sie sich innerhalb der Elektroden fortgesetzt, so gehen sie durch Punkte E, die

1) W. Rogowski, Fachber. d. V. D. E., Versammlung Wiesbaden 1926. S. 77.

einen Abstand (e) vom Mittelpunkt der betreffenden Elektrode haben, der durch folgende Gleichung gegeben ist:

$$e = \frac{h}{2} - \sqrt{\frac{h^2}{4} - r^2},$$

wobei e der Abstand des Punktes E vom Mittelpunkte M der Elektroden, h der Abstand der Mittelpunkte beider Elektroden,



Zur Übersicht über die Verteilung des elektrischen Feldes.
Fig. 1.

r der Radius der Elektroden (nach Thomälen, Kurzes Lehrbuch der Elektrotechnik 1920 S. 97). Wäre der Raum zwischen den Elektroden mit einem einheitlichen Medium, also von überall gleicher Dielektrizitätskonstante erfüllt, so wären die Feldlinien stetig gekrümmte Bahnen. Da aber der Raum von zwei Medien verschiedener Dielektrizitätskonstante erfüllt wird, so werden die Feldlinien an ihrer Berührungsfläche gebrochen.

Die Gesetzmäßigkeit, nach der diese Ablenkung erfolgt, findet ihren Ausdruck in der Formel

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2},$$

über die Bedeutung der Buchstaben vgl. Fig. 1, S. 101.

Die Bahnen der Feldlinien werden also im Medium mit höherer Dielektrizitätskonstante ausgebuchtet. Diese Ausbuchtungen haben je nach der Versuchsanordnung ein Maximum.

Um nicht mit zu dünnen Prüfstücken experimentieren zu müssen, Vorversuche hatten gezeigt, daß beim Eintauchen in flüssige Luft dünne Proben häufig springen, wurde die Anordnung so getroffen, daß man bis zu Spannungen von 50000 V ohne Schwierigkeiten kommen konnte, andererseits durften die Dimensionen nicht zu groß gewählt werden, damit nicht zu viel flüssiger Wasserstoff gebraucht wurde.

Um eine möglichst geringe Wärmekapazität und Wärmeleitfähigkeit zu erzielen, wurden als Elektroden Hohlkugeln verwendet, die an Neusilberrohren befestigt waren. Vgl. Fig. 2 S. 103.

Die Schaltung der Versuchsanordnung zeigt Fig. 3 S. 103.

Bis zu Spannungen von 13000 V wurde die Spannung direkt mit einem statischen Voltmeter von Hartmann & Braun gemessen.

Für Spannungen bis zu 50000 V wurde, da es auf absolute Spannungsmessungen nicht ankam, die Spannung durch Kapazitäten unterteilt. Vgl. hierzu Fig. 4 S. 103. Vor und nach jeder Meßreihe wurden nun die Angaben des Voltmeters durch eine Meßfunkenstrecke, die parallel zum Prüfapparat geschaltet war, auf die ganze am Prüfobjekt liegende Spannung geeicht. Da bei sehr sorgfältiger Isolierung der Kapazitäten durch Paraffin und Glas die Abweichungen, die ich bei den Eichungen feststellen konnte, geringer als 3 Proz. waren, und ich bei den

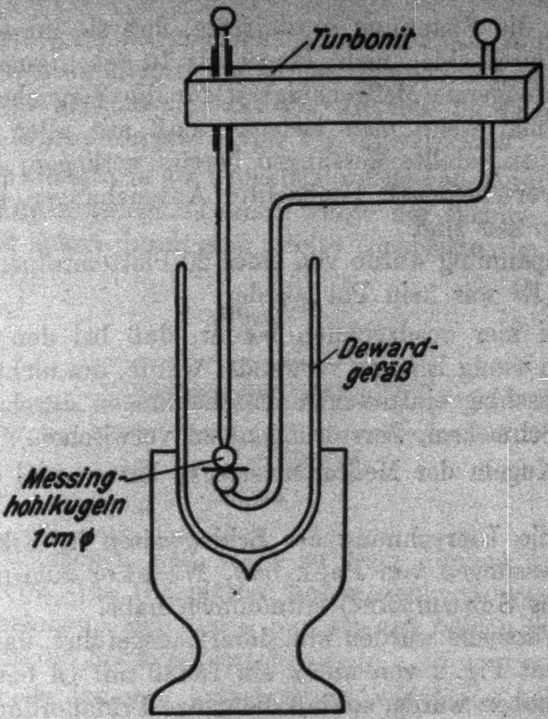


Fig. 2

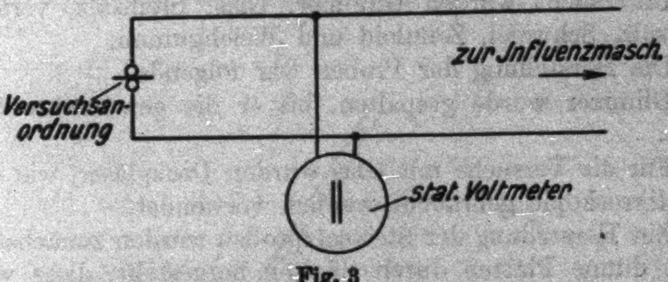


Fig. 3

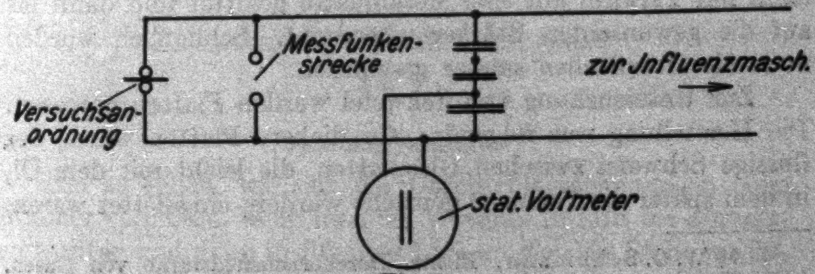


Fig. 4

Versuchen die Spannung so steigerte, daß sie im allgemeinen bis zum Durchschlag nicht länger als 10 Sek. dauerte, glaube ich eine genügende Meßgenauigkeit für die Versuche erzielt zu haben, zumal wenn man bedenkt, daß mit allen Vorsichtsmaßregeln angestellte Messungen bereits vorliegen, aber trotzdem die verschiedenen Beobachter Abweichungen bekommen, die weit größer sind.

Die Spannung wurde von einer 20-Platteninfluenzmaschine geliefert. Es war kein Pol geerdet.

Es sei hier ausdrücklich betont, daß bei den Versuchen absichtlich wenig Energie verwendet wurde, um nicht die durch den Durchschlag eintretenden Erscheinungen durch sekundäre Effekte (Schmelzen, Zerstörungen) zu verwischen.

Die Kugeln der Meßfunkenstrecke hatten 2,41 cm Durchmesser.

Für die Umrechnung der Schlagweiten in Kilovolt habe ich die Messungen von Peek bzw. Weicker zugrunde gelegt, die ich aus Schumann[1]) entnommen habe.

Die Versuche wurden nun derart ausgeführt, daß über den Prüfapparat Fig. 2 von unten ein Gefäß mit Öl bzw. flüssiger Luft geschoben wurde, so daß die ganze Prüfanordnung in dem betreffenden Medium war.

Untersucht wurden Glimmer, Glas, Steinsalz, verfärbtes Steinsalz, Schwefel, Zelluloid und Weichgummi.

Die Herstellung der Proben war folgende:

Glimmer wurde gespalten, bis er die gewünschte Stärke hatte.

Für die Versuche mit Glas wurden Deckgläser, wie sie für die Mikroskopie gebraucht werden, verwendet.

Zur Herstellung der Steinsalzproben wurden zunächst möglichst dünne Platten durch Spalten hergestellt, diese wurden dann mit Paraffin auf eine Metallplatte gekittet und dann bis auf die gewünschten Stärken abgedreht. Schließlich wurden noch die Oberflächen sauber geschliffen.

Zur Untersuchung von Schwefel wurden Platten gegossen. Die Herstellung war folgende: für dickere Platten wurde der flüssige Schwefel zwischen Glasplatten, die leicht mit dem Öl, in dem später die Versuche gemacht wurden, eingefettet waren,

---

1) W. O. Schumann, Elektr. Durchbruchsfeldstärke von Gasen. 1923. S. 9.

gepreßt. Dünnere Platten, etwa 0,2 mm, konnten so nicht hergestellt werden, da diese Schwefelplättchen beim Abziehen von der Glasplatte zerbrachen. Bei der Herstellung dieser Plättchen wurde folgendermaßen (vgl. Fig. 5) verfahren:

Auf eine Glasplatte als Unterlage wurde vollständig glattes, satiniertes Papier gelegt. Darauf wurde der flüssige Schwefel gegossen und sofort durch eine zweite Glasplatte, die ebenfalls

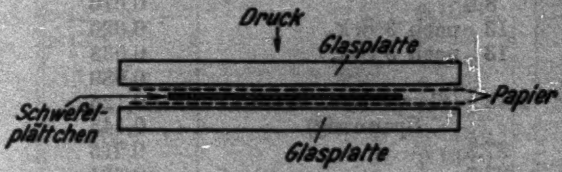


Fig. 5

mit Papier überzogen war, stark zu einer dünnen Platte zusammengepreßt. Die Glasplatten ließen sich vom Papier ohne weiteres abnehmen. Man hatte nun ein auf beiden Seiten mit Papier behaftetes Schwefelplättchen.

Die Papiere konnten jedoch leicht, wie Fig. 6 zeigt, über einer scharfen Kante abgezogen werden. Auf diese Weise gelang es, Schwefelplättchen bis zu Stärken von etwa 0,13 mm zu erhalten.

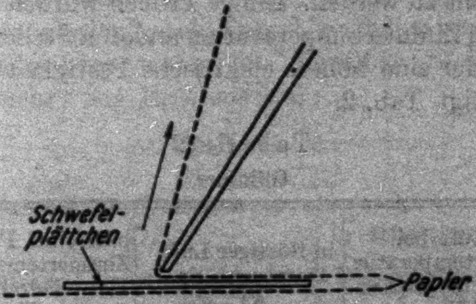


Fig. 6

Versuchsresultate

Um zu sehen, wie sich die Durchschlagsspannungen beim Glimmer verhalten, wenn man die Versuche in Luft bei Zimmertemperatur und dann in flüssiger Luft an gleicher Stelle macht, wurden folgende Versuche angestellt.

Tabelle 1

Glimmer

Stärke mm	in Öl Durchschlagsspannung kV	in flüssiger Luft: Stärke mm	in flüssiger Luft: Durchschl.-Spannung kV
0,012	10,6	0,007	3
0,012	10,8	0,014	4,5
0,015	11,6	0,014	4,3
0,015	8,6	0,016	4,9
0,018	13 nach 3 Sek.	0,020	5
0,020	13 nach 5 Sek.	0,038	6
0,021 }		0,089	11
0,024 }	>13 (über 1 Min. unter	0,125	11,8
0,035 }	Spannung)	0,145	12,4
0,048	27,3	0,215	14,3
0,049	27,7	0,634	28,5
0,054	27,7	0,640	29,5
0,072	31,4	0,755	32,6
0,082	41,6	0,928	47
0,088	45,6	1,07	>50
0,116	50		
0,153	>50		

Nachdem bekannt war, daß der Glimmer in Luft bei Zimmertemperatur schwerer als in flüssiger Luft durchgeschlagen wird, wurden die Versuche derart ausgeführt, daß der Glimmer erst in Luft bei Zimmertemperatur an Spannung gelegt wurde, ohne zerstört zu werden, um dann an derselben Stelle in flüssiger Luft untersucht zu werden. Einige Proben wurden dann wiederum in Luft bei Zimmertemperatur an anderen Stellen untersucht, wobei sie wieder eine höhere elektrische Festigkeit hatten. Die Ergebnisse zeigt Tab. 2.

Tabelle 2

Glimmer

Stärke mm	in Luft bei Zimmertemperatur Durchschlagsspann. kV	in flüssiger Luft Durchschl.-Sp. kV	b. nochm. Prüf. in Luft v. Zimmertemp. an and. Stelle Durchschl.-Sp. kV
0,014	6		
0,020	(3)	4	
0,032	11 (Überschlag)	6,7	
0,033	>13 „	5	
0,039	>13 „	7,8	
0,105	>13 „	11,4	> 13
0,124	>13 „	11	> 13
0,125	>13 „	13	> 13

Tabelle 3

Glas

in Öl			in flüssiger Luft:		
Stärke mm	Durchschlagsspannung kV		Stärke mm	Durchschl.-Sp. kV	
0,093	11,7		0,085	9	
0,098	10,8		0,093	9,9	
0,114	12,4		0,102	9,8	
0,127	>13		0,105	9,5	
0,129	>13		0,112	10,6	
			0,114	12,6	
			0,115	11,3	
			0,127	12,4	
			0,128	11,4	
			0,130	11,3	
0,453	50 (nach 3 Sek.)	a	0,442	20	a
0,467	28	a	0,442	20	a
0,467	48	a	0,450	20,5	a
0,553*	42	b	0,528	27	b
0,576*	43	b	0,538	22,5	b
0,577*	46,5	b	0,545	23,5	b
0,696*	37,5	b	0,545	27	b
0,75	>50	c	0,72	27,5	c
1,064*	>50 gerein. u. in fl. Luft →		1,064	40	
			1,063	33,5	
			1,053	40,5	
			1,065	41,5	

Es wurden außerdem Proben, die bei 13 kV in Öl noch nicht zerstört wurden, noch einmal, nachdem sie sorgfältig von Öl gereinigt worden waren, an derselben Stelle in flüssiger Luft untersucht; das Ergebnis war:

Tabelle 4

Glas

in Öl		in flüssiger Luft
Stärke mm	Durchschlagsspann. kV	Durchschlagsspann. kV
0,096	>13	10,5
0,115	>13	10,2
0,120	>13	11,8
0,124	>13	>13
0,126	>13	11,8

Bei diesen Versuchen sind etwaige Materialverschiedenheiten ausgeschlossen, da beide Versuche mit derselben Probe an gleicher Stelle ausgeführt wurden.

Für die Versuche mit dickeren Gläsern wurden Objektgläser verwendet. Um nicht etwa durch Materialverschiedenheiten der einzelnen Proben irregeführt zu werden, wurden zu Vergleichen immer nur solche Proben benutzt, die aus ein und demselben Objektglas geschnitten waren. In Tab. 3 sind diese Proben immer zu Gruppen zusammengefaßt und mit a, b usw. bezeichnet.

Ferner wurden, um zu untersuchen, ob die geringeren Durchschlagswerte in flüssiger Luft etwa durch kleine Sprünge die im Glas durch das Eintauchen in die flüssige Luft entstehen könnten, verursacht werden, die mit * bezeichneten Proben alle erst längere Zeit in flüssige Luft getaucht und dann in Öl untersucht, außerdem wurden alle Proben, die in Öl bei 50 kV nicht zerstört wurden, dann noch einmal, nachdem sie vom Öl gereinigt waren, in flüssiger Luft untersucht. Das Ergebnis war:

Tabelle 5

Glas

Stärke mm	in Öl Durchschlagsspann. kV	in flüssiger Luft an derselben Stelle Durchschlagsspann. kV
0,682*	>50	26,5
1,064*	>50	40
1,065*	>50	41,5

Tabelle 6

Steinsalz

in Öl		in flüssiger Luft	
Stärke mm	Durchschlagsspann. kV	Stärke mm	Durchschlagsspann. kV
0,24	21	0,62	27
0,25	20	0,75	28
0,28	25	0,76	37,2
0,33	29	0,78	35
0,39	34	0,90	38,5
0,45	37	0,92	37
0,48	36	1,35	>50
0,60	44		
0,62	44,5		
0,68	>50		
0,70	>50		
0,73	>50		
0,76	>50		
0,81	>50		
1,69	>50		

Tabelle 7

Schwefel

in Öl		in flüssiger Luft	
Stärke mm	Durchschlagsspann. kV	Stärke mm	Durchschlagsspann. kV
0,10	6,2	0,125	8
0,110	8,8	0,170	13
0,14	8,2	0,195	10,1
0,18	7,3	0,200	10,8
0,18	7,8	0,200	11
0,195	6,8	0,210	12
0,230	12	0,210	7
0,240	10,2	0,235	11,8
0,255	8,2	1,18	39
0,260	12,1	1,28	50
0,265	11,4	1,28	50
0,280	>13	1,35	42
0,280	>13	1,38	50
0,340	>13	1,39	46
1,22	35	**in Luft bei Zimmertemp.**	
1,30	40	0,300	3
1,30	45	0,600	7,2
1,31	34	0,652	7,8
1,40	48	0,674	9,1
		0,675	9,8
		0,685	9,2
		1,000	>13
		1,200	12

Versuche mit Zelluloid und mit Gummi

Von Zelluloid und Gummi wurde nur je eine Stärke untersucht. Die im folgenden mitgeteilten Werte sind Mittelwerte von je 4 Messungen.

Tabelle 8

Zelluloid

in Öl		in flüssiger Luft	
Stärke mm	Durchschlagsspann. kV	Stärke mm	Durchschlagsspann. kV
0,14	31	0,14	16
Gummi			
etwa 0,6	15	0,6	>46

Folgerungen und ergänzende Versuche

Stellt man die vorstehenden Versuchsresultate graphisch dar, wie es für Glimmer, Steinsalz und Schwefel die Kurven auf S. 111 u. 118 zeigen, so sieht man, daß die Abhängigkeit der Durchschlagsspannung von der Dicke des Isoliermaterials sich am besten durch die Formel $U = a\,d + b$ darstellen läßt.

Almy, der sehr sorgfältige Messungen über dielektrische Festigkeit an Flüssigkeiten und festen Stoffen gemacht hat und ähnliche Elektrodenformen hatte (er benutzte Kugel und Ebene bzw. Spitze und Ebene) findet durchweg für feste Körper und Flüssigkeiten als Abhängigkeit der Durchschlagsspannung von der Dicke ebenfalls dieselbe Formel.

Obige Formel steht auch mit experimentellen Ergebnissen im Einklang, die in neuerer Zeit von Prof. A. Joffe[1]) gefunden wurden. Joffe fand, daß für sehr dünne Schichten in bestimmten Grenzen die Durchschlagsspannung unabhängig von der Dicke des Isolators konstant ist. Das folgt auch aus obiger Formel, denn bei sehr kleinem d wird der erste Summand der rechten Seite obiger Formel nahezu Null, die Summe also praktisch konstant.

Der außerordentlich starke Abfall der Durchschlagsspannung für Glas, Steinsalz und besonders Glimmer bei den Versuchen in flüssiger Luft ließ zunächst vermuten, daß ein Temperatureinfluß vorhanden wäre. Die Vermutung erwies sich jedoch als irrig, wie die im folgenden beschriebenen Versuche über Durchschlagsspannungen in flüssigem Wasserstoff zeigen.

Als mit Glimmer von 0,12 mm Stärke Versuche in flüssigem Wasserstoff ausgeführt wurden, konnte bei etwa 27 kV kein Durchschlag erzielt werden. Oberhalb dieser Spannung hörte ich Sprühen, und, um Funkenentladungen über dem flüssigen Wasserstoff zu vermeiden, damit das entweichende Wasserstoffgas sich nicht entzünde, steigerte ich die Spannung nicht weiter. Trotzdem der Versuch einige Male wiederholt wurde, konnte kein Durchschlag erzielt werden; als später dieselben Proben in flüssiger Luft untersucht wurden, schlugen sie schon bei etwa 12 kV durch.

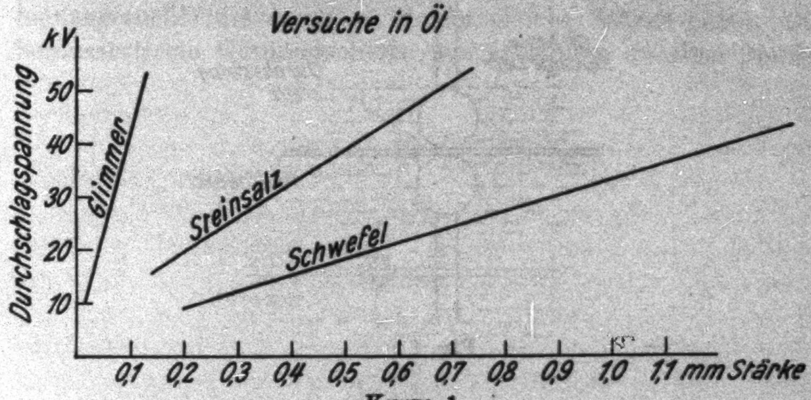
Wie ist dieses Verhalten des Glimmers nun zu verstehen?

Bei meinen Versuchen war mir aufgefallen, daß Durchschläge nie dort stattfinden, wo sich Dielektrikum und Elek-

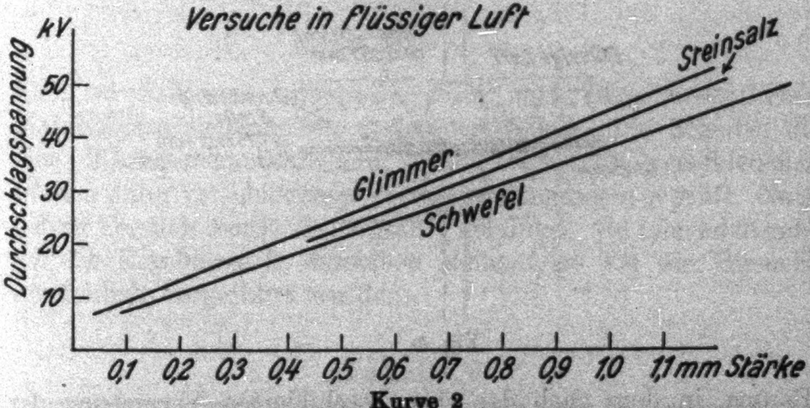
1) A. Joffé Physik. Ber. 1928. S. 558.

troden berühren, sondern stets liegt der Durchschlag davon (manchmal beträchtlich) entfernt.[1])

Um die Verhältnisse einmal bei anderer Elektrodenanordnung zu untersuchen, habe ich u. a. Glimmerplatten nach dem Verfahren von Böttger versilbert. Auch bei diesen Versuchen erfolgte der Durchschlag außerhalb des Randes der Silberschicht. (Vgl. Fig. 8.)



Kurve 1



Kurve 2

Bei der Betrachtung der Proben mit bloßem Auge glaubt man, der Durchschlag sei am Rande erfolgt. Unter dem Mikroskop sieht man dagegen deutlich, daß der Durchschlag außerhalb des Randes liegt.[2])

Diese Erscheinungen lassen nun bereits vermuten, daß zunächst das Öl bzw. die flüssige Luft durchgeschlagen wird und

1) Vgl. Abb. 1 u. 2, Taf. I u. Fig. 7.
2) Vgl. Abb. 3, Taf. I.

die hier entstandene Lawine sich dann im festen Dielektrikum fortsetzt. Bevor ich näher auf die Verhältnisse, die bei diesen Versuchen auftreten, eingehe, seien noch andere Versuchsergebnisse mitgeteilt, die diese Vermutung bestätigen.

Bei den Versuchen in flüssigem Wasserstoff konnte nicht verhindert werden, daß sich um die Elektroden, also in dem

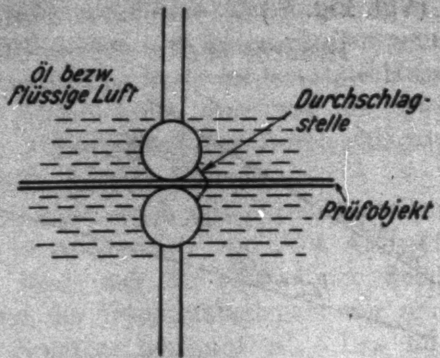


Fig. 7

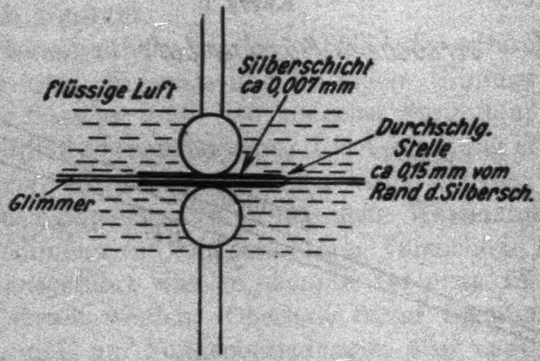


Fig. 8

Raume, in dem nach der eben geschilderten Vermutung der Durchschlag eingeleitet wird, eine Schicht von fester Luft bzw. festem Stickstoff bildete.

Die Folge war, daß bei der tieferen Temperatur (— 253° C) gegenüber flüssiger Luft (— 193° C) der Glimmer scheinbar viel höhere Spannungen auszuhalten vermochte.

Diese Verhältnisse habe ich in flüssiger Luft nachzuahmen versucht, indem ich den Prüfapparat mit Öl bzw. Wasser umgab, das dann in der flüssigen Luft erstarrte. Hierbei zeigte

sich nun, daß die elektrische Festigkeit beim Glimmer ganz beträchtlich größer wird, wenn die Elektroden von Eis bzw. festem Öl umgeben sind, trotzdem die Temperatur auch hier — 193° C betrug. (Vgl. Fig. 9.)

Hier sei ein Versuch beschrieben, der die Verhältnisse gut beleuchtet:

Aus einer Anzahl größerer Glimmerscheiben wurde eine herausgesucht, die an allen Stellen gleiche Stärke hatte. Die heraussortierte Glimmerscheibe war außerdem an allen Stellen

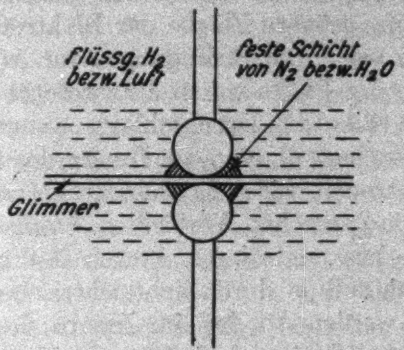


Fig. 9

klar, so daß man annehmen kann, daß keine wesentlichen Materialverschiedenheiten vorhanden waren. Die Scheibe, die eine Stärke von 0,025 mm hatte, wurde an verschiedenen Stellen unter verschiedenen Versuchsbedingungen geprüft. Nach jedem Versuch wurde sie sorgfältig gereinigt. Im folgenden gebe ich die Ergebnisse in derselben Reihenfolge wie die Versuche tatsächlich ausgeführt wurden.

Tabelle 9

Temp. °C	Versuchs-anordn. in	Elektroden umgeb. mit	Durchschlagsspann. kV	Stärke mm
21	Öl	Öl	19	0,025
—193	fl. Luft	fest. Öl	15	0,025
—193	fl. Luft	fl. Luft	(6)	0,025
—193	fl. Luft	fest. Öl	28	0,025
—193	fl. Luft	Eis	26	0,025
—193	fl. Luft	fl. Luft	(6)	0,025
21	Öl	Öl	19	0,025
—193	fl. Luft	fest. Öl	21,5	0,025

Diese Versuche sind mit Ausnahme der beiden in Öl bei Zimmertemperatur ausgeführten alle bei — 198° C gemacht. Ich habe bei allen Versuchen erst die Spannung angelegt, wenn die ganze Apparatur vollständig abgekühlt war. Tab. 9 zeigt nun, daß es sich nicht um einen Temperatureinfluß handeln kann.

Bei Versuchen mit Gummi[1]) waren die Verhältnisse ähnlich wie bei den Versuchen in flüssigem Wasserstoff. Die Elektroden drückten sich in das weiche Material ein, und als die ganze Anordnung in flüssige Luft getaucht wurde, erstarrte der Gummi, so daß eine größere Fläche der Elektroden von festem Material umgeben war. Die Bedingungen für Ausbildung einer Lawine außerhalb der Platte waren also wesentlich ungünstiger und infolgedessen stieg die Durchschlagsspannung an.

Um zu untersuchen, ob etwa im Innern des festen Isolators vorhandene Elektronen eine Entladung hervorrufen, wurde folgender Versuch gemacht: Verfärbtes Steinsalz wurde mit einer Bogenlampe bzw. mit einem starken Radiumpräparat bestrahlt. Hierdurch sollten durch lichtelektrischen Effekt Elektronen ausgelöst werden, so daß im Innern des Isolators sich möglichst viel freie Elektronen befanden. Hätte nun die Anzahl der im Innern des Isolators befindlichen Elektronen wesentlichen Einfluß auf die Durchschlagsspannung, so hätten sich Unterschiede in den Durchschlagsspannungen bei den Versuchen mit oder ohne Bestrahlung ergeben müssen. Derartige Unterschiede wurden jedoch nicht ermittelt.

Man kann sich nun die Vorgänge beim elektrischen Durchschlag fester Körper etwa so vorstellen: Ähnlich wie bezüglich der mechanischen Festigkeit eine Kette, deren Glieder verschiedene mechanische Festigkeit besitzen, im schwächsten Glied zerreißt, so zerreißt eine Kette hintereinander geschalteter Dielektrika zuerst im elektrisch schwächsten Glied. Hier findet zuerst ein Durchschlag statt, es bildet sich eine Lawine aus, die bei genügender Energie die ganze Kette durchbricht. Bei den hier geschilderten Versuchen besteht diese Kette aus dem zu untersuchenden festen Isolierstoff, dem Öl und aus im Öl besonders an der Elektrode enthaltenen Gasteilchen.

Nach den bisherigen Versuchen hat man es stets mit einer solchen Kette elektrisch hintereinander geschalteter Isolatoren

1) Vgl. Tab. 8, S. 109.

zu tun. Ob es überhaupt möglich ist, bei Zimmertemperatur eine solche Kette zu vermeiden, besonders Gasteilchen vollkommen zu eliminieren, ist fraglich, wenn man bedenkt, daß in allen Stoffen Gase enthalten sind.

Man beachte ferner, daß bei einer derartigen Kette das Gas bereits durchgeschlagen wird, wenn für die anderen Medien die Bedingungen für einen Durchschlag bei weitem noch nicht erreicht sind. Erstens ist die elektrische Festigkeit der Gase anderen Stoffen gegenüber gering und zweitens ist ihre Dielektrizitätskonstante viel kleiner als die der anderen Stoffe, d. h. die Feldstärke im Gas ist viel größer als im festen bzw. flüssigen Isolator.

Nun wird empfohlen, für die Untersuchung von festen Stoffen die Form von Bikonkavlinsen zu wählen, deren Oberflächen versilbert werden sollen. Daß hierdurch Gase absolut vermieden werden können, dürfte unwahrscheinlich sein, da selbst feste Metalle Gase in größeren Mengen enthalten.

In früheren Abschnitten wurde schon erwähnt, daß der Durchschlag stets erst im Medium, das sich zwischen den Elektroden und dem festen Isolator befindet, eingeleitet wird, und die gebildete Lawine das feste Dielektrikum dann durchbricht. Da bei den Versuchen die Dimensionen des schwächsten Gliedes in diesem Falle des mit Luft gemischten Öles konstant bleiben, und wenn man außerdem annimmt, daß die Feldstärke, die zur Erzeugung einer Lawine, die imstande ist, das feste Dielektrikum zu durchbrechen, stets die gleiche ist, ergibt sich durch Überlegungen die von Almy empirisch aufgestellte Formel der Abhängigkeit der Durchschlagsspannung von der Stärke des Dielektrikums. Diese Formel, die Almy für feste und flüssige Stoffe bestätigt fand, lautete:

$$U = a\,d + b\,.$$

Grünewald[1]) bestätigt diese Formel ebenfalls. Auch die hier geschilderten Versuche fügen sich dieser Formel sehr gut, und bei Versuchen, die ich während praktischer Tätigkeit in der Industrie in großer Anzahl ausgeführt habe, fand ich, daß sich die Abhängigkeit der Durchschlagsspannung von der Stärke des Isolators am besten durch diese Formel darstellen läßt.

Eine Überlegung, aus der sich die Almysche Formel ergibt, dürfte folgende sein (vgl. Figg. 10 und 11).

---

1) F. Grünewald, Archiv f. Elektrotechnik 1923. S. 79.

Betrachtet man im elektrischen Felde hintereinandergeschaltete Dielektrika D_1 und D_2. Der Einfachheit halber mögen nur zwei vorhanden sein. Ferner seien alle Werte, die dem Dielektrikum D_1 zukommen, im folgenden stets mit dem Index 1 und die Werte von D_2 mit dem Index 2 bezeichnet.

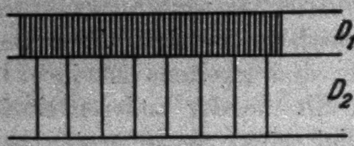


Fig. 10

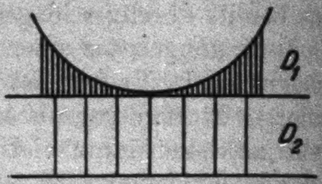


Fig. 11

Ferner bezeichne: $\mathfrak{F}$ die Feldstärke, ε die Dielektrizitätskonstante, d die Stärke des Isolators, u die Spannung. Es ist also $\mathfrak{F}_1$ die Feldstärke in D_1, d_2 die Stärke von D_2 usw. Ferner sei $u_1 + u_2 = U$ die gesamte Spannung, die beim Versuch gemessen wird.

In Fig. 11 ist eine Elektrode nur angedeutet, da für diese Betrachtungen nur das Vorhandensein eines elektrischen Feldes wesentlich ist.

Es gelten folgende Gleichungen:

$$\frac{\mathfrak{F}_1}{\mathfrak{F}_2} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1},$$

hieraus folgt:

$$\mathfrak{F}_2 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \mathfrak{F}_1 ;$$

ferner ist:

$$u_1 = \mathfrak{F}_1 d_1 ,$$
$$u_2 = \mathfrak{F}_2 d_2 ,$$
$$U = u_1 + u_2 ,$$
$$U = \mathfrak{F}_1 d_1 + \mathfrak{F}_2 d_2 ,$$
$$U = \mathfrak{F}_1 d_1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \mathfrak{F}_1 d_2 .$$

Da die Feldstärke $\mathfrak{F}_1$ des elektrisch schwächsten Gliedes, bei welcher die das feste Dielektrikum zerstörende Lawine entsteht, für gleiche Materialien konstant ist, da sie ja nur von der Festigkeit des schwächsten Gliedes sowie von dem Widerstand, den der feste Stoff gegen Stoß zu leisten vermag, bedingt wird, hat obige Formel tatsächlich die Form:

$$U = a\, d + b ,$$

denn d_1 ist ja bei den Versuchen stets konstant.

Wie aus der Formel ersichtlich, hängt die Konstante b der Almyschen Formel ab: von der Stärke des schwächsten Gliedes, von der Feldstärke $\mathfrak{F}_1$, die eine Lawine von genügender Energie zu schaffen vermag. Man sieht, daß die Form der Elektroden wie überhaupt die ganze Versuchsanordnung wesentlichen Einfluß auf die Durchschlagsspannung eines Isolators hat.

Dickere feste Isolatoren werden unter bestimmten Versuchsbedingungen von den im gasförmigen bzw. flüssigen Dielektrikum entstehenden Lawinen, die eine bestimmte Energie nicht haben, nicht zerstört. Sie vermögen solche Lawinen abzulenken, es kommt zur Ausbildung von Gleitfunken.

a hängt ab vom Verhältnis der Dielektrizitätskonstanten und von $\mathfrak{F}_1$.

Da a für den Winkel, den die durch die Gleichung

$$U = a\,d + b$$

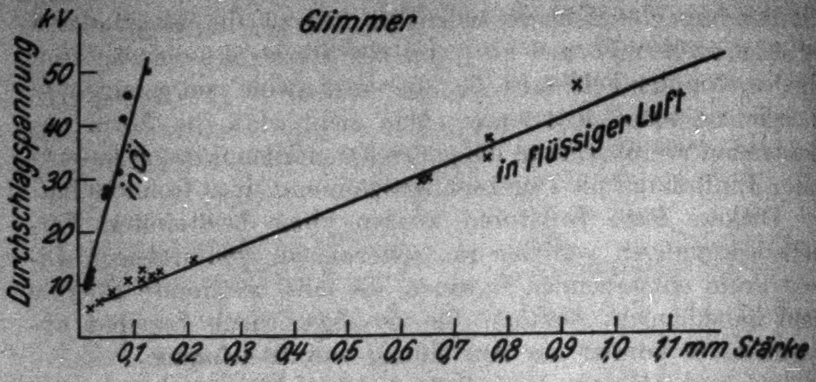
dargestellte Grade mit der Abszisse bildet, maßgebend ist, so müssen die Versuche, sobald die Versuchsanordnung von einem Dielektrikum mit hoher Dielektrizitätskonstante umgeben ist, steilere Kurven ergeben, als wenn die Versuche z. B. in Luft ausgeführt werden, was durch die Versuche mit Glimmer, Glas und Steinsalz auch bestätigt wird.

Wenn man bedenkt, daß a nun auch noch von der zur Entstehung einer Lawine nötigen Feldstärke $\mathfrak{F}_1$ abhängt und diese wiederum eine Funktion der elektrischen Festigkeit des Dielektrikums ist, in dem die Lawine entsteht, so kann es vorkommen, daß in einem Medium, wie flüssige Luft, mit hoher elektrischer Festigkeit trotz geringer Dielektrizitätskonstante U nicht kleiner wird.

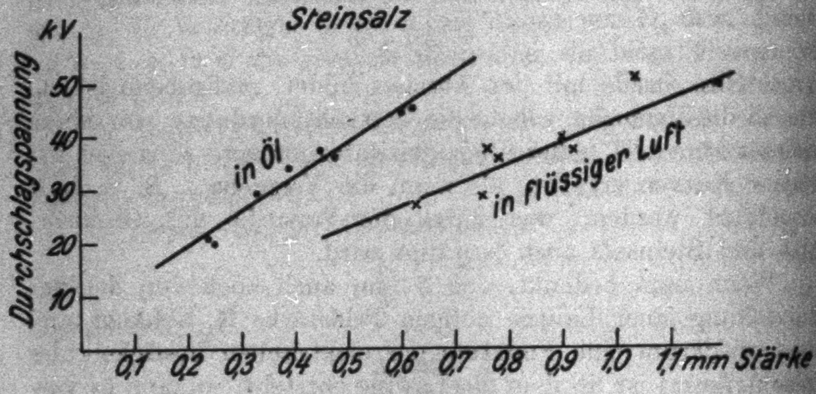
Um kurz einen Überblick in die Größenverhältnisse der elektrischen Festigkeiten von Öl, flüssiger Luft und Luft bei Zimmertemperatur zu geben, seien folgende Zahlen mitgeteilt. Bei gleichen Elektrodenabständen und sonst gleichen Bedingungen ergaben sich für

Luft bei Zimmertemperatur	12 kV
Öl bei Zimmertemperatur	16 kV
siedende flüssige Luft	31 kV.

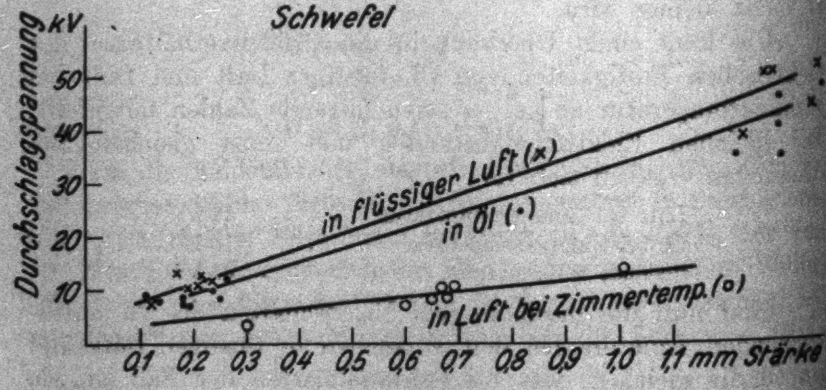
Sind nun die mechanischen Eigenschaften des zu untersuchenden Isolators bei den Versuchen in flüssiger Luft und im Öl die gleichen, was bei Schwefelplatten der Fall ist, sie sind nämlich bei Zimmertemperatur schon so spröde und gegen



Kurve 3



Kurve 4



Kurve 5

Stoß ebensowenig widerstandsfähig wie in flüssiger Luft, so kann es vorkommen, daß die Durchschlagsspannung in diesem Falle für die Versuche in flüssiger Luft größer wird als für die Versuche in Öl.

Man beachte ferner, daß bei tiefen Temperaturen, bei denen alle Stoffe spröde werden, der Widerstand, den sie gegen Stoß zu leisten vermögen, gering wird, so daß die elektrische Festigkeit bei Glimmer, Glas und Steinsalz bei Zimmertemperatur in Öl eine viel höhere ist als in flüssiger Luft. Die Kurven (auf S. 111), die die Versuche in flüssiger Luft darstellen, decken sich fast für alle untersuchten Stoffe. Es ist dies nicht anders zu erwarten, wenn man die Annahme macht, daß die Stoffe bei einer derart niedrigen Temperatur (— 193° C) so spröde sind, daß sie nur geringen Widerstand gegen Stoß leisten können, d. h. daß der Widerstand gegen Stoß bei allen Stoffen fast der gleiche ist. Sie werden zertrümmert, sobald sich überhaupt eine Lawine ausbildet.

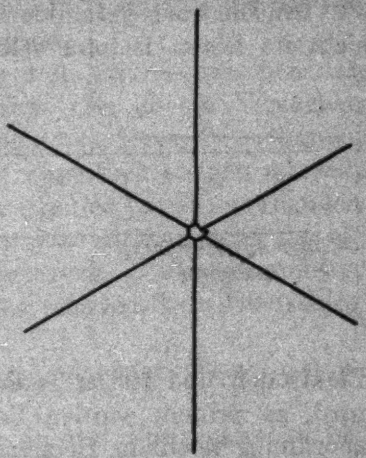


Fig. 12

Nach diesen Versuchen ist anzunehmen, daß der Widerstand, den ein Isolator gegen Stoß zu leisten vermag, wesentlichen Einfluß auf seine dielektrische Festigkeit hat.

Eine weitere Tatsache, die für einen Stoß, durch den der Isolator zerstört wird, spricht, ist das Aussehen der Durchschläge. Bei den Durchschlägen beim Glimmer bilden sich fast ausnahmslos sechsstrahlige Sterne von großer Regelmäßigkeit, vgl. Fig. 12. In einer Studie über Glimmer schreibt Zeitler[1]) u. a.: „Setzt man auf eine Glimmerplatte eine Nadel und treibt die Spitze durch einen schwachen raschen Schlag mit einem kleinen Hammer ein wenig in die Platte hinein, so entsteht eine merkwürdige, aus Rissen bestehende Figur, welche die Form eines sechsstrahligen, manchmal auch dreistrahligen Sternes hat. Das ist die sogenannte Schlagfigur, die zuerst von

1) H. Zeitler, Der Glimmer. Verl. Jaroslaw, Erste Glimmerwaren-Fabrik in Berlin, 1913.

Reusch beobachtet wurde. Von besonderer Wichtigkeit ist nun, daß die entstehenden Linien stets parallel zu den Kanten verlaufen, welche die Seitenflächen des Kristalls mit der Basis bilden usw."

Man erhält also durch mechanischen Schlag dieselbe Figur wie beim elektrischen Durchschlag.

Die Durchschläge von Glas haben unter dem Mikroskop im Aussehen große Ähnlichkeit mit einer mit Stein zertrümmerten Fensterscheibe.

Steinsalz springt in zu den Kanten parallelen Linien, und in Linien, die hierzu um 45° schätzungsweise gedreht sind. Es liegen jedoch nur wenige Beobachtungen vor, da das Material beim Durchschlag meistens vollkommen zersprengt wurde.

Um die eben geschilderte Annahme, daß der Durchschlag nicht im festen Isolator selbst, sondern in dem zwischen den

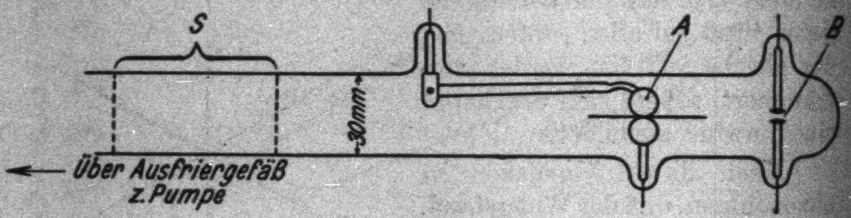


Fig. 13

Elektroden und festen Isolator befindlichen Mittel eingeleitet wird, zu prüfen, wurden Versuche mit ähnlicher Elektrodenanordnung noch im Hochvakuum ausgeführt.

Es waren schon Versuche im Hochvakuum gemacht worden[1]); nach denen war es jedoch nicht möglich zu entscheiden, ob der Durchschlag an der Berührungsstelle der Elektroden mit dem Isolator erfolgte oder nicht; hierzu wurden die folgenden Versuche gemacht.

Das Hochvakuum wurde durch eine Stahl-Quecksilber-Diffusionspumpe von Leybold erzeugt. Die Apparatur ist in Fig. 13 veranschaulicht. Sie besteht aus einem Ausfriergefäß und der eigentlichen Prüfanordnung (Fig. 13, *A*), zwei Kugeln von 9 mm Durchmesser mit dazwischenliegendem Prüfobjekt. Parallel dazu waren noch zwei pilzförmige Elektroden (*B*), die einen Abstand von etwa 0,3 mm hatten, angebracht. Sie

1) Näheres vgl. S. 123 ff.

dienten als Vakuumkriterium. Das Einlegen der Prüfobjekte geschah in der Weise, daß die Apparatur in der mit *S* bezeichneten Zone auseinandergesprengt wurde. Sodann wurde das Prüfobjekt mit einer besonderen Vorrichtung zwischen die Elektroden gebracht. Nun wurde die ganze Apparatur wieder sorgfältig vom Glasbläser verschmolzen.

Als Elektrodenmetall innerhalb der Vakuumapparatur wurde nur im Vakuum geschmolzenes Kupfer von Heraeus in Hanau verwendet, um eine möglichst geringe Gasabgabe von den Metallen zu haben.

Über die ganze Apparatur konnte ein elektrischer Ofen geschoben werden, so daß sie während des Evakuierens ausgeheizt werden konnte.

Die Spannungserzeugung und Messung war die gleiche wie bei den früher geschilderten Versuchen.

Wäre es möglich gewesen, aus dem Raume zwischen den Elektroden und dem festen Isolator (bei diesen Versuchen meistens Glas) vollkommen alle Atome bzw. Ionen zu entfernen, so hätte die Durchschlagsspannung wesentlich steigen müssen, da keine Gelegenheit zur Ausbildung einer Lawine vorhanden war. Bei einem derartigen Vakuum hätte aber auch bei der als Vakuumkriterium dienenden Funkenstrecke *B* bei Spannungen bis 50 kV, wie sie mir zur Verfügung standen, kein Überschlag erfolgen dürfen.

Die Versuche wurden nun in folgender Weise durchgeführt:

Bei Atmosphärendruck treten an der Funkenstrecke bei den normalen Spannungen Funkenentladungen auf. Verringert man den Druck, so zeigen sich die üblichen Erscheinungen. Bei einem Druck von einigen Millimetern Hg ist die Kathode vollständig mit einem blauen Lichtschimmer überzogen; bei weiterer Verdünnung verschwinden alle Lichterscheinungen, und es treten bei genügend hohen Spannungen wieder funkenähnliche Entladungen auf, jedoch jetzt viel milder als in Luft bei Atmosphärendruck.

Je länger nun evakuiert wurde, um so höher mußte die Spannung gesteigert werden, bis eine Entladung einsetzte.

Nachdem mehrere Tage evakuiert worden war, traten Entladungen an der Funkenstrecke *B* erst bei 30—40 kV auf, während bei gleicher Elektrodenanordnung bei Atmosphärendruck schon Entladungen unterhalb 3 kV auftraten.

Die Durchschlagsspannungen schwanken sehr stark, das wird verständlich, wenn man annimmt, daß die Werte von der zufälligen Konstellation der Atome bzw. Ionen zwischen den Elektroden abhängen, und je nachdem diese Konstellation günstig oder weniger günstig ist erfolgt der Durchschlag bei niedrigeren oder höheren Spannungen.

Erfolgt der Durchschlag oberhalb einer gewissen Spannung nicht sofort, und hält man diese Spannung aufrecht, so erfolgt der Durchschlag nach einiger Zeit, da die Wahrscheinlichkeit, daß eine für die betreffende Spannung genügend günstige Konstellation der Atome eintritt, mit zunehmender Zeit wächst, bis sie fast konstant wird.

Wenn nun in der Apparatur ein derartiges Vakuum erreicht war, daß die Funkenstrecke *B* erst bei etwa 25 kV ansprach, wurde die ganze Apparatur viele Stunden mit einem elektrischen Ofen auf 400° C erhitzt. Nach längerem Evakuieren und Wiedererkalten der Apparatur stieg dann die Überschlagsspannung bei *B* bis auf 40 kV.

Als dann an die Prüfelektroden die Spannung angelegt wurde, wurde eine Glasplatte, die in Öl bei etwa 40 kV zerstört worden wäre, schon bei 15—20 kV durchgeschlagen, jedoch niemals an der Stelle, an der die Elektroden das Glas berührten, sondern bis zu 7 mm davon entfernt. War ein Durchschlag erfolgt, so konnte man die Spannungen wiederum steigern und es erfolgte wieder ein Durchschlag, jedoch an ganz anderer Stelle und bei anderer Spannung.

Glimmer und Schwefel, die ebenfalls im Vakuum untersucht wurden, wurden auch bei wesentlich geringeren Spannungen durchschlagen als sonst.

Diese Versuchsergebnisse bestätigen aber ebenfalls die früher geschilderte Annahme, daß der Durchschlag in dem Mittel zwischen Elektroden und festem Isolator eingeleitet wird, denn durch das Evakuieren werden erstens die freien Weglängen der einzelnen Materieteilchen, wobei dahingestellt sei, ob es sich um Ionen oder Elektroden handelt, wesentlich größer. Die zum Durchschlagen des Isolators nötige Energie, die von den Massenteilchen als kinetische Energie aufgenommen werden muß, kann deshalb schon bei geringeren Spannungen erreicht werden.

Zweitens nimmt die Wahrscheinlichkeit, daß eine Lawine in Richtung der Feldstärke, also fast senkrecht, auf den festen

Isolator trifft, mit höherem Vakuum zu; denn bei jedem Zusammenstoß mit einem Atom werden die Teilchen nach irgendeiner Richtung abgelenkt. Sind nun sehr viele Atome vorhanden, so müssen sich die Teilchen gewissermaßen in Zickzacklinien durchschlängeln und treffen in irgendeinem Winkel auf die Fläche des festen Isolators auf. Je mehr dieser Winkel nun von einem rechten abweicht, um so leichter vermag der feste Isolator die Lawine zu „reflektieren", und es bilden sich Gleitfunken.

Befinden sich dagegen, wie es im „Vakuum" der Fall ist, weniger Atome zwischen Isolator und Elektroden, so werden zwar auch bei jedem Zusammenstoß die Teilchen nach irgendeiner Richtung abgelenkt, aber die richtende Kraft wirkt infolge der größeren freien Weglänge längere Zeit auf die Teilchen, und die Wahrscheinlichkeit eines senkrechten Aufpralles ist wesentlich größer. Ein senkrechter Stoß wird bei bestimmter Energie den Isolator eher durchbrechen, da bei ihm die ganze Energie der Stoffteilchen für den Durchschlag wirksam ist.

Bei den Vakuumversuchen hörte man, bevor ein Durchschlag erfolgt war, ein feines Klingen (scheinbar der Glasplatte), das jedesmal, wie am Voltmeter zu sehen war, mit einem Spannungsausgleich verbunden war.

Mikroskopische Betrachtungen der Proben zeigten, daß in einiger Entfernung von der Berührungsstelle der Elektroden mit dem Isolator kleine Stückchen herausgeschlagen waren.[1]) Bei Proben, die in sehr hohem Vakuum untersucht worden waren, konnten diese Anfressungen nur auf der Kathodenseite bemerkt werden, während sie bei weniger gutem Vakuum an beiden Seiten auftraten.

Die Beschädigungen waren jedoch stets nur an der Oberfläche. Als ein Glimmerstück, das diese Beschädigungen zeigte, in drei Teile gespalten wurde, zeigte das Mittelstück keinerlei Veränderungen.

Diese Erscheinungen kann man nun so deuten, daß die Teilchen nicht senkrecht genug aufprallten, um den Isolator zu durchbrechen, andererseits aber war ihre Energie zu groß, als daß sie der Isolator ohne Beschädigung reflektieren konnte.[2])

---

1) Vgl. Abb. 6, Taf. II.
2) Vgl. Abb. 7, Taf. II.

Es ist erforderlich, hier auf Versuche von Mündel[1]) einzugehen. Mündel hat Durchschlagsversuche im Hochvakuum ausgeführt, um Randentladungen zu vermeiden. Die Versuche wurden zwischen ebenen Elektroden aus Aluminium ausgeführt, wobei der Durchschlag in der Regel unter den Elektroden erfolgte, was zunächst als ein Widerspruch zu den im vorigen geschilderten Annahmen erscheint.

Beachtet man jedoch, daß eine sogenannte Ebene, selbst wenn sie von dem geschicktesten Mechaniker hergestellt wäre, bei ungewöhnlich starker Vergrößerung als krumme Fläche mit allen möglichen Unebenheiten erscheinen würde, so ist es ohne weiteres klar, daß bei diesen Versuchen sich Elektroden und Isolator nur an drei Punkten berühren können. Alle übrigen Punkte sind daher mehr oder weniger voneinander entfernt. Da nun als Elektrodenmaterial Aluminium verwendet wurde, was schwer zu entgasen ist, also während des Evakuierens stets Gase abgibt, so vermute ich, daß auch bei den Versuchen von Mündel der Durchschlag im Gas eingeleitet wurde, das sich zwischen Elektroden und Isolator befand.

Für diese Annahme sprechen auch die verhältnismäßig geringen Durchschlagsspannungen von Glas gegenüber anderen Messungen.

Ferner ein Versuch, über den Mündel folgendermaßen berichtet: „Um diejenige Spannung zu finden, die die Platte ‚dauernd' aushält, wurde die angelegte Spannung von 11 kV in halbstündigen Stufen auf 11,45, 11,95, 12,4 und 12,85 kV gesteigert. Bei der Fortsetzung des Versuches am folgenden Morgen schlug die Platte bereits bei 11,8 kV durch. Die Raumtemperatur betrug 21 statt 18,1° C am Vortage, doch könnte dies für die Osramplatte[2]) nur etwa 1 Proz. ausmachen."

Aus diesem Versuch folgt, daß sich entweder die Glasplatte oder die Versuchsanordnung oder beides über Nacht verändert hat.

Wäre das erste oder das letzte der Fall, so wäre es unmöglich, irgendwelche Konstanten bezüglich der elektrischen Festigkeit eines Isolators aufzustellen. Da aber unter gleichen Bedingungen bei Durchschlagsversuchen sehr gut reproduzier-

---

1) E. Mündel, Zum Durchschlag fester Isolatoren, Archiv f. Elektrotechnik 1925. Taf. 320.

2) Gemeint ist eine von der Firma Osram hergestellte Glasplatte.

bare Versuche möglich sind, so ist eine Veränderung des Glases nicht anzunehmen.

Es handelt sich also bei obigem Versuch um eine Änderung der Versuchsbedingungen, die eine Änderung der Durchschlagsspannungen zur Folge hatten.

Hiermit komme ich auf das, vielleicht das einzige, worüber sich alle, die dieses Gebiet bearbeitet haben, einig sind, nämlich, daß die von den verschiedenen Forschern erhaltenen Resultate kaum untereinander vergleichbar sind, da sie völlig von den Versuchsbedingungen abhängen, wie es Grünwald[1]) ähnlich formuliert hat.

Messungen aber, die von den Versuchsbedingungen abhängen, können nicht als charakteristischer Wert für ein Material betrachtet werden, und so glaube ich, daß keiner der bisher angestellten Versuche Absolutes über die dielektrische Festigkeit eines festen Isolators aussagen kann, sondern alle haben nur relativen Wert.

Daß die Festigkeiten von festen Stoffen viel höher liegen, als im allgemeinen gemessen wurde, beweisen die Versuche von Schumann. Schumann[2]) hat u. a. Glas untersucht, wobei er den Versuchsobjekten die Form von Bikonkavlinsen gegeben hat. Als Elektroden brachte er mit einer geeigneten Vorrichtung unter Vakuum Quecksilber an die Oberflächen der Glaslinsen.

Schumann erreichte bei seinen Versuchen eine Durchbruchsfeldstärke von 4310 kV/cm^{-1}, was rund das Vierfache der im allgemeinen gemessenen Werte für die Durchbruchsfeldstärke von Glas darstellt.

Auch diese hohen Werte sind mit der Annahme verständlich, daß der Durchschlag im Medium zwischen Isolator und Elektroden eingeleitet wird, denn bei den Schumannschen Versuchen wurden Gase durch das Vakuum stark vermindert, außerdem aber wurden durch die Verwendung der flüssigen Quecksilberelektroden, die sich dicht an den festen Isolator anschmiegen, die freien Weglängen wesentlich verkürzt, so daß eine große Feldstärke nötig wird, um den Teilchen eine derartig kinetische Energie zu erteilen, daß sie den festen Stoff durchbrechen können. Wie Prof. Schumann[2]) mitteilt, waren

---

1) F. Grünewald, Archiv f. Elektrotechnik 1923. S. 79.
2) W. O. Schumann, Ztschr. f. techn. Phys. 1925. Nr. 9. S. 443.

die Durchbruchsfeldstärken bei seiner Versuchsanordnung wesentlich kleiner, wenn das Quecksilber nicht mit größter Sorgfalt, so daß sich Luft mit einschließen konnte, an die Oberflächen der Glaslinsen gebracht wurde.

Erwähnt sei noch das Verhalten von flüssigen Isolatoren; da bei diesen die Durchschlagsspannungen stark von Druck abhängen, hat Günther-Schulze[1]) die Annahme gemacht, daß bei flüssigen Stoffen eine verschleierte Gasentladung vorliege. Die in den flüssigen Isolatoren enthaltenen Ionen sollen durch die zum Durchschlag erforderlichen Feldstärken derartig hohe Geschwindigkeiten erhalten, daß sie bei ihrer hohen Reibung in der Flüssigkeit eine solche Wärme entwickeln, die mikroskopische Dampfblasen erzeugt, in welchen dann durch Stoßionisation eine Funkenentladung einsetzt.

Ich vermute eher, daß auch bei Flüssigkeiten der Vorgang sich in ähnlicher Weise wie bei festen Körpern abspielt, daß also in den in der Flüssigkeit bereits schon enthaltenen Gasbläschen die Entladung einsetzt und den flüssigen Isolator dann durchbricht.

Schließlich seien noch die Verzögerungserscheinungen zur Beleuchtung der Annahme des Durchschlags als Fortsetzung einer Gasentladung erwähnt.

Unter Verzögerungserscheinung versteht man, daß Isolatoren bei bestimmten Spannungen erst nach längerem Einwirken der Spannung zerstört werden.

v. Laue[2]) hat dies bei Gasen durch Unordnung der Atome erklärt und es durch statistische Betrachtungen der Berechnung zugängig gemacht.

Verzögerungserscheinungen werden nun aber auch bei festen Stoffen beobachtet, trotzdem bei ihnen die Atome an Gleichgewichtslagen gebunden sind, also eine Unordnung, wie sie bei Gasen nicht besteht.

Die Verzögerungserscheinungen lassen sich aber verstehen, wenn man annimmt, daß der Durchschlag bei festen Stoffen in der Fortsetzung einer Gasentladung besteht. Einmal wegen der oben geschilderten Unordnung der Atome im Gas, zum zweiten führen bei bestimmten Spannungen die Stöße, die der feste Isolator erleidet, nicht zu seiner sofortigen Zerstörung,

---

1) A. Günther-Schulze, Helios 1922. S. 397.
2) Vgl. M. v. Laue, Ann. d. Phys. 76. S. 261. 1925.

sondern bewirken oft erst nach geraumer Zeit (Stunden) einen Durchschlag. Der Isolator wird in diesen Fällen von den Oberflächen her durchgefressen.

Zusammenfassung

Bei den festen und flüssigen Isolatoren besteht der Durchschlag in der Fortsetzung einer Gasentladung. Die Gase können in Blasenform zumal bei Flüssigkeiten sich auch im Innern des Dielektrikums befinden. Für die Fortsetzung einer Gasentladung sprechen:

1. die Abhängigkeit der Durchschlagsspannungen von den Versuchsbedingungen;
2. die von Almy und anderen gefundene Abhängigkeit der Durchschlagsspannung von der Stärke nach der Formel $U = a\,d + b$;
3. die Verzögerungserscheinungen bei festen Isolatoren;
4. bei flüssigen Isolatoren die Abhängigkeit vom Druck, sowie die eingangs erwähnten Spillerschen Versuche;
5. die große Steigerung der Durchschlagsspannung bei den Versuchen von Schumann, bei den hier geschilderten Versuchen in flüssigem Wasserstoff (S. 112) und bei den Versuchen mit Gummi in flüssiger Luft;
6. die Tatsache, daß stets da, wo diese Beobachtung möglich war, der Durchschlag nie an der Berührungsstelle der Elektroden mit dem festen Isolator auftrat, trotzdem im festen Stoff hier die größte Feldstärke herrscht.
7. die Ergebnisse meiner Versuche im Vakuum (S. 122).

Über die elektrische Festigkeit von festen Isolatoren kann man also zunächst nichts weiter aussagen, als daß die bisher gemessenen Spannungen viel zu gering sind, um einen Isolator ohne das Vorhandensein von Gasresten durch rein elektrische Beanspruchung zu zerstören. So kommt auch Prof. Dr. Rogowski[1]) beim Steinsalz theoretisch zu einer Durchbruchsfeldstärke von 70000 kV/cm^{-1}, während die gemessenen Werte bei rund 1500 kV/cm^{-1} liegen.

Wollte man daher charakteristische, absolute Werte für feste Stoffe erhalten, so müßte man Gase absolut vermeiden können, was mir nicht gelang. Ob es heute überhaupt technisch möglich ist, vermag ich nicht zu entscheiden.

---

1) W. Rogowski, Berichte d. V. D. E., Versammlung Wiesbaden 1926. S. 77.

Prof. Dr. Rogowski[1]) hat, wie anfangs erwähnt, festgestellt, daß die Vorstellung über die Entladung in Gasen einer Korrektur bedarf; wie diese Vorstellung sich auch entwickeln mag, so darf man nach vorstehendem, wonach der Durchschlag in flüssigen und festen Stoffen in der Fortsetzung einer Gasentladung besteht, annehmen, daß bei Gasen, flüssigen und festen Isolatoren unter normalen Bedingungen die Ursachen des Durchschlags aus derselben Wurzel fließen. Mit aller Vorsicht, aber im Einklang mit allen meinen Betrachtungen und Ergebnissen, sei die mir von Prof. Nernst oft geäußerte Vermutung aufgestellt, daß beim Durchschlag eine „Elektronenlawine" die Hauptrolle spielt, daß also im Moment des Durchschlags ein „Faden metallischer Leitfähigkeit" sich ausbildet.

An dieser Stelle möchte ich nicht versäumen, Hrn. Prof. Dr. Nernst, auf dessen Veranlassung und unter dessen Leitung diese Arbeit entstanden ist, für die vielseitigen wertvollen Anregungen und bereitwillige Unterstützung ehrerbietigst zu danken.

Verbindlichst möchte ich auch danken für die finanzielle Unterstützung, die diese Arbeit durch den Isolierstoffonds (General Electric Comp., AEG. und Siemens) erhielt.

Berlin, Physikal. Inst. der Universität, März 1928.

1) W. Rogowski, Berichte d. V. D. E., Versammlung Wiesbaden 1926. S. 77.

Eingegangen am 26. März 1928

4. Über den Mechanismus von Elektronenschwingungen;

von H. E. Hollmann

(Darmstädter Dissertation, vorgetragen in der Sitzung des Gauvereins Hessen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft am 18. Februar 1928 in Darmstadt)

(Hierzu Tafel III bis V)

Inhaltsverzeichnis: Einleitung. — 1. Schwingungserzeugung durch Rückkoppelung. — 2. Schwingungserzeugung durch eine fallende Charakteristik: a) Versuche von Gill und Morrell; b) Versuche von Gill. — 3. Schwingungserzeugung durch Steuerung der Elektronenbewegung in Bremsfeldern: a) Elektronenschwingungen nach Barkhausen-Kurz; b) Abhängigkeit der Elektronenschwingungen vom Gasdruck; c) Einfluß der Raumladung; d) Beeinflussung durch ein Magnetfeld, e) Der Einfluß eines angekoppelten Schwingungskreises.

I: Das gleichzeitige Auftreten verschiedenartiger Elektronenschwingungen. — § 1. Die Versuchsapparatur: a) Der Schwingungserreger; b) Messung der Wellenlänge. — § 2. Schwingungen nach Barkhausen-Kurz und Gill und Morrell. — § 3. Übergang und Intensitätsverlauf. — § 4. Die Bedeutung des äußeren Schwingungssystems. — § 5. Dämpfungsverminderung durch Fremderregung. — § 6. Theorie der Elektronenbewegung im Wechselfeld: a) Berechnung der BK-Frequenz aus der Elektronenbewegung im stationären Bremsfeld, b) Berechnung der GM-Frequenz aus der Elektronenbewegung im Wechselfeld.

II: Gleichartige Elektronenschwingungen verschiedener Frequenz. — § 1. Die Versuchsapparatur. — § 2. BK- und GM-Schwingungen verschiedener Frequenz. — § 3. Einsatzbedingungen für die „kürzeren" und „längeren" BK-Schwingungen. — § 4. Theoretische Betrachtungen. — § 5. Experimentelle Prüfung. — § 6. Ein kontinuierliches Wellenspektrum. — § 7. GM-Schwingungen „höherer" Frequenz. — Zusammenfassung. — Literatur.

Einleitung

Ungedämpfte elektrische Schwingungen lassen sich mittels der Elektronenröhre auf verschiedene Weise erzeugen, und zwar:

1. durch Rückkoppelung,
2. unter Ausnutzung einer fallenden Charakteristik,
3. durch Steuerung der Elektronenbewegung in Bremsfeldern.

Daneben haben einige Spezialfälle, nämlich Reiß- und Springerscheinungen, zur Erzeugung von Pendelfrequenzen bisher nur in Bereichen geringer Periodenzahlen einige Bedeutung erlangt.

Zur Erzeugung von extrem hohen Schwingungszahlen von über 10^8 Hertz sind alle drei Methoden angewandt worden, ohne daß indessen auf eine scharfe Trennung der einzelnen Schwingungsgebiete hinreichend Wert gelegt wurde. Es ist daher nicht zu verwundern, wenn z. B. bei Untersuchungen im Gebiet drei Erscheinungen aus dem zweiten Gebiet auftraten (z. B. bei Gill und Morrell), denen die von Barkhausen und Kurz aufgestellte Theorie nicht genügen konnte. So sind von einzelnen Autoren verschiedene Erklärungen und Deutungen der bei extrem hohen Frequenzen auftretenden Erscheinungen bekannt geworden, doch können sie nur teilweise befriedigen, denn sie berücksichtigen nicht einerseits die im Vakuum der Röhre sich abspielenden Vorgänge, andererseits die äußeren Einflüsse der Schaltung oder der Versuchsanordnung.

Wird daher nicht von vornherein eine sorgfältige Trennung der einzelnen Gebiete durchgeführt, sei es durch schaltungstechnische Maßnahmen, sei es durch geeignete Wahl der Betriebsbedingungen, so sind allgemein gültige und einer theoretischen Deutung zugängliche experimentelle Ergebnisse nicht zu erwarten.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist nun die Untersuchung der im Schwingungsgebiet drei auftretenden Komplikationen, sowie deren Ausnutzung zur Erzeugung hoher Frequenzen. In der Einleitung wird eine gedrängte Übersicht über den bisherigen Stand der Untersuchungen unter besonderer Berücksichtigung der höchsten erreichten Frequenzen gegeben.

1. Schwingungserzeugung durch Rückkoppelung

Das Wesen der Rückkoppelung beruht bekanntlich darauf, daß die in einem Koppelgebilde auftretenden Schwingungen von dem einen auf das andere System zurückgeführt, „rückgekoppelt“ werden. Findet in dem mit unvermeidlichen Verlusten behafteten Schwingungsprozeß an irgendeiner Stelle eine Energiezufuhr statt, so kann dies zu einem Hochschaukeln der Schwingungen führen, bis sich zwischen der Energielieferung einerseits und dem Energieverbrauch andererseits ein Gleichgewichtszustand ausbildet.

Die trägheitslose und verstärkende Wirkung der Elektronenröhre macht sie in ganz besonderem Maße als schwingungssteuerndes Relais geeignet. Dabei sind die schaltungstechnischen Möglichkeiten zur Durchführung des Rückkoppelprinzips verschiedener Art, je nachdem die Überführung der Rückkoppelspannung auf induktivem, kapazitivem oder galvanischem Wege erfolgt. Bedingung für Selbsterregung ist nur, daß sich die dem Steuergitter zugeführte, „rückgekoppelte“ Wechselspannung und die des Anodenkreises in Gegenphase befinden, und daß die Energiebilanz der Anordnung positiv ist, d. h. daß der Energieverbrauch durch die Röhre gedeckt werden kann. Hierhin gehören auch die sogenannten „Balance- oder Symmetrieschaltungen“, bei denen die phasenrichtige Rückkoppelung durch die gegenläufige Schaltung zweier Röhren bewirkt wird.

Geht man zu extrem hohen Frequenzen über, so verringern sich naturgemäß die Dimensionen aller frequenzbestimmenden Organe, bis schließlich der Schwingungskreis nur noch aus den zum Schaltungsaufbau unvermeidlichen Leitern gebildet wird. Alle nicht unumgänglich nötigen Schaltungsteile müssen vermieden werden, und aus diesem Grunde sind Anordnungen mit zusätzlichen Rückkoppelungsorganen, seien sie induktiver oder kapazitiver Art, zur Erzeugung extrem kurzer Wellen wenig geeignet. Die kürzesten Wellen wurden mit der Schaltung der Fig. 1a erzeugt, bei der die Rückkoppelspannung an der Induktivität des Schwingungskreises abgegriffen wird („Spannungsteilerschaltung“). Bei Wellenlängen der Größenordnung von einem Meter vereinfacht sich die Anordnung auf die aus Figg. 1b und c ersichtliche Weise: Der Schwingungskreis besteht lediglich aus zwei teleskopartig ausziehbaren Metallröhren, die an der einen Seite mit den Röhrenelektroden verbunden, an der anderen durch eine Kapazität überbrückt sind, oder aus zwei parallel laufenden Drähten, auf denen sich eine Brücke verschieben läßt. Zur Abriegelung der Anodenspannung vom Gitter kann ein Blockkondensator in den Schwingungsknoten des Kreises (1) (vgl. Fig. 1b) oder aber vor das Gitter gelegt werden (Fig. 1c). Es hat sich gezeigt, daß eine Gitterableitung bei den hohen Frequenzen nicht erforderlich ist. Bei Vorversuchen mit einer handelsüblichen Röhre der Type „Ultra 110“ konnte eine kürzeste Welle von 0,92 cm erzeugt werden (2). Für Symmetrieschaltungen gibt Englund (3) bei Verwendung

handelsüblicher Röhren als untere Grenze 1,5 m an, während er mit Spezialröhren 1,05 m erreicht.

Physikalisch ist eine Höchstgrenze der Frequenz gegeben erstens durch die Zunahme aller Verluste in den Schwingungskreisen, zweitens durch die Abnahme der Wechselspannungen,

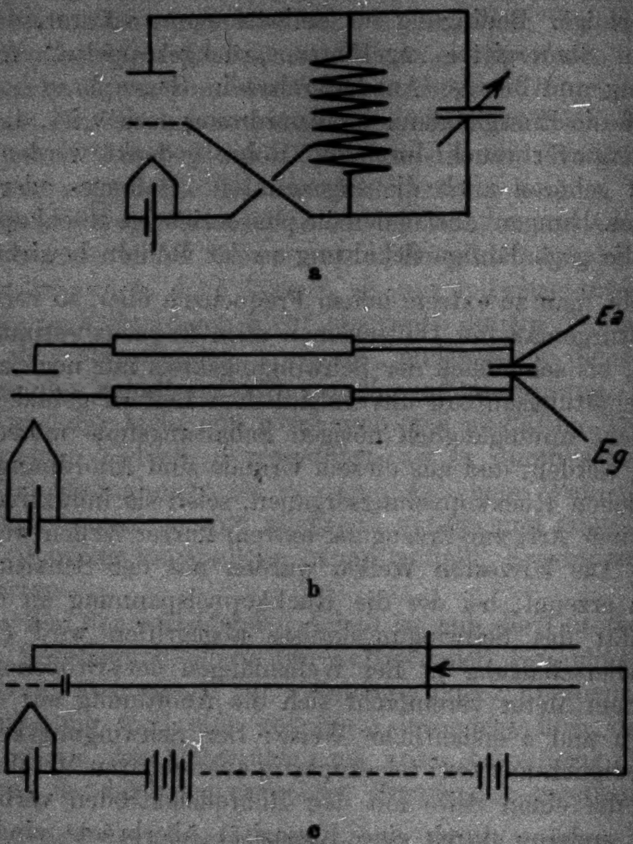


Fig. 1

indem infolge Änderung des Verhältnisses C/L der Strom auf Kosten der Spannung zunimmt und drittens dadurch, daß die Laufzeit der Elektronen zwischen den Röhrenelektroden nicht mehr gegen die Periodendauer zu vernachlässigen ist. Daher kann den Rückkoppelbedingungen, soweit sie eine Mindestspannung an Gitter und Anode sowie deren Phasenlage vorschreiben, nicht mehr Genüge geleistet werden.

2. Schwingungserzeugung durch eine fallende Charakteristik

Unter gewissen Bedingungen kann die Charakteristik einer Dreielektrodenröhre einen fallenden Verlauf nehmen, d. h. ihr innerer Widerstand wird innerhalb bestimmter Grenzen negativ.

a) Versuche von Gill und Morrell

Die Charakteristik einer Röhre wird fallend, wenn die Geschwindigkeit der auf die Elektroden aufprallenden Elektronen so groß wird, daß Sekundärelektronen ausgelöst werden. Je nach dem Elektrodenmaterial kann die Anzahl dieser Sekundärelektronen ein Vielfaches der primären betragen, so daß ein Umkehrstrom entsteht. Hull erzielte einen maximalen Reflexionskoeffizienten, d. h. ein Verhältnis der sekundär emittierten zu den primären Elektronen von 20:1 (4).

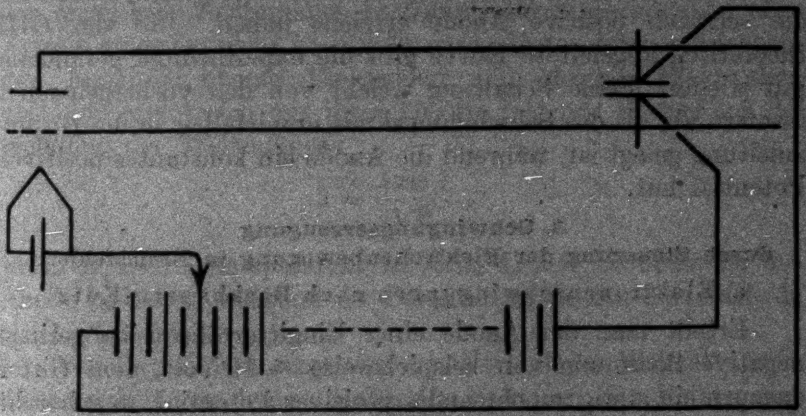


Fig. 2

In Wiederholung der Versuche von Barkhausen und Kurz benutzten Gill und Morrell zur Erzeugung kurzer Wellen die Anordnung der Fig. 2. Dabei stellten sie jedoch im Gegensatz zu Barkhausen und Kurz fest, daß die erregte Frequenz nicht ausschließlich von den Betriebsdaten und Abmessungen der Röhren, sondern auch von der Abstimmung des Schwingungssystems abhing. Sie variierten das Potential der Anode bei stark positivem Gitter von negativen nach positiven Werten hin, und konnten jeweils durch Einregulierung der Gitterspannung und Heizung ein Maximum an Schwingungsintensität einstellen. Theoretisch behandelten sie die Vorgänge zunächst beim Anodenpotential Null (5), dann bei positiver

Anode (6). Im letzten Fall führten sie die Schwingungen auf Sekundärelektronen zurück, doch stimmen ihre errechneten Werte mit den experimentell gemessenen Wellenlängen nur angenähert überein.

b) Versuche von Gill

Gill (7) untersuchte die Beziehungen zwischen dem Anoden- und dem gesamten Emissionsstrom und fand innerhalb eines verhältnismäßig geringen Bereichs einen fallenden Kurvenverlauf. Die an der Röhre liegenden Spannungen waren zu gering, als daß Sekundärelektronen auftreten konnten. Vielmehr erklärt Gill den negativen Widerstand aus der durch die Raumladung verzerrten Potentialverteilung im Gitter-Anodenraum, wodurch ein Teil der durchs Gitter hindurchtretenden Elektronen zur Umkehr gezwungen wird, bevor sie die schwach positive Anode erreicht haben. Die von Gill theoretisch abgeleitete Kurve gibt die experimentell gefundene gut wieder. Seine Schaltung weicht von den vorhergehenden insofern ab, als der Schwingungskreis unmittelbar in die Gitterzuleitung gelegt ist, während die Anode ein konstantes positives Potential hat.

3. Schwingungserzeugung durch Steuerung der Elektronenbewegung in Bremsfeldern

a) Elektronenschwingungen nach Barkhausen-Kurz

Erteilt man der Anode einer Eingitterröhre eine geringe negative Spannung von beispielsweise — 10 Volt, dem Gitter dagegen ein stetig zunehmendes positives Potential, so gehorcht der in der Röhre auftretende Elektronenstrom einem Exponentialgesetz.

Dabei tritt jedoch auch bei sehr hohem Vakuum noch Stoßionisation ein, und die positiven Gasionen, die im Gitter-Kathodenraum entstehen, werden vom Heizfaden angezogen, dessen Temperatur sie erhöhen, die im Gitter–Anodenraum gebildeten Gasionen treffen auf die Anode, und rufen im Anodenkreis einen negativen, dem normalen Elektronenstrom entgegengesetzt fließenden Strom hervor. Da die Anzahl der gebildeten Gasionen vom Gasgehalt der Röhre abhängt, läßt sich bekanntlich aus der Größe des Ionenstromes auf die Güte des Vakuums in der Röhre schließen.

Bei solchen Vakuummessungen beobachteten Barkhausen und Kurz (8), daß unter bestimmten Bedingungen der Ionen-

strom der Anode plötzlich in einen Elektronenstrom überging, der an Intensität den vorherfließenden Ionenstrom um mehrere Zehnerpotenzen übertraf. Die nähere Untersuchung ergab, daß hierbei Schwingungen äußerst hoher Frequenz auftraten. War in den bisher angeführten Anordnungen die Anwesenheit eines schwingungssteuernden und frequenzbestimmenden Organes Bedingung, so traten nunmehr Schwingungen auch beim Fehlen jedes schwingungsfähigen Systems auf. Barkhausen und Kurz erklärten sie mit einer Pendelbewegung der Elektronen um das Gitter, indem die jeweils durch das Gitter hindurchtretenden Elektronen im Bremsfeld der Anode oder Kathode zur Umkehr gezwungen werden. Eine Bestätigung ihrer Anschauung ergibt sich daraus, daß die Wellenlänge nur von den Dimensionen der Röhre und den Betriebsbedingungen, d. h. den angelegten Spannungen bestimmt, durch ein angekoppeltes System hingegen nicht beeinflußt wird. Unter der vereinfachenden Annahme ebener Elektroden und gleicher Elektrodenabstände ergibt sich aus ihrer Theorie folgende Formel zur Berechnung der Wellenlänge:

$$\lambda = \frac{1000\, d_a}{\sqrt{E_g}},$$

worin E_g die Gitterspannung in Volt, d_a den Durchmesser der Anode bedeutet, während ihr Potential sowie das der Kathode gleich Null ist.

Das Experiment zeigt, daß der Verlauf der Wellenlänge in Abhängigkeit von den maßgebenden Faktoren, den Elektrodenabständen und Spannungen gut wiedergegeben wird.

Scheibe (9) erweiterte die theoretischen Betrachtungen von Barkhausen-Kurz für den praktisch vorliegenden Fall zylindrischer Elektroden. Er fand unter bestimmten Umständen gleichzeitig zwei verschiedene Frequenzen, wobei sich eine gute Übereinstimmung seiner Theorie mit den „längeren" Wellen ergab. Die Annahme, daß die „kürzere" Welle eine Oberschwingung der „längeren" darstellt, wurde durch das Experiment widerlegt; eine andere Erklärung wird von Scheibe nicht gegeben.

Eine beträchtliche Steigerung der Schwingungsintensität erzielte Scheibe durch ein angekoppeltes Schwingungssystem, indem er, der Fig. 2 entsprechend, Gitter und Anode mit zwei parallel laufenden und durch eine Brücke verbundenen Drähten

verband. Nach den Angaben von Scheibe ist dieses äußere System in Übereinstimmung mit der Theorie ohne Einfluß auf die Wellenlänge, sondern bewirkt nur eine Energieerhöhung.

Gill und Morrell (a. a. O.) weisen darauf hin, daß eine negative Anode nicht erforderlich ist; auch kann die Potentialverteilung um das Gitter durch eine außerhalb der Röhre angeordnete Elektrode beeinflußt werden.

Ohne Kenntnis der Arbeiten von Barkhausen-Kurz untersuchte Zilitinkewitsch (10) Elektronenschwingungen, die er auf Grund des „Resonanzcharakters" von Stromspannungskurven einer Dreielektrodenröhre gefunden hatte. Er fand ebenfalls bei unveränderten Betriebsbedingungen konstante Frequenz und konnte in den Zuleitungen stehende Wellen nachweisen. In Übereinstimmung mit Barkhausen-Kurz geht seine Theorie auch von einer Pendelbewegung der Elektronen um das Gitter aus und führt zu den gleichen Resultaten. Die an französischen Verstärkerröhren gemessenen Wellenlängen zeigen eine gute Übereinstimmung mit der Rechnung.

b) Abhängigkeit der Elektronenschwingungen vom Gasdruck

Schon vor Barkhausen-Kurz hat Widdington (11) ohne äußeren Schwingungskreis Frequenzen von $4 \cdot 10^5$ bis $7 \cdot 10^5$ Hertz erzeugt, und zwar mit einer gasgefüllten Röhre, wo die Anode stark positiv und das Gitter wenige Volt über der Anode war. Er schreibt die Entstehung der Schwingungen den in der Röhre ionisierten Gasresten zu und kommt auf Grund der Bewegungsgeschwindigkeiten positiver Gasionen zu dem Schluß, daß es sich im vorliegenden Fall um Hg-Ionen handelt. Für diese errechnet er eine Frequenz von $6{,}6 \cdot 10^5$ Hertz, was einer Wellenlänge von 480 m entspricht. Für Wasserstoff findet er rechnerisch $1 \cdot 10^7$ Hertz und für reine Elektronenschwingungen $4 \cdot 10^8$ Hertz oder eine Welle von 0,77 m pro Volt.

Während Scheibe bei seinen Untersuchungen einen Druck von 10^{-5} mm Hg angibt, fand Nettleton (12) Elektronenschwingungen nur bei einem Druck von über $5 \cdot 10^{-5}$ mm. Nettleton benutzte die Anordnung der Fig. 8. Zur Messung der Schwingungsenergie dient neben dem Galvanometer im Lechersystem das Voltmeter V, welches die Spannung der Anode angibt. Die experimentellen Kurven weisen ein Energiemaximum bei einem Druck von 10^{-3} mm Hg auf, wobei außer-

dem die Art der Gasfüllung eine Rolle spielt. Er schließt daher, daß eine Spur von Gas für Elektronenschwingungen unerläßlich sei.

Pierret (13) stellte durch Koppelung zweier Röhren Barkhausen-Kurz Schwingungen her, deren Intensität größer war,

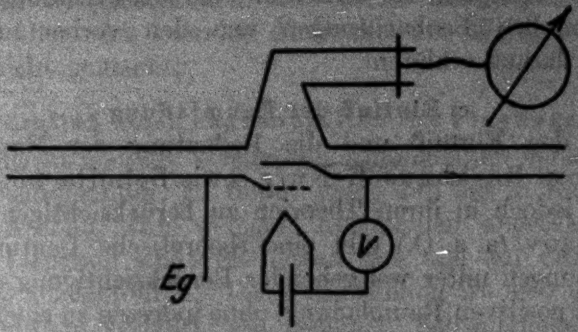


Fig. 3

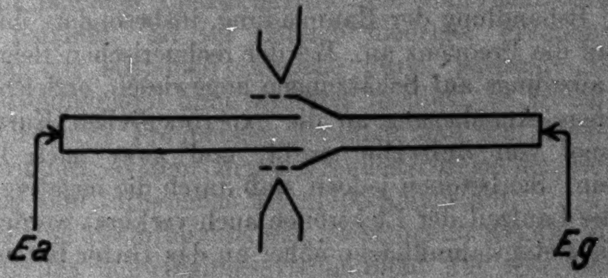


Fig. 4

als das Doppelte jeder einzelnen Röhre [vgl. auch Scheibe (14)]. Dabei beobachtete er, daß die Schwingungen nicht sogleich nach dem Einschalten einsetzten, sondern geraume Zeit später. Er führt dies Verhalten auf durch Erwärmung der Röhre freiwerdende Gasreste zurück.

Grechowa (15) untersuchte die Schaltung der Fig. 4. Betrachtet man die Drosselpunkte als Schwingungsknoten, so läßt sich die Anordnung in zwei den vorigen Schaltungen völlig analoge Teile zerlegen. Es sei freilich dahingestellt, inwieweit der symmetrische Aufbau als Gegentaktschaltung für den Schwingungsvorgang von Bedeutung ist. Grechowa konnte in einem Druckbereich von 10^{-4} bis $5 \cdot 10^{-8}$ keine Änderung der Frequenz nachweisen, während die Intensität von $3 \cdot 10^{-4}$ bis

10^{-8} stark abnahm, so daß in diesem Bereich der Schwingungsprozeß von Ionen beeinflußt zu werden scheint.

Kapzov (16) fand verschiedene Formen von Elektronenschwingungen, die zum Teil vom Gasdruck unabhängig, zum Teil abhängig waren, doch arbeitete er in geringen Gitterspannungsbereichen, so daß sich die Abweichungen seiner experimentellen Beobachtungen von den vorher erwähnten Arbeiten daraus erklären.

c) Einfluß der Raumladung

Auf den Einfluß und die Bedeutung der Raumladung haben schon Barkhausen-Kurz sowie Scheibe hingewiesen, ohne sie jedoch in ihren Theorien zu berücksichtigen.

Kapzov (a. a. O.) gibt eine theoretische Deutung seiner Beobachtungen unter weitgehender Berücksichtigung der negativen und positiven Raumladung, ohne indessen zu einer exakten Formulierung zu gelangen.

Später geben Kapzov und Gwosdower (17) eine mathematische Behandlung der Raumladung, insbesondere ihres Einflusses auf die Frequenz an. Bei der rechnerischen Behandlung sind sie allerdings auf Schätzungen angewiesen, erzielen jedoch eine größere Annäherung an die experimentellen Kurven, als die Formel von Scheibe ergibt, und zwar nach längeren Wellen hin. Sie betonen jedoch, daß durch die negative Raumladung die Laufzeit der Elektronen auch verkürzt werden kann, indem die Potentialnullfläche näher an das Gitter herangerückt wird.

Eine umfassende Erklärung der Raumladung gibt v. d. Pol (18). Er findet ein periodisches Auftreten von Elektronenschwingungen mit zunehmender Gitterspannung und gibt als Ursache eine gewisse „Labilität" der Raumladung an, derzufolge mehrere Raumladungszustände möglich sind, zwischen denen das System oszilliert.

Solche labilen Verteilungszustände der Raumladung im Gitter–Anodenraum hat auch Gill gefunden und theoretisch gedeutet (a. a. O.).

d) Beeinflussung der Elektronenschwingungen durch ein Magnetfeld

Eine besondere Erscheinungsform von Elektronenschwingungen beobachtete Breit (19). Er variierte den Gitterstrom und damit das Gitterpotential mittels eines veränderlichen

Widerstandes. Den Einsatz und die Intensität der Schwingungen stellte er durch elektrometrische Messungen des Anodenpotentials fest. Aus der Deformation der Anodenpotential-Gitterstromkurve fand er, daß die Schwingungen einer starken Beeinflussung durch ein senkrecht zu den Elektroden gerichtetes Magnetfeld von Bruchteilen eines Gauss unterliegen. Weitere Angaben über eine etwaige Änderung der Wellenlänge usw. werden nicht gemacht.

e) Der Einfluß eines angekoppelten Schwingungskreises

Vergleicht man die Versuchsanordnungen der verschiedenen Forscher miteinander, so findet man, daß sie in ihrem elektrischen Aufbau, von wenigen Ausnahmen abgesehen, vollkommen identisch sind: Sie lassen sich alle auf das Schema der Fig. 2 zurückführen. Diese Anordnung ist also unter den verschiedensten Verhältnissen geeignet, Schwingungen zu erregen, mag es sich nun um Rückkoppelung, um eine Strombahn mit fallender Charakteristik oder um Elektronenschwingungen handeln. Ist im Bereich niedriger Frequenzen eine Trennung der einzelnen Bereiche durch passende Wahl der Betriebsbedingungen ohne weiteres möglich, so treten im Bereich sehr hoher Frequenzen, dadurch daß die Eigenfrequenz des Schwingungssystems in den Frequenzbereich der Elektronenbewegung fällt, erhebliche Komplikationen auf.

Daß eine Beeinflussung der Elektronenbewegung durch ein angekoppeltes Schwingungssystem nicht nur was die Schwingungsenergie sondern auch die Frequenz betrifft, tatsächlich erfolgt, ist von zahlreichen Autoren angegeben worden. Liegt, wie in der Schaltung der Fig. 2, das Schwingungssystem unmittelbar an den Röhrenelektroden, so ist seine Einwirkung auf die Elektronenschwingungen sehr stark [Gill und Morrell (6); Grechowa (15); Kapzov (16); Sahanek (20)]. Aber selbst, wenn lediglich zwei kurze Drähte als Antennen mit Gitter und Anode verbunden sind, ist eine Beeinflussung der Wellenlänge selbst sowie ihrer Abhängigkeit von den maßgebenden Faktoren beobachtet worden [Bock (21); Schaefer und Merzkirch (22); Kapzov (16)]. Wurde mit solchen Antennen ein Lechersystem gekoppelt, so konnte daran, daß die Resonanzmaxima nicht festlagen, sondern beim Verschieben der Brücke „mitgeschleift" wurden, noch ein Einfluß auf die Wellenlänge festgestellt werden [Schriever (23)].

Gill und Morrell (6) stellten zuerst eine Theorie auf, welche von der Voraussetzung von Wechselspannungen an den Elektroden ausgeht. Um festzustellen, ob Schwingungen auftreten, stellen sie die Energiebilanz auf für alle Elektronen, die dem Wechselfeld zwischen den Elektroden während einer Periode unterliegen. Für alle Frequenzwerte, die einer positiven Leistung entsprechen, sind Schwingungen unmöglich; von denen, die eine negative Leistung ergeben, erregt sich die Frequenz, deren Leistung ein Maximum aufweist.

Die Vorstellungen von Gill und Morrell haben eine weitere Ausbildung erfahren durch die Theorie von Sahanek (20), die nicht nur die Abhängigkeit der Wellenlänge von den einzelnen Faktoren, sondern auch die Bedingungen für den Schwingungseinsatz genauer festgestellt. Neben reinen Elektronenschwingungen findet Sahanek Schwingungen, deren Frequenz von einem mit den Röhrenelektroden in Verbindung stehenden Schwingungskreis bestimmt ist; wie bei Gill und Morrell beruht die Ursache auf einem negativen Widerstand infolge Sekundäremission.

In einer neueren Arbeit gibt Kohl (24) die Erzeugung von Wellen bis herunter zu 30 cm an. Der Frequenzumfang seiner Schwingungen ist durch einen in die Röhre eingebauten Schwingungskreis bestimmt, der auf zwei verschiedene Weisen erregt werden kann: Erstens in der „Anodenschaltung“, in der die Anode das positive Potential hat, und zweitens in der „Gitterschaltung“, bei welcher das hohe positive Potential am Gitter liegt. Handelt es sich im letzten Fall in der Hauptsache um Barkhausen-Kurz-Schwingungen, wie aus der von Kohl angegebenen Abhängigkeit der Frequenz von den Spannungen hervorgeht, so führt Kohl die Wirkung der Anodenschaltung auf einen durch die Elektronenbewegung verursachten negativen Widerstand zurück.[1])

---

1) Man kann sich die Wirkung der „Anodenschaltung“ auch durch Rückkoppelung erklären, denn die Kohlsche Anordnung entspricht völlig der Rückkoppelschaltung in Fig. 1. Führt die Laufzeit der Elektronen eine immer größere Phasenverschiebung herbei, so kommt man in einen Bereich, wo die Phasenlage von Gitter- und Anodenwechselspannung wieder den Bedingungen für Selbsterregung entspricht. Versuche, die der Rückkoppelung entgegenwirkende Phasenverschiebung im Inneren der Röhre nicht durch eine Steigerung über 180°, sondern durch Änderungen in der Schaltung zu kompensieren, werden zurzeit angestellt.

Der erste Teil vorliegender Arbeit behandelt ausführlich die Erscheinung, daß Elektronenschwingungen nach Barkhausen-Kurz — im folgenden als BK-Schwingungen bezeichnet — und solche nach Gill und Morrell — GM-Schwingungen[1]) — in ein und derselben Anordnung, zum Teil sogar nebeneinander auftreten können. Als dieser Teil abgeschlossen vorlag, wiesen Kapzov und Gwosdower in der bereits zitierten Arbeit auf die gleiche Erscheinung hin.

I. Das gleichzeitige Auftreten verschiedenartiger Elektronenschwingungen

§ 1. Die Versuchsapparatur

a) Der Schwingungserreger

Es galt zunächst die von den verschiedenen Autoren beobachtete Abhängigkeit der Wellenlänge von einem an die Röhre angeschlossenen Schwingungssystem nachzuprüfen und mit den abweichenden Angaben von Barkhausen-Kurz und von Scheibe zu vergleichen. Zu diesem Zweck wurde folgende Versuchsanordnung benutzt:

Zur Schwingungserzeugung wurden zunächst Röhren der Firma Schott und Gen., Jena, verwandt. Einmal haben sich diese Röhren zur Erzeugung von Elektronenschwingungen als besonders geeignet erwiesen, zum anderen ist durch die Verwendung gleicher Röhrentypen ein qualitativer Vergleich mit den Ergebnissen von Barkhausen-Kurz und Scheibe ermöglicht.

Die Apparatur sei kurz an Hand des Schemas der Fig. 5 beschrieben. Gitter und Anode der Röhre R sind über zwei Klemmen K und K' mit zwei im Abstand von 20 mm parallel laufenden Kupferdrähten verbunden. Auf diesen Drähten kann die Brücke B verschoben werden, so daß die Eigenwelle des Hochfrequenzsystems durch deren Lage bzw. durch die gesamte Länge gegeben ist. Die Zuleitungen der Gitter- und Anodenspannung sind unmittelbar an die Brücke geführt, wo sie, im Spannungsknoten liegend, den Hochfrequenzvorgang nicht beeinflussen können; außerdem verhindern Drosselspulen D_r ein Eindringen von Hochfrequenz in die Zuleitungen voll-

1) Die Bezeichnung Gill- und Morrell-Schwingungen wurde in Anlehnung an Kapzov und Gwosdower beibehalten, obwohl Gill und Morrell ihre Anschauung später fallen ließen und die Wechselspannungen der Elektroden vernachlässigen zu können glaubten.

ständig. Die Brücke B ist durch zwei Kondensatoren C und C' kapazitiv unterteilt zur Aufnahme des Thermoelements Th. Dieses steht ebenfalls über Drosseln D_r' mit einem Galvanometer G in Verbindung und ermöglicht eine Messung des im Strombauch auftretenden Hochfrequenzstromes. Die Eichung wurde durch Vergleich mit einem Hitzdrahtamperemeter bei einer Frequenz von 10^6 durchgeführt.

Gitteranoden- und Heizstrom wurden mittels Präzisionsinstrumenten gemessen. Der Heizstrom wurde einer 6zelligen Akkumulatorenbatterie von 100 Amp./Stdn. Kapazität entnommen und war über mehrere parallel liegende Widerstände verschiedener Größe genauestens einzuregulieren und konstant zu halten. Zur Speisung von Gitter und Anode wurde eine 600zellige Akkumulatorenbatterie von 2,5 Amp./Stdn. benutzt.

Um Störungen des Hochfrequenzsystems durch die Meß- und Reguliereinrichtungen tunlichst auszuschalten, war der Oszillator in etwa 50 cm Höhe über dem Experimentiertisch angebracht.

b) Messung der Wellenlänge

Die im Oszillator erregte Welle wurde mittels eines Lechersystems gemessen. Die Paralleldrähte waren im Abstand von 20 mm über eine Meßbank ausgespannt (vgl. Fig. 5). Eine Plattenbrücke Pb von 6 cm Durchmesser konnte vermittels eines querstehenden Glasstabes über den Drähten verschoben werden, wobei die Brücke frei von den Drähten getragen wurde. Es zeigte sich, daß Störungen durch die Nähe des Beobachters nicht auftraten.

Als Indikator diente ein Stahl-Karborunddetektor, der zwar eine verhältnismäßig geringe Empfindlichkeit aufwies, dafür aber den Vorzug hatte dadurch, daß seine Elektroden sehr fest zusammengepreßt werden konnten, gegen mechanische Erschütterungen unempfindlich zu sein, und seine einmalige Einstellung unverändert beizubehalten. Liegt der Detektor in der verschiebbaren Brücke, so machen sich die Galvanometerzuleitungen störend bemerkbar; aus diesem Grund wurde der Detektor in das geschlossene und zur Koppelung dienende Ende gelegt. In dieser Schaltung durchfließen die Galvanometerströme das Paralleldrahtsystem und es ist daher auf einen sicheren Kontakt zwischen Brücke und den Drähten zu achten. G_2 war ein Spiegelgalvanometer der Firma Leybold mit $5 \cdot 10^{-9}$ Amp./Skt. Empfindlichkeit.

Zur Elimination der Brückenverkürzung wurden bei jeder Wellenmessung zunächst mehrere Knotenpunkte aufgesucht.

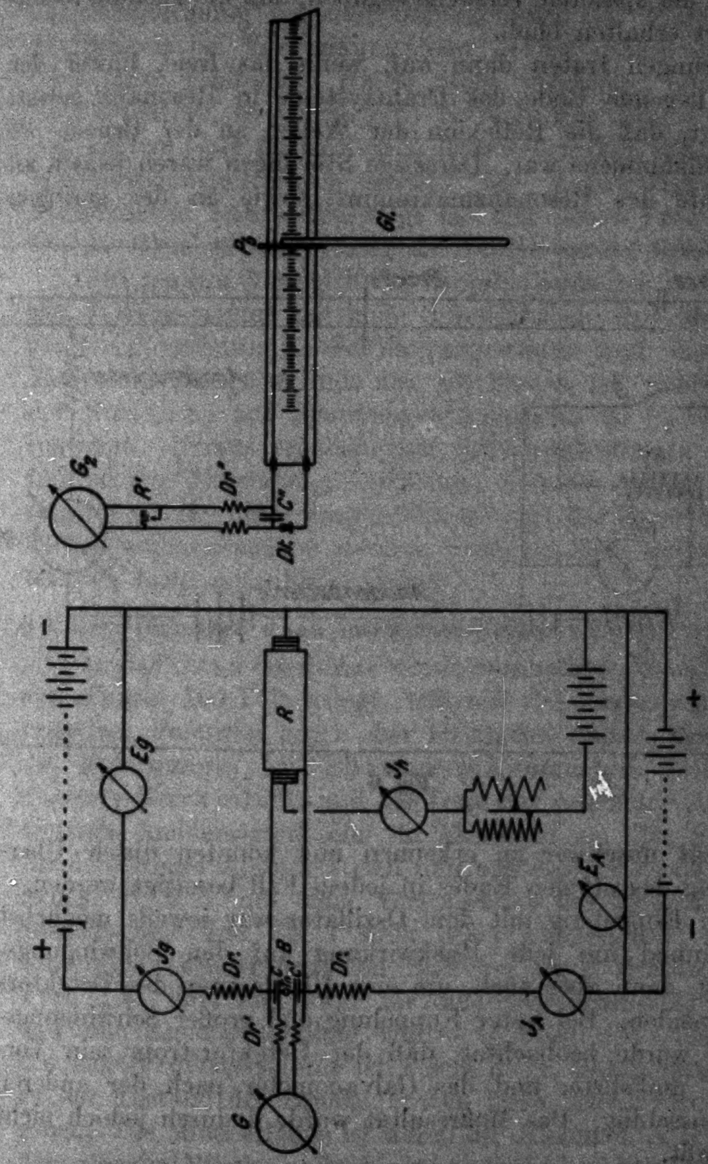


Fig. 5
Schema des Schwingungserzeugers mit Lechersystem

Da dies Verfahren jedoch bei der großen Zahl von Messungen zu umständlich war, wurde eine Eichkurve des Lechersystems aufgestellt, welche aus der Lage eines einzigen Knotenpunktes

die genaue Welle zu entnehmen gestattete. Die so erzielbare Genauigkeit betrug 1—2 Promille. Laufende Kontrollmessungen während der späteren Versuche ergaben, daß die Eichkurve unverändert erhalten blieb.

Störungen traten dann auf, wenn das freie, hinter der Brücke liegende Ende des Drahtsystems in Resonanz geriet. Das zeigt, daß die Reflexion der Wellen an der Brücke *Pb* keine vollkommene war. Derartige Störungen waren jedoch an der Breite des Resonanzmaximums, sowie an der geringen

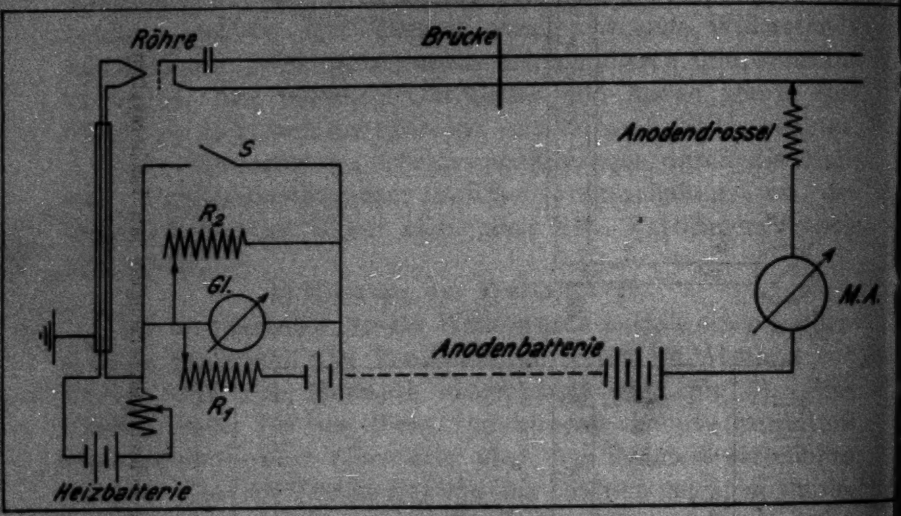


Fig. 6

Intensität unschwer zu erkennen und konnten durch Überbrückung des offenen Endes in jedem Fall beseitigt werden.

Die Koppelung mit dem Oszillator war jeweils möglichst lose, einmal um jede Rückwirkung auf den Schwingungsvorgang, dann aber auch, um eine Überlastung des Detektors zu vermeiden. Bei fester Koppelung und großer Schwingungsenergie wurde beobachtet, daß der Detektorstrom sein Vorzeichen umkehrte, und das Galvanometer nach der anderen Seite ausschlug. Das Meßresultat wurde dadurch jedoch nicht beeinflußt.

Um zur Messung von Schwingungen geringer Intensität eine höhere Empfindlichkeit zu erzielen, wurde versucht, den Detektor durch eine Röhre als Indikator zu ersetzen. Die

hierzu verwandte Schaltung zeigt Fig. 6. Zur Beobachtung der Änderung des Anodenstromes dient das in einer Kompensationsanordnung liegende Galvanometer *Gl.* War die Empfindlichkeit bei Verwendung einer „Ultra"-Röhre der Type A oder einer Telefunken RE 95 nicht wesentlich höher als die des Detektors, so wurde eine beträchtliche Steigerung durch den Einbau einer französischen Kurzwellenröhre mit getrennten Elektrodenausführungen erzielt. Die Kapazitätsfreiheit der französischen Röhre überwiegt bei den hohen Frequenzen die bessere Gleichrichterwirkung der beiden ersten Röhren.

Ein exakter Vergleich der Empfindlichkeiten des Detektor- und Röhrensystems war nicht durchführbar, weil der Detektor als Stromindikator im Schwingungsknoten liegt, das freie zur Koppelung dienende Ende also geschlossen ist, während es bei der Röhre, die auf Spannungen anspricht, in $^1/_4$ Wellenlänge schwingt. Daraus ergeben sich Schwierigkeiten in einer Definition der Koppelung. Allgemein konnten jedoch trotz geringerer Galvanometerempfindlichkeit mit der Röhre dann noch Wellen sicher gemessen werden, wenn mit dem Detektor keine Maxima mehr aufzufinden waren.

§ 2. Schwingungen nach Barkhausen-Kurz und Gill und Morrell

An das Gitter der Röhre wurde eine hohe positive Spannung von einigen 100 Volt gelegt, während die Anode ein geringes negatives Potential gegen den Heizfaden erhielt. Damit sind die Bedingungen für Elektronenschwingungen nach Barkhausen-Kurz erfüllt, und der trotz der negativen Anode auftretende Anodenstrom zeigt ihr Einsetzen an. Die Stärke des Anodenstromes I_a ändert sich nun mit einer Verschiebung der Brücke *B*, d. h. mit einer Verstimmung des äußeren Schwingungskreises. Die Fig. 7 stellt diese Abhängigkeit für einen willkürlich herausgegriffenen Fall bei einer Schottröhre der Type „*N*" dar, und zwar für eine Gitterspannung von 300 und eine Anodenspannung von — 10 Volt. Die Abstimmung des Hochfrequenzsystems ist durch seine Gesamtlänge *d*, das ist der Abstand der Brücke *B* vom freien Elektrodenende, gegeben. Die Mindestlänge ist durch die Klemmen *K K'* (Fig. 5), über die die Brücke nicht hinausgeschoben werden kann, festgelegt.

Wird das System stetig von kürzeren nach längeren Wellen zu verstimmt, so fällt der Anodenstrom allmählich ab, um bei

$d = 53$ cm plötzlich anzusteigen und nach Erreichen eines Maximums von Neuem abzusinken. Der gleiche Vorgang wiederholt sich bei $d = 96$ cm. Dabei entspricht einem Ansteigen von I_a ein Abfallen des Gitterstromes I_g und umgekehrt, derart, daß $I_a + I_g$ konstant bleibt.

Tritt zwischen dem äußern Schwingungssystem und den Elektronenschwingungen innerhalb der Röhre Resonanz ein, so

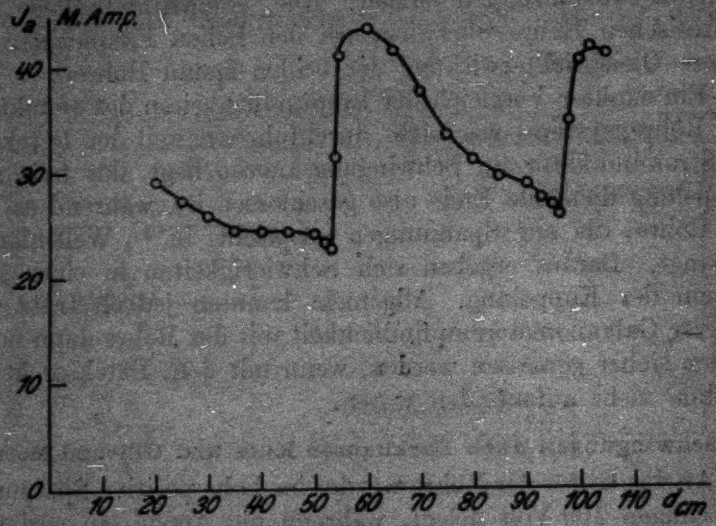


Fig. 7

ist nach Scheibe eine Steigerung der Schwingungsintensität zu erwarten. Daher muß sich der Abstimmvorgang im Anodenstrom, der ja nach Barkhausen-Kurz erst durch die Elektronenschwingungen hervorgerufen wird, ausprägen. Der unsymmetrische, von einer Resonanzkurve abweichende Verlauf obiger Kurve, vor allem das plötzliche Ansteigen, läßt jedoch einen komplizierteren Vorgang vermuten.

In der Tat ergaben Wellenmessungen, daß jeweils mit dem Anstieg von I_a eine beträchtliche Frequenzerhöhung verbunden ist, und daß mit dem Abfallen des Anodenstromes die Wellenlänge wieder in ihren alten Wert übergeht. Die Kurvenscharen der Figg. 8 und 9 stellen solche Wellenänderungen dar. Sie wurden aufgenommen an einer Schottschen „N“-Röhre, indem bei den verschiedenen Brückenstellungen jeweils die zugehörigen Wellenlängen gemessen wurden, und zwar unter verschiedenen

Betriebsbedingungen. In Fig. 8 besaß die Anode das Potential —20, während dem Gitter verschiedene Spannungen erteilt wurden; Fig. 9 gilt für eine konstante Gitterspannung von 300 Volt, während das Anodenpotential variiert wurde. Da der

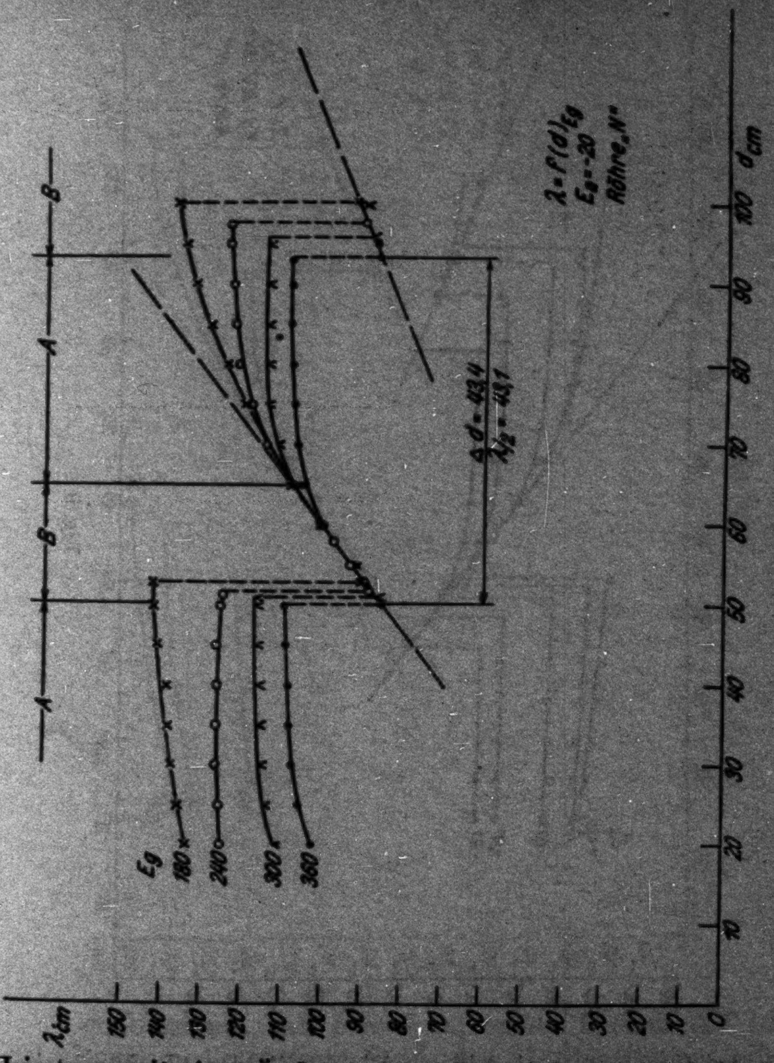


Fig. 8

Heizstrom mit einer Änderung von I_a und I_g kleinen Schwankungen unterworfen war, wurde statt dessen der Emissionsstrom konstant gehalten.

Die Kurven lassen erkennen, daß zwei völlig verschiedenartige Schwingungsvorgänge nebeneinander bestehen, und zwar

in den Bereichen „A“ solche von geringerer, in den Bereichen „B“ solche von höherer Frequenz. Der Übergang von A nach B ist fast sprungartig, während er in umgekehrter Richtung allmählich verläuft. Außerdem erkennt man, daß er um so früher,

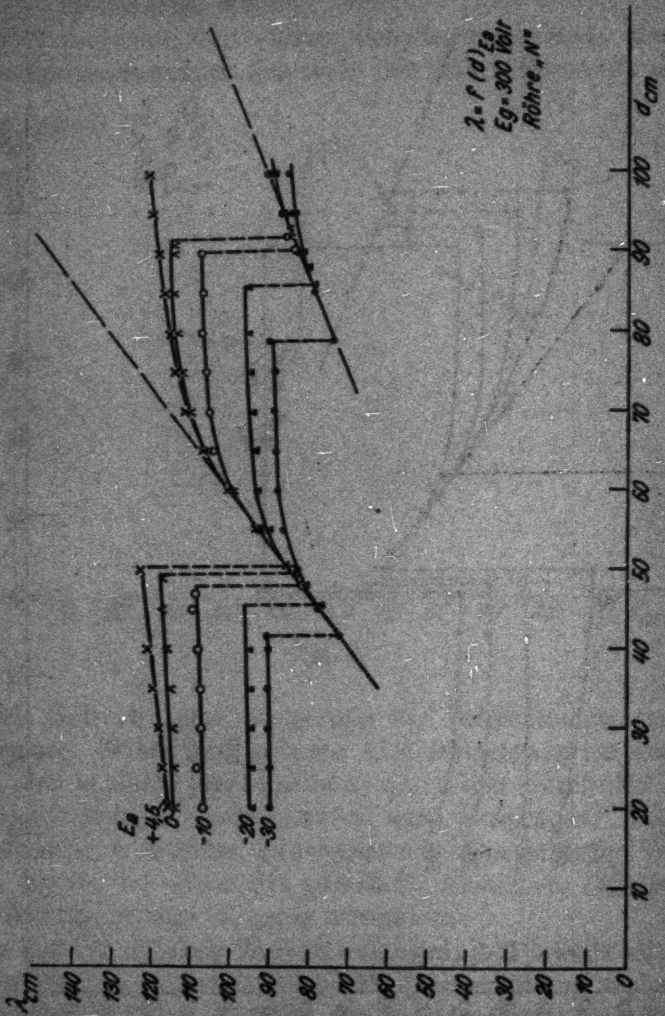


Fig. 9

d. h. bei einer um so niedrigeren Eigenwelle des Abstimmkreises erfolgt, je kürzer die Wellenlänge in den „A“-Bereichen ist.

Findet der erste Übergang bei einem d von 50—53 cm statt, so wiederholt sich der Vorgang bei $d = 80—100$ cm. Vergleicht man den Abstand zweier zu einer Kurve gehöriger

Übergangsstellen, so ergibt sich ein Verhältnis von nahezu 0,5 (auf die geringe Abweichung wird später eingegangen werden). Ersichtlich handelt es sich also bei den späteren „B“-Bereichen um Oberschwingungen des Paralleldrahtsystems.

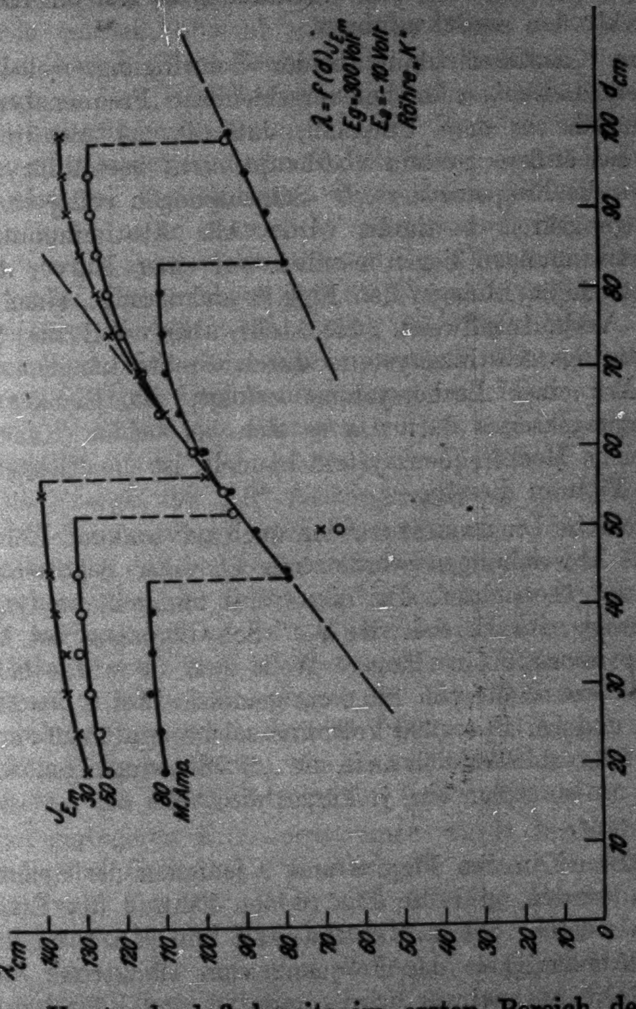


Fig. 10

Der Umstand, daß bereits im ersten Bereich der „B“-Schwingungen die gesamte Länge des Abstimmsystems größer ist als die halbe Wellenlänge, ist so zu erklären, daß schon hier das System in einer Oberschwingung erregt wird. Durch Nähern der Hand konnten die Spannungsbäuche und Knoten festgestellt werden, denn der Anodenstrom blieb, falls die An-

näherung in einem Knoten erfolgte, unverändert, fiel andernfalls jedoch sofort ab. Auf diese Weise konnte nachgewiesen werden, daß innerhalb des Glasfußes der Röhre ein Schwingungsknoten liegt, und daß das Elektrodensystem in $^1/_4$ Wellenlänge schwingt. Die starke lineare Verkürzung ist auf die Kapazität der Elektroden zurückzuführen.

Das Charakteristikum beider Schwingungserscheinungen liegt jedoch weniger in den verschiedenen Frequenzbereichen, als vielmehr in dem Umstand, daß die „*A*"-Schwingungen durch das äußere System überhaupt nicht beeinflußt werden, wogegen die Frequenz der „*B*"-Schwingungen völlig durch den Schwingungskreis bestimmt wird. Alle Abstimmpunkte der „*B*"-Schwingungen liegen nämlich auf einer Kurve, die, wie die gestrichelte Linie in den Figg. 8 und 9 zeigt, einen geradlinigen Verlauf aufweist. Sie stellt aber, weil die Wellenänderung des Abstimmsystems durch direkte Längenänderung nach Art eines Lechersystems erfolgt, die Eichkurve des Schwingungskreises dar. Da es sich bei beiden Kurven um das gleiche Hochfrequenzsystem handelt, ist die Eichgerade in beiden Figuren dieselbe.

Ähnliche Diagramme wurden auch mit anderen Röhren erhalten. Abweichungen wurden nur an einer Schottröhre der Type „*K*" beobachtet. Bei dieser trat nämlich, im Gegensatz zur Theorie, im Bereich der „*A*"-Schwingungen bei höheren Gitterspannungen eine längere Welle auf. So wurde bei $E_g =$ 180 Volt eine Welle von 120,6 cm gemessen, bei $E_g = 240$ Volt 125 cm und bei $E_g = 300$ Volt eine solche von 134,3 cm. Entsprechend verhielten sich auch die „*B*"-Schwingungen, d. h. sie setzten um so früher ein, je kürzer die Welle der „*A*"-Schwingungen war.

Während in den Figg. 8 und 9 lediglich die Spannungen variiert wurden, gibt die Fig. 10 den Einfluß des Emissionsstromes wieder. Schon Barkhausen und Kurz fanden eine starke Abhängigkeit der Frequenz vom Heizstrom, die aber nach Scheibe geringer wird, wenn in der Röhre äußerstes Vakuum herrscht, sie beispielsweise mit der Pumpe noch in Verbindung stehen; bei abgeschmolzenen Röhren beobachtet er eine ähnliche Abhängigkeit wie Barkhausen-Kurz.

Auch diese Untersuchung zeigt, daß sich der Einfluß der Betriebsverhältnisse nur auf die „*A*"-Schwingungen erstreckt,

während die „*B*"-Schwingungen wieder genau der Eichkurve des Abstimmsystems folgen. Lediglich ihr Einsatz sowie ihr Bereich ist wieder von der jeweiligen Länge der „*A*"-Wellen abhängig.

In einzelnen Fällen konnten noch „*B*"-Schwingungen nachgewiesen werden, obwohl solche der Form „*A*" nicht festzustellen waren. Diese Beobachtung gab Anlaß zu einer Untersuchung, ob die „*B*"-Schwingungen völlig unabhängig von den „*A*"-Schwingungen auftreten können. Es zeigte sich, daß noch bei einer Gitterspannung von 10 Volt und einer Anodenspannung Null, also bei Verhältnissen, unter denen Elektronenschwingungen nicht mehr beobachtet worden sind, das System angeregt wurde, zwar nicht mehr in der Ober-, sondern in der Grundwelle. Entsprechend war die Frequenz gering; unter den angegebenen Verhältnissen betrug die Welle 2,8 m. Bis zu diesem Wert ließ sich durch passende Einregulierung der Spannungen und Abstimmung des Paralleldrahtsystems jede beliebige Welle von den kürzesten vorher beobachteten Werten an herstellen.

Die Energie der „*B*"-Schwingungen ist im Vergleich zu den „*A*"-Schwingungen recht beträchtlich. Das ging schon daraus hervor, daß bei Wellenmessungen in den „*A*"-Bereichen das Lechersystem der Röhre oft bis auf wenige Zentimeter genähert werden mußte. Im „*B*"-Bereich dagegen konnte noch im Abstand von 2—3 m eine sichere Wellenmessung vorgenommen werden. Messungen des Hochfrequenzstromes im Thermoelement ergaben Ströme bis zu 0,6 Amp. Bei der kürzesten Welle von 66 cm, wie sie mit der Röhre „*K*" erhalten wurde, trat ein Maximalstrom von 0,46 Amp. auf.

Bei geringeren Emissionsströmen wurde beobachtet, daß an Stelle der Grundwelle plötzlich die erste Oberschwingung auftrat (vgl. Fig. 10). Über eine ähnliche Erscheinung berichten Schaefer und Merzkirch (a. a. O.). Auch sie fanden, daß im Verlauf der normalen Wellenkurve plötzlich die Oberwelle auftrat. Eine Erklärung wird im zweiten Teil gegeben werden.

Aus den bisherigen Versuchsergebnissen geht eindeutig hervor, daß es sich bei den „*A*"-Schwingungen um reine Elektronenschwingungen nach der Vorstellung von Barkhausen-Kurz handelt, also um Schwingungen, bei denen die

Elektronen sich zwischen den stationären Bremsfeldern der Elektroden hin und her bewegen. Alle Beobachtungen, diese Schwingungen betreffend, stimmen mit denen von Barkhausen-Kurz und Scheibe überein.

Was die „*B*"-Schwingungen betrifft, so handelt es sich ebenfalls um Elektronenschwingungen. Darauf deutet in erster Linie der unmittelbare Zusammenhang zwischen dem Schwingungseinsatz und der vorher herrschenden „*A*"-Frequenz hin. Die Wellenlänge selbst ist aber durch die Eigenfrequenz des Schwingungskreises vorgeschrieben und wird von einer Änderung der Betriebsverhältnisse nicht mehr betroffen. Solche Schwingungen sind zuerst von Gill und Morrell beobachtet worden, wie dies in der Einleitung bereits kurz behandelt worden ist. Sie gehen davon aus, daß sich die im Schwingungskreis induzierten Wechselspannungen den Gleichpotentialen der Elektroden überlagern. Zu den stationären Bremsfeldern treten also noch Wechselfelder von der Frequenz der jeweiligen Schwingungen hinzu, woraus sich eine von den Barkhausen-Kurz-Schwingungen abweichende Elektronenbewegung ergibt.

Versuche, die Wechselspannungen mittels eines Glimmröhrchens zu messen, führten zu keinem brauchbaren Resultat, obwohl es ohne weiteres gelang, ein Neonröhrchen im Spannungsbauch des Schwingungssystems zum Aufleuchten zu bringen. Zahlenmäßige Angaben lassen sich daraus aber nicht entnehmen, weil die Zündspannung einer Glimmentladung bei Hochfrequenz bis auf 10—11 Volt herabgesetzt wird (25).[1])

§ 8. Der Übergang und Intensitätsverlauf

Bei den ersten Versuchen hatte es den Anschein, als ob die „*A*"-Schwingungen sprunghaft in die „*B*"-Schwingungen übergingen. Eingehende Messungen zeigten jedoch, daß die „*A*"-Schwingungen langsam abnehmen, und nur die „*B*"-Schwingungen plötzlich und mit großer Intensität auftreten, wobei in einem kleinen Bereich beide Schwingungen nebeneinander bestehen können. Die Messung der verschiedenen

1) Exakte Messungen werden zurzeit von Kapzov und Gwosdower vorgenommen. Bei Vorversuchen fanden sie eine Spannungsamplitude von 10—15 Volt (a. a. O. 17). Betrachtet man die starke Frequenzänderung, die verhältnismäßig geringe Änderungen der Betriebsspannungen hervorbringen, so ist ersichtlich, daß Wechselspannungen obiger Größenordnung den Schwingungsvorgang wohl zu beeinflussen vermögen.

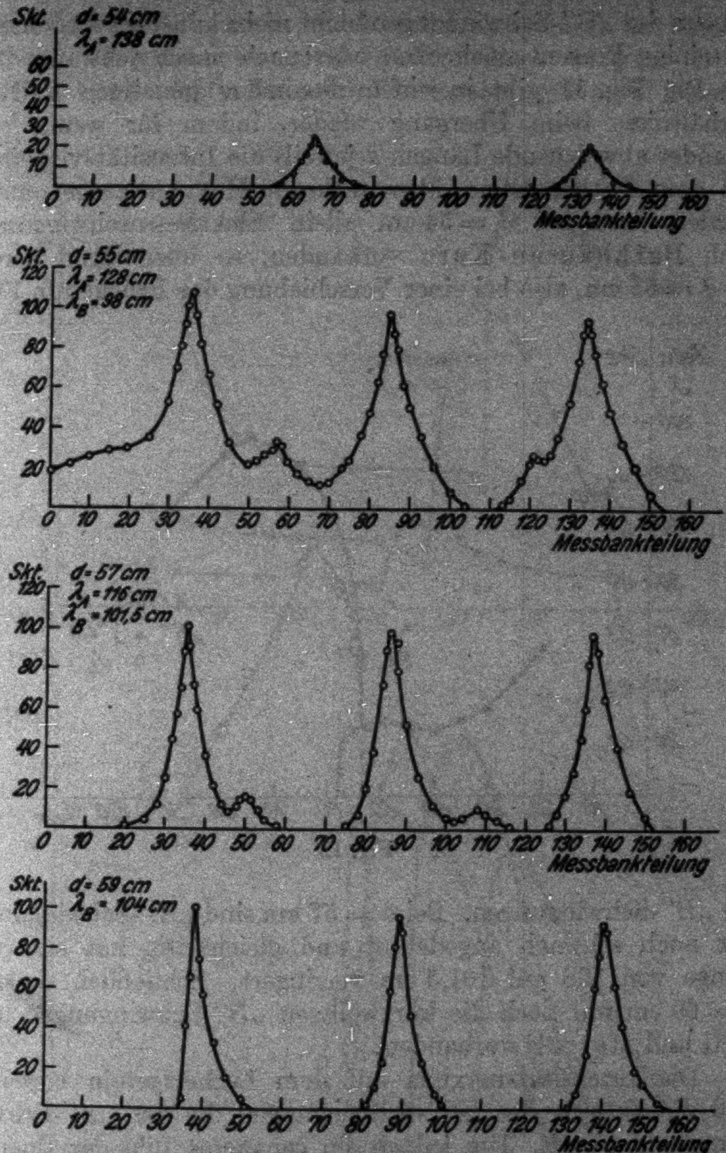


Fig. 11

Frequenzen mittels des Lechersystems ist sehr schwierig, zumeist sogar völlig unmöglich, weil die Maxima der „B"-Schwingungen die weitaus schwächeren „A"-Schwingungen zudecken. Es wurde jedoch beobachtet, daß die „A"-Frequenz nach dem

Einsatz der „B"-Schwingungen nicht mehr konstant ist, sondern um einige Prozent nach oben oder nach unten schwankt.

Die Fig. 11 gibt in einem besonders günstigen Fall die Verhältnisse beim Übergang wieder, indem für wenig voneinander abweichende Längen d jeweils die Intensitätsverteilung auf dem Lechersystem über mehrere Maxima aufgenommen wurde. Sind bei $d = 54$ cm allein Elektronenschwingungen nach Barkhausen-Kurz vorhanden, so überwiegen bereits bei $d = 55$ cm, also bei einer Verschiebung der Brücke um 1 cm,

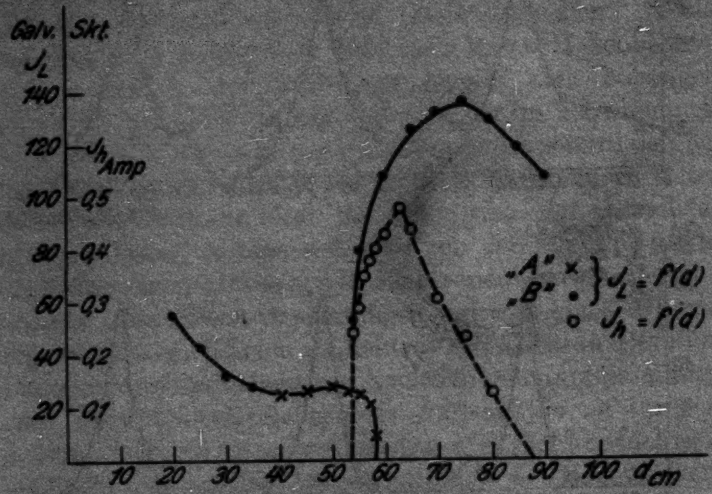


Fig. 12

die „B"-Schwingungen. Bei $d = 57$ cm sind „A"-Schwingungen nur noch schwach angedeutet und gleichzeitig hat sich ihre Länge von 138 auf 101,5 cm verringert. Schließlich sind bei $d = 60$ cm nur noch die kurzwelligen „B"-Schwingungen nach Gill und Morrell vorhanden.

Die Intensitätsmaxima auf dem Lechersystem beweisen, daß die Energie der „B"-Schwingungen die der „A"-Schwingungen übertrifft. Um jedoch ein genaueres Bild der Energieverteilung beim Übergang zu erhalten, sind in der Fig. 12 die maximalen Galvanometerausschläge im Lechersystem bei unveränderter Koppelung zusammen mit den Ausschlägen des im Erregerkreis liegenden Thermogalvanometers aufgetragen. Vergleicht man beide Kurven miteinander, so fällt zunächst auf, daß sich die „A"-Schwingungen im Thermoelement überhaupt

nicht bemerkbar machen; sie konnten auch durch ein empfindlicheres Galvanometer nicht nachgewiesen werden. Ob sie mittels eines empfindlicheren Thermoelements oder Detektors

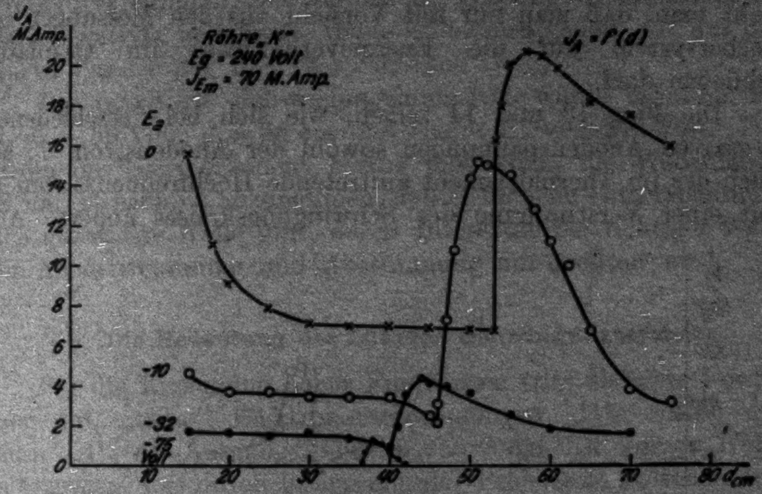


Fig. 13

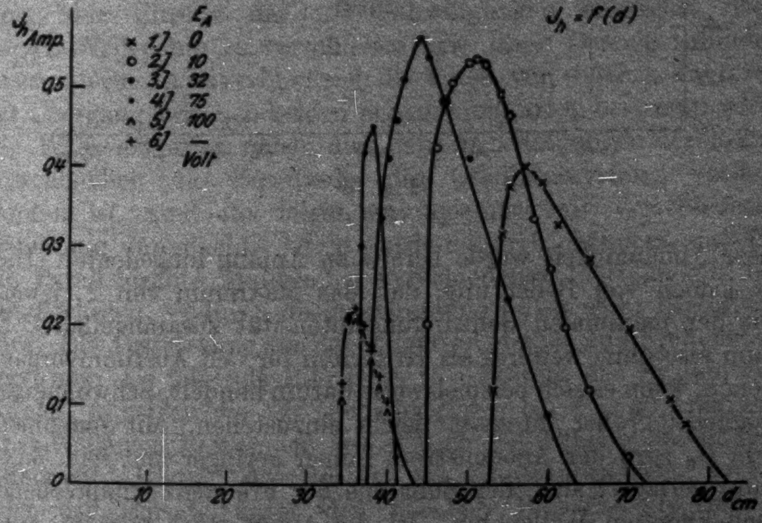


Fig. 14

zu messen sind, wurde nicht untersucht, doch geht hieraus zur Genüge hervor, daß das äußere Schwingungssystem an dem Schwingungsvorgang der Form „A" völlig unbeteiligt ist.

Ferner findet man, daß das Maximum des Hochfrequenzstromes nicht mit dem Maximum im Lechersystem übereinstimmt. Wahrscheinlich sind undefinierte Koppelverhältnisse oder stehende Wellen die Ursache dieser Abweichungen. Jedenfalls sieht man, daß man nur mit Vorsicht aus den Messungen im Lechersystem auf die Energieverhältnisse im Oszillator schließen darf.

Die Figg. 13 und 14 zeigen, wie sich bei verschiedenen negativen Anodenspannungen sowohl der Anodenstrom I_a als auch der im Thermoelement auftretende Hochfrequenzstrom I_h mit einer Verstimmung des Schwingungskreises ändert. Auf

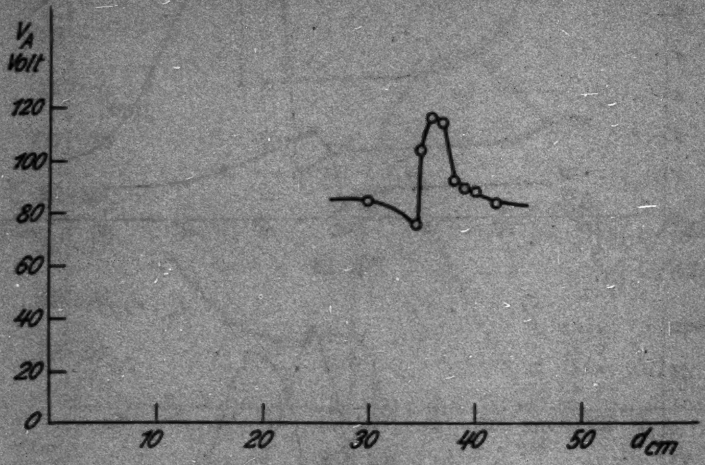


Fig. 15

diese Abhängigkeit wurde bereits zu Anfang hingedeutet. Hier ist jedoch von Bedeutung, daß das Maximum von I_a jeweils mit der maximalen Schwingungsintensität zusammenfällt. Er kann also ohne weiteres als Kriterium für den Abstimmvorgang dienen, wenn es sich beispielsweise darum handelt, Schwingungen möglichst großer Intensität leicht einzustellen. Mit zunehmendem E_a wird der Anodenstrom immer geringer und sein Maximum verlagert sich, der Zunahme der Frequenz entsprechend, nach kürzeren Wellen hin. Ist die Anode stark negativ, etwa 100 Volt, so tritt kein merklicher Anodenstrom mehr auf. Trotzdem wurden Schwingungen erhalten und sie blieben auch dann noch bestehen, als die Anode völlig isoliert wurde. Elektrometrische Messungen des Anodenpotentials ergaben, daß sich

die freie Anode stark negativ auflädt. Beim Einsatz der „*B*“-Schwingungen nimmt ihr Potential der Fig. 15 entsprechend stark zu und der Verlauf der Potentialkurve ist dem der Anodenstromkurve ähnlich. Der Verlauf der Schwingungsintensität bei stark negativer und freier Anode ist nahezu gleich, wie aus der Kurve 5 und 6 der Fig. 14 zu ersehen ist.

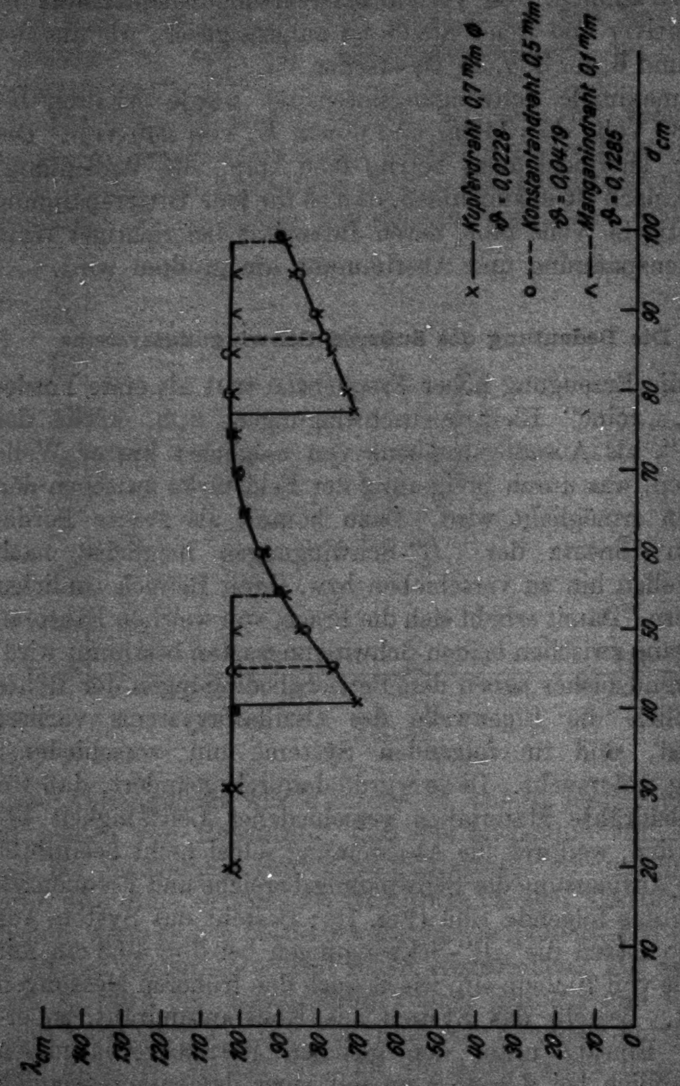
Die maximale Schwingungsintensität wurde erhalten bei $E_a = -32$ Volt, $d = 44$ cm und einem E_g von 240 Volt. Der Strom im Thermoelement betrug 0,56 Amp., die Wellenlänge 78 cm. Danach ist anzunehmen, daß es für jede Gitterspannung eine günstigste Welle gibt, deren Intensität bei richtiger Wahl der Anodenspannung und Abstimmung am größten wird.

§ 4. Die Bedeutung des äußeren Schwingungssystems

Für die Erzeugung hoher Frequenzen tritt als erste Forderung auf, „reine“ Elektronenschwingungen, d. h. solche der Form „*A*“, als Ausgangsfrequenz von möglichst kurzer Welle zu erzeugen, was durch Steigerung der Feldstärke zwischen den Elektroden ermöglicht wird. Dazu kommt als zweite Forderung, den Einsatz der „*B*“-Schwingungen möglichst nach kurzen Wellen hin zu verschieben bzw. ihren Bereich tunlichst zu erweitern. Damit erhebt sich die Frage, von welchen Faktoren der Übergang zwischen beiden Schwingungsarten bestimmt wird.

Während bisher neben den Betriebsbedingungen der Röhre ausschließlich die Eigenwelle des Oszillatorsystems variiert worden ist, sind im folgenden Systeme mit verschiedener Dämpfung untersucht. Diese wurde dadurch geändert, daß für die Paralleldrähte Materialien verschiedener Leitfähigkeit benutzt wurden, wodurch die Abstimmung selbst nicht beeinflußt wird. Die Ausmessung der Schwingungsbereiche und Frequenzen ergab nun das folgende Bild (Fig. 16): Besteht das System aus Kupfer, so setzen die „*B*“-Schwingungen bei $d = 40{,}8$ cm mit einer Welle von 70,2 cm ein, wie es auch den früheren Messungen entspricht. Besteht das System aus Konstantandraht, so erfolgt der Einsatz unter den gleichen Betriebsverhältnissen später, nämlich bei $d = 45{,}8$ cm mit einer dementsprechenden Welle von 76,2 cm, und bei Manganindraht ist der Bereich „*B*“ noch mehr verringert. Der Frequenzverlauf dagegen ist in allen drei Systemen vollkommen gleich. Es ist einleuchtend, daß bei einer weiteren Erhöhung der Dämpfung „*B*“-Schwingungen

überhaupt nicht mehr einsetzen werden. Aus mechanischen Gründen war die Verwendung von Widerstandsdraht unter 0,1 mm Durchmesser unmöglich, doch konnte durch Ankoppeln



Schwingungsbereiche bei verschiedener Dämpfung.
Fig. 16

einer Dipolantenne im Strombauch die Dämpfung so vergrößert werden, daß bei Manganindraht von 0,1 mm tatsächlich keine „B"-Schwingungen mehr einsetzten.

Die Dämpfungsdekremente der verschiedenen Systeme

wurden aus ihren Resonanzkurven ermittelt zu 0,0228 für Kupferdraht von 0,7 mm; 0,0419 für Konstantandraht von 0,5 mm und zu 0,1285 für Manganindraht von 0,1 mm Durchmesser. Die Resonanzkurven wurden aufgenommen, indem die Systeme von einem Kurzwellenoszillator ähnlicher Bauart wie der vorliegende angeregt und die Stromstärke im Thermoelement gemessen wurde.

Ein Versuch, aus den Resonanzkurven unter Annahme einer konstanten, aber unbekannten „Anfachungsspannung" bzw. Stromstärke die Verlagerung des Einsatzpunktes der „*B*"-Schwingungen in Fig. 16 zu erfassen, führte zu keinem Ergebnis, zeigte vielmehr, daß die Voraussetzung einer in allen 3 Fällen gleichen Anfachungsspannung nicht aufrecht erhalten werden kann, sondern daß das stärker gedämpfte System eine höhere „Anfachung" erfordert, als das schwächer gedämpfte.

Die Verlagerung des Einsatzpunktes mit zunehmender Dämpfung kann schon aus den eingangs angeführten Frequenzkurven der Figg. 8—10 ersehen werden. Man findet nämlich, daß zwei zu einer Kurve gehörige Einsatzpunkte nicht genau um eine halbe Wellenlänge der kürzesten „*B*"-Welle, sondern um einen etwas größeren Betrag verschoben sind. Auch ist die jeweils später auftretende „*B*"-Welle dementsprechend etwas länger. Dies erklärt sich daraus, daß die Dämpfung des Schwingungssystems um so größer wird, je größer die Zahl seiner Halbwellen ist.

§ 5. Dämpfungsverminderung durch Fremderregung

Die zur Aufnahme der Resonanzkurven benutzte Anordnung legte den Versuch nahe, Röhren, welche selbständig nicht schwingen, durch von außen induzierte Wechselspannungen zum Schwingungseinsatz zu bringen. Die Abstimmverhältnisse werden freilich sehr kompliziert, weil neben dem Erregersender und Oszillatorkreis auch noch die Betriebsverhältnisse der Röhre variiert werden müssen. Es wurde daher so verfahren, daß bei einer konstanten Erregerwelle zunächst der Oszillatorkreis mit Hilfe des Thermoelements auf Resonanz abgestimmt wurde; dann brauchten nur noch die an der Röhre liegenden Spannungen variiert zu werden.

Die Versuche ergaben, daß eine Röhre, welche selbständig keine Elektronenschwingungen erzeugt, auch auf diese Weise

nicht zu hochfrequenter Leistungsabgabe gebracht werden kann, obwohl die äußeren Merkmale von „B"-Schwingungen, wie das Ansteigen des Anoden- und Abfallen des Gitterstromes vorhanden waren. Bei nur schwach negativer Anode war es möglich, die Abstimmung so zu variieren, daß oberhalb der Resonanzfrequenz ein Absinken des Anodenstromes, unterhalb dagegen ein Ansteigen stattfand. Dies läßt auf eine Beeinflussung der Elektronenbewegung in der Röhre schließen, wie sie durch eine reine Gleichrichterwirkung nicht zu erklären ist. Der gleiche Effekt konnte durch Änderung der Spannungen oder des Heizstromes herbeigeführt werden.

Scheibe (14) hat, um durch Parallelschalten Barkhausen-Kurz-Schwingungen größerer Intensität zu erzielen, zwei Röhren auf ähnliche Weise, wie es bei Aufnahme der Resonanzkurven geschah, miteinander gekoppelt. Er verwendet jedoch Röhren, von denen jede selbständig Schwingungen zu erregen imstande ist, und findet, daß bei Fremderregung durch die eine, die andere Röhre schon bei 30—40 Proz. niedrigeren Spannungen zu schwingen beginnt, als sie zu selbständigen Schwingen benötigt. Nimmt man an, daß es sich bei den von Scheibe erzeugten Schwingungen um solche der Form „B" handelt, was auf Grund seiner Anordnung wahrscheinlich ist, so ist die Erweiterung des Schwingungsbereiches leicht zu erklären, indem durch die Fremderregung eine Dämpfungsreduktion stattfindet, die sich naturgemäß entgegengesetzt auswirken muß, wie die im vorhergehenden Paragraphen beschriebene Dämpfungserhöhung.

Bei den vorstehenden Versuchen wurde eine große Zahl der verschiedensten Röhrentypen untersucht. Neben den „Schott"-Röhren konnten jedoch nur mit französischen Kurzwellenröhren der Typen *E 4 M* und *TMC* Elektronenschwingungen der Form *A* und *B* erhalten werden. Die letzte Type ergab als kürzeste Welle 38 cm bei einem Hochfrequenzstrom von 0,12 Amp.

§ 6. Theorie der Elektronenbewegung im Wechselfeld

Barkhausen und Kurz haben unter vereinfachenden Annahmen eine Formel zur Berechnung der Elektronenfrequenz angegeben. Setzt man bei der Berechnung an Stelle der stationären Bremsfelder die Wechselfelder ein, so ist auch theoretisch eine Änderung der Elektronenbewegung und damit

der Frequenz zu erwarten. Damit ergibt sich eine Formel zur Berechnung der „B"-Schwingungen.

a) Berechnung der BK-Frequenz aus der Elektronenbewegung im stationären Bremsfeld

Zunächst wurde unter den gleichen vereinfachenden Annahmen, wie sie Barkhausen-Kurz getroffen haben, die Bewegungsgleichung für ein sich im stationären Zwischenelektrodenfeld bewegendes Elektron aufgestellt. Die volle Periodendauer ergibt sich dann aus der Verweilzeit des Elektrons im Gitter-Anode- und Gitter-Kathoderaum. Beide Räume sollen nach Voraussetzung gleich sein, so daß die Rechnung nur für einen Raum durchzuführen ist.

Voraussetzungen:

1. Anode und Kathode haben das Potential Null.
2. Das Gitter befinde sich mitten zwischen Anode und Kathode, d. h. es ist $d\,a = d\,k = d$ (vgl. Fig. 17).

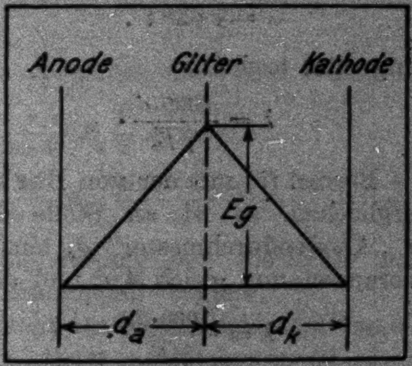


Fig. 17

3. Die Elektroden seien eben.
4. Raumladungen seien vernachlässigt.

Dann ist die Feldstärke im Zwischenelektrodenraum

$$\mathfrak{E} = \frac{E_g}{d}$$

und die Bewegungsgleichung eines Elektrons lautet:

$$(1) \quad \begin{cases} -e \cdot \mathfrak{E} = m \cdot \ddot{x} \\ -e \cdot \dfrac{E_g}{d} = m \cdot \ddot{x}. \end{cases}$$

Beachtet man, daß das Elektron zur Zeit $t = 0$ gerade mit der Geschwindigkeit v_0 in den Raum eintreten soll, und daß in diesem Moment auch $x = 0$ ist, so erhält man aus (1) durch zweimalige Integration:

$$x = -\frac{e}{m}\,\frac{E_g}{d}\,\frac{t^2}{2} + v_0 \cdot t\,. \tag{2}$$

Setzt man hierin wieder $x = 0$, so ergibt sich die Verweilzeit des Elektrons zwischen den Elektroden:

$$\left\{\ \tau = \frac{2 \cdot v_0 \cdot d}{\frac{e}{m} E_g}\right. \tag{3}$$

und setzt man für v_0 $\sqrt{2 \frac{e}{m} E_g}$ und E_g in Volt ein,

$$\tau = \frac{2 \cdot d}{3\sqrt{E_g}\,10^7}\,. \tag{4}$$

Nun ist die volle Periodendauer T aber gleich $2 \cdot \tau$ und daher

$$\lambda = c \cdot 2 \cdot \tau\,.$$

(4) darin eingesetzt ergibt:

$$\lambda = \frac{4000 \cdot d}{\sqrt{E_g}}\,. \tag{5}$$

Will man die Formel (5) mit der von Barkhausen-Kurz angegebenen vergleichen, so ist an Stelle des Elektrodenabstandes d der „Anodendurchmesser" d_a einzusetzen. Dieser ist aber nach Voraussetzung gleich $4 \cdot d$ und daher wird

$$\lambda = \frac{1000 \cdot d_a}{\sqrt{E_g}}\,.$$

In dieser Form ist die Gleichung mit der von Barkhausen-Kurz identisch (vgl. Einleitung, Abschnitt 3a).

b) Berechnung der GM-Frequenz aus der Elektronenbewegung im Wechselfeld

Liegt an den Elektroden ein Schwingungssystem, so wird dasselbe von den Elektronenschwingungen angeregt, und es entsteht zwischen den Elektroden ein Wechselfeld, das sich dem stationären Bremsfeld überlagert. Hier werde die vereinfachende Voraussetzung getroffen, daß die Wechselspannung nur am Gitter liege (vgl. Fig. 18).

In diesem Fall ist die Feldstärke

$$\mathfrak{E} = \frac{E_g + E_0 \sin(\omega t + \varphi)}{d}.$$

und die Bewegungsgleichung eines Elektrons lautet nunmehr:

$$-e \cdot \frac{E_g + E_0 \sin(\omega t + \varphi)}{d} = m \cdot \ddot{x}\,. \tag{6}$$

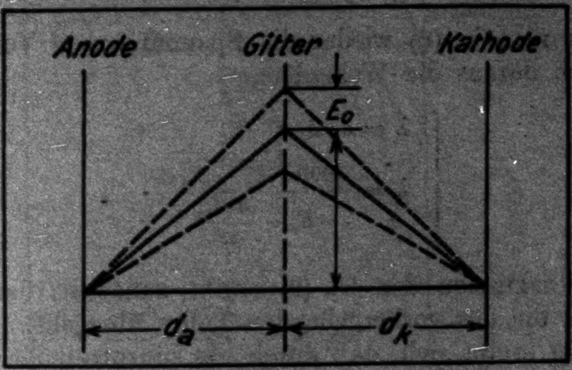


Fig. 18

Analog dem vorhergehenden Fall erhält man:

$$\left\{\begin{aligned} x = & -\frac{e}{m\cdot d}\cdot E_g \frac{t^2}{2} + v_0\cdot t \\ & + \frac{e}{m\cdot d} E_0 \left(\frac{\sin(\omega t+\varphi)}{\omega^2} - \frac{t\cdot\cos\varphi}{\omega} - \frac{\sin\varphi}{\omega^2}\right). \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Eine einfache Lösung der Gleichung nach t ist unter folgenden Voraussetzungen möglich:

1. Die Frequenz des Wechselfeldes ist durch die Elektronenfrequenz gegeben. Setzt man daher in Gl. (7) $x = 0$, so erhält man die Zeit τ, die der halben Periodendauer entspricht; für diese ist aber gemäß der Voraussetzung

$$\omega \cdot \tau = \omega \frac{T}{2} = \pi\,.$$

2. Zur Zeit $t = 0$, d. h. im Moment des Elektronendurchtritts durchs Gitter, erhält dasselbe eine negative Ladung, da ja der größte Teil der Elektronen auffällt. E_0 hat daher in diesem Moment seinen negativen Maximalwert, d. h. es muß sein:

$$\varphi = -\frac{\pi}{2}\,.$$

Dann ergibt sich die Dauer einer Halbperiode τ zu

$$\tau = \frac{v_0}{\frac{e}{m \cdot d}\left(\frac{E_g}{2} - \frac{2 \cdot E_0}{\pi^2}\right)}. \tag{8}$$

Darin ist

$$v_0 = \sqrt{\frac{e}{m} 2 (E_g - E_0)}.$$

Setzt man in (8) wieder die Spannungen in Volt ein, so ergibt sich daraus die Wellenlänge

$$\left\{ \begin{aligned} \lambda &= c \cdot 2 \cdot \tau \\ \lambda &= \frac{4000 \sqrt{E_g - E_0}\, d}{E_g - \frac{4 \cdot E_0}{\pi^2}}. \end{aligned} \right. \tag{9}$$

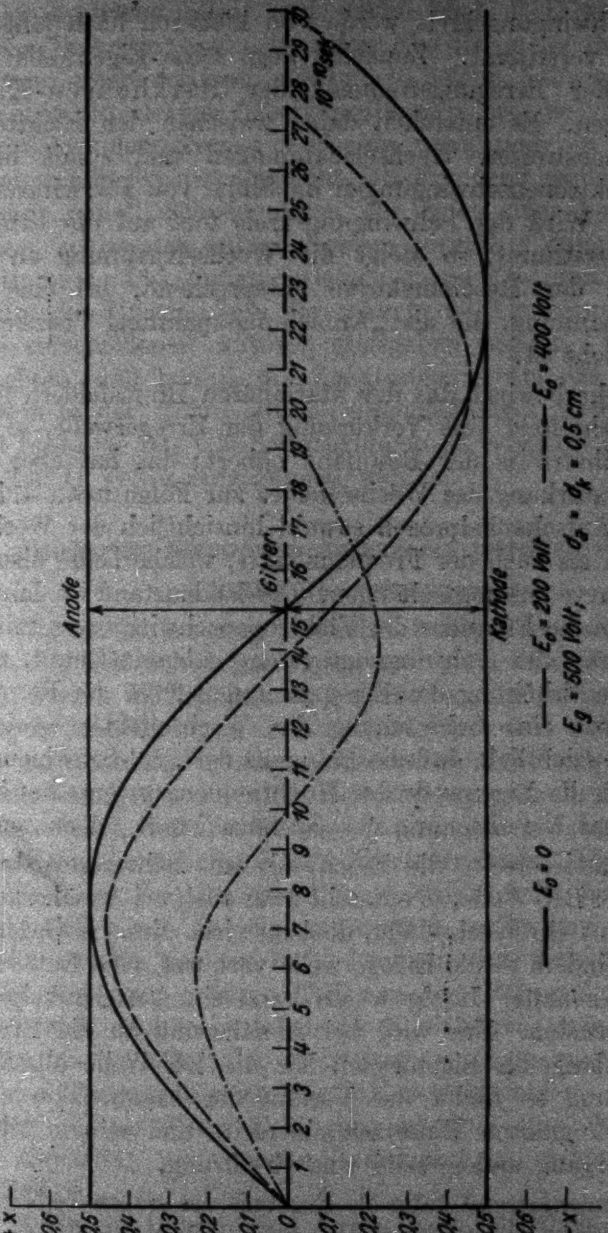
Die Diskussion der Gl. (9) ergibt zunächst, daß sie für $E_0 = 0$ in die des vorhergehenden Falles übergeht.

Weiter ergibt sich, daß durch das hinzutretende Wechselfeld eine Verkürzung der Wellenlänge stattfindet, wie aus dem folgenden Zahlenbeispiel hervorgeht:

$E_g = 500$ Volt; $d = 0{,}5$ cm.

E_0	λ
0	89,5 cm
100	86,9
200	82,5
300	74,6
400	58,8

Setzt man in Gl. (7) verschiedene Werte für t ein und zwar zweckmäßig ausgehend von $\omega \cdot t = \pi$, so läßt sich die Bewegung des Elektrons als Weg/Zeitkurve darstellen. In der Fig. 19 sind diese Bewegungskurven für $E_0 = 0$, 200 und 400 Volt dargestellt; man sieht, wie das Elektron eine um so kürzere Strecke zurücklegt und um so früher vor der Anode um und zum Gitter zurückkehrt, je höher E_0 ist. Infolge der getroffenen Voraussetzungen können die Kurven nur qualitativ den Verlauf der Elektronenbewegung wiedergeben. Ein Vergleich mit experimentellen Werten ist nicht durchführbar; auch ist die Größe von E_0 willkürlich gewählt und dürfte im Experiment kaum erreichbar sein.



Elektronenbewegung zwischen den Elektroden

Fig. 19

Auf Grund dieser theoretischen Betrachtungen ist der Mechanismus der „B“-Schwingungen folgendermaßen zu erklären:

Der Schwingungskreis werde von kürzeren nach längeren Wellen hin verstimmt. Zunächst liege seine Eigenwelle weit unterhalb der Erregungsfrequenz der Barkhausen-Kurz-Schwingungen. Es entstehen daher zwischen den Elektroden keine nennenswerten Wechselspannungen und somit liegen „reine" Elektronenschwingungen im Sinne von Barkhausen-Kurz vor. Wird der Schwingungskreis nun auf die Erregerwelle zu verstimmt, so steigt die Wechselspannung an den Elektroden, der Resonanzkurve entsprechend, bis eine bestimmte Spannung, die als „Anfachungsspannung" bezeichnet wurde, erreicht ist.

Nunmehr bewirkt das den stationären Bremsfeldern überlagerte Wechselfeld eine Verkürzung der Erregerwelle, so daß sich diese ihrerseits der Resonanz nähert; das hat aber eine weitere Verstärkung des Wechselfeldes zur Folge usw., d. h. es findet ein Aufschaukelprozeß sowohl hinsichtlich der Wechselspannungen als auch der Frequenz statt, welche beide über die Resonanzkurve zusammenhängen. Der Endzustand ist dann erreicht, wenn die Frequenz der Elektronenschwingungen mit der Eigenfrequenz des Schwingungssystems übereinstimmt, denn eine weitere Erhöhung der Erregerfrequenz über die Resonanz hinaus würde eine Schwächung des Wechselfeldes bewirken. Daraus ist ersichtlich, daß die Frequenz der „*B*"-Schwingungen allein durch die Eigenwelle des Hochfrequenzsystems bestimmt ist und einer Verstimmung des Systems exakt folgen muß.

Liegt andererseits die Eigenwelle des Schwingungskreises oberhalb der BK-Welle, so entsteht zwar auch bei Annäherung an die Resonanz ein Wechselfeld, doch bewirkt dies, im Gegensatz zu vorher, indem es die Erregerwelle verkürzt, eine Entfernung von der Resonanz. Infolgedessen kann ein Aufschaukelprozeß nicht stattfinden. Nur wird bei Annäherung an die Erregerwelle von längeren Eigenwellen her die BK-Welle allmählich verkürzt, und so findet der Verlauf der Frequenzkurve mit seinem sprunghaften Einsetzen einerseits und seinem allmählichen Übergang andererseits eine Erklärung.

Zusammenfassend kann als Ergebnis des ersten Teils gesagt werden, daß in der Schaltung von Barkhausen-Kurz zwei verschiedene Arten von Elektronenschwingungen auftreten können, und zwar solche nach Barkhausen-Kurz selbst, wobei die Frequenz durch die stationären Zwischenelektroden-

felder bestimmt wird, und solche nach Gill und Morrell, deren Frequenz exakt mit der Eigenfrequenz des Abstimmsystems übereinstimmt. Zwischen beiden Schwingungsformen herrscht ein stetiger Übergangsbereich, wo die Eigenfrequenz des Schwingungskreises verlassen wird, und ein allmählicher Übergang in die ursprüngliche BK-Frequenz erfolgt. Will man daher „reine" Schwingungen der einen oder anderen Form haben, so ist das äußere System sorgfältig entsprechend abzustimmen. Das Außerachtlassen dieses Abstimmungsvorgangs dürfte die Ursache sein für mancherlei Unstimmigkeiten, die von verschiedenen Autoren angegeben werden. Dabei ist zu beachten, daß bereits die Zuleitungen sowie das Elektrodensystem in der Röhre ein schwingungsfähiges System darstellt und imstande ist, GM-Schwingungen zu erregen. Hierauf wird im Teil II weiter eingegangen werden.

II. Gleichartige Elektronenschwingungen verschiedener Frequenz

§ 1. Die Versuchsapparatur

Um zur Erzeugung möglichst hoher Frequenzen den Bereich der GM-Schwingungen zu erweitern bzw. ihren Einsatz nach kurzen Wellen hin zu verschieben, ist es nach den bisherigen Ausführungen erforderlich, erstens, daß die „Anfachungsspannung" gering gehalten wird, was durch Dämpfungsverminderung des gesamten Schwingungssystems zu geschehen hat, zweitens, daß die Wechselspannungen zwischen den Elektroden einen möglichst hohen Wert erreichen. Dies ist durch die Wahl des Verhältnisses C/L zu erzielen. Ist für den ersten Punkt das ganze Schwingungssystem maßgebend, so kommt für den zweiten nur das in $^1/_4\,\lambda$ schwingende freie Ende in Betracht, das zum größten Teil aus den Röhrenelektroden gebildet wird. Zunächst sollen die Radialabmessungen der Elektroden, die ja neben den Betriebsspannungen maßgebend sind für den Frequenzbereich der BK-Schwingungen, unverändert bleiben. Unter dieser Bedingung ist aber eine Verkleinerung der Kapazität nur durch Verkürzung in axialer Richtung möglich.

Geeignete Röhren sind fertig nicht erhältlich. Um daher auch späterhin jedes beliebige Röhrensystem untersuchen zu können, wurde eine Anordnung benutzt, bei der vermittels eines Glasschliffes das Röhreninnere zugänglich war. Wie die

Fig. 20 zeigt, wird das Elektrodensystem von einem Glasrähmchen getragen, welches über einen Quetschfuß mit den erforderlichen Platindurchführungen mit einem Normalschliff verblasen ist. So kann das Elektrodensystem vakuumdicht in

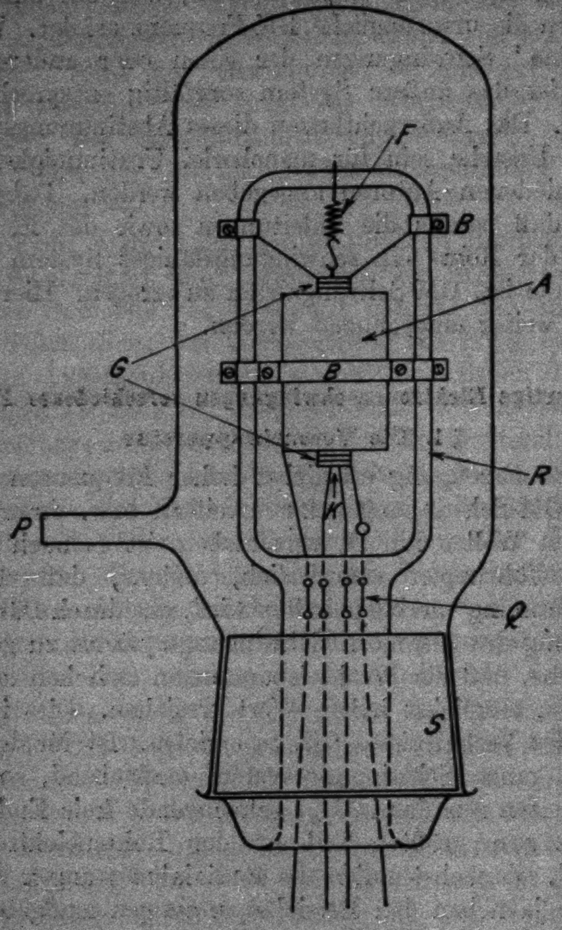


Fig. 20

ein mit einer Pumpe in Verbindung stehendes Glasgefäß eingesetzt werden. Zur Dichtung des Schliffes wurde Picein benutzt, welches durch eine Bandage aus feuchter Watte kalt gehalten wurde. Als Pumpe stand eine zweistufige Stahldiffusionspumpe der Firma Leybold zur Verfügung. Exakte Vakuummessungen wurden nicht vorgenommen, lediglich zur

Kontrolle der Pumpe war ein Geisslerröhrchen an die Apparatur angesetzt. Das erreichte Vakuum lag jedoch bei allen Versuchen unter 10^{-5} mm Hg.

Die Aufhängung der Elektroden in dem Glasrähmchen geschah zunächst mittels Bindedrähten. Dieselben lockerten sich jedoch während des Ausheizens und wurden durch Kupferbandagen mit Stahlschrauben ersetzt. Als Material wurde für die Anode Elektrolytkupfer, für das Gitter Molybdändraht benutzt. Das Gitter bestand, den „Schott"-Röhren entsprechend, aus 4 quadratisch angeordneten Längsdrähten, welche zur Befestigung und Stromzufuhr nach beiden Seiten über die eigentliche Elektrode hinausragten. Durch Verschweißen im elektrischen Lichtbogen wurde dem Gerüst die erforderliche Festigkeit verliehen; darauf wurde es mit einer Bewickelung aus 0,08 mm starkem Molybdändraht versehen. Der Heizdraht bestand aus Wolfram von 0,15 mm Durchmesser und wurde mit 4 Amp. maximal belastet. Dementsprechend war die Lebensdauer der Kathode nur gering, so daß in jeder Versuchsreihe ein neuer Faden eingezogen werden mußte.

Das Ausheizen der Elektroden geschah in der üblichen Weise durch Elektronenbombardement. Da in der Bremsfeldschaltung das Gitter naturgemäß am stärksten erhitzt wird, hat es doch annähernd den ganzen Emissionsstrom aufzunehmen, wurde auch beim Ausheizen die Hochspannung an dasselbe gelegt.

Die Fig. 21 auf Taf. III gibt die vollständige Versuchsanordnung im Lichtbild wieder. Die Meßvorrichtungen, Stromquellen und das äußere Schwingungssystem sind bereits im ersten Teil besprochen worden.

§ 2. BK- und GM-Schwingungen verschiedener Frequenz

Bei dem zunächst untersuchten Elektrodensystem war die Elektrodenlänge auf 30 mm verringert (Fig. 22, Taf. IV). Im übrigen entsprach es völlig der „Schottschen N-Röhre", d. h. der Anodendurchmesser betrug 18 mm, der Gitterquerschnitt 6 × 6 mm. Der Heizfaden war V-förmig und wurde durch eine Feder straff gehalten. Den Verlauf der Frequenz in Abhängigkeit von der Abstimmung des äußeren Systems zeigt die obere Kurve der Fig. 23. Sie läßt erkennen, daß die infolge der geringeren Kapazität erwartete Verschiebung des Einsatzpunktes für die GM-Schwingungen nicht eintritt, sondern daß die

prozentuale Änderung der Wellenlänge an der Übergangsstelle mit den früher beobachteten Werten übereinstimmt. Dies Ergebnis steht im Widerspruch zur Theorie, es erhebt sich jedoch die Frage, ob ein unmittelbarer Vergleich einer fertigen „Schott“-Röhre mit dem hier benutzten System statthaft ist; so kann allein die durch die dünnen Molybdändrähte ver-

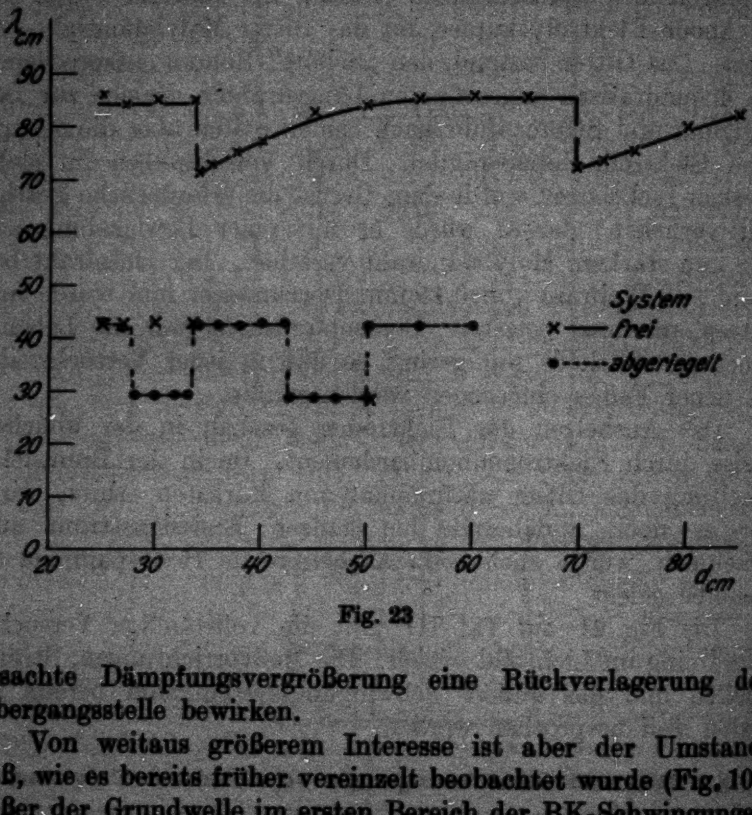


Fig. 23

ursachte Dämpfungsvergrößerung eine Rückverlagerung der Übergangsstelle bewirken.

Von weitaus größerem Interesse ist aber der Umstand, daß, wie es bereits früher vereinzelt beobachtet wurde (Fig. 10), außer der Grundwelle im ersten Bereich der BK-Schwingungen eine zweite, höhere Frequenz auftritt. Im zweiten Bereich der BK-Schwingungen wurde diese Frequenz jedoch nicht mehr gefunden, obwohl der horizontale Verlauf der Frequenzkurve „reine“ BK-Schwingungen erkennen läßt. Es trat daher die Frage auf, ob hier überhaupt reine Elektronenschwingungen im Sinne von Barkhausen und Kurz möglich sind, oder ob nicht durch ein noch so geringes Wechselfeld zwischen den Elektroden eine Steuerung der Elektronenbewegung stattfindet. Um eine Schwingungsmöglichkeit der Elektroden in

$^1/_4 \lambda$, und damit jede Wechselspannung zu unterdrücken, wurde Gitter und Anode auf die aus Fig. 24, Taf. IV ersichtliche Weise durch 2 Vakuumkondensatoren von etwa 100—200 cm überbrückt. Durch diese Maßnahme sollte das äußere System bzw. die Zuleitungen vollkommen abgeriegelt werden.

Die nunmehr unter den gleichen Versuchsbedingungen aufgenommene $\lambda = f(d)$-Kurve ist in die Fig. 23 gestrichelt eingezeichnet. Die ursprünglich vorherrschende „längere" Elektronenwelle ist nun nicht mehr zu finden, dafür tritt jedoch die Elektronenschwingung höherer Frequenz stark hervor. Außerdem ist eine weitere Schwingungsform noch höherer Frequenz zu beobachten. Daß die nunmehrige „längere" Welle mit der „kürzeren" der vorigen Kurve identisch ist, beweist die Übereinstimmung ihrer Frequenzen. Die neue „kürzere" Welle ist dagegen als *neue GM-Schwingung* anzusprechen, nur daß das Elektrodensystem jetzt nicht mehr in $^1/_4$, sondern in $^1/_2 \lambda$ schwingt, und daß seine Eigenwelle durch die beiden Blockierungskondensatoren, die festliegende Knotenpunkte bilden, konstant ist. Aus diesem Grunde vermag das äußere System auch die Frequenz der GM-Schwingungen nicht mehr zu beeinflussen, sondern bewirkt nur, vermutlich infolge Energieentziehung in Resonanznähe, den Übergang in den einen oder anderen Schwingungsbereich.

Ist die Vorstellung von einer Erregung des Elektrodensystems in $^1/_2 \lambda$ richtig, so müssen bei weiterer Erhöhung seiner Eigenfrequenz die GM-Schwingungen verschwinden. Die Vakuumkondensatoren von Loewe machten infolge ihrer langgestreckten Form eine hinreichende Verkleinerung unmöglich. Es wurden daher besondere Kondensatoren aus Kupferplatten mit Glimmerzwischenlage angefertigt. Die Fig. 25, Taf. IV zeigt ein Elektrodensystem von 20 mm Länge, durch zwei der neuen Metallkondensatoren überbrückt. Bei diesem System traten GM-Schwingungen nicht mehr auf, sondern nur die „kürzere" BK-Schwingung. Es zeigte sich, daß allein der äußere Kondensator zur Unterdrückung der GM-Schwingungen ausreichte; dabei übt das äußere System einen bedeutenden Einfluß auf die Schwingungsintensität aus. Ferner wurde beobachtet, daß die „kürzeren" BK-Schwingungen sich in gleicher Weise mit den Betriebsspannungen ändern, wie die „längeren": Sie müssen also ihrer Natur nach eng miteinander verwandt sein.

Das gleichzeitige Auftreten von Elektronenschwingungen zweier verschiedener Frequenzen ist schon von Scheibe angegeben worden (a. a. O. 9). Er versucht allerdings, die „kürzeren“ Wellen als Oberschwingungen der „längeren“ zu deuten, findet jedoch experimentell eine starke Abweichung vom Verhältnis 2. Auch Schaefer und Merzkirch beschreiben einen Fall (a. a. O. 22), bei dem unter bestimmten Bedingungen plötzlich an Stelle der erwarteten Grundwelle die Oberwelle auftrat. Vergleicht man im vorliegenden Fall beide Frequenzen, so ergibt sich auch hier ein Verhältnis von nahezu 2. Später wird jedoch gezeigt werden, daß dieser Wert nur als Zufallsergebnis zu bezeichnen ist.

§ 8. Die Einsatzbedingungen für die „kürzeren“ und „längeren“ BK-Schwingungen

Nachdem erwiesen ist, daß sich GM-Schwingungen von den „kürzeren“ BK-Schwingungen als Ausgangsfrequenz ebenso erregen lassen wie von den „längeren“, ist es für die Erzeugung höchster Frequenzen von Bedeutung, die Bedingungen festzustellen, unter denen der eine oder andere Frequenzbereich auftritt.

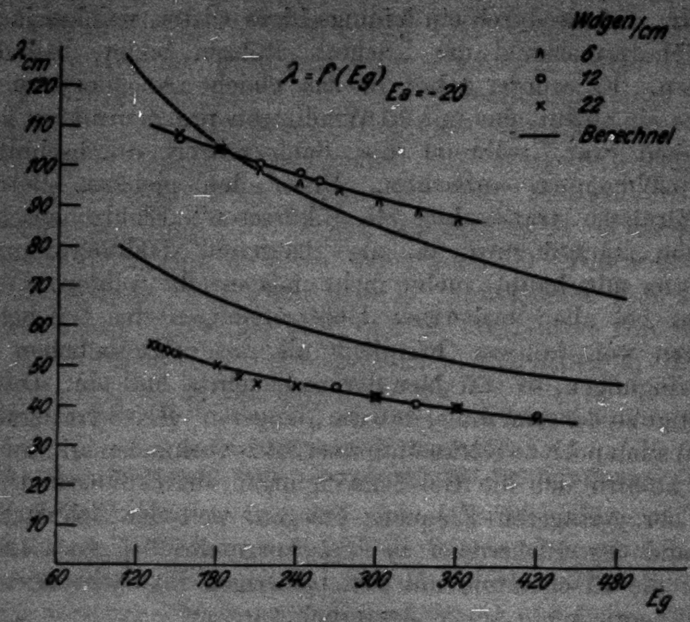
Bei der großen Zahl aller frequenzmaßgebenden Faktoren kam es darauf an, die Variationsmöglichkeiten tunlichst einzuschränken. Aus diesem Grunde wurden auch hier noch die Radialabmessungen der Elektroden zunächst beibehalten. Danach bleibt als einzig variabler Faktor — abgesehen von den Betriebsbedingungen — noch die Durchlässigkeit des Gitters übrig.

Zunächst wurde ein grobmaschiges Gitter untersucht, bestehend aus einer Spirale aus 0,45 mm starkem Wolframdraht mit 14 Windungen auf 20 mm Länge. Ihr Durchmesser war gleich der Kantenlänge der bisher benutzten Gitter von 6 mm. Es ergab sich, daß nur GM-Schwingungen geringerer Frequenz erhalten wurden. Die Intensität der BK-Schwingungen war zu gering, als daß eine Wellenmessung möglich war. Lediglich ihr Auftreten konnte mit Hilfe einer abschirmenden und reflektierenden Blechtafel an geringen Galvanometerbewegungen festgestellt werden. Auch deutete das Abbiegen der Frequenzkurve auf BK-Schwingungen von 76 cm Länge hin.

Treten die Elektronenschwingungen bei einem grobmaschigen Gitter nur schwach auf, so ist umgekehrt zu er-

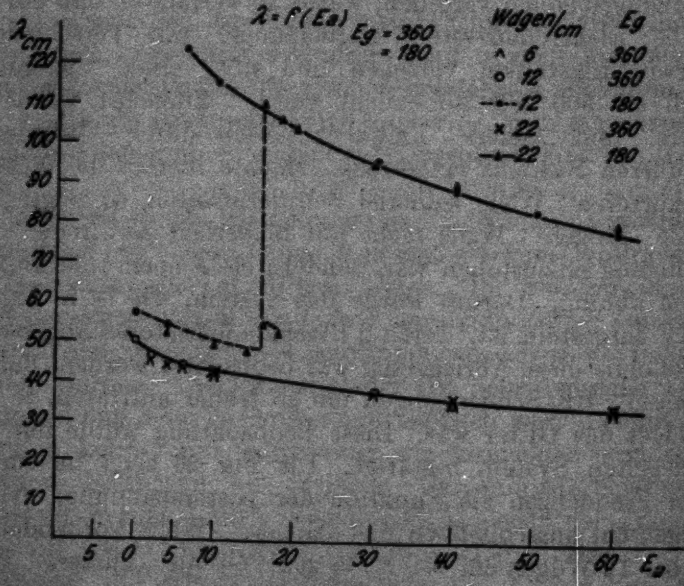
warten, daß sie durch ein feinmaschiges Gitter, welches ja auch das Hauptmerkmal der „Schott"-Röhren bildet, begünstigt werden. Es wurde daher in das gleiche Anodensystem ein Gitter eingebaut, das mit 15 Windungen pro Zentimeter Länge versehen war, während die Schottröhren durchschnittlich 8—10 Wdgen/cm aufweisen. Unter den gleichen Betriebsverhältnissen traten hier die „kürzeren" Elektronenschwingungen stark hervor, ja, die „längeren" BK-Schwingungen konnten überhaupt nicht mehr festgestellt werden. Waren ferner bei allen bisherigen Untersuchungen die GM-Schwingungen von höherer Frequenz als die ursprünglichen BK-Schwingungen, so trat hier der umgekehrte Fall ein. Dies berechtigt zu der Annahme, daß die „längeren" BK-Schwingungen, wenn auch noch so schwach, immer noch vorhanden sein müssen. Nur können sich die GM-Schwingungen aus dem Grund allein mit der geringeren Frequenz erregen, weil der Schwingungszustand der Elektroden in $^1/_4 \lambda$ vorgeschrieben ist. Danach steht die Erscheinung mit den bisherigen Beobachtungen und der Theorie nicht im Widerspruch.

Zur genaueren Untersuchung, wie sich unter verschiedenen Betriebsbedingungen die beiden Frequenzen auf dem gesamten Schwingungsbereich verteilen, wurde so verfahren, daß ein und dasselbe Elektrodensystem nacheinander mit verschiedenen Gitterwindungszahlen versehen und über einen Spannungsbereich bis 500 Volt untersucht wurde. Zunächst wurde die „höhere" und „tiefere" Frequenz jeweils durch Abstimmung des äußeren Systems eingestellt. Machte hierbei die Messung der „kürzeren" Welle keinerlei Schwierigkeiten, so zeigte sich, daß die „längere" Welle nicht mit Sicherheit als „reine" BK-Schwingung einzustellen war, sondern stets noch vom äußeren System abhing. Darum wurde das System, wie es in Fig. 25, Taf. IV dargestellt ist, durch 2 Blockkondensatoren abgeriegelt. Bereits ohne diese Abriegelung war beobachtet worden, daß die „kürzeren" BK-Schwingungen um so früher auftraten, je engmaschiger das Gitter war. Diese Beobachtung wurde mit dem abgeriegelten System bestätigt. Die Fig. 26 zeigt hierfür die beiden Frequenzen als Funktion der Gitterspannung. Ist bei 6 Wdgen/cm ausschließlich die „längere" Welle vorhanden, so tritt bei 12 Wdgen/cm bei $E_g = 260$ Volt die „kürzere" Welle auf, die bei 22 Wdgen/cm schon bei 150 Volt einsetzt. Daneben



λcm
λ = f (Eg) Ea = -20
Wdgen/cm
6
12
22
Berechnet
Eg

Fig. 26



λcm
λ = f (Ea) Eg = 360
= 180
Wdgen/cm
Eg
6 360
12 360
12 180
22 360
22 180
Ea

Fig. 27

tritt die „längere“ Welle allerdings noch bis 180 Volt zusammen mit der „kürzeren“ auf. Ersichtlich setzt also die „kürzere“ Welle um so leichter ein, je engmaschiger das Gitter ist.

Einen abweichenden Verlauf zeigt allerdings die $\lambda = f(E_a)$-Kurve der Fig. 27. Da die „längeren“ Wellen bei $E_g = 360$ Volt nicht mehr deutlich auftraten, wurden die Messungen mit einer geringeren Gitterspannung von 180 Volt wiederholt. Nunmehr tritt die „kürzere“ Welle schon bei geringen Anodenspannungen auf, um mit zunehmender Spannung in die „längere“ umzuspringen. Es darf daher nicht ohne weiteres geschlossen werden, daß die „kürzere“ Welle allgemein um so früher auftritt, je höher die Frequenz der „längeren“ bei der gleichen Gitterwindungszahl ist. Bei dem Versuch, eine möglichst kurze BK-Welle zu erzeugen, wurde die Gitterspannung auf 480 und die Spannung an der Anode auf — 100 Volt erhöht; dabei trat plötzlich, völlig abweichend vom Kurvenverlauf, eine Welle von 18,1 cm auf, welche als die Eigenwelle des abgeriegelten Systems und somit als GM-Schwingung anzusprechen ist. Dies konnte dadurch erwiesen werden, daß sie sich bei geringen Variationen der Spannungen nicht änderte.

Betrachtet man das Verhältnis der „längeren“ und „kürzeren“ Welle in den Figg. 26 und 27, so ergeben sich beträchtlich von 2 abweichende Werte. Damit ist nunmehr eindeutig festgestellt, wie es ja auch Scheibe schon betont, daß die „kürzere“ Welle keinesfalls als Oberschwingung der „längeren“ aufzufassen ist, wie es nach den ersten Beobachtungen den Anschein hatte. Vielmehr ist das dort gefundene Verhältnis als Zufall zu bezeichnen, was durch folgende Beobachtung noch bestärkt wird: In einem Fall, nämlich bei $E_g = 180$ Volt und 22 Wdgen/cm war es nämlich möglich, beide Wellen gleichzeitig zu erhalten (Fig. 27). Aus dem Kurvenverlauf der „kürzeren“ Welle ergibt sich aber, daß dieselbe in dem Bereich von 16—18 Volt E_a genau in die Oberschwingung der längeren Welle übergeht, von dieser gewissermaßen „mitgenommen“ wird. Nur in diesem Fall darf die „kürzere“ als Oberschwingung der „längeren“ Welle bezeichnet werden.

§ 4. Theoretische Betrachtungen

Die Tatsache, daß die Durchlässigkeit des Gitters für das Auftreten der „längeren“ oder „kürzeren“ BK-Schwingung von solcher Bedeutung ist, führt zu folgender Erklärung:

Barkhausen-Kurz sowie Scheibe setzen in ihrer Theorie voraus, daß die von der Kathode emittierten Elektronen durchs Gitter hindurchfliegen und in das Bremsfeld der Anode geraten. Unmittelbar vor der Anode, bzw. bei negativer Anode in der Potentialnullfläche, gelangen sie zur Ruhe und werden in umgekehrter Richtung zum Gitter hin beschleunigt. Sie durchfliegen dasselbe ein zweites Mal, gelangen in das Bremsfeld der Kathode, wo sie wieder umgekehrt und zum Gitter zurückgetrieben werden. Darauf können sie dieses wiederum durchfliegen, worauf sich der ganze Vorgang wiederholt. Diese gesamte Bewegung der Elektronen im Gitter-Anode- und im Gitter-Kathoderaum ist für die Frequenz der BK-Schwingungen maßgebend, wie durch die gute Übereinstimmung mit den errechneten Werten hinreichend erwiesen ist. Die Elektronen vermögen danach beliebig oft um das Gitter „herumzupendeln“, bis sie schließlich einmal auf das Gitter aufprallen und abgeleitet werden. Wie oft dabei im Durchschnitt ein einzelnes Elektron oder eine Gruppe von Elektronen das Gitter passiert, darüber lassen sich noch keine Angaben machen. Es läßt sich nur das sagen, daß, betrachtet man eine bestimmte von der Kathode emittierte Gruppe von Elektronen, sich deren Zahl beim Durchgang durchs Gitter jedesmal verringern muß, weil immer ein bestimmter Prozentsatz von den Gitterdrähten aufgefangen wird. Ungedämpfte Schwingungen können dann nur so aufrecht erhalten werden, daß die vom Gitter aufgefangenen Elektronen jeweils von der Kathode nachgeliefert werden. Bei dieser Vorstellung ist allerdings die Vorstellung eines periodischen Elektronendurchtritts durchs Gitter unerläßlich, wie ihn auch Barkhausen und Kurz voraussetzen, wenn sie von einer „gewissen Ordnung“ der Elektronenbewegung sprechen.

Ein großer Teil der von der Kathode emittierten Elektronen wird freilich schon nach dem erstmaligen Durchlaufen des Gitter-Kathoderaumes nicht durch die Gittermaschen hindurchfliegen, sondern auf die Gitterdrähte aufprallen. Diese Elektronen geben ihre ganze Energie an das Gitter ab: Für die Schwingungserzeugung kommen sie nicht mehr in Frage.

Anders verhält es sich mit den Elektronen, die zwar im Gitter-Anoderaum umgekehrt werden, aber nicht ein zweites Mal durchs Gitter hindurchtreten. Diese sind zufolge ihrer diskontinuierlichen Bewegung im Bremsfeld der Anode zur

Energielieferung und Schwingungserzeugung befähigt. Ihre Frequenz ist aber allein durch ihre Verweilzeit im Gitter-Anoderaum bestimmt und muß darum höher sein, als die der im Anode-Kathoderaum sich abspielenden BK-Schwingung.

Auf Grund dieser Vorstellung vom Mechanismus der Elektronenschwingungen höherer Frequenz ist ohne weiteres verständlich, daß die Durchlässigkeit des Gitters das Hervortreten der einen oder anderen Schwingungsform veranlaßt. Denn je engmaschiger das Gitter ist, um so geringer wird der jeweils durch dasselbe hindurchtretende Prozentsatz an Elektronen sein. Bei einem engmaschigen Gitter findet daher keine Pendelbewegung der Elektronen um das Gitter, sondern nur im Gitter-Anoderaum statt, und es treten nur die „kürzeren" Wellen auf, wie dies innerhalb des untersuchten Spannungsbereiches bestätigt werden konnte.

Schon Scheibe betrachtet getrennt die Verweilzeiten der Elektronen im Gitter-Anode- und im Gitter-Kathoderaum, ohne indessen obige Konsequenz zu ziehen. Seine Formel zur Berechnung der Wellenlänge:

$$\lambda = \frac{4 \cdot c \cdot r_1}{\sqrt{2 \frac{e}{m} E_g 10^8}} (f(x) + g(x))$$

geht von einer getrennten Behandlung der Vorgänge in beiden Räumen aus, wobei sich die Funktion $f(x)$ auf den Kathoden- und $g(x)$ auf den Anodenraum bezieht. Damit besteht die Möglichkeit, die beiden Teilfrequenzen getrennt zu errechnen. Für das untersuchte System ist dies durchgeführt, und das Ergebnis ist in die Fig. 26 eingezeichnet. Ersichtlich weisen schon die „längeren" Wellen eine erhebliche Abweichung von den experimentellen Werten auf; eine quantitative Übereinstimmung der kürzeren Welle ist danach nicht zu erwarten, so daß auf diesem Wege ein Beweis obiger Anschauung vom Mechanismus beider Schwingungen nicht zu erbringen ist. Abweichungen vorliegender Größenordnung zwischen den nach Scheibe errechneten und den gemessenen Werten sind auch von anderen Seiten festgestellt worden, und es ist des öfteren in der Literatur auf die Notwendigkeit einer Korrektur der Scheibeschen Formel hingewiesen. Bisher ist aber nur von Kapzov und Gwosdower (a. a. O. 17) ein exakter Ansatz zur Einführung der von Scheibe vernachlässigten Raumladung

gemacht worden. Die Korrektur ist jedoch nicht von der Größenordnung, daß sie die vorliegende Abweichung zu erfassen vermöchte.

§ 5. Experimentelle Prüfung

Die Wellenlänge der BK-Schwingungen, die sich im Anode-Kathoderaum abspielen, sei mit λ_{AK} bezeichnet; sie setzt sich, wie bereits näher erläutert wurde, aus 2 Teilvorgängen, nämlich der Elektronenbewegung im Gitter-Anoderaum, deren Welle λ_{AG} sei, und im Gitter-Kathoderaum, λ_{GK}, zusammen, wobei gilt:

$$\lambda_{AK} = \lambda_{GK} + \lambda_{AG}.$$

Erzeugt und gemessen werden können nur die Wellen λ_{AK} und λ_{AG}, λ_{GK} dagegen kann physikalisch nicht auftreten, wenigstens nicht in der normalen Dreielektrodenröhre, denn Voraussetzung ist, daß Elektronen in umgekehrter Richtung, d. h. von der Anode zur Kathode hinfliegen. Dann ist aber im Gitter-Anoderaum bereits die Frequenz AG erregt worden, so daß nun nur die Summe beider, nämlich die BK-Schwingung auftreten kann. Der Umstand, daß beide Wellen nur in einem ganz geringen Bereich gleichzeitig auftreten, wird gerechtfertigt durch die Annahme, daß der Elektronendurchtritt durchs Gitter kein gleichmäßiger ist, sondern daß sich die Elektronen „in gewisser Ordnung", und zwar nicht nur synchron, sondern auch konphas bewegen; andernfalls müßte, da ja in allen Fällen ein Teil der auf das Gitter zufliegenden Elektronen aufgefangen wird, die „kürzere" Welle stets mit der „längeren" zusammen auftreten.

Experimentell ermitteln läßt sich λ_{GK} indirekt, nämlich aus der Differenz der „längeren" und „kürzeren" Welle, denn es ist nach obiger Gleichung:

$$\lambda_{GK} = \lambda_{AK} - \lambda_{AG}.$$

Nun muß aber, konstante Betriebsbedingungen vorausgesetzt, λ_{GK} ausschließlich von den Dimensionen des Gitter-Kathoderaumes abhängig sein, wie dies ja auch in der Theorie von Scheibe zum Ausdruck kommt. Ändert man daher allein die Abmessungen des Gitter-Anoderaumes, z. B. durch Vergrößerung des Anodenzylinders, so ist lediglich eine Änderung von λ_{AG} und λ_{AK} zu erwarten, während ihre Differenz, λ_{GK}, konstant bleiben muß.

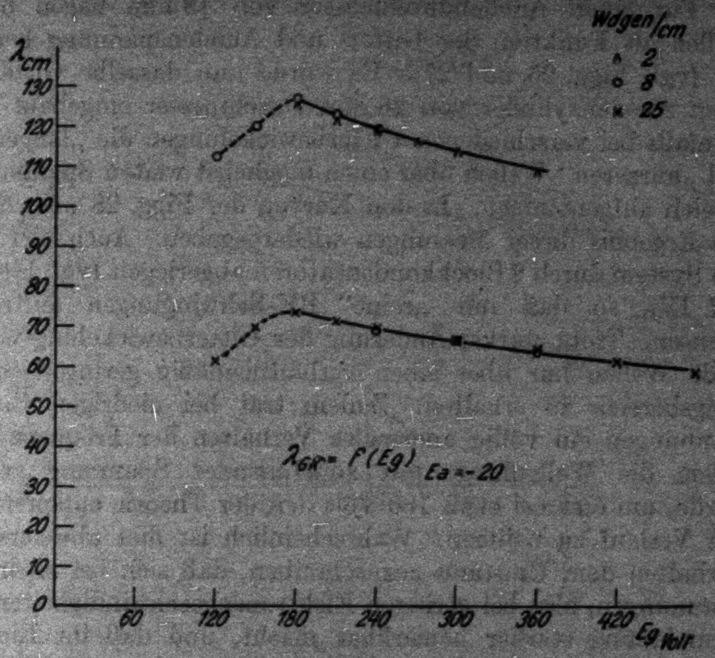

Wdgen/cm
2
8
25
λcm
130
120
110
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
60
120
180
240
300
360
420
Eg Volt
λGK = f (Eg) Ea = -20

Fig. 28

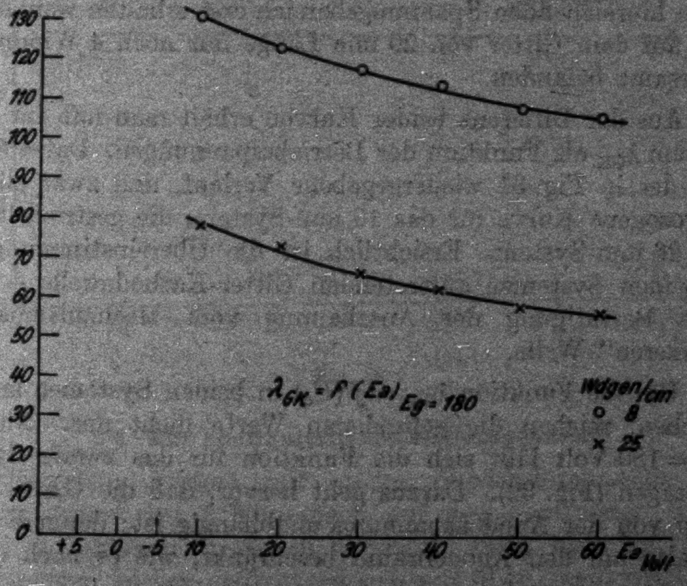

130
120
110
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
+5
0
-5
10
20
30
40
50
60
Ea Volt
λGK = f (Ea) Eg = 180
Wdgen/cm
8
25

Fig. 29

Für einen Anodendurchmesser von 18 mm liegen beide Wellen als Funktion der Gitter- und Anodenspannung bereits vor (vgl. Figg. 26 und 27). Es wurde nun dasselbe Gitter in einen Anodenzylinder von 26 mm Durchmesser eingebaut und ebenfalls bei verschiedenen Gitterbewickelungen die „längeren" und „kürzeren" Wellen über einen möglichst weiten Spannungsbereich aufgenommen. In den Kurven der Figg. 28 und 29 ist das Ergebnis dieser Messungen wiedergegeben. Auch hier war das System durch 2 Blockkondensatoren abgeriegelt (vgl. Fig. 30, Taf. IV), so daß nur „reine" BK-Schwingungen auftreten konnten. Trotz starker Änderung der Gitterbewickelung waren beide Wellen nur über einen verhältnismäßig geringen Spannungsbereich zu erhalten. Zudem trat bei niedrigen Gitterspannungen ein völlig anormales Verhalten der Frequenz auf, indem die Wellenlänge mit zunehmender Spannung größer wurde, um erst bei etwa 180 Volt den der Theorie entsprechenden Verlauf zu nehmen. Wahrscheinlich ist dies abweichende Verhalten dem Umstand zuzuschreiben, daß sich bei niedrigen Spannungen, also bei geringen Elektronengeschwindigkeiten die Raumladung stärker bemerkbar macht, und daß ihr Einfluß auf die Frequenz vor allem in dem großen Gitter-Anoderaum derartige Bedeutung gewinnt. Die „längere" Welle konnte über einen hinreichenden Spannungsbereich erst erhalten werden, als sich auf dem Gitter von 20 mm Länge nur noch 4 Windungen insgesamt befanden.

Aus der Differenz beider Kurven erhält man nun für jedes System λ_{GK} als Funktion der Betriebsspannungen. Dabei ergibt sich der in Fig. 31 wiedergegebene Verlauf, und zwar gilt die ausgezogene Kurve für das 18 mm-System, die gestrichelte für das 26 mm-System. Ersichtlich ist die Übereinstimmung der in beiden Systemen auftretenden Gitter-Kathodewelle — eine volle Bestätigung der Anschauung vom Mechanismus der „kürzeren" Welle.

Um die Funktion $\lambda_{GK} = f(E_a)$ in beiden Systemen zu vergleichen, reichen die gefundenen Werte nicht aus. Nur für $E_g = 180$ Volt läßt sich die Funktion für das zweite System auftragen (Fig. 32). Daraus geht hervor, daß die GK-Schwingung von der Anodenspannung unabhängig ist; deren Einfluß ist also auf den Anodenraum beschränkt, wie es nach obiger Theorie zu erwarten war.

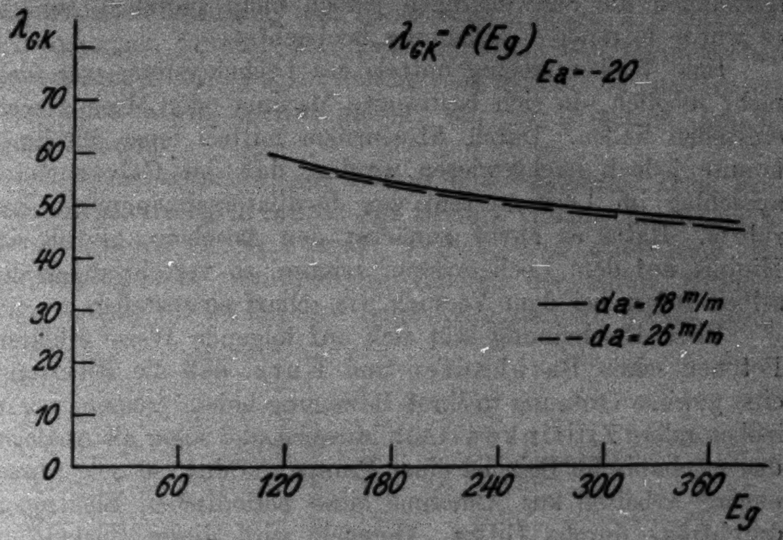


Fig. 31

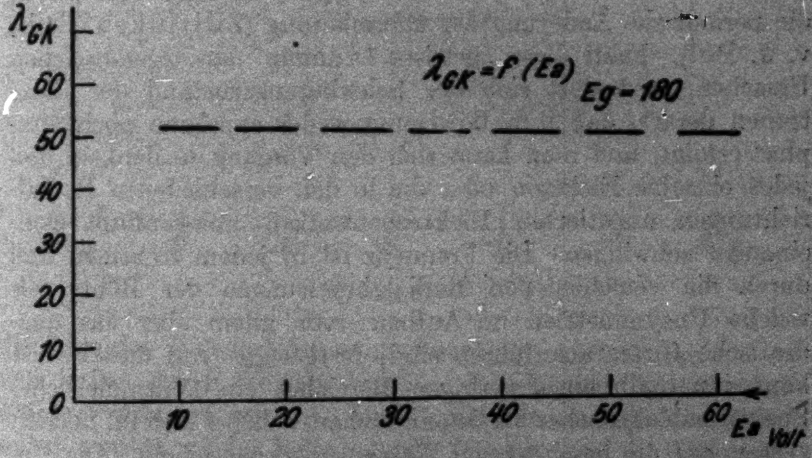


Fig. 32

§ 6. Ein kontinuierliches Wellenspektrum

Bei dem System mit einem Anodendurchmesser von 26 mm traten bei 2 Windungen auf den Zentimeter Gitterlänge die „kürzeren" Wellen überhaupt nicht mehr auf; auch die längeren Wellen erstreckten sich nur über einen verhältnismäßig geringen Spannungsbereich. Bei $E_g = 400$ Volt ver-

schwanden die Schwingungen jedoch nicht plötzlich, sondern es wurde folgende Erscheinung beobachtet:

Eine Wellenmessung mittels des Lechersystems war nicht mehr möglich, da sich bestimmte Maxima oder Minima nicht einstellen ließen. Durch Abschirmen mittels einer Blechtafel konnte jedoch nachgewiesen werden, daß der Galvanometerausschlag im Lechersystem von Oszillatorschwingungen herrührte. Hatte es zuvor zunächst den Anschein, als ob sich Minima auf dem Lechersystem zeigten, so verschwanden dieselben sofort bei dem Versuch, sie scharf einzustellen.

Diese Erscheinung läßt sich auf folgende Weise erklären: Betonen schon Barkhausen und Kurz, daß die Elektronen eine gewisse Ordnung in ihrer Bewegung haben müssen, worauf insbesondere Zilitinkewitsch hinweist, der sogar als Analogon das mechanische Beispiel einer Pumpe anführt, so neigen auch neuere Arbeiten zur Annahme eines periodischen Elektronendurchtritts durchs Gitter. Geregelt wird dieser Zustand im Innern der Röhre entweder durch die Wechselpotentiale an den Elektroden, wie bei den GM-Schwingungen, oder aber durch die periodische Änderung der Raumladung (Zilitinkewitsch; v. d. Pol). Fehlt diese „gewisse Ordnung" aus irgendwelchen Ursachen, so ändert sich der Schwingungszustand der Elektronen derart, daß ihre Bewegung weder synchron noch konphas erfolgt, und man kann sich den Vorgang so denken, daß jedes einzelne Elektron oder die in den verschiedenen Radialrichtungen emittierten Elektronenwolken unbeeinflußt voneinander schwingen. Die Frequenz ist in jedem einzelnen Fall durch die verschiedenen Radialabmessungen der Röhre, als welche Unsymmetrien im Aufbau, vor allem aber das quadratische Gitter anzuführen sind, festgelegt. Auf diese Weise kann innerhalb eines geringen Bereiches ein kontinuierliches Spektrum elektrischer Wellen entstehen, welches sich im Lechersystem auf die beschriebene Weise bemerkbar macht. Die Unstabilität der Erscheinung machte eine Aufnahme der Energieverteilung auf den Lecherdrähten unmöglich.

§ 7. GM-Schwingungen höherer Frequenz

Ist somit erwiesen, daß die „kürzeren" BK-Schwingungen eine Sonderform von Elektronenschwingungen darstellen, ist es nicht verwunderlich, wenn sie, analog den „längeren" Schwingungen, einer Beeinflussung durch Wechselfelder zwischen den

Elektroden unterliegen, und so zu einer zweiten Art von GM-Schwingungen führen. Dies geht auch aus den theoretischen Betrachtungen des § 6 im ersten Teil hervor, die im Gitter-Anoderaum allein ebenso gelten, wie im gesamten Anode-Kathoderaum.

In dem Bestreben, auf diesem Wege möglichst hohe Frequenzen zu erzeugen, wurde ein System gebaut, bei welchem die Elektroden in $^1/_2\,\lambda$ erregt werden, und wobei sich der Schwingungskreis zum Teil im Inneren der Röhre befindet (Fig. 33, Taf. V). Ist der eine Schwingungsknoten jeweils durch

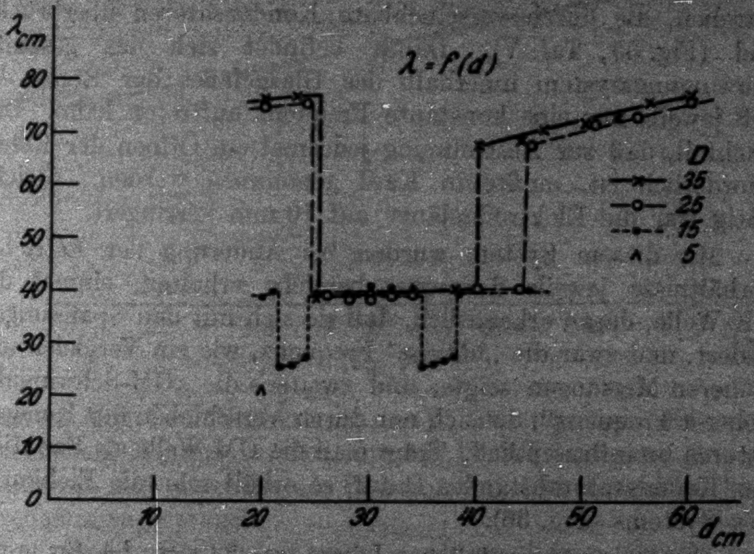


Fig. 34

die Lage des Innenkondensators festgelegt, so kann der andere von außen durch Verschieben der Brücke auf den Paralleldrähten verlagert werden. Die Radialabmessungen der Röhre selbst wurden wieder beibehalten. Fig. 34 zeigt die Frequenzkurven für konstante Betriebsspannungen von 360 und — 20 Volt. Als Parameter ist D, die Länge des Drahtsystems innerhalb der Röhre, aufgetragen. Ersichtlich können je nach dem Abstimmungszustand des ganzen Systems GM-Schwingungen geringerer oder höherer Frequenz auftreten. Allerdings scheinen die Abstimmverhältnisse bei den „kürzeren" GM-Schwingungen nicht mehr so günstig zu liegen, wie für die „längeren", sonst müßte die GM-Frequenz bei $D = 15$ mm über einen größeren

Bereich erhalten bleiben und allmählich in die BK-Frequenz übergehen. Bei $D = 5$ mm konnten nur für ein E_g von 480 und E_a von -40 Volt GM-Schwingungen erhalten werden; ihre Wellenlänge war 21,7 cm, doch war die Intensität so groß, daß eine Wellenmessung noch im Abstand von 2 m durchzuführen war.

Um noch kürzere Wellen zu erreichen, wurde ein System hergestellt, welches zur Verminderung der Dämpfung nicht in mehreren, sondern nur in einer Halbwelle schwingt. Zu diesem Zweck sind Gitter und Anode beiderseitig mit Längsdrähten versehen, die durch verschiebbare Kondensatoren überbrückt sind (Fig. 35, Taf. V). Damit befindet sich das gesamte Schwingungssystem innerhalb des Glasgefäßes der Röhre, so daß jeweils nur eine konstante Frequenz auftreten kann. Der Nachteil, daß zur Abstimmung jedesmal ein Öffnen der Röhre erforderlich ist, mußte in Kauf genommen werden. Gleichzeitig war die Elektrodenlänge auf 10 mm verringert.

Mit diesem System wurden bei Änderung der Betriebsverhältnisse jeweils 2 Frequenzbereiche erhalten, einmal die BK-Welle, daran erkenntlich, daß sie sich mit den Spannungen ändert, und zwar die „höhere“ Frequenz, wie ein Vergleich mit früheren Messungen zeigte, und zweitens die „GM-Schwingung höherer Frequenz“, die sich nur durch Verschieben der Kondensatoren beeinflussen ließ. Trägt man die GM-Welle als Funktion des Kondensatorabstandes D auf, so erhält man die Eichkurve des Systems (Fig. 36).

Die geringste einstellbare Länge war 23 mm; hierfür ergab sich eine Welle von 20,8 cm. Verlängert man die Eichkurve nach kleinerem Abstand D hin, was nach ihrem linearen Verlauf statthaft ist, so findet man für $D = 10$ mm, das ist die Länge der Elektroden selbst, deren Eigenwelle mit 18,5 cm. Diese stellt somit die kürzeste Welle dar, die sich mittels des vorliegenden Elektrodensystems erzeugen ließe, wenn man die Kondensatoren unmittelbar an die Elektroden heranbringen könnte. Eine weitere Verkürzung der Welle ist nunmehr nur noch durch Verkleinerung der axialen Elektrodenabmessungen möglich.

Während aller bisherigen Messungen waren die Radialabmessungen der Elektrodensysteme konstant geblieben, und ebenso wurden alle Untersuchungen, soweit sie nicht gerade

die Abhängigkeiten von den Betriebsbedingungen betrafen, bei den gleichen Gitter- und Anodenspannungen vorgenommen. Im Verlauf der Arbeit ist daher deutlich ersichtlich, wie durch Aussonderung der verschiedenen Schwingungsformen immer kürzere Wellen bis zu obiger Grenze hergestellt werden konnten. Nun stellen aber Röhrendimensionen und Betriebsbedingungen

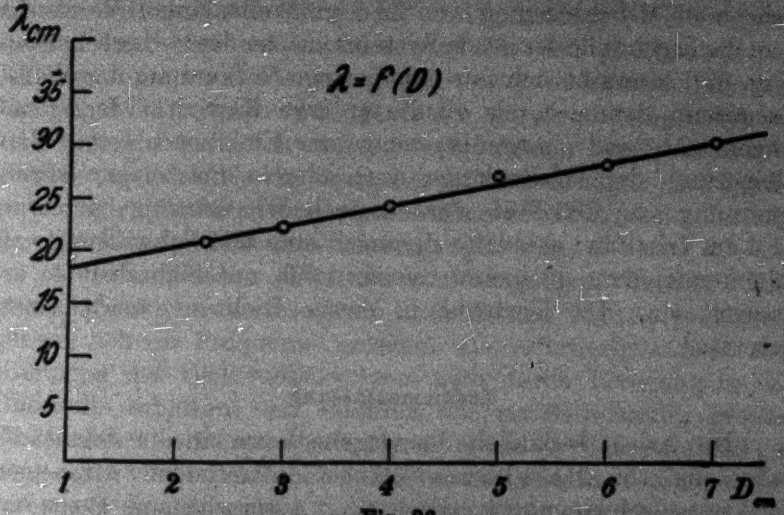


Fig. 36

weitere Mittel zur Verkürzung der Wellenlänge dar. Es wurde daher zum Schluß versucht, unter Berücksichtigung der gefundenen und diskutierten Bedingungen eine möglichst hohe Frequenz zu erzeugen.

Die Fig. 37, Taf. V zeigt ein zu diesem Zweck konstruiertes System. Die Elektroden sind auf einen Anodendurchmesser von 11 mm und einen Gitterquerschnitt von 8 × 8 mm verkleinert. Besondere Schwierigkeiten machte zunächst eine sichere Befestigung und Zentrierung des Heizfadens; eine befriedigende Lösung wurde dadurch erhalten, daß die eine Befestigungslasche auf einer Seite lose um den Glasrahmen herumgelegt ist und so die Spannung einer Spiralfeder auf den Heizfaden übertragen kann.

Das System wurde zunächst ohne Innenkondensatoren untersucht, um festzustellen, ob unter den gänzlich veränderten Bedingungen überhaupt noch Elektronenschwingungen auftraten. Es zeigte sich, daß die Frequenzen der BK-Schwin-

gungen um durchschnittlich eine Oktave höher waren, als die mit den vorigen Systemen erhaltenen „kürzeren" BK-Schwingungen. Durch entsprechende Abstimmung des Schwingungssystems konnten GM-Schwingungen geringerer und höherer Frequenz erzeugt werden. Die geringste Systemlänge war durch die Befestigungslaschen des Heizfadens mit 86 mm gegeben; hierfür ergab sich eine GM-Schwingung von 22,5 cm Wellenlänge. Vergleicht man die Eigenwelle des neuen Systems mit der des vorhergehenden (Fig. 86), so ergibt sich nur eine geringe Verkürzung der Welle. Es scheint demnach, als ob die größere Kapazität der in geringem Abstand gegenüberstehenden Elektroden eine Verkleinerung der Wellenlänge verhindert. Bei einer Gitterspannung von 360 Volt wurden noch BK-Schwingungen von 21,4 cm erhalten; es dürfte demnach eine GM-Schwingung von 15 cm mit einem kleineren System noch mit Sicherheit zu erzeugen sein. Die Versuche in dieser Richtung werden fortgesetzt.

Zusammenfassung

Die Arbeit behandelt die verschiedenen, in der Bremsfeldschaltung von Barkhausen-Kurz auftretenden Arten von Elektronenschwingungen. Es werden 4 verschiedene Frequenzbereiche gefunden und zwar:

1. Herrschen zwischen den Elektroden stationäre Bremsfelder, so treten Elektronenschwingungen auf, deren Frequenz allgemein mit wachsender Feldstärke zunimmt. Aus den Spannungen und Röhrendimensionen läßt sich die Wellenlänge errechnen, und zwar unter der Voraussetzung, daß die Elektronen um das Gitter herumpendeln: Barkhausen-Kurz-Schwingungen.

2. Liegt an den Röhrenelektroden ein elektrisches Schwingungssystem, so werden die Gleichfelder von Wechselfeldern überlagert. Dies führt, wie theoretisch an einem vereinfachten Fall gezeigt wird, zu einer Steigerung der Elektronenfrequenz, und es findet ein Aufschaukelprozeß statt, der mit der Eigenfrequenz des Schwingungssystems seinen Endzustand erreicht: Gill und Morrell-Schwingungen. Zwischen beiden Schwingungsformen herrscht ein Gebiet stetigen Übergangs, wo die Frequenz weder der Eigenwelle des Schwingungssystems, noch den Gesetzen von Barkhausen-Kurz folgt.

3. Pendeln bei den Barkhausen-Kurz-Schwingungen die Elektronen um das Gitter (1), so können bei engmaschigen Gittern Schwingungen höherer Frequenz auftreten, die sich nicht mehr im Anode-Kathoderaum, sondern ausschließlich im Anode-Gitterraum abspielen. Der auf den Gitter-Kathoderaum entfallende Anteil an der Barkhausen-Kurz-Frequenz kann aus der Differenz der „längeren" und „kürzeren" Welle experimentell bestimmt werden. Er muß für den gleichen Gitter-Kathoderaum bei Änderung des Gitter-Anoderaumes konstant bleiben, wie experimentell bestätigt wird. Störungen durch Gill und Morrell-Schwingungen (2) wurden durch kapazitive Blockierung des Elektrodensystems unterdrückt. Die „kürzeren" Elektronenschwingungen stellen somit eine Sonderform der Barkhausen-Kurz-Schwingungen dar.

4. Von diesen „Elektronenschwingungen höherer Frequenz" lassen sich wiederum „Gill und Morrell-Schwingungen höherer Frequenz" erregen. Die erforderliche hohe Abstimmung des Elektrodensystems wird durch Erregung in der Halbwelle erhalten. So konnten mit verhältnismäßig großen Elektroden von 18 mm Außendurchmesser Wellen unter 20 cm Länge und von beträchtlicher Energie hergestellt werden, wobei der ganze hochfrequente Schaltungsaufbau ins Vakuum eingeschlossen war. Es werden Wege zu einer weiteren Verringerung der Wellenlänge angegeben.

Zum Schluß ist es mir eine aufrichtige Freude, meinem verehrten Lehrer, Hrn. Prof. Dr. H. Rau, für seine dauernde Anteilnahme und stete Hilfsbereitschaft meinen herzlichsten Dank auszusprechen. Ferner danke ich den Glaswerken Schott und Gen., Jena, für die Überlassung einiger ihrer Senderöhren, sowie der Akkumulatorenfabrik Pfalzgraf für die liebenswürdige Überlassung der Heiz- und Hochspannungsbatterien, die sich vorzüglich bewährt haben.

Darmstadt, Physikalisches Institut der Technischen Hochschule, April 1928.

Literaturverzeichnis

1) Gutton u. Touly, Compt. rend. 168. S. 271. 1919; Huxford, Phys. Rev. 25. S. 686. 1925.

2) Hollmann, Radio-Umschau 1927. S. 177; Deubner, Ann. d. Phys. 84. S. 429. 1927.

3) Englund, Proc. Inst. Radio Eng. 1927. S. 941.
4) Hull, Jahrb. d. drahtl. Telegr. **14.** S. 157. 1919.
5) Gill u. Morrell, Phil. Mag. **44.** S. 161. 1922.
6) Gill u. Morrell, Phil. Mag. **49.** S. 369. 1925.
7) Gill, Phil. Mag. **49.** S. 993. 1925.
8) Barkhausen u. Kurz, Phys. Ztschr. **21.** S. 1. 1920.
9) Scheibe, Ann. d. Phys. **73.** S. 54. 1924.
10) Zilitinkewitsch, Arch. f. Elektr. **15.** S. 470. 1925.
11) Widdington, Radio-Rev. Nov. 1919.
12) Nettleton, Proc. of Nat. Ac. Sc. 1922. S. 8.
13) Pierret, Compt. rend. 1925. S. 184.
14) Scheibe, Jahrb. d. drahtl. Telegr. **27.** S. 1. 1926.
15) Grechowa, Ztschr. f. Phys. **35.** S. 50, 59. 1926.
16) Kapzov, Ztschr. f. Phys. **35.** S. 129. 1926.
17) Kapzov u. Gwosdower, Ztschr. f. Phys. **45.** S. 114. 1927.
18) v. d. Pol, Jahrb. d. drahtl. Telegr. **25.** S. 121. 1925.
19) Breit, Journ. Frankl. Inst. **197.** S. 355. 1924; Phys. Rev. **23.** S. 300. 1924.
20) Sahanek, Phys. Ztschr. **26.** S. 368. 1925.
21) Bock, Ztschr. f. Phys. **31.** S. 534. 1925.
22) Schaefer u. Merzkirch, Ztschr. f. Phys. **23.** S. 166. 1923.
23) Schriever, Ann. d. Phys. **63.** S. 645. 1920.
24) Kohl, Ann. d. Phys. **85.** S. 1. 1928.
25) Penning, Physica 1927. S. 80; Kirchner, Ann. d. Phys. **77.** S. 287. 1925.

(Eingegangen 16. April 1928)

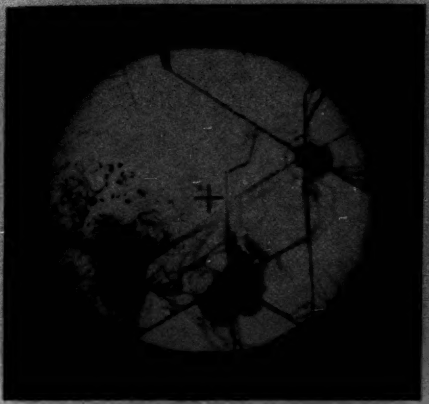


Abb. 1

Glimmerdurchschläge in flüssiger Luft

Man erkennt deutlich die sechsstrahligen Sterne. Die Elektroden befanden sich an der mit (+) bezeichneten Stelle. Die Durchschläge erfolgten an den verschiedenen Stellen nacheinander, ohne daß die Lage der Elektroden verändert wurde

(Vgl. S. 97)

Abb. 2

Glimmerdurchschläge in flüssiger Luft

Es waren hierbei absichtlich viele Durchschläge nacheinander hervorgerufen worden. Man sieht, wie die Durchschläge an den verschiedensten Stellen erfolgten. In Öl sind derartige Versuche nicht möglich, weil dort nach dem ersten Durchschlag eine leitende Bahn von Kohleteilchen gebildet wird

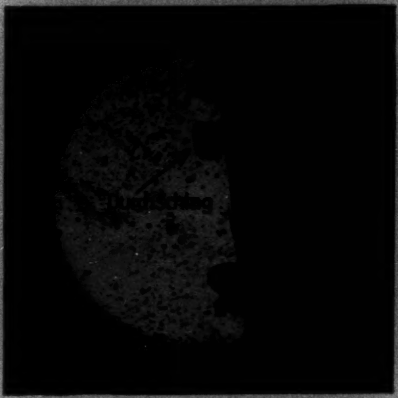


Abb. 3

Glimmerdurchschlag in flüssiger Luft

Ein Teil der Glimmeroberflächen wurde hierbei mit dünnen Silberschichten überzogen. Man sieht, daß auch hierbei die Durchschläge nicht an der Berührungsstelle der Elektroden (als welche hier die Silberschichten dienten) mit dem festen Isolator liegen, sondern stets außerhalb des Randes der Silberschicht erfolgten (in der Mitte der dunklen Kreise) (Vgl. S. 96)

W. Werner

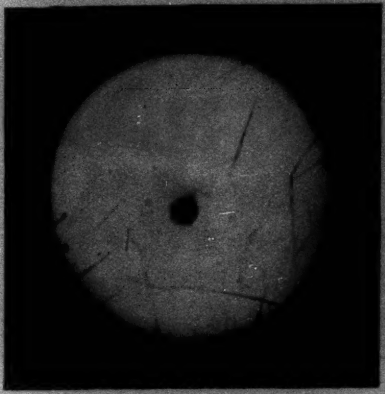


Abb. 4
Zelluloiddurchschlag in Öl
Da das Material bei Zimmertemperatur nicht spröde ist, so wurden beim Durchschlag keinerlei Sprünge hervorgerufen

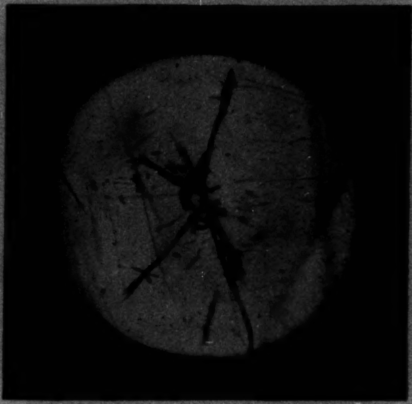


Abb. 5
Zelluloiddurchschlag in flüssiger Luft
Man sieht, wie der Durchstoß der Ionenlawine in dem bei dieser Temperatur ebenfalls spröden Material große Sprünge hervorgerufen hat

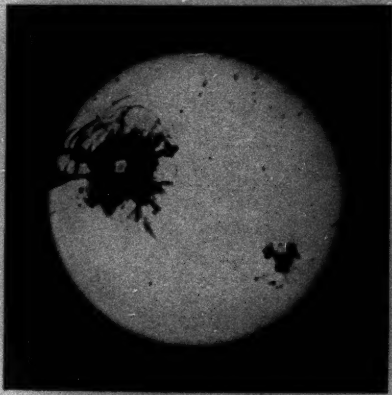


Abb. 6
Glasdurchschlag im Vakuum
Rechts unten in der Ecke zeigt die Abbildung eine durch Ionenbombardement angefressene Stelle. Die andere Seite des Glases war an dieser Stelle vollständig unverändert

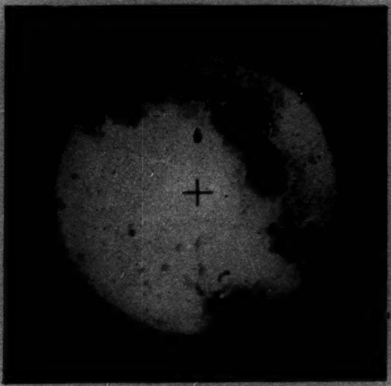


Abb. 7
Glimmerversuch im Vakuum
Die dunklen Stellen sind Anfressungen; durch Ionen- bzw. Elektronenbombardement hervorgerufen. Sie befinden sich hauptsächlich auf der an der Kathode liegenden Seite. Man beachte die halbkreisförmige Anordnung dieser Stellen, in deren Mittelpunkt die Elektroden den Glimmer berührten (+)

Sämtliche Aufnahmen zeigen die Versuchsobjekte in neunzehnfacher linearer Vergrößerung

W. Werner

Fig. 21

H. E. Hollmann

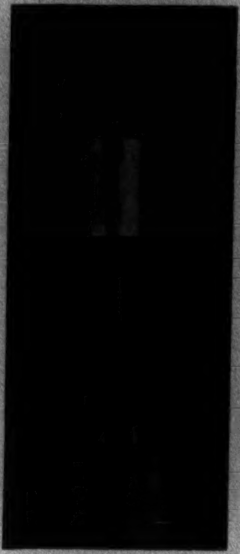


Fig. 22

Fig. 24

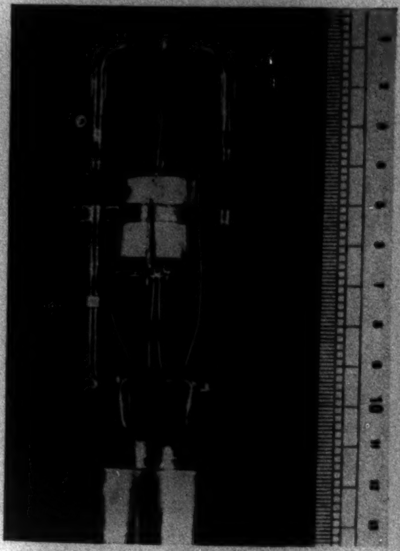


Fig. 25

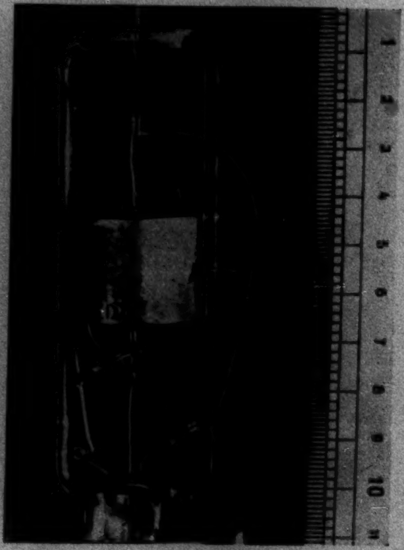


Fig. 30

H. E. Hollmann

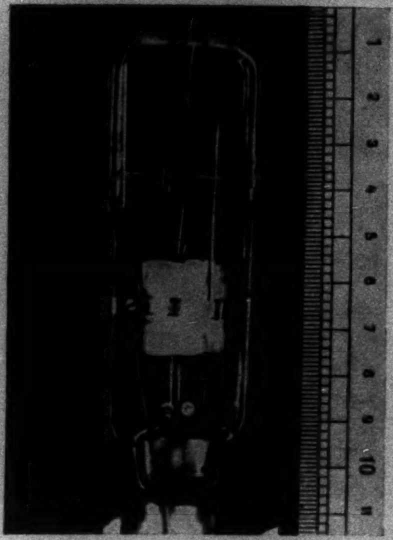


Fig. 33

Fig. 35

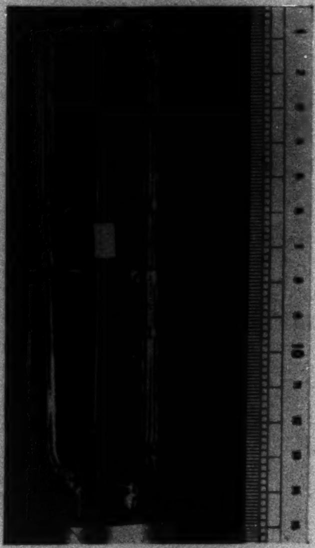


Fig. 37

H. E. Hollmann

1928 № 10

ANNALEN DER PHYSIK
VIERTE FOLGE. BAND 86

1. *Über die Struktur der negativen Stickstoffbanden*[1];

von Gerhard Herzberg

(Hierzu Tafel VI und VII)

A. Einleitung

Bekanntlich ist das negative Bandenspektrum des Stickstoffs eins der am einfachsten gebauten Bandenspektren, die wir kennen. Es ist deshalb schon vielfach Gegenstand von Untersuchungen gewesen und hat ja zusammen mit den positiven Bandengruppen und den Cyanbanden zu den ersten theoretischen Ansätzen über die Struktur von Bandenspektren geführt. Die ältere Literatur über diesen Gegenstand ist erschöpfend in Kaysers Handbuch der Spektroskopie zusammengestellt. An neueren Arbeiten ist nur die eingehende Feinstrukturuntersuchung von Frl. M. Faßbender[2]) und die Ausdehnung des Bandensystems von Merton und Pilley[3]) zu nennen, Arbeiten, die vor 4 bzw. 3 Jahren ausgeführt wurden. Seitdem sind m. W. keine Untersuchungen über diesen Gegenstand mehr erschienen (abgesehen von solchen über die Intensitätsverteilung).

Die folgenden Ausführungen werden jedoch, wie ich hoffe, zeigen, daß wegen deren verhältnismäßig einfacher Struktur die Untersuchung der negativen Stickstoffbanden auch weiterhin wichtige Schlüsse über die Struktur von Bandenspektren überhaupt liefern wird. Denn einerseits ist es, wie vorweggreifend bemerkt sei, gelungen, die einzelnen Bandengruppen, $\Delta n = \mathrm{const.}$, bis zu ihrem theoretisch geforderten, aber bisher noch nicht beobachteten Umkehrpunkt und in einigen Fällen sogar darüber hinaus zu verfolgen, andererseits hat sich gezeigt, daß die Störungen der Feinstruktur bei höheren Gliedern einer Bandengruppe so groß werden können, daß eine Aufspaltung der Bandenkanten beobachtet wird,

1) Teil der Darmstädter Dissertation.
2) M. Faßbender, Ztschr. f. Phys. 30. S. 73. 1924.
3) T. R. Merton und J. G. Pilley, Phil. Mag. 50. S. 195. 1925.

selbst bei verhältnismäßig geringer Dispersion. Diese Störungen scheinen außerdem periodisch wiederzukehren, was für eine genauere Theorie der Störungen von Wichtigkeit sein dürfte.

B. Die Erzeugung des Spektrums

Frühere Untersuchungen hatten gezeigt, daß das negative Bandenspektrum mit abnehmendem Druck immer besser hervortritt (vgl. Kayser, a. a. O.). Diese Bedingung für ein möglichst vollständiges Auftreten der Banden erfüllten Merton und Pilley dadurch, daß sie geringe Spuren von Stickstoff in Helium von hohem Druck benutzten. Sie beobachteten ferner, daß die Verwendung einer Teslaentladung die negativen Banden weiterhin verstärkt. Beide Forderungen kann man nun in idealer Weise in der elektrodenlosen Ringentladung verwirklichen, ohne daß man gezwungen ist, durch Heliumzusatz bei hohem Druck die Verhältnisse zu komplizieren, denn 1. ist diese eine Hochfrequenzentladung und 2. gestattet sie, gerade bei sehr niedrigen Drucken besonders lichtstarke Entladungen zu erhalten. Dies wird tatsächlich bestätigt durch Versuche, zu denen ich auf Grund anderer Überlegungen gekommen bin.

Es wurde dieselbe Anordnung benutzt, wie ich sie bei meinen Untersuchungen über die elektrodenlose Ringentladung in Wasserstoff[1]) beschrieben habe. Der Stickstoff wurde wie in den Arbeiten über das Nachleuchten desselben[2]) durch Erwärmen von Natriumazid im Hochvakuum gewonnen. Seine Reinheit wurde wiederum bestätigt dadurch, daß auf den erhaltenen Spektrogrammen keine anderen Fremdlinien als H_α bis H_γ sichtbar waren, deren Anwesenheit nicht wundernimmt, da zwischen den hier zu besprechenden Aufnahmen solche des Nachleuchtens gemacht wurden, bei denen Wasserstoff zugesetzt werden mußte. Auch Quecksilberlinien traten trotz langer Belichtungen, ebenso wie es beim Wasserstoff[3]) gefunden wurde, fast niemals auf. Zeitweilig wurden außer der schon früher benutzten Quarzröhre auch Glasröhren benutzt. Es zeigte sich

1) G. Herzberg, Ann. d. Phys. 84. S. 553. 1927.

2) G. Herzberg, Ztschr. f. Phys. 46. S. 878. 1928 und Ztschr. f. Phys. im Erscheinen.

3) Entgegen einer Bemerkung von G. Mierdel, Ann. d. Phys. 85. S. 612. 1928.

jedoch, daß die Quarzröhre bezüglich der Intensität der negativen Banden etwas bessere Ergebnisse lieferte, besonders wenn sie gleichzeitig auf einige hundert Grad erhitzt wurde. Dies liegt offenbar daran, daß in der Quarzröhre durch die lange Benutzung bei der Untersuchung des Stickstoffnachleuchtens und infolge des Erwärmens die katalytische Wirkung der Wand im Gegensatz zu den frischen Glasröhren besonders stark war, so daß in ihr etwa gebildete Stickstoffatome sich, zumal bei dem niedrigen Druck, sofort wieder vereinigten. So kommt es, daß in den Glasröhren die Intensität der Stickstofffunkenlinien relativ zu den negativen Banden wesentlich stärker ist als in der Quarzröhre, was bei der Identifizierung mancher Bandenkanten hinderlich war. Andererseits konnte manchmal durch Vergleich zweier solcher Aufnahmen in Glas- und Quarzröhren entschieden werden, was eine Stickstoffbandenkante und was eine Stickstoffunkenlinie war.

Bei den Aufnahmen mit der Quarzröhre zeigte sich nun in der Tat, daß bei Drucken von 0,05 bis 0,01 mm in den mit einem großen Steinheilschen Glasspektrographen erhaltenen Spektren die negativen Stickstoffbanden weitaus dominieren und zwar bei allen Funkenlängen, bei denen überhaupt eine Entladung auftritt, von ungefähr 5 bis 25 mm[1]) (bei 5 cm Zinkkugeln in Leuchtgas). Die Entladung besteht dabei in einem sehr breiten, fast bis zur Mitte reichenden, sehr intensiven bläulich weißem Ring. Die Mitte der Röhre ist gelbbraun.

Das starke Auftreten der negativen Banden und das Zurücktreten der Atomlinien des Stickstoffs bei dem niedrigen Druck, bei dem nur Anregung in einem Elementarakt wesentlich in Frage kommt, steht im Einklang mit der von Hogness und Lunn[2]) gemachten Beobachtung, daß N^+-Ionen nicht primär gebildet werden (vgl. jedoch weiter unten).

Die Banden treten jedoch nicht nur besonders intensiv, sondern auch besonders vollständig auf (vgl. unten). Es zeigt sich allerdings, daß auch bei wesentlich höherem Druck (bis zu 0,7 mm), wenn nur die helle, weiße Ringentladung auftritt (der Ring ist dann sehr schmal), die negativen Banden etwa die gleiche Ausdehnung besitzen, wie sich bei einem Vergleich zweier derartiger Spektrogramme unter dem Komparator

1) Größere Funkenlängen wurden nicht benutzt.

2) T. R. Hogness u. E. G. Lunn, Phys. Rev. **26**. S. 786. 1925.

zeigt, nur sind sie dann stark überlagert von der zweiten positiven Gruppe, die in dem genannten Gebiet dann etwa gleiche Intensität besitzt, so daß eine Ausmessung nicht möglich wäre.

Ein Vergleich der beiden Spektrogramme[1]) der Fig. 1, Taf. VI zeigt, wie weitgehend die zweite positive Gruppe bei niedrigem Druck (b) im Gegensatz zu hohem Druck (a) reduziert ist. Es scheint dies in viel weitergehenderem Maße als bei Merton und Pilley der Fall zu sein, denn diese geben die Banden λ 4490,3 und λ 4201,1 als negative Banden von beträchtlicher Intensität an, die zweifellos die Banden $2 \rightarrow 7$ und $2 \rightarrow 6$ der zweiten positiven Gruppe sind. Sie sind auf meinen Aufnahmen bei niedrigem Druck (vgl. Fig. 1b, Taf. VI und Fig. 2, Taf. VII) nur sehr schwach zu sehen und mit den negativen Banden unmöglich zu verwechseln.

Im ultravioletten Gebiet, das mit einem Steinheilschen Quarzspektrographen untersucht wurde, haben allerdings die Banden der zweiten positiven Gruppe gegenüber den negativen noch eine beträchtliche Intensität. Das liegt aber daran, daß hier das Gebiet der $0 \rightarrow 0$-Bande der ersteren liegt, während die letzteren hier schon an sich sehr geringe Intensität besitzen.

Von Bedeutung ist schließlich die ungemein große Intensität der Entladung, die ja fast ausschließlich auf der der negativen Banden beruht und die gestattet, schon innerhalb weniger Minuten die stärkeren Gruppen in großer Vollständigkeit zu erhalten. Sie dürfte deshalb für Feinstrukturuntersuchungen der höheren Glieder, die, wie das Folgende zeigen dürfte, von großem Interesse wäre, allein in Frage kommen.

C. Die Struktur der Banden

1. *Grobstruktur.* In Fig. 2, Taf. VII sinddie mit dem Glasspektrographen aufgenommenen Gruppen $\Delta n = 1, 2, 3$ und 4 vergrößert reproduziert. Man sieht wegen der fast völligen Freiheit von anderen Linien und Banden ebenso wie in Fig. 1b, Taf. VI besonders gut die allgemeine Struktur eines Bandenspektrums überhaupt. Aus demselben Grunde ist erklärlich,

1) Diese wurden wie früher (a. a. O.) durch Abbildung des Röhrenquerschnitts auf den Spektrographenspalt erhalten.

warum eine bemerkenswerte Tatsache, die man bei näherem Betrachten der wiedergegebenen Spektrogramme sofort erkennt[1]), bisher nicht gefunden wurde, nämlich die Tatsache, daß jede vierte Kante einer Gruppe in ein mehr oder weniger weites Dublett aufgespalten ist. Weniger deutlich zu sehen ist, daß in den Gruppen $\Delta n = 1$ und 2 auch die sechste Kante aufgespalten ist. Auch die neunte Kante ist, soweit sie getrennt beobachtet wurde, aufgespalten (vgl. weiter unten). Daß es sich um keine Überlagerungen durch Fremdlinien handelt, ist ja schon dadurch, daß diese Aufspaltung in jeder Bandengruppe wiederkehrt, so gut wie ausgeschlossen. Es wird aber vollends dadurch widerlegt, daß beide Komponenten immer etwa gleiche Intensität haben und daß außerdem die Intensität jeder einzelnen Komponente immer wesentlich kleiner ist, als die jeder der beiden benachbarten Kanten. Nichtsdestoweniger wurde in jedem Einzelfall geprüft, ob Überlagerungen in Frage kommen. Nach Verunreinigungen wurde mit Hilfe der für diese Zwecke so ungemein wertvollen Tabellen von Kayser gesucht. Es zeigte sich aber immer, daß, wenn Linien von in Betracht kommenden Verunreinigungen an den betreffenden Stellen lagen, zum selben Spektrum gehörige, intensivere Linien nicht vorhanden waren. Dies ist einerseits, wie schon erwähnt, ein Zeichen für die Reinheit des benutzten Stickstoffs, andererseits führt es wieder den Vorteil der elektrodenlosen Entladung für spektroskopische Zwecke vor Augen, worauf ich schon mehrfach hingewiesen habe (a. a. O.). Bogenlinien des Stickstoffs, die den Tabellen von Merton und Pilley[2]) entnommen wurden, kamen als Überlagerungen nicht in Frage, weil in dem betreffenden Gebiet überhaupt keine auftreten (vgl. Zeitschr. f. Phys. im Erscheinen). Nur die immerhin recht intensiven N^+-Linien, die in den Tabellen von Fowler und Freeman[3]) sehr vollständig aufgeführt sind, und die wenn auch ziemlich schwachen Banden der zweiten positiven Gruppe können deshalb bei der Ausmessung störend wirken. Die Unterscheidung zwischen nega-

1) *Anm. b. d. Korr.:* Leider ist dies auf den Reproduktionen kaum zu erkennen, am ehesten vielleicht noch in den Gruppen $\Delta n = 4$ u. 3.

2) T. R. Merton u. J. G. Pilley, Proc. Roy. Soc. London A. 107. S. 411. 1924.

3) A. Fowler u. L. J. Freeman, Proc. Roy. Soc. London A. 114. S. 662. 1927.

tiven Banden und Funkenlinien ist, auch wenn die betreffende Kante linienförmig ist, dadurch leicht möglich, daß die Intensitätsverteilung der Funkenlinien über den Röhrenquerschnitt eine ganz andere ist (sie sind mehr auf den Rand beschränkt) als die der negativen Banden. Außerdem sind die ersteren durchweg erheblich schärfer als die letzteren. Es bleibt daher nur noch in einigen wenigen Fällen eine Störung durch die zweite positive Gruppe möglich, was an den betreffenden Stellen der Tab. 1 vermerkt ist. Bei den aufgespaltenen Bandenkanten tritt dies aber in keinem Falle ein. Eine wesentliche Beeinflussung der Resultate ist hierdurch also auf jeden Fall ausgeschlossen.

Daß Merton und Pilley[1]) trotz ausreichender Dispersion die Aufspaltung nicht gefunden haben, liegt anscheinend daran, daß sie jeweils die eine Kante des Dubletts für eine Fremdlinie oder Bande gehalten haben. Bemerkenswert und bestätigend zugleich ist dabei, daß in den meisten Fällen die von ihnen für diese Kanten angegebenen Intensitäten kleiner sind als die der beiden benachbarten Kanten (vgl. Tab. 1). Eine weitere Diskussion dieser Aufspaltungen befindet sich im letzten Abschnitt dieser Arbeit.

Bei der Ausmessung der Spektrogramme zeigte sich nun sofort, daß die Gruppen $\Delta n = 1$, 2, 3 und 4 um mehrere Glieder (2 bzw. 3, bzw. 3, bzw. 4) weiter ausgedehnt werden konnten, als dies schon von Merton und Pilley geschehen war. Es konnten dadurch außerdem einige der von diesen nicht eingeordneten Kanten eingeordnet werden und schließlich, wie schon erwähnt, einige Fehlmessungen, die durch Überlagerung mit der zweiten positiven Gruppe bei ihnen entstanden waren, berichtigt werden. Die Identifizierung der so erhaltenen Kanten ist, wie auch die wiedergegebenen Spektrogramme zeigen dürften, sicher einwandfrei, zumal da sie alle bei genügender Belichtung mit beträchtlicher Intensität auftreten und außerdem sehr gut in das Kantenschema hineinpassen (vgl. unten).

Ein Versuch durch Steigerung der Belichtungszeit eine noch weitere Ausdehnung zu erzielen, schlug zunächst fehl. Es schien so, als ob hinter der zuletzt gemessenen Kante die Intensität sehr rasch abfällt. Es konnten zwar einige ganz

1) T. R. Merton u. J. G. Pilley, Phil. Mag. 50. S. 195. 1925.

schwache weitere Kanten gemessen werden, es zeigte sich aber, daß dieselben keineswegs in das Kantenschema hineinpaßten. Es muß sich also um eine Vortäuschung von Kanten durch Überlagerung einzelner Bandenlinien verschiedener Banden gehandelt haben, was bei der geringen Intensität der scheinbaren Kanten nicht verwunderlich ist.

Andererseits zeigte nun aber eine Extrapolation des Kantenschemas, daß weitere Kanten nicht auf der kurzwelligen, sondern auf der langwelligen Seite der zuletzt gemessenen Kanten zu erwarten waren.

Daß eine solche Umkehr in den Gruppen $\Delta n =$ const. schon nach der einfachen Deslandresschen Kantenformel

$$\nu = \nu_0 + (a' n' - b' n'^2) - (a'' n'' - b'' n''^2)$$

zu erwarten ist, ist bisher wenig beachtet worden, offenbar deshalb, weil bisher noch keine Bandengruppe soweit beobachtet wurden[1]). Es findet sich hierüber nur eine Vermutung von Mulliken in einer Arbeit von Jevons[2]) über die Cyanbanden, daß nämlich die Schwanzbanden der Cyanbanden, die auf der langwelligen Seite der Gruppen λ 3883 und λ 3590 liegen, als Banden dieser Gruppen mit hohem n' hinter einem solchen Umkehrpunkt zu deuten sind. Der letztere selbst ist jedoch weder von Jevons noch in einer neueren Arbeit von Jenkins[3]) über denselben Gegenstand beobachtet worden.

Rein formelmäßig müßten ja auch in den Horizontal- und Vertikalreihen eines Kanten- bzw. Nullinienschemas (also für $n' =$ const. bzw. $n'' =$ const.) solche Umkehrpunkte auftreten, wie aus der obigen Gleichung folgt. Diese Umkehrpunkte bedeuten aber in diesem Fall bekanntlich die Grenze der betreffenden Gruppe, denn bei den betreffenden Werten von n' bzw. n'' (diese sind bei polarer Bindung $= \infty$) tritt Dissoziation ein [vgl. Franck[4]) und Birge und Sponer[5])],

1) *Anm. b. d. Korr.:* Nachträglich finde ich in einer Arbeit von Datta (Proc. Roy. Soc. London A. 99. S. 436. 1921) die Beobachtung einer solchen Häufungsstelle von Bandenkanten bei CaF_2, ohne daß diese damals in der obigen Weise gedeutet wurde. Vgl. hierzu auch H. Konen, Das Leuchten der Gase und Dämpfe S. 238—241.

2) W. Jevons, Proc. Roy. Soc. London A. 112. S. 407. 1926.

3) F. A. Jenkins, Phys. Rev. 31. S. 153. 1928.

4) J. Franck, Trans. Farad. Soc. 21. part 3. 1925.

5) R. T. Birge u. H. Sponer, Phys. Rev. 28. S. 259. 1926.

da die Kernschwingungsfrequenz ω dann Null ist. Ein Überschreiten dieses Umkehrpunktes ist unmöglich. Ganz anders ist dies bei den Umkehrpunkten der Diagonalreihen $\Delta n = \text{const.}$, denen ebenso wie der Kante einer Einzelbande keine tiefere physikalische Bedeutung zukommt, deren Lage vielmehr nur durch die mehr oder weniger zufälligen Werte der Konstanten in der Deslandresschen Formel bedingt ist. Aus dieser letzteren ergibt sich für die Banden der Diagonalreihen $\Delta n = n'' - n' = \text{const.}$ die Formel

$$\nu = \nu_0 - a'' \Delta n + b'' (\Delta n)^2 + (a' - a'' + 2b'' \cdot \Delta n) n' - (b' - b'') n'^2.$$

Daraus folgt für die Lage des Umkehrpunktes

$$n'_U = \frac{a' - a'' + 2b'' \Delta n}{2(b' - b'')}.$$

Für den Fall, daß höhere Potenzen von n' und n'' berücksichtigt werden müssen, wie unten, wird die Formel wesentlich komplizierter. Man kann die Umkehrpunkte aber viel bequemer dadurch bestimmen, daß man einfach im Kantenschema die Stellen aufsucht, an denen die Differenzen je zweier aufeinanderfolgender Horizontal- und Vertikalreihen gleich sind, oder genauer graphisch, indem man diese Differenzen in Abhängigkeit von n' bzw. n'' aufträgt, also nichts anderes als die Kurven der Kernschwingungsfrequenz für Anfangs- und Endzustand ω' und ω'' zeichnet. Der Schnittpunkt beider gibt den Umkehrpunkt der Gruppe $\Delta n = 0$. Durch einfache Parallelverschiebung der ω''-Kurve (die in den meisten Fällen wie auch hier angenähert eine Gerade ist) erhält man dann die Umkehrpunkte der anderen Gruppen $\Delta n = \text{const.}$

Oben wurde schon darauf hingewiesen, daß der Umkehrpunkt einer Bandengruppe zu der Kante einer Einzelbande in enger Analogie steht. Diese Ähnlichkeit im Aufbau einer Bandengruppe und einer Einzelbande beruht eben darauf, daß in beiden Fällen die Differenz der Quantenzahlen (Oszillation bzw. Rotation) des Anfangs- und Endzustandes eine Konstante ist und daß in beiden Fällen die Abhängigkeit der Termwerte des Anfangs- und Endzustandes von diesen Quantenzahlen eine angenähert quadratische ist. Man kann infolgedessen auch den Aufbau einer solchen Bandengruppe ebenso wie den

einer Einzelbande in der bekannten Weise durch eine Parabel[1]) oder eine parabelähnliche Kurve graphisch veranschaulichen. Dies ist unten für einige Gruppen der negativen Stickstoffbanden geschehen (vgl. Fig. 8a, b, c).

Nachdem nun also nach diesen Überlegungen eine weitere Ausdehnung der einzelnen Bandengruppen nicht nach kurzen, sondern nach langen Wellen zu erwarten war, konnten auf den Spektrogrammen, ohne daß neue Aufnahmen mit längerer Belichtung gemacht zu werden brauchten, einige Bandengruppen noch erheblich weiter ausgedehnt werden. In besonderem

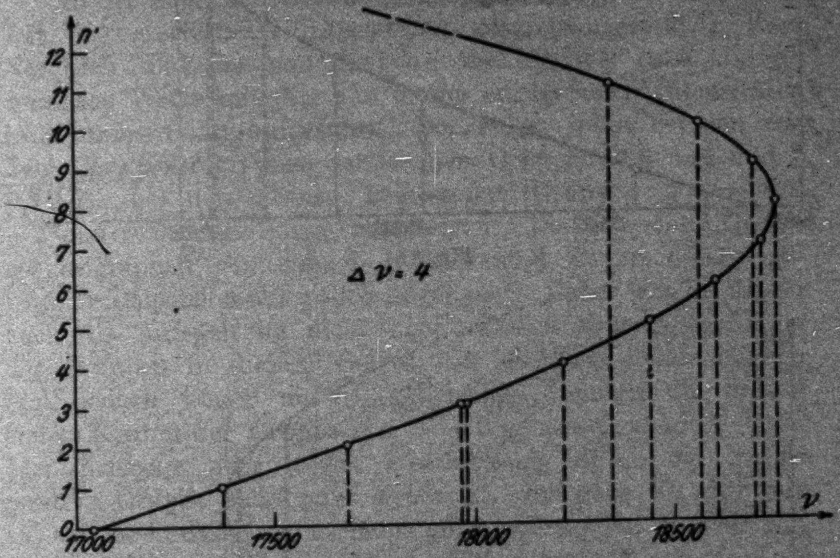


Fig. 8a

Maße war dies bei der Gruppe $\Delta n = 4$ der Fall. Gerade bei dieser Gruppe paßten die nunmehr hinter dem Umkehrpunkt gemessenen Kanten ohne weiteres in das Kantenschema hinein und als graphische Darstellung (vgl. oben) ergab sich sofort eine glatt verlaufende, parabelähnliche Kurve (vgl. Fig. 8a). Die Abweichung von der genauen Parabelgestalt beruht auf den noch zu besprechenden Abweichungen von der Deslandresschen Kantenformel. Bei den anderen Gruppen konnte die richtige Einordnung erst nach einigem Probieren gefunden

1) Hierauf hat mich Hr. Prof. Dr. Baerwald freundlichst aufmerksam gemacht.

werden (u. a. auch durch Zeichnen der betreffenden Parabel, vgl. Fig. 3). Hier besteht auch die Möglichkeit, daß einige

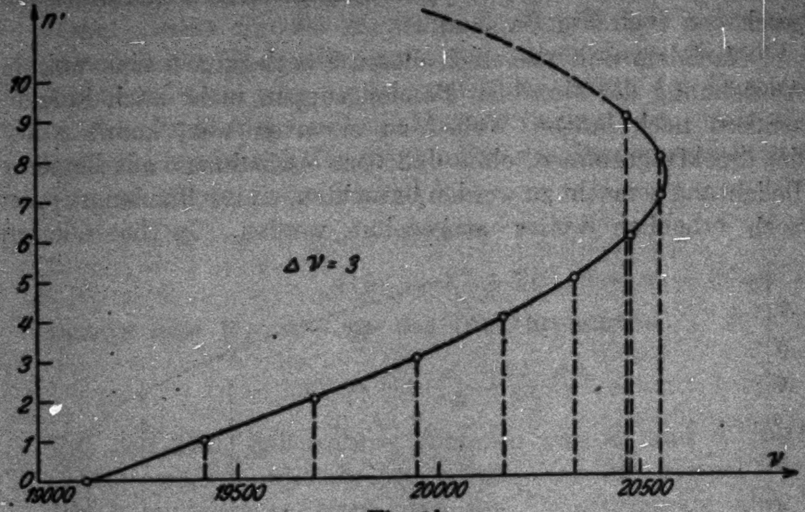


Fig. 3b

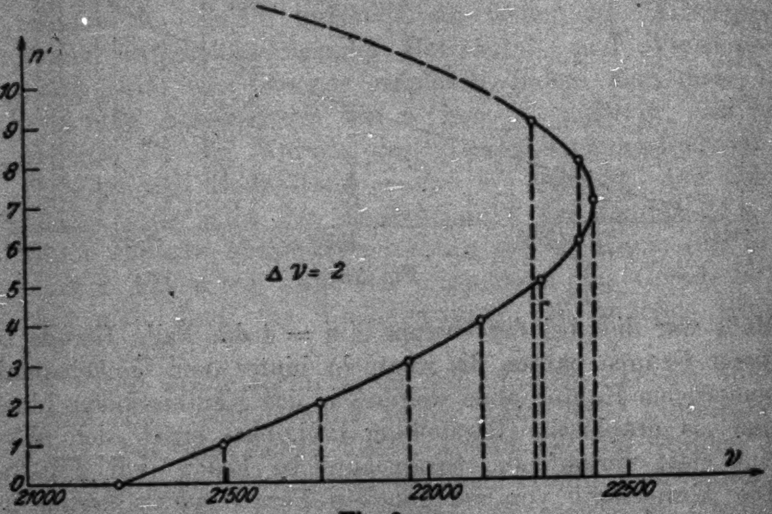


Fig. 3c

der höheren Glieder durch Überlagerung von Bandenlinien verschiedener Banden von niedrigerem n' vorgetäuscht sind. Wo die Möglichkeit bestand, ist sie in der unten folgenden Tab. 1 durch ein ? angedeutet.

Nebenbei sei bemerkt, daß durch das Obige auch eine zunächst recht merkwürdig scheinende Tatsache eine einfache Erklärung findet, daß nämlich die kurzwelligste Kante der Gruppe $\varDelta n = 3$ eine beträchtlich größere Intensität besitzt als die vorhergehenden Kanten (vgl. Fig. 2, Taf. VII). Hier fallen eben 2 Kanten (die beiden, die dem Scheitel der Parabel am nächsten sind) zusammen. Erst diese Annahme führt zur Übereinstimmung mit dem Kantenschema und zu einem glatten Verlauf der Parabel (vgl. Tab. 2 und Fig. 3b). Ähnliches findet sich in der Gruppe $\varDelta n = 2$ (vgl. Tab. 1 und Fig. 3c).

In der folgenden Tabelle sind nun alle gemessenen Kanten mit den geschätzten Intensitäten zusammengestellt.[1]) Zum Vergleich sind die von Merton und Pilley (a. a. O.) gefundenen Werte mit den von diesen angegebenen Intensitäten in Klammern mit aufgeführt. Der Fehler kann bei den mit dem Glasspektrographen gemessenen Gruppen $\varDelta n = 4$ und 3 0,3 ÅE., bei den ebenso gemessenen Gruppen $\varDelta n = -2$, -1 und 0 0,1 ÅE. nicht übersteigen. Die mit dem Quarzspektrographen gemessenen Kanten sind wegen dessen geringerer Dispersion wesentlich ungenauer. Daher war bei diesen auch die Aufspaltung nicht nachweisbar. Eine Ausdehnung der Gruppen in diesem Gebiet war ebenfalls nicht möglich (vgl. jedoch weiter unten). Allerdings konnten die beiden ersten Kanten der Gruppe $\varDelta n = -3$ gemessen werden, deren Identifizierung aber wegen Überlagerung durch die zweite positive Gruppe nicht ganz sicher ist. Ich gebe sie aber mit an, weil sie in das Kantenschema gut hineinpassen. Von einigen Gruppen dieses Gebietes konnten nicht einmal alle von Merton und Pilley angegebenen Kanten gemessen werden. Dies dürfte daran liegen, daß auf meinen Aufnahmen in diesem Gebiet die Überlagerung durch die zweite positive Gruppe doch recht stark ist. Die geringe Ausdehnung der ultravioletten Gruppen überhaupt, hat aber anscheinend andere Gründe (vgl. weiter unten).

Die Intensitäten wurden durch Vergleich von Aufnahmen bei verschiedener Belichtungszeit geschätzt. Die folgende

---

1) Durch längere Belichtung hätte wahrscheinlich auch noch die Gruppe $\varDelta n = 5$ erhalten werden können. Da aber in demselben Gebiet die erste positive Gruppe ziemlich stark ist, wäre eine Identifizierung doch schwierig gewesen und es wurde deshalb darauf verzichtet.

Proportion gibt das ungefähre Intensitätsverhältnis der stärksten Banden der verschiedenen Gruppen:

$$J_4 : J_3 : J_2 : J_1 : J_0 : J_{-1} J_{-2} J_{-3} = 1:5:50:400:1500:800:80:1.$$

Trotz der großen Zahlen wurde von einer Angabe der Intensitäten in logarithmischem Maß abgesehen, um den Eindruck der großen Intensitätsunterschiede, die z. B. aus den Angaben von Merton und Pilley gar nicht hervorgehen, nicht zu verwischen. Da die Angaben sich auf Schwärzungen beziehen, dürfte der starke Sprung zwischen J_3 und J_2 wegen der Kurve der Plattenempfindlichkeit nicht reell sein. Ausführlicher hoffe ich in einer demnächst erscheinenden Arbeit auf die Frage der Intensitätsverteilung in den Bandenspektren zurückzukommen.

Tabelle 1

Δn	$n' \to n''$	λ	J	Merton u. Pilley	Bemerkungen
4	0 → 4	—*)	—	5864,7 (4)	*) überlagert durch erste posit. Gruppe
	1 → 5	5754,4	0,5 *d*¹)	—	
	2 → 6	5653,2	0,7 *s*¹)	5653,1 (4)	
	3 → 7	{ 5563,8	0,5 *d*	5564,1 (1)	
		{ 5560,8	0,5 *d*	—	
	4 → 8	5485,8	1	5485,5 (5)	
	5 → 9	5420,8	0,7 *d*	—	Vorlagerungen
	6 → 10	5372,3	0,7 *s*	—	
	7 → 11	5340,2	0,7 *d*	—	
	8 → 12	{ 5330,0	0,4 *s*	[5330,4 (2)]*)	*) nicht eingeordnet
		{ 5328,9	0,4 *s*	—	
	9 → 13	5344,7	0,4 *d*	—	
	10 → 14	5384,3	0,5 *s*	—	
	11 → 15	5450,0	0,4 *s*	—	
3	0 → 3	5228,3	2 *s*	5228,3 (7)	
	1 → 4	5148,8	4 *s*	5148,8 (4)	
	2 → 5	5076,5	5 *s*	5076,6 (7)	
	3 → 6	{ 5012,4	3 *d*	5012,7 (3)	
		{ 5010,8	3 *d*	—	
	4 → 7	4958,0	5 *s*	4957,9 (5)	
	5 → 8	4913,2	4 *d*	—	Vorlagerungen
	6 → 9	4881,7	4 *s*	[4881,9 (5)]*)	*) nicht eingeordnet
	7 → 10	4864,4 }	6 *s*	—	
	8 → 11	4864,4 }		—	
	9 → 12	{ ?4883,3	1 *d*	—	Überlagerung durch 5 → 8 möglich
		{ ?4884,6	1 *d*	—	

1) *d* bedeutet diffuse, *s* scharfe Kante.

Tabelle 1 (Fortsetzung)

Δn	n' → n''	λ	J	Merton u. Pilley	Bemerkungen
2	0 → 2	4709,3	50 *s*	4709,2 (4)	
	1 → 3	4651,9	50	4651,8 (4)	
	2 → 4	4599,9	50 *s*	4599,7 (6)	
	3 → 5	{ 4554,4	30 *d*	4554,1 (4)	
		{ 4553,2	25 *d*	—	
	4 → 6	4515,9	35 *s*	4515,9 (6)	
	5 → 7	{ 4485,9	15	—	
		{ 4485,3	10	—	
	6 → 8	4466,6	20	—	
	7 → 9	4459,3	5 *d*	—	
	8 → 10	4466,6	?*)	—	*) Überlagert durch 6 → 8
	9 → 11	?4489	2	—	Überlagert durch zweite pos. Gruppe und 4 → 6
1	0 → 1	4278,1	400 *s*	4278,1 (8)	Vorlagerungen
	1 → 2	4236,5	250 *s*	4236,5 (7)	
	2 → 3	4199,2	100 *s*	4199,1 (4)	
	3 → 4	{ 4166,8	30 *s*	4166,8 (3)	
		{ 4166,4	30	—	
	4 → 5	4140,7	20	4140,5 (2)	
	5 → 6	{ 4121,3	6	—	
		{ 4120,7	4	—	
	6 → 7	4110,9	2 *d*	—	Weitere Glieder haben gleiche Intensität wie die einzelnen Bandenlinien der vorhergeh. Banden u. sind daher nicht zu identifizieren
0	0 → 0	3914,4	1500*)	3914,4 (6)	*) Diese Intensitäten sind auf Aufnahmen mit dem Quarzspektrographen geschätzt worden wegen der Absorption d. Glases
	1 → 1	3884,3	250*)	3884,3 (3)	
	2 → 2	3857,9	40*)	3857,9 (2)	*) Vermischt mit 2. positiver Gruppe
	3 → 3	—	—	3835,4 (1)	
	4 → 4	—	—	3818,1 (2)	
−1	1 → 0	3582,5	300	3582,1 (4)	
	2 → 1	3564,4	300	3563,9 (4)	
	3 → 2	3548,2	200	3548,9 (3)	
	4 → 3	3538,0	100	3538,3 (2)	
	5 → 4	3533,2	100	3532,6 (1)	
−2	2 → 0	3308,8	?*)	3308,0 (2)	*) Überlagert durch 2. positive Gruppe
	3 → 1	3299,1	60	3298,7 (3)	
	4 → 2	3293,9	80	3293,4 (3)	
−3	3 → 0	?3078,2	1	—	
	4 → 1	?3076,4	1	—	

Ta-

v' \ v''	0		1		2		3		4		5		6	
0	3914,4 25 540	2172	4278,1 23 368	2140	4709,3 21 228	2107	5228,3 19 121	2075	5864,7 17 046					
	2 369		2 369		2 370		2 370		2 371					
1	(3582,1) 27 909	2172	3884,3 25 737	2139	4236,5 23 598	2107	4651,9 21 491	2074	5148,8 19 417	2044	5754,4 17 373			
	2 312		2 314		2 316		2 316		2 317		2 320			
2	(3308,0) 30 221	2170	(3563,9) 28 051	2137	3857,9 25 914	2107	4199,2 23 807	2073	4599,9 21 734	2041	5076,5 19 693	2009	5653,2 17 684	
	2 256		2 255		2 256		2 259		2 258 2 261		2 258 2 263		2 261 2 267	
3	3078,2 32 477	2171	(3298,7) 30 306	2136	(3548,9) 28 170	2104	(3835,4) 26 066	2074 2071	4166,8 4166,4 23 992 23 995	2041 2039	4554,4 4553,2 21 951 21 956	2006 2005	5012,4 5010,8 19 945 19 951	1977 1978
			2 190		2 185		2 188		2 192 2 189		2 193 2 188		2 193 2 187	
4			3076,4 32 496	2141	(3293,4) 30 355	2101	(3538,3) 28 254	2070	(3818,1) 26 184	2040	4140,7 24 144	2006	4515,9 22 138	1974
									2 116				2 119 2 123	
5									(3532,6) 28 300				4121,3 4120,7 24 257 24 261	1971 1972
9														
7														
8														
9														
10													2987,5 33 463	1970
11														

belle 2

7		8		9		10		11		12		13	14	15
5563,8 5560,8 17968 17978														
2196 2186														
4958,0 20164	1940	5485,8 18224												
2122 2125		2124												
4485,9 4485,3 22286 22289	1938 1941	4913,2 20348	1906	5420,8 18442										
2033 2030		2034		2037										
4110,9 25819	1937	4466,6 22382	1903	4881,7 20479	1870	5372,3 18609								
				1940		1943								
				4459,3 22419	1867	4864,4 20552	1831	5340,2 18721						
						1831		1881						
						4466,6 22383	1831	4864,4 20552	1795 1792	5330,0 5328,9 18757 18760				
								1718		1715 1707				
								4489? 22270	1798 1803	4883,3 4884,6 20472 20467	1767 1762	5344,7 18705		
3174,4 31493	1929	3381,5 29564	1891	3612,6 27678									5384,3 18567	
1468		1457												
3033,0 32961	1940	3222,7 31021												5450,0 18344

Auf Grund der Tab. 1 ist in Tab. 2 das durch diese Messungen nunmehr beträchtlich erweiterte Kantenschema der negativen Stickstoffbanden wiedergegeben. Die fettgedruckten Zahlen sind die Wellenlängen, darunter sind die Wellenzahlen (umgerechnet nach den Tabellen von Kayser) aufgeführt. Die Wellenlängen solcher Kanten, die den Messungen von Merton und Pilley entnommen wurden (vor allem die im Ultraviolett), sind in Klammern gesetzt. Zwischen je zwei aufeinanderfolgende Kanten sind die Differenzen der Wellenzahlen in der üblichen Weise gesetzt. Bei der Differenzbildung sind im Falle der aufgespaltenen Kanten beide Differenzen in das Schema eingetragen und zur Mittelwertbildung benutzt, da die Meßgenauigkeit in den meisten Fällen nicht ausreicht, zu entscheiden, welches die normale und welches die anormale Komponente ist. In der folgenden Tab. 3 sind die Mittelwerte der Differenzen je zweier Horizontal- und Vertikalreihen zusammen mit den zweiten Differenzen zuzammengestellt. Die Abweichungen von diesem Mittelwert sind nicht größer als man es bei der verhältnismäßig geringen Genauigkeit und in Anbetracht der Tatsache, daß das Schema kein Nullinien-, sondern ein Kantenschema ist, erwarten kann. Aus demselben Grunde streuen die zweiten Differenzen ziemlich stark. Der Gang in den Werten für den Anfangszustand im Gegensatz zu dem für den Endzustand ist dennoch deutlich erkennbar.

Tabelle 3.

n' bzw. n''	$\Delta\nu'$	$\Delta^2\nu'$	$\Delta\nu''$	$\Delta^2\nu''$
0—1	2370	54	2171	32
1—2	2316	57	2139	34
2—3	2259	69	2105	32
3—4	2190	69	2073	32
4—5	2121	87	2041	35
5—6	2034	93	2006	33
6—7	1941	110	1973	34
7—8	1831	118	1939	35
8—9	1713	121	1904	37
9—10	(1592)[1]	120	1868	36
10—11	(1472)		1831	34
11—12			1797	33
12—13			1764	

1) Die eingeklammerten Werte sind, da im Kantenschema für die betreffenden n nur noch die Diagonale $\Delta n = 4$ besetzt ist, dadurch gewonnen, daß die Werte für $\Delta\nu''$ extrapoliert wurden.

Gemäß der Tabelle sind die zugehörigen Kurven der Kernschwingungsfrequenzen ω' und ω'' in Fig. 4 in der üblichen Weise aufgetragen. Die erstere ist deutlich gekrümmt, die letztere ist geradlinig. Die gewöhnliche Deslandressche Formel, die von Frl. Faßbender[1]) angegeben wurde, reicht also zur Darstellung des ganzen Bandensystems nicht aus. Sie ist in folgender Weise abzuändern:

$$\nu = 25540 + n'(2392 - 21n' - 1{,}5n'^2) - n''(2191 - 16{,}5n'').$$

Diese Formel gilt für die Kanten. Es ist aber wahrscheinlich, daß auch in der Nullinienformel ein dem $1{,}5\,n'^2$ entsprechendes

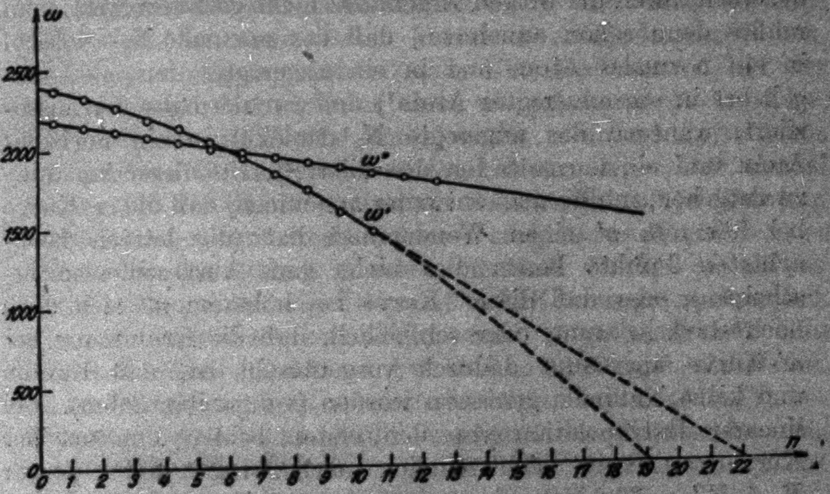


Fig. 4

Glied von etwa gleicher Größe auftritt, denn einerseits ist in der obigen Kantenformel der von n'' abhängige Teil derselbe wie in der Nullinienformel von Frl. Faßbender und andererseits standen damals bei der Berechnung des von n' abhängigen Teiles nur 2 Differenzen $\Delta\nu'$ zur Verfügung, so daß das Vorhandensein des Gliedes mit n'^2 nicht festgestellt werden konnte.

Wenn für die ω'-Kurve eine Parabel angenommen wird, entsprechend der obigen Formel, ergibt sich durch graphische (vgl. Fig. 4) und rechnerische Extrapolation, daß für $n_0' = 19$ $\omega' = 0$ wird. Daraus ergibt sich in der von Birge und Sponer (a. a. O.) angegebenen Weise als Dissoziationsspannung des

1) M. Faßbender, Ztschr. f. Phys. 30. S. 73. 1924.

angeregten Zustandes des N_2^+-Moleküls $E_n' = 3,5$ Volt in naher Übereinstimmung mit der von den genannten Autoren angegebenen unteren Grenze von 3,6 Volt, die aus den Messungen von Merton und Pilley abgeleitet wurde. Extrapoliert man von dem zuletzt gemessenen Punkte linear (vgl. Fig. 4), so ergibt sich $n_0' = 22$ und $E_n' = 3,7$ Volt. Man sollte annehmen, daß dies die obere Grenze ist. Es wäre danach, da die Elektronenenergie $E_e = 3,2$ Volt ist, $E_e + E_n' \leqq 6,9$ Volt. Dieser Wert erscheint nicht recht vereinbar mit dem von Birge und Sponer berechneten Wert der Dissoziationsspannung des normalen N_2^+-Moleküls $D' = 9,1$ Volt, der auch durch die obigen Ergebnisse nicht geändert wird, man müßte denn schon annehmen, daß das normale N_2^+-Molekül in ein normales Atom und in ein angeregtes Ion oder umgekehrt in ein angeregtes Atom[1]) und ein normales Ion dissoziiert, während das angeregte N_2^+-Molekül in ein normales Atom und ein normales Ion dissoziiert.[2]) Um dieser Annahme zu entgehen, müßte man entweder annehmen, daß die ω'-Kurve bei höherem n' einen Wendepunkt hat (die letzten beobachteten Punkte lassen dies nicht ganz ausgeschlossen erscheinen), oder daß die ω''-Kurve bei höherem n'' sich doch noch stark krümmt, oder schließlich, daß die Krümmung der ω'-Kurve überhaupt dadurch vorgetäuscht ist, daß Kanten und keine Nullinien gemessen wurden (vgl. weiter unten). Bei linearer Extrapolation von den ersten beiden Punkten der Kurve aus ergibt sich nämlich nach Birge und Sponer $E_e + E_n' = 10,9$ Volt.

In jedem Falle scheinen die Verhältnisse hier bei N_2^+ wesentlich anders zu liegen als bei allen bisher experimentell untersuchten homöopolaren Molekülen, denn bei den letzteren hat sich immer ergeben, in Übereinstimmung mit einer theoretischen Folgerung von Hund[3]) [z. B. kürzlich wieder bei den Alkalien vgl. Ritschl und Villars[4]) und Loomis[5])],

1) Die Differenz von D' und dem wahrscheinlichsten Wert von $E_e + E_{n'} = 6,7$ ist gerade gleich der Differenz 2,4 Volt der Seriengrenzen des Quartett- und Dublettsystems des neutralen N-Atoms.

2) *Anm. b. d. Korr.:* Ganz ähnliche Schwierigkeiten ergeben sich, wenn man die von Jenkins (vgl. die Anmerkung am Schluß) für CN gefundenen ω-Kurven, die ganz ähnlich wie bei N_2^+ verlaufen, extrapoliert.

3) F. Hund, Ztschr. f. Phys. 40. S. 763. 1927.

4) R. Ritschl u. D. Villars, Die Naturw. 16. S. 219. 1928.

5) F. W. Loomis, Phys. Rev. 31. S. 323. 1928.

daß sie unter Anregung eines Elektronensprunges nicht in zwei normale Atome bzw. Ionen zerlegt werden können, sondern immer in ein normales und ein angeregtes Atom bzw. Ion, während sie ohne Anregung eines Elektronensprunges in unangeregte Atome bzw. Ionen dissoziieren. Neuerdings ist nun aber Heitler[1]) auf theoretischem Wege für das neutrale N_2-Molekül zu dem Schluß gekommen, daß sowohl das normale wie auch das mit 8 Volt angeregte metastabile Molekül in zwei unangeregte Atome dissoziiert. Vielleicht bildet das N_2^+-Molekül eine ähnliche Ausnahme von der obengenannten Regel.

Wenn man die Umkehrpunkte in den Diagonalreihen nach dem oben angegebenen Verfahren ermittelt, ergibt sich, soweit sie direkt beobachtet sind, Übereinstimmung mit der Beobachtung. Man erkennt aber, wie schon aus Tab. 1 folgt, daß bei kleinen Werten von Δn die Gruppen meist nicht bis an diese Umkehrpunkte heranreichen. Dies rührt einmal daher, daß die Bandenkanten mit wachsendem n'' zu kleineren Werten von m, mit wachsendem n' zu größeren Werten von m gehen. Da das letztere in stärkerem Maße der Fall ist als das erstere, gehen auch in den Diagonalen die Kanten mit wachsendem n', wenn auch wesentlich weniger rasch zu größeren m.[2]) Dies folgt z. T. schon aus den von Frl. Faßbender gegebenen Daten. Es ist besonders gut zu sehen in dem von Jevons (a. a. O.) gegebenen Kanten- bzw. Nullinienschema der Cyanbanden, die ja sehr ähnlich wie die negativen Stickstoffbanden gebaut sind. Diese Änderung des Abstandes von Kante und Nullinie ist schließlich auch auf meinen Spektrogrammen deutlich zu erkennen und vielleicht auch auf den Reproduktionen (vgl. Figg. 1 und 2) zu sehen. Infolge dieses Umstandes sind bei kleinem Δn mit wachsendem n' die Kanten sehr bald weit über das Intensitätsmaximum in den einzelnen Banden hinausgerückt und deshalb nicht mehr sichtbar oder jedenfalls nicht

1) W. Heitler, Ztschr. f. Phys. 47. S. 835. 1928.

2) Wegen dieser verhältnismäßig langsamen Wanderung der Kanten in den Diagonalreihen, besonders bei hohem n'' (und diese wurden ja allein bei der Differenzbildung benutzt) und da der Gang in den Differenzen je zweier Horizontalreihen des Kantenschemas mit wachsendem n'' nicht sehr groß ist, erscheint die oben angegebene Möglichkeit, daß die Krümmung der ω'-Kurve daher rührt, daß Kanten und nicht Nulllinien gemessen wurden, sehr unwahrscheinlich.

mehr identifizierbar, während bei großem Δn dies noch für verhältnismäßig große Werte von n' der Fall ist. Als Ursache der obenerwähnten Tatsache kommt außerdem noch in Betracht, daß der Intensitätsabfall in der Gruppe $\Delta n = 0$ und den benachbarten Gruppen besonders steil erfolgt. Allerdings beruht dieser steile Abfall seinerseits wieder z. T. auf der Verschiebung der Kanten zu höherem m.

In dem schon genannten kurzen Sitzungsbericht bemerkt Jenkins, daß die Abschattierung nach Rot der Schwanzbanden der Cyanbanden im Gegensatz zu der nach Violett der gewöhnlichen Cyanbanden der Zugehörigkeit derselben zum selben Bandensystem (vgl. oben) nicht widerspreche, sondern in Übereinstimmung stehe mit der allgemeinen Regel, daß das Vorzeichen von $B' - B''\left(B = \frac{h}{8\pi^2 J}\right)$, das ja die Richtung der Abschattierung der Banden bestimmt, übereinstimmt mit dem Vorzeichen von $\omega' - \omega''$. Für den Umkehrpunkt ist nämlich $\omega' = \omega''$, d. h. die Kernschwingungsfrequenz des Anfangs- und Endzustandes ist die gleiche. Es müßte also danach hinter dem Umkehrpunkt auf dem rücklaufenden Ast der Parabel die Abschattierung der Banden die umgekehrte sein wie vor dem Umkehrungspunkt. Im Umkehrungspunkt selbst, also auch noch in der Nähe desselben, dürfte danach keine Kante zu beobachten sein. Tatsächlich ist aber auf dem Spektrogrammen der Fig. 2 zum mindesten in 3 Fällen der Umkehrpunkt deutlich zu sehen und die Abschattierung der Banden in diesem Umkehrpunkt und in der Nähe desselben ist sicher dieselbe (nach Violett) wie bei den anderen Banden. Allerdings sind eine Reihe von Kanten, besonders von denen nach dem Umkehrpunkt, linienförmig (das liegt daran, daß sie bei ziemlich hohem m liegen). Aber es unterliegt keinem Zweifel, daß die zugehörigen Banden auch nach Violett abschattiert sind, trotzdem also das Vorzeichen der beiden obengenannten Größen verschieden ist, denn zwischen dem nach Rot und den nach Violett abschattierten Banden einer Gruppe muß notwendig ein Gebiet liegen, in dem keine Kanten zu beobachten sind. In der genannten Form gilt die obige Regel also nicht, was in Übereinstimmung mit dem steht, was oben schon betont wurde, daß nämlich dem Umkehrpunkt keine weitere physikalische Bedeutung zukommt, als eben die, daß $\omega' = \omega''$. Die obige Regel dürfte aber vielleicht in der Form

bestehen bleiben, daß das Vorzeichen der beiden genannten Größen für Banden, die hinreichend weit vom Umkehrpunkt entfernt sind, dasselbe ist.

Bemerkenswert ist nun, daß auch bei den negativen Stickstoffbanden diese Umkehr der Abschattierung der Banden noch zu beobachten ist. Es wurde nämlich auf den Spektrogrammen einige nach Rot abschattierte Banden gefunden, die anderweitig nicht identifiziert werden konnten, die sich aber bei Änderung der Entladungsbedingungen und bezüglich der Intensitätsverteilung über den Röhrenquerschnitt verhalten wie die negativen Banden. Im sichtbaren Gebiet wurde nur eine solche Kante gemessen, die der Gruppe $\Delta n = 2$ auf der langwelligen Seite vorgelagert ist, im ultravioletten Gebiet eine ganze Reihe von Kanten, die den Gruppen $\Delta n = -1, -2, -3$ und der nicht beobachteten Gruppe $\Delta n = -4$ vorgelagert sind. Daß es sich hier wirklich um das genaue Analogon zu den Schwanzbanden der Cyanbanden bei den negativen Stickstoffbanden handelt, dürfte aus folgenden Gründen sicher sein: 1. ergibt eine Extrapolation des Kantenschemas, daß jeweils 110 $\pm$ 10 Einheiten unterhalb der Wellenzahlen der beobachteten Kanten Banden zu erwarten sind. Die Schwankung um den Wert 110 entspricht gerade der Ungenauigkeit der Messung mit dem Quarzspektrographen ($\pm$ 1 ÅE.) und der Extrapolation. Der konstante Unterschied aber liegt offenbar daran, daß die gemessenen Kanten auf der kurzwelligen Seite der Nullinien liegen, die Extrapolation aber auf Kanten beruht, die auf der langwelligen Seite derselben liegen. 2. zeigt sich, daß alle Kanten, die in der Nähe der gemessenen zu erwarten sind, durch die starken Banden der zweiten positiven Gruppe und der negativen Banden von niedrigem n' überlagert werden. Tatsächlich konnten in der Nähe der intensivsten Schwanzbande λ 3613 an den vorausberechneten Stellen trotz dieser Überlagerung noch die Kanten 11 $\rightarrow$ 10, 12 $\rightarrow$ 11 und einige andere gefunden werden. Zur genauen Ausmessung und Identifizierung ist jedoch größere Dispersion erforderlich. In der folgenden Tab. 4 sind nur die vor Ausführung der Extrapolation des Kantenschemas gemessenen Kanten von Schwanzbanden wiedergegeben. Unsicher ist nur die Einordnung der Kanten 12 $\rightarrow$ 14 und 14 $\rightarrow$ 10. Die übrigen sind auch in das Kantenschema (Tab. 2) eingetragen.

Tabelle 4.

Δn	$n' \rightarrow n''$	λ	J
2	?12→14	4742,5	2
−1	10→ 9	3612,6	40
−2	10→ 8	3381,5	4
−3	10→ 7	3174,4	4
	11→ 8	3222,7	6
−4	10→ 6	2987,5	1
	11→ 7	3033,0	1
	?14→10	3217,7	1

Es treten also hier Banden mit sehr hohem n' mit merklicher Intensität auf. Man muß also erwarten, daß auch noch Zustände mit etwas größerem n' angeregt werden können, was in diesem Falle Dissoziation bedeuten würde. Es ist danach also doch im Gegensatz zu den Versuchen von Hogness und Lunn (vgl. oben) wenigstens teilweise eine Dissoziation von N_2^+ in N und N^+ in einem Elementarakt möglich, die auch das Auftreten der N^+-Linien, die immerhin noch eine beträchtliche Intensität haben (vgl. oben), bei dem niedrigen Druck erklären könnte. Es ist jedoch zu betonen, daß diese Bildung von N^+ in einem Elementarakt entsprechend meinen Versuchsbedingungen erst bei hohen Elektronengeschwindigkeiten stattfinden kann, während Hogness und Lunn mit Elektronen geringer Geschwindigkeit arbeiteten. Es dürfte deshalb recht interessant sein, die Messungen derselben auf hohe Geschwindigkeiten auszudehnen.

2. *Feinstruktur*. Oben ist schon das Auftreten von Aufspaltungen einzelner Kanten näher beschrieben worden. In der Reihe $n' = 8$ ist eine solche Aufspaltung tatsächlich bei jeder mit genügender Dispersion beobachtete Kante gefunden worden, in der Reihe $n' = 5$ war eine solche nur in zwei Fällen deutlich zu erkennen, in den anderen beiden Fällen sind aber jedenfalls den Kanten schwächere Bandenlinien vorgelagert, die nicht zu den vorhergehenden Banden zu gehören scheinen s. Tab. 1. Schließlich ist die Kante 8 → 12 deutlich doppelt. Daß eine entsprechende Verdoppelung bei den Kanten 8 → 11 und 8 → 10 nicht beobachtet wurde, dürfte daran liegen, daß diese durch die stärkeren Kanten 7 → 10 bzw. 6 → 8 überlagert sind. Jedenfalls scheint damit gesichert zu sein, daß zum mindesten im Falle $n' = 8$ und $n' = 5$ diese Aufspaltung

im Anfangszustand ihre Ursache hat. Nun bemerkt Frl. Faßbender in den Banden $n' = 1$ im positiven wie im negativen Zweig eine starke Störung, die in einer anomalen Aufspaltung der sehr engen Dubletts besteht, die die einzelnen Bandenlinien bilden. Diese Störung zieht sich durch eine Reihe aufeinanderfolgender Bandenlinien hin mit einem steilen Maximum bei $m = 13,5$. Hier ist die Aufspaltung 4,2 Einheiten in Wellenzahlen oder z. B. für die Bande λ 3884 0,63 ÅE. Während nun die normale Aufspaltung der Dubletts von etwa 0,1 ÅE. mit der benutzten Dispersion nicht festzustellen ist, ist eine derartige anomale Aufspaltung deutlich zu erkennen. Man sieht sie auf meinen Aufnahmen sehr gut im R-Zweig der Banden 1 → 5, 1 → 4, 1 → 3, 1 → 2 und 1 → 1, kann aber hier trotzdem noch die aufeinanderfolgenden Linien verfolgen.[1]) Bei den Banden 3 → 7, 3 → 6, 3 → 5, 3 → 4 besteht nun aber auf der kurzwelligen Seite der Nullinien ein mit dem Glasspektrographen wohl unentwirrbares Liniengewirr, während in den benachbarten Banden die regelmäßige Aufeinanderfolge der Linien sehr gut zu sehen ist.[1]) Dasselbe gilt für die Banden 5 → 9, 5 → 8, 5 → 7 und 5 → 6. Damit ist die Erklärung für die Aufspaltung der Bandenkanten ohne weiteres gegeben. Die bei den Banden $n' = 1$ von Frl. Faßbender beobachteten Störungen kehren bei $n' = 3$, $n' = 5$ und $n' = 8$ in verstärkter Form wieder, nicht allein der Größe nach (die Aufspaltung geht bis zu 6—10 Einheiten in Wellenzahlen), sondern auch der Ausdehnung nach, das Maximum muß viel breiter sein, denn sonst könnten nicht die Kanten, die ja durch Überlagerung einer ganzen Reihe von Bandenlinien entstehen, aufgespalten erscheinen. Außerdem muß die Störung gerade ungefähr bei den m liegen, bei denen die Kanten liegen. Durch die Verschiebung der Kanten mit wachsendem n'' ist auch die Verschiedenheit der Aufspaltungen in den verschiedenen Banden von gleichem n' zu erklären (vgl. Tab. 2) und damit auch die Tatsache, daß bei den Banden 5 → 9 und 5 → 8 eine Aufspaltung der Kanten nicht mehr beobachtet wurde, während im R-Zweig die anomale Aufspaltung der einzelnen Linien sehr wohl zu sehen ist.

Es ist also hierdurch gezeigt, daß gleichartige Störungen in einem Bandensystem mit wachsendem n' periodisch wieder-

1) *Anm. b. d. Korr.:* Auf den Reproduktionen wohl kaum zu erkennen.

kehren können. Dies scheint bisher nicht bemerkt worden zu sein, dürfte aber für eine Deutung der Störungen in Bandenspektren von einiger Bedeutung sein. Wahrscheinlich kann schon an dem heute vorliegenden Material über Störungen ähnliches aufgewiesen werden. Im vorliegenden Fall der negativen Stickstoffbanden kann man etwa annehmen, daß das Auftreten der Störungen immer in etwa gleichen Abständen der Kernschwingungsfrequenz ω' erfolgt (etwa 120 bis 150). Es wäre damit nämlich die Lücke zwischen $n' = 5$ und $n' = 8$ geklärt, weil wegen der Krümmung der ω'-Kurve an der Stelle, an der zwischen diesen beiden Werten von n' noch eine Störung zu erwarten ist, keine Bande liegt. Genauere Vorstellungen hierüber werden jedoch erst möglich sein, wenn eine eingehende Feinstrukturuntersuchung erfolgt ist, die aus diesem Grunde von besonderem Interesse sein dürfte.

D. Zusammenfassung

In der elektrodenlosen Ringentladung erhält man bei sehr niedrigem Druck die negativen Stickstoffbanden besonders frei von Überlagerungen durch andere Banden und Linien und in besonders großer Ausdehnung bei sehr großer Lichtstärke.

So ist es möglich, die Banden der im sichtbaren Gebiet liegenden Gruppen $\Delta n =$ const. bis zu dem theoretisch geforderten, aber bisher noch nicht beobachteten Umkehrpunkt und sogar noch darüber hinaus zu verfolgen und zu messen. Das Wesen dieses Umkehrpunktes wird etwas näher diskutiert. Das auf diese Weise beträchtlich erweiterte Kantenschema der negativen Banden wird gegeben. Daran anschließend werden die Kurven der Kernschwingungsfrequenzen von Anfangs- und Endzustand, sowie die Frage der Dissoziationsspannung von N_2^+ behandelt.

In Analogie zu den Schwanzbanden der Cyanbanden treten auch Schwanzbanden der negativen Stickstoffbanden auf, die wie die ersteren nach Rot abschattiert sind. Sie werden, wie die der Cyanbanden von Mulliken, als Banden von hohem n' hinter dem genannten Umkehrpunkt gedeutet und passen dann sehr gut in das Kantenschema hinein. Der Umkehrpunkt der Abschattierung der Banden fällt jedoch nicht mit dem zuerst genannten Umkehrpunkt zusammen. Durch das

Auftreten der Schwanzbanden wird es wahrscheinlich gemacht, daß bei hohen Elektronengeschwindigkeiten eine Dissoziation von N_2^+ in einem Elementarakt erfolgen kann.

Die meisten Kanten der Horizontalreihen $n' = 3$, 5 und 8 sind doppelt. Dies wird dadurch gedeutet, daß es sich hier um eine verstärkte Wiederkehr der bei den Banden $n' = 1$ auftretenden Störungen handelt, die in einer anomal großen Aufspaltung einiger aufeinanderfolgender Bandenlinien bestehen. Das periodische Auftreten dieser Störungen dürfte für eine genauere Theorie derselben von Wichtigkeit sein.

Der Steinheilsche Glasspektrograph, mit dem ein Teil der Aufnahmen gemacht wurde, wurde dem Institut von der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft zur Verfügung gestellt, wofür ihr auch an dieser Stelle herzlich gedankt sei. Ebenso danke ich der Helmholtz-Gesellschaft für die Überlassung des Spektrokomparators, mit dem die Spektren ausgemessen wurden.

Ferner möchte ich der Studienstiftung des Deutschen Volkes wiederum für ihre Unterstützung herzlich danken.

Schließlich ist es mir eine besondere Pflicht, meinem hochverehrten Lehrer, Hrn. Professor Dr. H. Rau, für die dauernde Anregung und das ständige Interesse sowie für die bereitwillige Überlassung der Institutsmittel aufs herzlichste zu danken. Außerdem danke ich Hrn. Professor Dr. Baerwald für sein freundliches Interesse an dieser Arbeit.

Darmstadt, Physikal. Inst. d. Technischen Hochschule, April 1928.

Anmerkung: Unmittelbar vor Absendung dieser Arbeit erschien die ausführliche Untersuchung von Jenkins über die Cyanbanden[1]), in der dieser in einigen die allgemeine Struktur von Bandenspektren betreffenden Punkten zu denselben Ergebnissen wie ich gelangt ist.

1) F. A. Jenkins, Phys. Rev. 31. S. 539. 1928.

(Eingegangen 25. April 1928)

2. *Untersuchungen über die Diffusion der Kathodenstrahlen von 100 Volt Geschwindigkeit in gasförmigen Medien;*

von Otto Holtsmann

[Aus dem Radiologischen Institut der Universität Heidelberg[1].]

Im vorliegenden werden die Ergebnisse einer experimentellen Untersuchung über die Wechselwirkungen zwischen Kathodenstrahlen von 100 Volt Geschwindigkeit und den Gasen Stickstoff, Wasserstoff, Helium, Neon und Argon mitgeteilt, diskutiert und mit der bisherigen Erfahrung zusammengestellt.

A. Vorbemerkung über frühere Untersuchungen

Hr. Lenard[2]) stellte bei seinen grundlegenden Versuchen vom Jahre 1893 fest, daß Kathodenstrahlen von $^1/_3$ Lichtgeschwindigkeit in Gasen diffus verlaufen, ganz analog der strauchartigen Ausbreitung eines parallelen Lichtstrahls durch ein trübes Medium. Er fand bei eingehender Untersuchung eine Abnahme der Diffusion mit zunehmender Strahlgeschwindigkeit und in erster Näherung eine Proportionalität mit der Dichte des Mediums. Es wurden 6 Gase bei verschiedenen Drucken untersucht.

Außerdem liegen noch 3 Untersuchungen an Gasen vor, von denen die eine sich auf sehr schnelle, die beiden andern auf sehr langsame Strahlen beziehen.

Die Messungen an schnellen Strahlen ($v = 0{,}92$) sind mit Ur X als Strahlquelle von Hrn. Friman[3]) ausgeführt worden, der eine in seinem Druckbereich befriedigende Übereinstimmung mit der Diffusionstheorie Hrn. Lenards[4]) fand. Unter-

---

1) Diss., d. Math. Naturw. Fakultät d. Universität Heidelberg, vorgelegt am 20. Juni 1927.

2) P. Lenard, Wied. Ann. 51. S. 225. 1894.

3) E. Friman, Ann. d. Phys. 49. S. 373. 1916.

4) P. Lenard, Qu. ü. K. Spez. Teil VII C.

sucht wurden Luft, Chloroform, Äthylbromid und Methyljodid. Die erhaltenen Trübungsfaktoren finden sich im Vergleich zu Luft bei den halogenhaltigen Gasen erheblich über massenproportional.

Messungen an langsamen Strahlen von 20—200 Volt wurden von Hrn. Baumann[1]) ausgeführt. Dabei zeigte sich kein erkennbarer Zusammenhang der Trübung mit der Dichte der Gase. Die 3 Gase Wasserstoff, Argon und Kohlensäure verhielten sich nahe gleich; auch die Abhängigkeit der Trübung von der Strahlgeschwindigkeit war nur gering. Etwas stärkere Trübung zeigte Stickstoff, und diese nahm mit abnehmender Strahlgeschwindigkeit merklich zu.

Im Bereich der sehr kleinen Geschwindigkeiten von 2 bis 30 Volt sind neuerdings nach Abschluß der vorliegenden Arbeit von Hrn. Zachmann[2]) Diffusionsmessungen in den Gasen Wasserstoff und Argon bei sehr niedrigen Drucken ausgeführt worden.

In Argon fand sich bei Abnahme der Strahlgeschwindigkeit von 30—11 Volt zunehmende Diffusion; von 11—7 Volt fällt dieselbe stark ab, und unterhalb 6,5 Volt ist kein Anzeichen von Diffusion mehr vorhanden. Im Gegensatz hierzu zeigte sich bei Wasserstoff die Diffusion mit abnehmender Geschwindigkeit bis zu den kleinsten Werten von 2 Volt in stets wachsendem Maße. Besonders starke Diffusion zeigte sich stets im Verein mit Geschwindigkeitsverlusten.

B. Über Diffusion und Reflexion

Für das Folgende ist wichtig, zwischen Diffusion und echter Reflexion (unechter Absorption) grundsätzlich zu unterscheiden, wie das bisher bei eingehenden Untersuchungen erforderlich sich zeigte.[3])

Zerstreut ein einzelnes Molekül ein paralleles Kathodenstrahlbündel, von welchem es durchsetzt wird, so ist im Falle von Diffusion im Mittel nur eine kleine Ablenkung aus der ursprünglichen Richtung zu erwarten, während im Falle der

---

1) P. Baumann, Diss. Heidelberg 1928.

2) E. Zachmann, Ann. d. Phys. 84. S. 20—60. 1927.

3) Vgl. P. Lenard, Qu. ü. K. Spez. Teil VII; besonders auch P. Lenard u. A. Becker, Handb. von W. Wien u. F. Harms 14. S. 317.

echten Reflexion jede noch so große Ablenkung auftreten kann. Im allgemeinen sind Diffusion und echte Reflexion nebeneinander zu erwarten. Überwiegt die Diffusion, so müssen sich bei nicht zu vielatomiger Schichtdicke die kleinen Ablenkungen mehr zeigen. Überwiegt dagegen die Reflexion, so müssen sich die großen Ablenkungen mehr bemerkbar machen.[1]

C. Beschreibung der Versuchsanordnung

Im Prinzip wurde die Versuchsanordnung beibehalten, die Hr. Baumann[2]) benutzt hatte. In der konstruktiven Ausführung sind mehrere Verfeinerungen hinzugekommen.

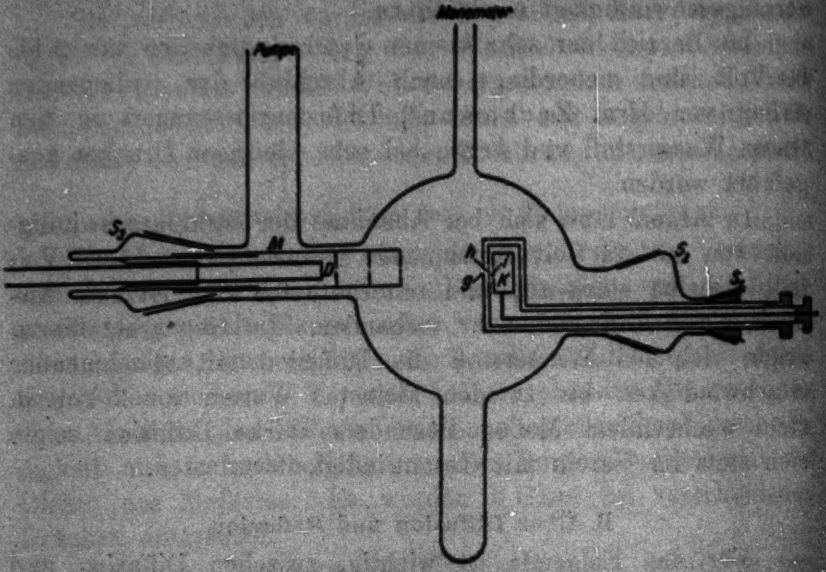


Fig. 1

Fig. 1 zeigt die Anordnung. Die von einem glühenden torierten Wolframdraht *D* kommenden, durch eine angelegte Spannung beschleunigten Elektronen treten durch mehrere sehr feine kreisrunde Blenden in ein kugelförmiges 2-Litergefäß aus, das evakuiert und mit dem zu untersuchenden Gas beschickt werden kann. Die innere Glaswand des Gefäßes wurde ver-

1) Übergänge zwischen Diffusion und Reflexion betreffend vgl. P. Lenard, Ann. d. Phys. 80. S. 26. 1926.

2) P. Baumann, Diss. Heidelberg 1923; vgl. auch P. Lenard u. A. Becker, Handb. von W. Wien u. F. Harms 14. S. 324/55.

silbert aus später zu erläuternden Gründen (vgl. H). Die Intensitätsverteilung über den Strahlquerschnitt wird mit Hilfe eines kleinen Auffangekäfigs *k* gemessen, der elektrostatisch geschützt, an einem rechtwinklig gebogenen Metallarm befestigt ist, der durch einen Schliff S_1 gedreht werden kann, wodurch die auffangende Öffnung allmählich über den ganzen Strahlquerschnitt geführt werden kann. Der Schliff S_1 ist an dem größeren Schliff S_2 exzentrisch angeblasen, so daß durch geeignetes Drehen beider Schliffe der Käfig leicht in die Strahlachse gebracht werden konnte.

An dem Gefäßansatz, der die Glühkathode aufnimmt, wurde ein weites Rohr angeblasen, das auf kürzestem Wege über einen Kühlansatz mit der Diffusionspumpe verbunden wurde. Ebenso wurde ein Ansatz mit einem Manometer verbunden, das einen Druckmeßbereich von 10^{-4} bis 1 mm Hg besitzt.

Vor dem Auffangekäfig *k*, dessen Öffnung *i* mit einem feinen Platinnetz versehen ist, befindet sich isoliert vom Käfig und von der äußeren Hülle eine löcherige Aluminiumfolie *h*, die eine Feld-Durchgriffswirkung völlig vermied. Die äußere Hülle des Auffängers besitzt bei *g* eine Öffnung von 1 mm Durchmesser. Sollen also Kathodenstrahlen in den Käfig gelangen, so müssen sie erst die kleine Öffnung *g*, dann die löcherige Aluminiumfolie *h* und zuletzt das Netz *i* durchfliegen.

Alle äußeren Metallteile im Innern des Untersuchungsgefäßes und dessen Silberschicht sind durch eingeschmolzene Platindrähte zur Erde abgeleitet, damit die Beobachtungen im feldfreien Raum vorgenommen werden können.

Das magnetische Feld der Erde konnte, soweit erforderlich, durch einen großen, um die ganze Anordnung gehenden Drahtkreis kompensiert werden.

An einer Vorrichtung außerhalb der Röhre wurde die Drehung des Auffängers, dessen Achse mit der Achse des Schliffes S_1 zusammenfällt, in Graden abgelesen. Der senkrechte Abstand der Auffängerachse von der Mitte der Öffnung *g* beträgt $r = 32{,}5$ mm.

Sei nun die Achse des Kathodenstrahlbündels parallel der Auffängerachse, so wird eine ihnen senkrecht entgegengestellte

Ebene von der Kathodenstrahlachse in O, und von der Auffängerachse in P getroffen.

Dreht man die Schliffe S_1 und S_2 derart, daß die Öffnung g des Auffängers in die Strahlachse des Kathodenstrahls zu stehen kommt, so wird, wie Fig. 2 zeigt, $\overline{OP} = r$, gleich dem senkrechten Abstand der Auffängerachse von der Mitte der Öffnung g. Dieser Abstand ist gleich der Länge des Auffängerarmes. Wird der Auffänger im Schliff S_1 gedreht, so wird der Auffängerkäfig auf der Kreisperipherie des Kreises mit dem Radius r um P als Mittelpunkt bewegt.

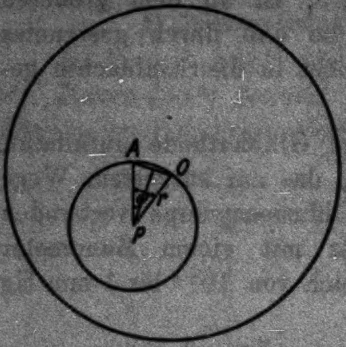


Fig. 2

Die Entfernung R des Auffängerkäfigs von der Strahlachse ist

$$\overline{OA} = R = 2r \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right).$$

φ ist dabei der in Graden abgelesene Winkel, um den der Auffänger nach rechts oder nach links gedreht wurde. Man sieht ohne weiteres ein, daß für

$$\varphi = 0 \qquad R = 0$$
$$\varphi = 60^0 \qquad R = r$$
$$\varphi = 180^0 \qquad R = 2r \quad \text{ist.}$$

Die letztere Lage entspricht dem größtmöglichen Abstand des Auffängerkäfigs von der Strahlachse bei der jeweiligen Anordnung.

Zunächst wurde festgestellt, ob die Kathodenstrahlen den ihnen vorgeschriebenen Weg in den Käfig zurücklegten, oder ob sie etwa durch die an den Messinghülsen angebrachten Luftlöcher Seitenwege einschlugen. Die Prüfung geschah dadurch, daß die Öffnung der Anode mit einer Aluminiumfolie bedeckt wurde, die von 100 Voltstrahlen nicht durchflogen werden konnte. Das Anbringen der unvermeidlichen Luftlöcher wurde dann derartig variiert, bis das Elektrometer keine Spur einer Aufladung mehr zeigte.

D. Der Strahlenverlauf im Vakuum

Wie aus Fig. 1 ersichtlich ist, haben die von dem glühenden Draht kommenden Elektronen ein feines Blendensystem zu

durchfliegen. Die Blendenöffnung bei allen 3 Blenden besteht aus einem kreisrunden Loch von 1 mm Durchmesser. Ferner haben die Blenden einen Abstand von je 10 mm voneinander.

Wird der im Vakuum geradlinige Strahlenkegel senkrecht zu seiner Achse außerhalb des Blendensystems von einer Ebene geschnitten, so erhält man Kreise, deren Durchmesser $2r$ in Millimeter gegeben ist durch

$$2r = \frac{1}{10} x + 1,$$

wobei x den senkrechten Abstand in Millimeter von der letzten Blende bis zur Schnittebene bedeutet.

Die tatsächlich beobachteten Durchmesser $2r$ (vgl. Tab. 1) sind den Intentitätsverteilungskurven im Vakuum bei den entsprechenden senkrechten Abständen x entnommen.

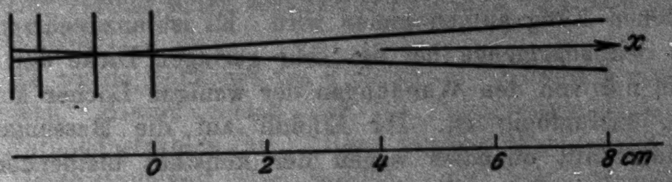


Fig. 3

Tabelle 1

x mm	berechnet $2r$ mm	beobachtet $2r$ mm
0	1	—
20	3	2,4
30	4	3,5
40	5	4,2
80	9	7,2

Die berechneten Werte stimmen mit den beobachteten gut überein, wenn man die an den Grenzen des Kegels stark abfallende Intensität berücksichtigt. Für alle weiter zu besprechenden Messungen betrug der senkrechte Käfigabstand $x = 80$ mm. Kleinere Abstände waren für die Gasbeobachtungen schlecht verwertbar, weil nur sehr kleine Gasdrucke benutzt werden konnten (vgl. II), bei denen die freie Elektronenweglänge leicht größer wurde als der verfügbare Abstand.

E. Berücksichtigung der Träger und der Sekundärstrahlung

Die Beseitigung der Träger und der Sekundärstrahlung erfolgt, wie Hr. Lenard[1]) gezeigt hat, durch kleine Gegenfelder vor dem Meßkäfig. Daher wurde bei allen Versuchen die Aluminiumfolie *h* (vgl. Fig. 1) auf eine negative Spannung von 10 Volt zur Abhaltung der negativen Träger, das Netz *i* (vgl. Fig. 1) und damit der Käfig selbst auf eine positive Spannung von 4—6 Volt gebracht zur Abhaltung der positiven Träger.

Die am Netz *i* erzeugte Sekundärstrahlung, die ganz beträchtlich ist, da für die benutzte Primärgeschwindigkeit nahe das Optimum für die Sekundärstrahlung erreicht ist, wird vom Käfig durch seine positive Aufladung festgehalten, so daß sie die Messungen nicht beeinflußt. Dagegen wird auch an der Aluminiumfolie Sekundärstrahlung frei, die von dem positiv geladenen Käfig aufgenommen wird. Es ist anzunehmen, daß diese Sekundärmenge bei der sehr geringen Dicke der Folie, da sie nur von den Wandungen der wenigen Löcher kommen kann, geringfügig ist. Ihr Einfluß auf die Messungen im Vakuum fällt ohnedies wegen der konstant bleibenden Geschwindigkeit fort. Dagegen muß ein solcher bei den Messungen im Glas prinzipiell in Betracht gezogen werden (vgl. Abschnitt G). Auf diese Weise wird im Gas eine größere Elektrizitätsmenge am Elektrometer gemessen, als der gesuchten entspricht. Daher wird bei 100 Voltstrahlen, da die freiwerdende Sekundärmenge von der Primärgeschwindigkeit abhängt[2]), die gemessene Menge stets um den gleichen Faktor vermehrt sein, der aber bei relativer Messung keine Bedeutung besitzt.

F. Erläuterung eines Versuches

Da die absolute Intensität der glühelektrisch erzeugten Kathodenstrahlen stark von der Glühtemperatur abhängt und außerdem auch von der Anwesenheit des Gases beeinflußt werden kann, so wurde, um die Ergebnisse verschiedener Versuchsreihen miteinander vergleichen zu können, das Maximum der Intensität in der räumlichen Verteilungskurve des Strahl-

1) P. Lenard, Ann. d. Phys. 8. S. 149. 1902.
2) P. Lenard, Qu. ü. K. S. 140.

querschnittes jedesmal gleich 1 gesetzt. Alle Messungen sind in dieser Weise reduziert. Bei den Messungen der Intensitätsverteilung als Funktion des Abstandes R von der Strahlachse wurden je 2 Messungen links und rechts in gleicher Entfernung von der Strahlachse — in der Tab. 2 mit — und + bezeichnet — stets von Intensitätsmessungen in der Strahlachse ($R = 0$) eingeschlossen.

Aus den Intensitäten, die in gleichen Entfernungen von der Strahlachse gefunden wurden, wurde das Mittel genommen, wodurch die Kurvenbilder (Fig. 4—9) symmetrisch gemacht wurden. Da die Unsymmetrie von der nicht immer ganz zentrischen Lage des Glühfadens im Blendensystem herrührt und daher auch bei den verschiedenen Beobachtungen verschieden stark sich geltend macht, so ist dieses Verfahren zulässig.

Der Verlauf einer zusammenhängenden Versuchsreihe war der folgende:

Es wurde zunächst im Vakuum die Intensitätsverteilung gemessen. Hieran schloß sich die Geschwindigkeitsmessung der Kathodenstrahlen an. Diese geschah durch Vernichtung der Geschwindigkeit der Strahlen mit Hilfe verzögernder Kräfte.[1])

Es wurde daher die Aluminiumfolie h mit einem negativen Potential versehen. Steigert man dieses, so scheiden aus dem Strahl diejenigen Elektronen aus, deren Geschwindigkeit in Volt gleich oder kleiner ist als die an h angelegte Spannung.

Nach erfolgter Geschwindigkeitsmessung der Kathodenstrahlen im Vakuum wurde das zu untersuchende Gas in den Beobachtungsraum eingelassen. Nach Einstellung konstanter Druckverhältnisse wurde die Intensitätsverteilung bei einem Gegenfeld von 10 Volt (vgl. Abschnitt E) und anschließend die Geschwindigkeit der Elektronen in verschiedenen Entfernungen von der Strahlachse durch Variation der angelegten Gegenspannung (bis 100 Volt) gemessen. Nach Beendigung der Gasuntersuchungen wurde wieder vollständig evakuiert und an-

---

1) P. Lenard u. A. Becker, Handb. d. Experimentalphys. von W. Wien 14. S. 46—47.

Tabelle 2

Diffusionsmessung in Argon (100 Voltstrahlen)

a) *Messungen im Vakuum*

Glühstrom 2,1 Weber. Spannung an *h* = −10 Volt.
Spannung an *i* = +4 Volt. Beobachtungsdauer 30 Sek.

Entf. v. d. Achse	Skalent.	red. Menge	Mittel
0	96	1	
−2	55	0,585	0,47
+2	32	0,35	
0	88	1	
−4	6	0,075	0,073
+4	5	0,0715	
0	63	1	
−6	1	0,0015	0,0022
+6	2	0,0029	
0	74	1	

b) *Messungen in Argon (Druck 0,02 mm Hg)*

Glühstrom = 2,4 Weber. Spannung *h* = −10 V. Spannung *i* = +4 V.
Beobachtungsdauer 30 Sek.

Entf. v. d. Achse	Skalent.	red. Menge	Mittel
0	383	1	
−2	343	0,9	0,825
+2	294	0,75	
0	390	1	
−4	224	0,55	0,435
+4	133	0,32	
0	431	1	
−6	143	0,33	0,228
+6	54	0,125	
0	430	1	

c) *Messungen im Vakuum*

Glühstrom = 1,8 Weber. Spannung *h* = −10 V. Spannung *i* = +4 V.
Beobachtungsdauer 30 Sek.

Entf. v. d. Achse	Skalent.	red. Menge	Mittel
0	363	1	
−4	69	0,19	0,13
+4	26	0,07	
0	355	1	
−6	46	0,13	0,091
+6	18	0,0152	
0	342	1	
−8	15	0,0138	0,019
+8	0	0	
0	441	1	

Tabelle 3

Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen

a) *im Vakuum*

Entf. v. d. Achse	Voltspannung an *h*	Voltspannung an *i*	Skalent.	red. Menge
0	0	+4	127	1
	− 72	+4	113	0,88
	− 94	+4	80	0,65
	−104	+4	0	0
	− 10	+4	132	1
	0	+4	130	1

b) *in Argon (Druck p = 0,02 mm Hg)*

Entf. v. d. Achse	Voltspannung an *h*	Voltspannung an *i*	Skalent.	red. Menge
0	− 10	+4	520	1
	− 30	+4	464	0,9
	− 83	+4	218	0,42
	− 98	+4	87	0,17
	−104	+4	0	0
	− 10	+4	523	1
5°	−10	+4	68	1
	−72	+4	46	0,7
	−83	+4	23	0,35
	−94	+4	20	0,3
	−98	+4	21	0,32
	−10	+4	68	1
20°	−10	+4	32	1
	−40	+4	20	0,63
	−62	+4	20	0,63
	−83	+4	20	0,63
	−98	+4	13	0,4
	−10	+4	32	1

schließend die Intensitätsverteilung und die Geschwindigkeit der Kathodenstrahlen im Vakuum nachkontrolliert.

Während aller Versuche wurde an den Kühlansätzen mit flüssiger Luft gekühlt zur Kondensation der unvermeidlichen Fett- und Quecksilberdämpfe. Die Ergebnisse einer solchen Messung seien in den Tabb. 2 und 3 auszugsweise für einen Fall ausnahmsweise großer Unsymmetrie mitgeteilt. Tab. 2 gibt die Intensitätsverteilungen, Tab. 3 die jeweils unmittelbar im Anschluß an deren Ermittlung gemessene Geschwindigkeitsverteilung.

G. Diskussion der Kurven

Die Strahlbilder (Fig. 4—9) sind den von Hrn. Lenard[1]) durch Beobachtung der Helligkeitsverteilung in den Phosphoreszenzflecken erhaltenen durchaus ähnlich. Aus diesem Grunde wird auch hier zwischen dem sehr intensiven Kern und dem

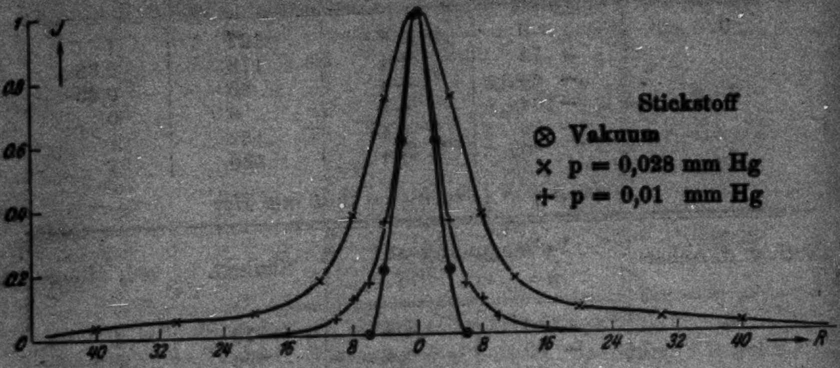


Fig. 4

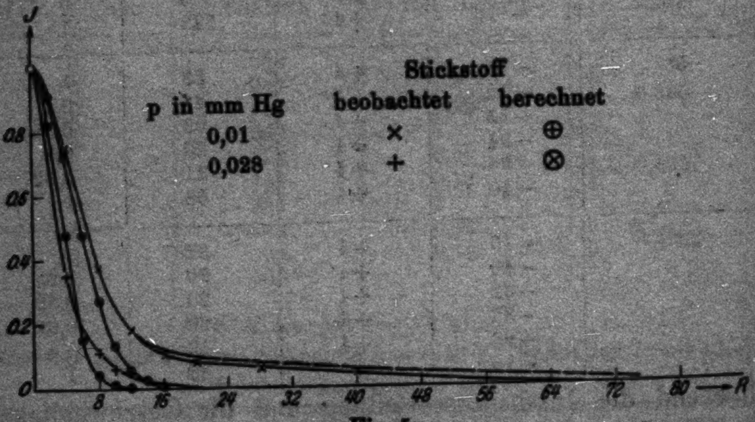


Fig. 5

weniger intensiven Hof unterschieden. Ganz allgemein soll daher unter Kern das Gebiet verstanden werden, das der geradlinigen Ausbreitung der Kathodenstrahlen im Vakuum, und unter Hof ein solches, das der diffusen Ausbreitung entspricht. Außerdem kommt hier noch ein Gebiet hinzu, das als „Gebiet der allgemeinen Helligkeit" bezeichnet sei. Dieses

1) P. Lenard, Wied. Ann. 51. S. 255. 1894.

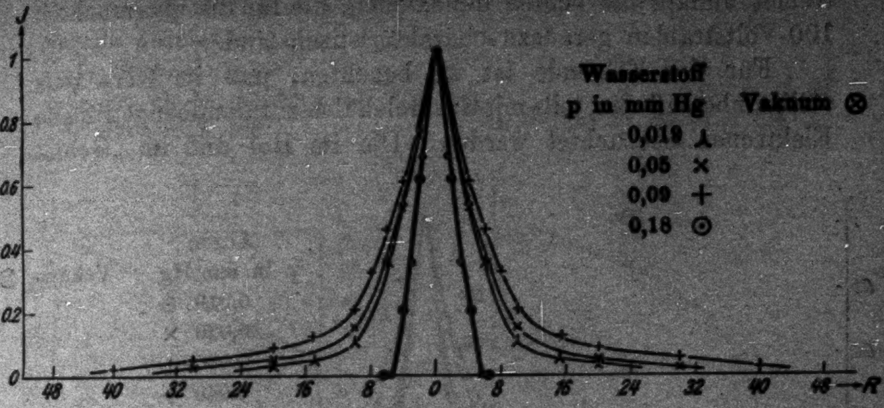


Fig. 6

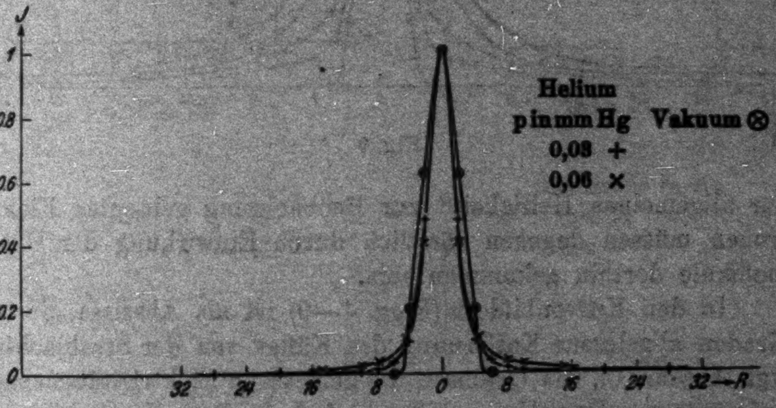


Fig. 7

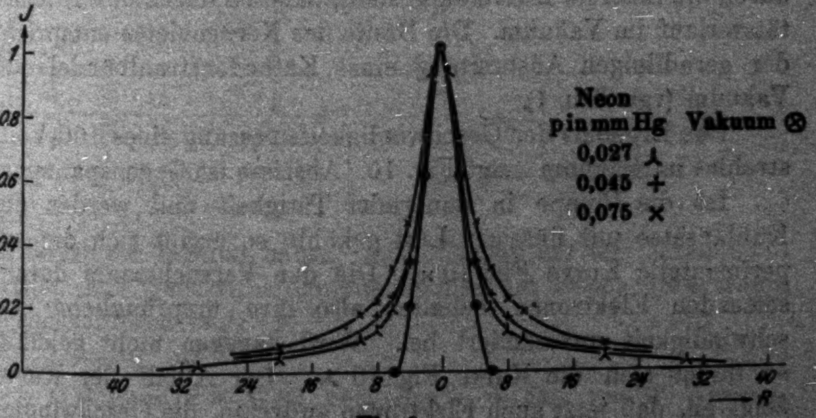


Fig. 8

Gebiet umfaßt die echten Reflexionen, die für die untersuchten 100-Voltstrahlen geradezu charakteristisch sind.

Für das Folgende ist zu beachten, daß im Kern teils völlig unbeeinflußte, teils mit Gasmolekülen zusammmengetroffene Elektronen beobachtet werden. Die im Hof und im „Gebiet

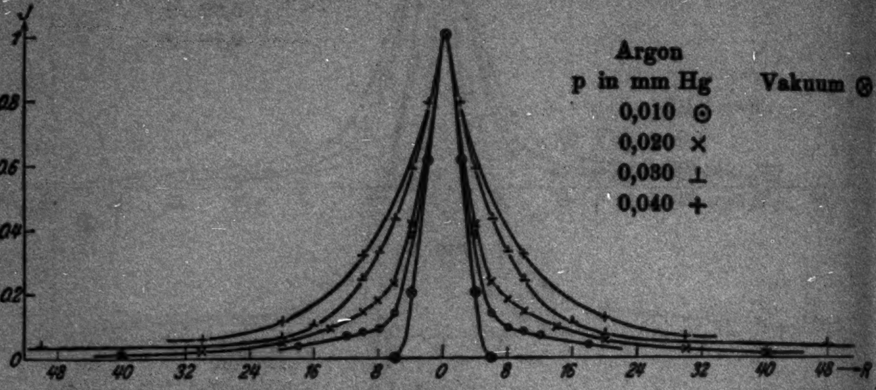


Fig. 9

der allgemeinen Helligkeit" zur Beobachtung gelangten Elektronen müssen dagegen sämtlich durch Einwirkung der Gasmoleküle dorthin gekommen sein.

In den Kurvenbildern (Figg. 4—9) ist als Abszisse die in Graden abgelesene Entfernung des Käfigs von der Strahlachse (vgl. Abschn. C), als Ordinate die gemessene Elektrizitätsmenge aufgetragen. Das Kerngebiet wird bei allen Kurvenbildern durch die innerste Kurve dargestellt, nämlich durch den Intensitätsverlauf im Vakuum. Die Breite des Kerngebietes entspricht der geradlinigen Ausbreitung eines Kathodenstrahlbündels im Vakuum (vgl. Tab. 1).

Das Ergebnis der Geschwindigkeitsmessung eines 100-Voltstrahles im Vakuum zeigt Fig. 10. Abszisse ist Gegenspannung.

Ist die Pumpe in dauernder Tätigkeit und werden die Kühlansätze mit flüssiger Luft gekühlt, so ergibt sich die experimentelle Kurve Fig. 10 ×. Die den Versuchsraum durchsetzenden Elektronen behalten also ihre ursprüngliche Geschwindigkeit unverändert bei. Wird dagegen nicht gekühlt, so findet sich die Kurve Fig. 10 ⅄. Der Abfall der Kurve zeigt an, daß jetzt auch Elektronen auftreten, die Geschwindig-

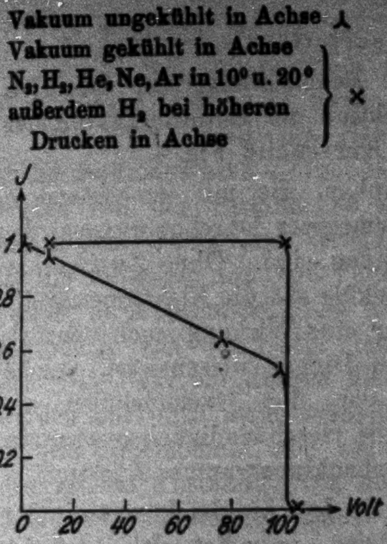


Fig. 10

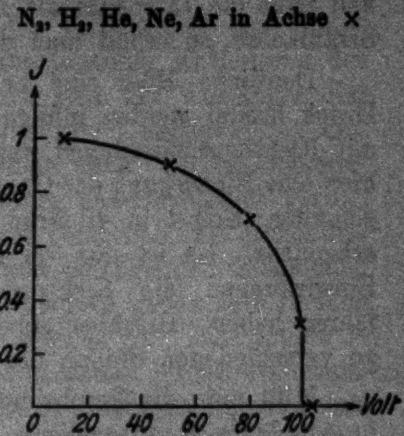


Fig. 11

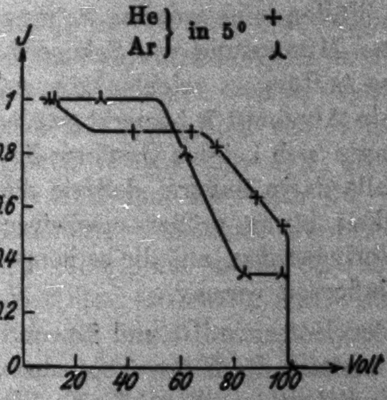


Fig. 12

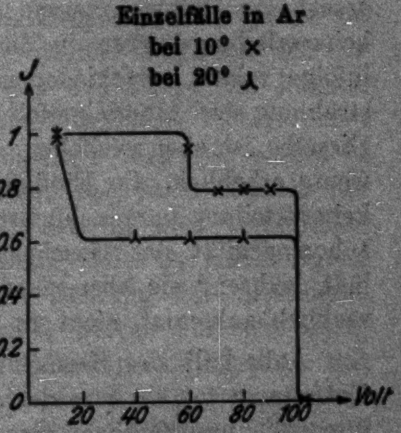


Fig. 13

keitsverluste erlitten haben, was offenbar auf das Zusammentreffen mit Quecksilberdampfmolekülen im Beobachtungsraum zurückzuführen ist.[1])

---

1) P. Lenard u. A. Becker, Handb. d. Exp. von W. Wien 14. S. 288.

1. Der Stickstoff

Läßt man Stickstoff in den Beobachtungsraum eintreten und mißt die Intensität als Funktion der Entfernung von der Strahlachse, so erhält man das Kurvenbild Fig. 4.

Deutliche Höfe sind erkennbar, die mit zunehmendem Druck breiter werden infolge vermehrter Durchquerungen, die mit Richtungsänderungen verbunden sind. Ohne Zweifel hat hier eine Einwirkung der Gasmoleküle auf die Elektronen stattgefunden. Selbst in 40 Grad war eine Wirkung noch deutlich erkennbar. Es ist nun vor allen Dingen wissenswert, welche Einwirkungen die Elektronen von den Gasmolekülen erfahren haben. Hierüber geben die Geschwindigkeitsmessungen an verschiedenen Stellen des Beobachtungsraumes Auskunft.

Mißt man die Geschwindigkeit der Strahlelektronen in der in Abschnitt F angegebenen Weise, so zeigt sich, daß im Kern und Hof Geschwindigkeitsverluste auftreten (vgl. Fig. 11), die mit dem Druck zunehmen. Es ist zu beachten, daß infolgedessen die Diffusionskurven sowohl als auch die Geschwindigkeitsverteilungskurven in diesen Fällen eine gewisse Störung infolge relativ verschieden starker Mitmessung von Sekundärstrahlung der Aluminiumfolie des Auffängers erleiden können. Dieselbe ist aber zweifellos, wie in Abschnitt E bemerkt wurde, wenig erheblich. Ihr Einfluß könnte sich bei den Geschwindigkeitsverteilungskurven höchstenfalls darin äußern, daß sie die Inhomogenität der Geschwindigkeit etwas größer erscheinen läßt, während sie aber scharfe Verluststufen, auf die es hauptsächlich ankommt, nicht zu beeinflussen vermag.

Außerhalb des Kerns und des Hofes, in 10 und 20 Grad Entfernung von der Strahlachse, besitzen die Elektronen jedoch ihre volle ursprüngliche Geschwindigkeit (vgl. Fig. 10). Da die Richtungsablenkung ohne Geschwindigkeitsverlust außerhalb des Hofes im „Gebiet der allgemeinen Helligkeit“ auftritt, wird sie dem Auftreten der echten Reflexion zugeschrieben, die die Elektronen an Gasmolekülen erfahren können. Wäre diese Reflexion eine allseitig gleichmäßige, so müßte sie auch in der größten Enfernung des Käfigs von der Strahlachse gut nachweisbar sein, was jedoch nicht der Fall ist, wie die Kurvenbilder und Tab. 2 zeigen.

Es kommen jedoch für die Abnahme der „allgemeinen Helligkeit“ mit zunehmender Entfernung von der Strahlachse verschiedene Gründe in Frage.

Zunächst spielt die Nähe der Gefäßwand des Untersuchungsraumes eine Rolle. Mit zunehmender Entfernung des Käfigs von der Strahlachse nähert sich der Auffänger der versilberten Gefäßwand. Wie Hr. Becker[1]) nachgewiesen hat, ist die Reflexion von 100-Voltstrahlen ohne Geschwindigkeitsverlust an Metalloberflächen wie Silber außerordentlich gering. Sie hängt von der Natur und dem Gasgehalt des Reflektors ab. Die Mehrzahl der an die Wand gelangenden Elektronen werden dort also nicht reflektiert, sondern geben ihre Ladung an die Silberschicht ab, welche geerdet ist. Dies müßte in den großen Abständen von der Strahlachse intensitätsvermindernd wirken, könnte jedoch in dem Untersuchungsraum von 2 Liter wohl doch nicht den beobachteten Abfall der „allgemeinen Helligkeit“ völlig erklären.

Auch die Berücksichtigung der schiefen Stellung der Käfigöffnung zur Richtung des Kathodenstrahlbündels sowie die Absorption bei dem fast doppelt so großen Weg nach den am meisten exzentrisch gelegenen Stellen des Käfigs hin können den beobachteten steilen Abfall nicht erklären. Überrechnet man die Absorption auf dem doppelten Weg, so müßte in größter Entfernung von der Achse bei einem Druck von $p = 0{,}028$ mm Hg noch 60 v. H. der in 20° gemessenen Intensität beobachtet werden können. Die Berücksichtigung der Absorption sowie der schiefen Stellung des Auffängers zeigt die gestrichelte Kurve in Fig. 5, welche nur sehr wenig von der beobachteten abweicht. Offenbar hat man es mit einer nicht allseitig gleichmäßig zerstreuenden Reflexion zu tun. Es kann hier noch bemerkt werden, daß eine Fälschung der Kurven gerade bei großen Ablenkungen durch die in Abschnitt E hervorgehobene Sekundärstrahlung der Aluminiumfolie des Auffängers nicht in Betracht kommt, da hier die ursprüngliche Strahlgeschwindigkeit erhalten ist.

Die Tab. 4 gibt an, wie viele Durchquerungen pro Elektron durchschnittlich stattgefunden haben. Bekanntlich nimmt der

---

1) A. Becker, Ann. d. Phys. 78. S. 264. 1925.

Tabelle 4

Gas	p	L_q	z	A	a	a/M	a*)
N_2	0,01	3,6	2,2	21	10^{-3}	36.10^{-6}	22
	,028	1,28	6,4	7,5			
H_2	,019	4,1	2				5,8
	,05	1,6	5				
	,09	0,9	9				
	,18	,436	18				
	,28	,28	30				
He	,03	3,55	2,25				6
	,06	1,75	4,6				
Ne	,027	2,4	3,3				8
	,045	1,45	5,5				
	,075	,9	9				
Ar	,01	5,55	1,5				26
	,02	2,8	3				
	,03	1,85	4,3				
	,04	1,4	5,7				

Es bedeuten:

p Druck in mm Hg; L_q die freie Weglänge in cm;
z Anzahl der Durchquerungen; a Trübungsfaktor;
M Molekulargewicht; α spezifisches Absorptionsvermögen cm^{-1} bei 1 mm Hg 0° C;

$$A = \frac{3\,L_q}{a \cdot d^3};$$

$d = 8$ cm Entfernung der Eintrittstelle des Strahls bis zum Auffänger.

*) Die Werte für α sind entnommen dem Handbuch der Experimentalphysik von Lenard und Becker, 14. S. 192, 193 u. 196.

energieumsetzende Querschnitt mit abnehmender Geschwindigkeit zu.[1]) Bei der verwendeten Geschwindigkeit $v = 0{,}0198$ tritt schon der gesamte Molekülquerschnitt für die Energieumsetzung ein. Daher ist es nicht verwunderlich, wenn Geschwindigkeitsverluste auftreten als unmittelbare Folge der Durchquerungswirkung. Die Geschwindigkeitsverluste überwiegen aber weit im Kerngebiet, in dem man sie nicht so sehr erwartet hätte als vielmehr dort, wohin die Elektronen weite Wege zurückzulegen hatten. Aber gerade auf den weitesten Wegen zeigten die Elektronen ihre volle Geschwindigkeit. Aus

1) P. Lenard, Qu. u. K. Tab. 15. S. 181.

Fig. 4 und der Geschwindigkeitsmessung Fig. 10 u. 11 ist ersichtlich, daß ein Teil der Strahlelektronen weder Geschwindigkeitsverlust noch Richtungsänderung erfahren hat. Diese Elektronen haben kein Atom getroffen; sie wurden im Kerngebiet gemessen. Ein anderer Teil hat sowohl Geschwindigkeitsverlust als auch Richtungsänderung erfahren. Diese Elektronen müssen Atome oder Moleküle durchquert haben. Dabei entstanden die Bahnkrümmungen, deren Summe die Höfe ausmachen. In großer Entfernung von der Strahlachse wurde aber noch ein dritter Teil gemessen, der nur starke Richtungsänderung, aber keinen Geschwindigkeitsverlust aufwies.

Die verlorene kinetische Energie des Kathodenstrahls wird in eine andere Energieform verwandelt und kommt vermutlich in einer Ätherwellenstrahlung zum Vorschein. Im Stickstoff wurden jedoch nur im Kern Geschwindigkeitsverluste gemessen und zwar nicht mit stufenförmiger, sondern mit ganz überwiegend allmählicher Energieabnahme. Bei 100-Voltstrahlen darf man auch schwerlich annehmen, daß ein und dieselbe konstante Verluststufe in Geltung bleibe. Denn es ist für die Lichtemission anzunehmen, daß verschiedene Wellenlängen, entsprechend der verschiedenen Größe ihrer Lichtquanten, verschieden große Geschwindigkeitsverluste beanspruchen werden.

Berechnet man aus den Energieverluststufen (10—90 Volt) die Wellenlängen der infolge Energieumwandlung entstandenen Wellenstrahlung nach der Gleichung $\nu = e\,V$ unter Außerachtlassung der Abtrennungsarbeit, so erhält man Wellenlängen von 0,1—0,001 μ, die sämtlich im Transquarzviolettgebiet sich befinden.

2. Der Wasserstoff

Aus dem Kurvenbild Fig. 6 und den Geschwindigkeitsverteilungskurven Fig. 10 und 11 ist das Verhalten des Wasserstoffs ersichtlich. Eine Wechselwirkung zwischen den Gasmolekülen und den Elektronen des Kathodenstrahls hat zweifellos stattgefunden. Die Kurven, die mit zunehmendem Druck breiter werden, zeigen diese Wechselwirkung deutlich. Die echte Reflexion der Elektronen an den Atomen und Molekülen des Wasserstoffs tritt in dem untersuchten Druckbereich von 0,019—0,09 mm Hg wieder deutlich hervor.

Im Kern treten Geschwindigkeitsverluste auf, während außerhalb des Kerns in 10° und 20° Entfernung von der Strahlachse wiederum Elektronen mit der vollen primären Geschwindigkeit gemessen werden. In bezug auf die echten Reflexionen verhält sich also der Wasserstoff wie der Stickstoff. Dagegen sind die Verbreiterungen der Kurven des Wasserstoffs weit weniger stark als die des Stickstoffs. Die Erscheinung der Diffusion tritt wenig deutlich hervor und die Reflexion gewinnt das Übergewicht, wie man dies auch aus der näheren quantitativen Betrachtung (vgl. Abschnitt I) schließen muß.

Ein ganz anderes Verhalten zeigt der Wasserstoff bei höheren Drucken $p = 0{,}175$ bis $0{,}28$ mm Hg (vgl. Fig. 6), bei denen die Intensitätsverteilungskurven mit der Verteilungskurve im Vakuum völlig zusammenfallen.

Nur im Kernbereich werden Elektronen aufgefangen, im Hof und im „Gebiet der allgemeinen Helligkeit" ist nichts von ihnen zu finden. Die Geschwindigkeitsmessung im Kern zeigt keine Geschwindigkeitsverluste (vgl. Fig. 10), sondern volle ursprüngliche Geschwindigkeit. Das Verhalten des Wasserstoffs bei höheren Drucken ist demnach gerade entgegengesetzt dem bei kleineren Drucken, bei denen im Kern stets Geschwindigkeitsverluste festgestellt wurden.

In dem erwähnten Druckbereich $p = 0{,}175$ bis $0{,}28$ mm Hg hat durchschnittlich jedes Strahlelektron 18 bzw. 30 Durchquerungen mit den Gasmolekülen erfahren. Infolge dieser großen Anzahl von Durchquerungen trat offenbar die Absorption so stark in Tätigkeit, daß sie alle auf längeren Wegen laufenden Elektronen ausschaltete, so daß keinerlei Diffusion oder Reflexion beobachtet werden konnte. Wenn also im Kern Elektronen ohne Geschwindigkeitsverluste gemessen werden, so haben diese Elektronen anscheinend gar kein Atom oder Molekül getroffen. Der Bruchteil, der in diesem Fall zur Messung kommt, ist in der Tat außerordentlich klein, nämlich größenordnungsweise nur 10^{-5} der Anfangsintensität. Um überhaupt eine Intensität noch wahrnehmen zu können, mußte sehr stark geglüht werden. Jedes Elektron, das mit einem Molekül zusammengetroffen ist, verfällt demnach unweigerlich der Absorption.

3. Das Helium

Aus dem Kurvenbild Fig. 7 und den Geschwindigkeitskurven Fig. 10, 11 und 12 ist das Verhalten des Heliums ersichtlich. Fig. 7 zeigt bei keinem gemessenen Druck einen ausgesprochenen Hof. Der Kern wird im Gegenteil sogar schmaler als im Vakuum. Zu bemerken ist, daß im Helium im Gegensatz zu allen übrigen untersuchten Gasen der Glühstrom geschwächt werden muß, da sonst die Intensität in der Strahlachse so groß wird, daß sie nicht mehr gemessen werden kann. Offenbar übt das Helium auf den Glühdraht eine elektronenbefreiende Wirkung aus. Helium ist dadurch vor allen anderen untersuchten Gasen ausgezeichnet, daß es in dem untersuchten Druckbereich deutlich kein Anzeichen für Diffusion gibt. Dagegen treten die echten Reflexionen im „Gebiet der allgemeinen Helligkeit“ um so deutlicher hervor. Im Kerngebiet wurden Geschwindigkeitsverluste wieder gemessen und zwar wie bei allen untersuchten Gasen mit überwiegend allmählicher Energieabnahme. Außerhalb des Kerngebiets besitzen die Elektronen ihre volle primäre Geschwindigkeit. Der Kern geht hier ohne merkbaren Hof über in das „Gebiet der allgemeinen Helligkeit“. Untersucht man an dieser Grenze, in 5° Entfernung von der Strahlachse, den Verlauf der Geschwindigkeit, so treten deutlich Energieverluststufen auf (Fig. 12).

4. Das Neon

Das Kurvenbild Fig. 8 und die Geschwindigkeitsverteilungskurven Fig. 10 und 11 zeigen das Verhalten des Neons. Diese Kurven sind den Wasserstoffkurven sehr ähnlich. Die Verbreiterungen der Kurven sind jedoch nicht so stark ausgeprägt wie beim Wasserstoff. Es sind also Höfe vorhanden, die mit zunehmendem Druck deutlicher hervortreten. Sehr stark tritt auch die echte Reflexion im „Gebiet der allgemeinen Helligkeit“ in Erscheinung, wo in 10° und 20° Entfernung von der Strahlachse wiederum nur Elektronen mit der vollen primären Strahlgeschwindigkeit gemessen werden. Im Kern dagegen treten Geschwindigkeitsverluste auf, die mit wachsendem Druck größer werden.

5. Das Argon

Das Kurvenbild Fig. 9 und die Geschwindigkeitsmessungen Fig. 10, 11, 12 und 13 charakterisieren das Verhalten des

Argons. Die Verbreiterungen der Intensitätskurven sind noch stärker als beim Wasserstoff und weisen wiederum mit dessen Kurven eine Ähnlichkeit auf. Auch hier tritt eine bevorzugte Richtungsänderung wie bei Wasserstoff und Neon auf. Die Höfe sind entstanden zu denken durch Diffusion und Reflexion, welche hier offenbar nicht scharf voneinander trennbar in Erscheinung treten. Deutlich tritt dagegen die Erscheinung der echten Reflexion außerhalb der Höfe zutage, wo in 10° und 20° Entfernung von der Strahlachse nur Elektronen mit voller primärer Anfangsgeschwindigkeit angetroffen werden; diese müssen dorthin durch vielfache echte Reflexion an den Atomen des Argons gelangt sein. Daß in Einzelfällen bisweilen auch Geschwindigkeitsverluststufen beobachtet worden sind (vgl. Figg. 12 und 13), ist offenbar damit zu erklären, daß diese Erscheinung nur bei geeignetem Zusammentreffen zwischen Elektron und Atom auftritt. Bei diesen Versuchen aber tritt diese Erscheinung nur selten auf, da die Zahl der Zusammentreffen nur gering ist.

H. Besonderheiten der Gase

Solange das Innere des Untersuchungsgefäßes unversilbert war, spielten besonders bei Untersuchung des Stickstoffs Erscheinungen mit, die eine Reproduzierbarkeit der Kurven gänzlich unmöglich machten. Nur nach häufigem Spülen mit Luft von Atmosphärendruck konnte eine normale Vakuumverteilungskurve wieder erhalten werden. Allem Anschein nach wirkte dabei eine zunehmende Aufladung der Glaswand mit, die trotz der Größe des Gefäßes diese Störung verursachte. Nach Versilberung des Innern des Gefäßes war diese unangenehme Nebenerscheinung völlig beseitigt. Dagegen machte sich nun eine starke Adsorption des Gases durch die Silberschicht bemerkbar. Um konstante Druckverhältnisse zu haben, mußte daher die Silberschicht mit dem zu untersuchenden Gas gesättigt sein. Die Adsorption trat besonders bei Stickstoff, bei Wasserstoff in geringem Maße und gar nicht bei den Edelgasen in Erscheinung.

Außerdem fingen alle Gase bei einem gewissen Druck und bei einer bestimmten Glühstromstärke zu leuchten an. Die Feldverhältnisse in der Nähe des Glühfadens mögen dabei

auch eine Rolle spielen. Das Licht trat in der Nähe des Glühfadens auf, besaß dort seine größte Intensität und erhellte mehr oder weniger stark den Gefäßansatz, der die Glühkathode aufnahm. In den meisten Fällen war das Licht mit bloßem Auge sichtbar. Bei Betrachtung mit dem Taschenspektroskop traten die für das betreffende Gas charakteristischen Linien auf. Der Höhe des zur Beobachtung verwendeten Druckes war durch das Auftreten des Leuchtens eine Grenze gesetzt. Die größten Drucke konnten bei Wasserstoff benutzt werden, bei dem das Leuchten am spätesten eintrat. Hatte das Leuchten einmal eingesetzt, so wurde der Versuch abgebrochen und der Beobachtungsraum gründlich ausgepumpt.

I. Quantitative Betrachtung der Diffusion

Nach Hrn. Lenards Theorie der Diffusion in kleinen Winkeln[1]) erhält man als Intensität im Abstand R von der Strahlachse für einen unendlich dünnen Strahl

(1) $$J = J_0 \frac{A}{\pi} \cdot e^{-AR^2},$$

worin $A = \frac{3 L_q}{a \cdot d^3}$ ist. L_q sei die freie Weglänge der Elektronen zwischen den Molekülen, d der Abstand von der Eintrittsstellle des Strahls in den Untersuchungsraum bis zum Auffänger und a der Trübungsfaktor.

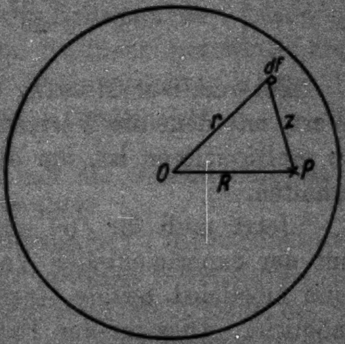


Fig. 14

Es soll die Intensität pro Flächeneinheit für ein *endliches* Strahlbündel berechnet werden in einem beliebigen Abstand R von der Strahlachse. In O (vgl. Fig. 14) treffe die Strahlachse eine ihr senkrecht entgegengestellte Ebene.

Ist im Vakuum die Intensitätsverteilung gegeben durch $i = f(r)$, wo i die Intensität pro Flächeneinheit im Abstande r von der Symmetrieachse des Bündels ist, so findet sich im Gas (ohne Absorption) die Gesamtintensität im Abstand R zu

1) P. Lenard, Qu. ü. K. Spez. Teil VII C.

$$J_R = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{A}{\pi} e^{-A\varrho^2} \cdot f(r) \cdot r\,dr \cdot d\varphi \tag{2}$$

oder

$$J_R = \frac{A}{\pi} e^{-AR^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} r \cdot f(r)\, e^{-A(r^2 - 2rR\cos\varphi)}\, dr \cdot d\varphi. \tag{3}$$

Die Integration über φ ergibt:

$$\int_0^{2\pi} e^{2ArR\cos\varphi}\, d\varphi = 2\pi \left\{1 + A^2 r^2 R^2 + \frac{A^4 r^4 R^4}{4} + \frac{A^6 r^6 R^6}{36} + \cdots\right\}.$$

Die Reihe konvergiert rasch für $A^2 r^2 R^2 \leqq 1$.

Daher wird

$$\left.\begin{aligned} J_R = 2Ae^{-AR^2}\Big\{ & \int_0^{\infty} r f(r) e^{-Ar^2} dr \\ & + A^2R^2 \int_0^{\infty} r^3 f(r) e^{-Ar^2} dr \\ & + \frac{A^4R^4}{4} \int_0^{\infty} r^5 f(r) e^{-Ar^2} dr \\ & + \frac{A^6R^6}{36} \int_0^{\infty} r^7 f(r) e^{-Ar^2} dr + \cdots \Big\}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Bei relativer Messung gibt die geschweifte Klammer den Wert, mit dem die Verteilung bei unendlich schmalem Strahl zu multiplizieren ist, um die für den endlich breiten Strahl zu erhalten.

Jetzt muß für $f(r)$ eine Funktion gefunden werden, die mit der experimentellen Vakuumverteilung zusammenfällt und eine möglichst leichte Ausführung der obigen Integration ermöglicht. Dies ist der Fall für

$$i = f(r) = i_0 \cdot e^{-br^2} = i_0 \cdot e^{-40r^2}. \tag{5}$$

Setzt man diesen Ausdruck für $f(r)$ in (4) ein, so ist die Integration leicht durchführbar.

Es ergibt sich

$$J_R = \frac{A\,i_0}{c} e^{-AR^2} \left\{1 + \frac{A^2R^2}{c} + \frac{A^4R^4}{2c^2} + \cdots\right\}, \tag{6}$$

wo $c = b + \varDelta$ ist. Bei kleinerem $\varDelta$ ist hier schon die vierte Potenz ohne Einfluß.

Vergleicht man jetzt die in Gasen experimentell erhaltenen Verteilungskurven mit den nach Gleichung (6) durch Einsetzen verschiedener $\varDelta$-Werte errechenbaren, so zeigt sich, daß allein die Stickstoffkurven in ihrem ersten Verlauf durch die Theorie gut dargestellt werden können (vgl. Fig. 5). Diese Figur zeigt deutlich, daß die experimentellen mit den berechneten Kurven in der Nähe der Strahlachse fast zusammenfallen. Aber schon in 3 mm Entfernung von der Strahlachse machen sich Abweichungen bemerkbar, die durch Fig. 5 sehr anschaulich dargestellt werden. Die beobachteten Kurven zeigen größere Intensitäten an als die berechneten. Die Erklärung findet sich im Auftreten der echten Reflexion der Kathodenstrahlen. In Entfernungen, in denen die allein unter Berücksichtigung der Diffusion berechnete Intensität längst zu Null herabgesunken ist, finden sich noch Kathodenstrahlen voller Anfangsgeschwindigkeit. Nur durch vielfache echte Reflexionen an Gasmolekülen können die Elektronen der benutzten Kathodenstrahlen dorthin gelangt sein. Ein ganz ähnliches Verhalten hat auch Hr. Zachmann[1]) bei kleineren Gasdrucken festgestellt und in unserem Sinne gedeutet.

Da bei allen anderen Gasen die Reflexion weit überwiegt, so ist die relativ schwache Diffusion bei ihnen quantitativ nicht faßbar. Es läßt sich daher der Trübungsfaktor a nur für Stickstoff angeben, der aus der Tab. 4 ersichtlich ist.

K. Zusammenhang der Trübung mit der Geschwindigkeit der Kathodenstrahlen

Die Fig. 15 gibt den Zusammenhang des Trübungsfaktors a mit der Strahlgeschwindigkeit in graphischer Darstellung. Als Ordinate ist a/M, wobei M das Molekulargewicht bedeutet, als Abszisse die Geschwindigkeit in Einheiten der Lichtgeschwindigkeit aufgetragen. Um den richtigen Wert für a/M zu erhalten, muß der Kurvenast I mit 10^{-3} und der Kurvenast II mit 10^{-1} multipliziert werden. Für größere Geschwindigkeiten, bei denen Massenproportionalität der Trübung[2]) angenähert

1) E. Zachmann, a. a. O.

2) P. Lenard, Qu. ü. K. Spez. Teil VII B, b u. c, C_4 b.

besteht, lassen sich die Werte der Herren Lenard[1]), Friman[2]), Geiger und Bothe[3]) durch eine mit zunehmender Geschwindigkeit abnehmende Kurve darstellen. Für die untersuchte Geschwindigkeit von 100 Volt ist der für Stickstoff gefundene Wert in Fig. 15 eingetragen. Bei kleinsten Geschwindigkeiten

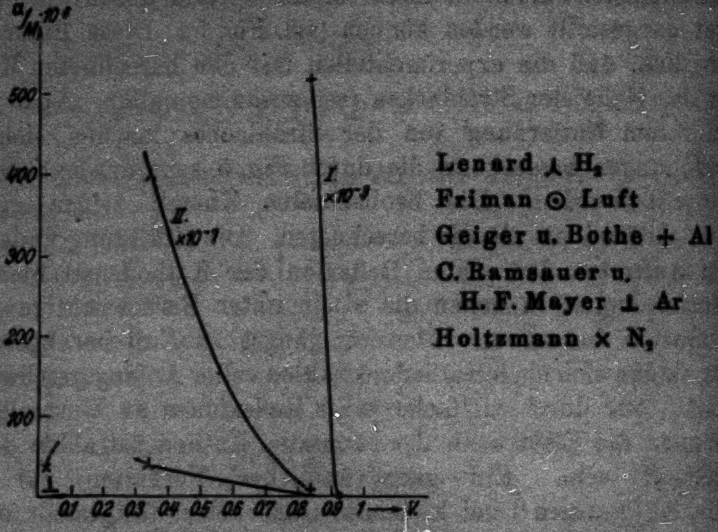


Fig. 15

scheint nach bisheriger Beobachtung ein Herabsinken des Trübungsfaktors auf Null angenommen werden zu müssen[4]). Die Kurve würde also dann nach dem Nullpunkt des Koordinatensystems zu ziehen sein.

Mit abnehmender Geschwindigkeit wird die Diffusion also größer[5]) und sinkt bei kleinsten Geschwindigkeiten offenbar zu Null herab. Über das Geschwindigkeitsgebiet zwischen 0 und 100 Volt scheinen bestimmte Angaben zurzeit noch nicht möglich zu sein. Nach bisheriger Kenntnis verhalten sich hier die einzelnen Gase sehr verschieden. Im Geschwindigkeitsgebiet $v = 0{,}03 - 0{,}3$ liegen keine Beobachtungen vor.

---

1) P. Lenard, Qu. ü. K. S. 208. Anm. 599.

2) E. Friman, Ann. d. Phys. 49. S. 416. 1916.

3) H. Geiger und W. Bothe, Ztschr. f. Physik 6. S. 204. 1921.

4) C. Ramsauer, Ann. d. Phys. 64. S. 587, 1921 und H. F. Mayer, Ann. d. Ann. 64. S. 408. 1921.

5) P. Lenard, Wied. Ann. 51. S. 265. 1894.

L. Zusammenfassung der Ergebnisse

1. In allen untersuchten Gasen H_2, N_2, He, Ne und Ar wurden echt reflektierte Strahlelektronen festgestellt. Die echte Reflexion an den Molekülen erfolgte ohne Geschwindigkeitsverlust. Im H_2, der allein auch bei höheren Drucken ($p = 0{,}18$ bis 0,28 mm Hg) störungsfrei untersucht werden konnte, verfielen in dem genannten Druckbereich die echt reflektierten (unecht absorbierten) Elektronen der echten Absorption, so daß nur ganz unbeeinflußte Elektronen durchgingen.

2. Die echte Reflexion überwiegt bei allen untersuchten Gasen gegenüber der Diffusion. Diese trat besonders bei H_2, He, Ne und Ar so wenig hervor, daß eine quantitative Verfolgung nicht mit großer Sicherheit durchzuführen war trotz der so sehr verfeinerten Meßanordnung. Es war daher in diesen Fällen auch die Theorie der Diffusion in kleinen Winkeln[1]) auf die Beobachtungen nicht anwendbar. Nur bei N_2, in dem sehr viele kleine Ablenkungen infolge von Diffusion vorhanden waren, konnte trotz der durch echte Reflexion vorhandenen großen Ablenkungen nach der erwähnten Theorie ein Trübungsfaktor a aus der Gleichung

$$A = \frac{3 L_s}{a \cdot d^3}$$

zu $a = 10^{-3}$ bestimmt werden (vgl. Abschn. I).

3. In der Strahlachse machten sich bei allen Gasen Geschwindigkeitsverluste mit überwiegend allmählicher Energieabnahme bemerkbar. Weit außerhalb der Strahlachse aufgefangene Elektronen zeigten keinen Geschwindigkeitsverlust. Für die echten Reflexionen ist also nachgewiesen, daß sie ohne Geschwindigkeitsverlust erfolgen, wie dies auch schon für Reflexion an festen Oberflächen angezeigt war.[2]) Im Zwischengebiet traten Geschwindigkeitsverluststufen auf, so in Ar von 20, 40 und 80 Volt, in He von 20 Volt. Letzteres Ergebnis stimmt gut mit den Angaben Hrn. Dymonds[3]) überein, dessen Veröffentlichung nach Abschluß der hier mitgeteilten Versuche erschien.

---

1) P. Lenard, Qu. ü. K. Spez. Teil VII C.
2) A. Becker, Ann. d. Phys. 78. S. 264. 1925.
3) E. G. Dymond, Physical Rev. 29. S. 433—441. Nr. 3. 1927.

4. Der Zusammenhang zwischen dem Trübungsfaktor a und der Strahlgeschwindigkeit ist für das gesamte Geschwindigkeitsgebiet in Fig. 15 auch nach den Ergebnissen anderer Beobachter dargestellt, soweit er bisher ersichtlich geworden ist.

Vorliegende Arbeit wurde in der Zeit vom Wintersemester 1923/24 bis Sommersemester 1927 auf Anregung und unter Leitung von Hrn. Geheimrat Professor Dr. Lenard und Hrn. Professor Dr. A. Becker im Heidelberger Physikalischen und Radiologischen Institut ausgeführt. Für die vielen Ratschläge und die stete Förderung, die mir zuteil wurde, möchte ich meinen verehrten Lehrern auch an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank aussprechen.

(Eingegangen 1. April 1928)

3. *Spektralphotometrische Untersuchungen über die Energie- und Helligkeitsverteilung in dem Querschnitt der positiven Säule in Neon und Helium;*

von Gerhard Zwiebler

Inhalt: A. Einleitung. — B. Hauptteil: I. Methode und Aufbau. 1. Die Grundlagen der Methode von F. Kurlbaum und Günther-Schulze; 2. Der Aufbau: a) Entladungsrohr; b) der optische Aufbau. 3. Die vorliegende Fragestellung und das zu ihrer Beantwortung benutzte Prinzip. — II. Eichungen und Vorversuche: 1. a) das Spektrometer und seine Eichung; b) der Vergleichsstrahler und seine Eichung; c) Besonderes über den Aufbau; 2. Vorversuche und Auswertung. — III. Die Messungen und ihre Auswertung. — IV. Die Deutung der Ergebnisse. — C. Schluß: Zusammenfassung.

A. Einleitung

Die vorliegende Arbeit berichtet über die spektrale Energie- und Helligkeitsverteilung in dem radialen Querschnitt der positiven Säule in Neon und Helium. Die spektralphotometrischen Untersuchungen wurden durchgeführt mit Hilfe der Methode der Spektralpyrometrie von F. Kurlbaum und Günther-Schulze (1).

Im Zusammenhang mit — zum Teil noch unveröffentlichten — spektralphotometrischen Untersuchungen (2–4), die im Physikalischen Institut der Technischen Hochschule zu Berlin nach der angegebenen Methode ausgeführt worden waren, stieß man auf die Frage, wie sich in der positiven Säule in Neon und Helium die spektrale Energie bzw. die Helligkeit innerhalb eines senkrecht zum zylindrischen Entladungsrohr genommenen Querschnitts verteilt. Es war ganz offensichtlich, daß die Helligkeit in einer solchen Querschnittsfläche nicht konstant war, sondern von einem in der Mitte befindlichen Höchstwert zum Rande hin abnahm. Wie sich

zeigte, ermöglichte es die Kurlbaumsche Methode, unter bestimmten Entladungsbedingungen die Verteilung der Energie und Helligkeit zu bestimmen.

B. Hauptteil

I. Methode und Aufbau

Trotzdem diese Methode von Kurlbaum und Günther-Schulze wegen ihrer häufigen Anwendung schon oft beschrieben worden ist, so will ich doch eine kurze Einführung in die geometrisch-optischen sowie strahlungstheoretischen Grundlagen dieser Methode geben.

Dies geschieht am besten mit Hilfe folgender Skizze, die einen Vertikalschnitt in Richtung der optischen Achse dar-

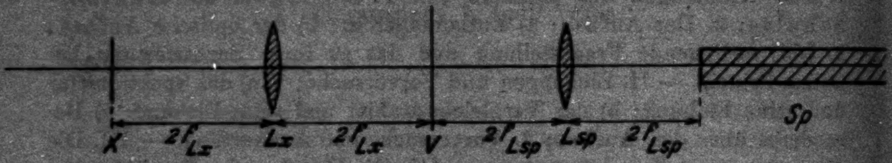


Fig. 1

stellt und ein Bild des optischen Aufbaues gibt, wie ich ihn bei meinen Messungen anwandte (Fig. 1).

Der Vergleichsstrahler V in Form einer kleinen Kohlefadenlampe oder eines Nernststiftes wird mit Hilfe der Linse L_{S_p} auf dem Spalt des geradsichtigen Spektrometers Sp (5) abgebildet und zwar in natürlicher Größe, denn der Vergleichsstrahler wie auch der Spektrometerspalt befinden sich im Abstand der doppelten Brennweite $f_{L_{S_p}}$ von der Linse L_{S_p}. Zugleich wird aber auch die zu untersuchende Lichtquelle X wegen entsprechender Anordnung gegenüber der Linse L_X in natürlicher Größe auf dem Spektrometerspalt abgebildet. Durch den Prismensatz des geradsichtigen Spektrometers wird das eintretende Licht spektral zerlegt. So sieht man im Gesichtsfeld des Spektrometerfernrohres die Spektren beider Strahler. Man kann nun den durch den Vergleichsstrahler V fließenden Strom so lange verändern, bis schließlich die beiden Spektren in dem zu untersuchenden schmalen Wellenlängenbezirk gleich hell erscheinen. Ist der Vergleichsstrahler am schwarzen Körper für die betreffende Wellenlänge λ geeicht, so kann

man aus der zugehörigen Eichkurve (Isochromate: λ = const, Strom i als Abszisse, T^0 absol. als Ordinate) die zu dem Strom i gehörige absolute „schwarze" Temperatur T entnehmen. Bringt der Strahler X ein kontinuierliches Spektrum hervor, so erhält man durch Einsetzen von λ und T in die Wiensche Spektralgleichung

$$\varepsilon = c_1 \cdot \lambda^{-5} \cdot e^{\frac{-c_2}{\lambda} \cdot \frac{1}{T}} \tag{1}$$

für das Gebiet der sichtbaren Strahlung die Emission ε des Strahlers X für die Wellenlänge λ.

Vergleicht man jedoch mit dem kontinuierlichen Spektrum des Strahlers V eine Spektrallinie des vom Strahler X herrührenden Linienspektrums, so ist, wie sich gezeigt hat, die für die Wellenlänge λ ermittelte „schwarze" Temperatur von der Spaltbreite (6–8) abhängig. Dies wird deutlich, wenn man das kontinuierliche Spektrum des Vergleichsstrahlers und die Spektrallinie gleich hell einstellt und dann die Spaltbreite ändert. In diesem Fall erscheint, da die Flächenhelligkeit des kontinuierlichen Spektrums sich ändert, die Spektrallinie beim Aufdrehen des Spaltes dunkler, beim Zudrehen heller als der betreffende Wellenlängenbezirk des kontinuierlichen Spektrums. Das sich hier ergebende Problem ist bereits vollständig und abschließend behandelt. Soweit es für die vorliegende Fragestellung in Betracht kommt, gehe ich im Abschnitt II (S. 257) ein. Wenn man auch bei einem Linienspektrum nur von einer „schwarzen" Temperatur der Linie bei einer bestimmten Spaltbreite sprechen kann, und andererseits zur Bestimmung der sogenannten wahren „schwarzen" Temperatur die nur schwer zu erlangende Kenntnis der Linienbreite wie auch der Energieverteilung innerhalb der Linie notwendig ist, so führt doch die photometrische Methode auch in diesem Falle, wie sich zeigen wird, zu einem für die vorliegenden Zwecke brauchbaren und bestimmten relativen Energiewert.

Bevor ich auf die besondere Anwendung der Kurlbaumschen Methode bei der vorliegenden Aufgabe eingehe, muß ich die Apparatur beschreiben. Zunächst das Entladungsrohr, das von bestimmter zweckmäßiger Form sein mußte. Die folgende

Skizze (Fig. 2) stellt die endgültige Form des Entladungsrohres im Verhältnis 1 : 7,5 dar.

Die beiden Elektroden *E*, von denen Platindrähte nach außen führten, bestanden aus ungefähr 1 mm dicken Aluminiumblechen, die zu Hohlzylindern zusammengerollt und -geschweißt waren. Sie hingen je an einem dünnen Aluminiumstab, der seinerseits durch die Glaskuppe *F* bzw. *G* gehalten wurde.

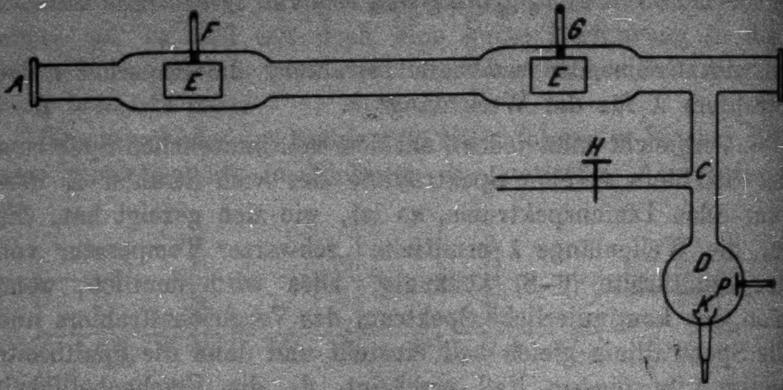
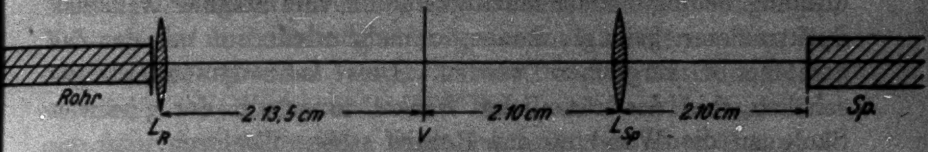


Fig. 2

Die Achse der Aluminiumzylinder fiel mit der Achse des Rohres zusammen. An den Enden *A* und *B* war das Rohr durch runde, planparallele Glasscheiben mit weißem Siegellack abgedichtet. Mit Hilfe des Ansatzes *C* und des Hahnes *H* konnte die Gaszufuhr bzw. Entnahme stattfinden. Der Glasballon *D* enthielt eine Eisenblechanode *P* und eine Aufnahmevorrichtung für Kalium, eine sogenannte „Kalizelle“ *K*, über deren Einrichtung, Herstellung und Wirkungsweise schon oft berichtet worden ist (9–12). Durch diese Anordnung in *D* war es möglich, unabhängig von den Entladungen zwischen den Elektroden *E* eine Sonderentladung zwischen der Elektrode *P* als Anode und *K* als Kathode zu erreichen. Die sonstigen Eigenschaften des Rohres ergeben sich deutlich aus der Figur.

Unter bestimmten Entladungsbedingungen, über die ich S. 247 sprechen will, entstand in dem Entladungsrohr eine ungeschichtete positive Säule von einer Längenausdehnung von ungefähr 23 cm. Diese positive Säule wurde weder durch Glimmlicht noch durch andere Entladungserscheinungen beeinträchtigt. Auch gerade in der Längsrichtung des Rohres

war die positive Säule durch die zweckmäßige Rohr- und Elektrodenanordnung gut sichtbar. An dieses Rohr schloß sich der durch Fig. 8 skizzierte Aufbau an.



L_R = eine Linse mit veränderlicher Blendenöffnung von einer Brennweite von f = 13,5 cm,

V = eine am „schwarzen" Körper geeichte Kohlefadenlampe,

L_{Sp} = eine Linse mit veränderlicher Blendenöffnung von einer Brennweite von f = 10 cm,

Sp = ein geradsichtiges Spektrometer mit veränderlichem Spalt und einer auf Wellenlängen geeichten Drehvorrichtung.

Fig. 8

Nach dieser Beschreibung der benutzten Methode und des äußeren Aufbaues ist es möglich, auf die dieser Arbeit zugrunde liegende Fragestellung einzugehen.

In der Ausgangsstellung befinde sich die Achse des Entladungsrohres in der Verlängerung der Achse des optischen Aufbaues. Unter dieser Voraussetzung ist es möglich, die in einem gewissen Kreiskegel liegenden Lichtzentren auf dem Vergleichsstrahler V abzubilden, um dann beide Bilder (Strahler X und V) auf dem Spalt des Spektrometers zu erzeugen. Die Achse des Kreiskegels fällt mit der Rohrachse zusammen, der Öffnungswinkel ist durch die Blenden bedingt. Zum Photometrieren ist es notwendig, daß die auf der Linse L_{Sp} sitzende oder die im Spektrometer befindliche Blende die wirksame Blende, d. h. die Aperturblende ist. Nur unter dieser Bedingung, daß beide Strahler in den gleichen ins Spektrometer gelangenden räumlichen Winkel frei hineinstrahlen, kann photometriert werden. Nur dann kann etwas ausgesagt werden über die beziehentlichen Temperatur- und Energieverhältnisse, wenn man auf gleiche Helligkeit eingestellt hat. Als variabel sind hierbei anzusehen

die Wellenlänge λ des Strahlers X,

die Stromstärke (bzw. Stromdichte) des durch das Entladungsrohr wandernden Stromes,

der Gasdruck im Entladungsrohr.

Wird das Rohr so verschoben, daß seine Achse parallel zur Aufbauachse bleibt, dann gelangt ein anderer Kreiskegel an Lichtzentren in das Spektrometer. Die durch diese Anordnung bedingte Flächenhelligkeit, die vom Strahler X in das Spektrometer gelangt, kann nunmehr wiederum mit der des Strahlers V verglichen werden. Dies kann stufenweise geschehen, bis der räumliche Winkel innerhalb der positiven Säule an die Wandung des Rohres stößt. Dadurch, daß die einzelnen Stellungen des Rohres in bezug auf den Abstand von der Aufbauachse maßstäblich festgehalten werden, wird man gewisse Aussagen über die Energieverhältnisse im Querschnitt der positiven Säule machen können, wobei als Bezugsgrößen

die Wellenlänge λ,
der Druck p im Rohr und
der Strom i gelten.

Die folgenden Figuren geben ein schematisches Bild der einzelnen Einstellungen.

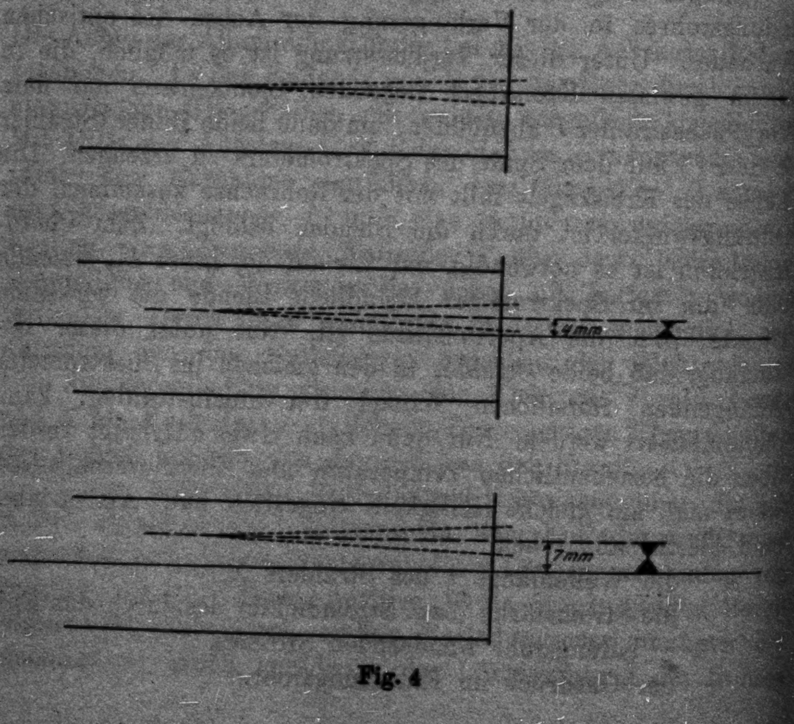
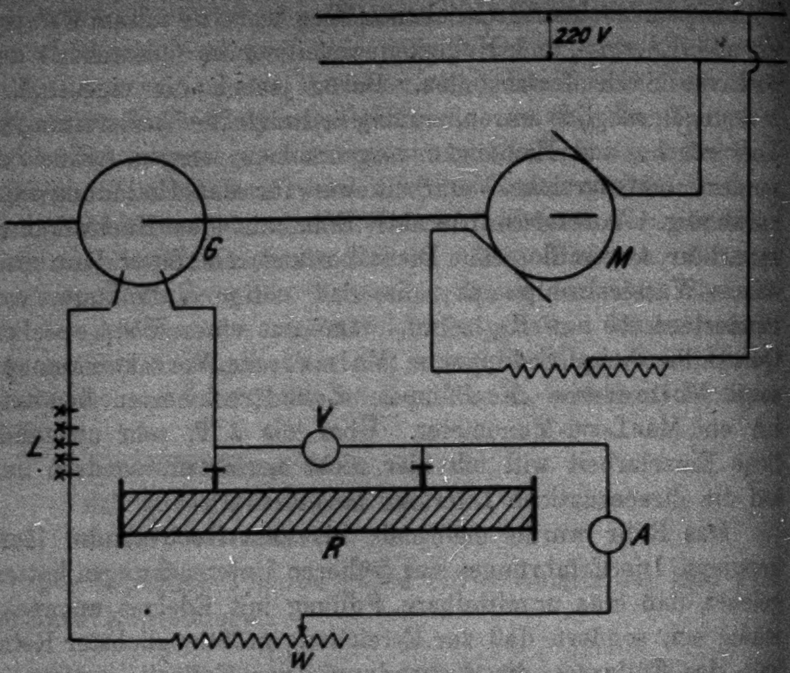


Fig. 4

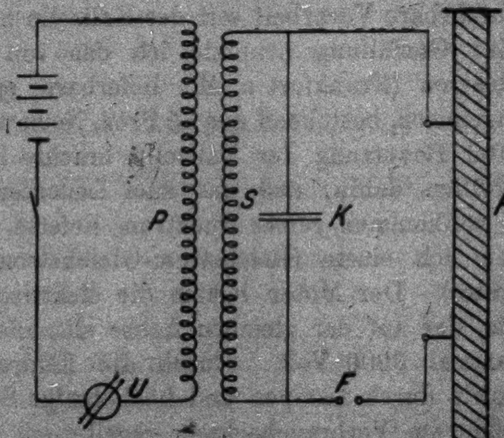
Diesen soeben beschriebenen Weg benutzte ich im Prinzip, um die Energie- und Helligkeitsverteilung im Querschnitt der positiven Säule festzustellen. Bevor jedoch die eigentlichen Messungen möglich waren, mußten mannigfache Vorbereitungen, Vorversuche und Eichungen vorgenommen werden. Eine besonders umfangreiche Vorarbeit war für das Entladungsrohr notwendig. Vorerst wurde das Rohr an eine Hochvakuumapparatur angeschlossen. Diese bestand aus einer Bunsenschen Wasserstrahlpumpe, die das nötige Vorvakuum von mindestens 15 mm Hg schuf, dann aus einer Volmerschen Quecksilberdampfstrahlpumpe (Volmersche Vorvakuumpumpe sowie Volmersche „K"-Pumpe). Zum Druckmessen benutzte ich ein MacLeod-Manometer. Über die z. T. sehr umständliche Einzelarbeit will ich hier nicht berichten, sondern nur auf die diesbezügliche Literatur hinweisen (13–15).

Das Rohr wurde mehrmals bis zum Hochvakuum leergepumpt. Die Erfahrungen aus früheren Untersuchungen hatten gelehrt, daß eine unmittelbare Füllung mit Edelgas unzweckmäßig sei, sondern daß zur Erreichung größtmöglichster Reinheit des Füllgases die Anwendung einer Kalizelle notwendig sei, zumal da das Ausheizen, das sonst für Hochvakuumapparaturen angewandt wird, wegen der Abdichtung mit Siegellack an den Enden nicht möglich war. Auch auf diese praktisch schwer durchführbare Vorarbeit mit der Kalizelle will ich nicht eingehen. Zur Gasfüllung benutzte ich das von der Firma Griesheim-Elektron (Frankfurt a. M.) lieferbare spektralreine Neon-Heliumgemisch, bestehend aus 75 Proz. Neon und 25 Proz. Helium. Unter Benutzung der Kalizelle brachte ich es nach 15maligem Füllen dahin, daß das zum Leuchten angeregte Gas ein fast vollkommen reines Spektrum lieferte. Die Spannung entnahm ich einem Gleichstrom-Gleichstrom-Umformer (Motor-Generator). Der Motor bekam die elektrische Energie aus dem Netz, der auf der gleichen Achse sitzende Generator erzeugte maximal 3000 Volt. Durch die Feldregelung am Generator, sowie durch Lampen und hochohmige Schiebe- und Festwiderstände im Verbraucherkreis regelte ich den Strom. Die folgende Figur 5 gibt ein Bild über die Schaltung.

Da die Entladung sogar beim Anlegen hoher Spannungen nicht immer selbsttätig einsetzte, legte ich dem Entladungsrohr



M = Motor, *G* = Generator, *L* = Lampenwiderstand, *W* = Schiebewiderstand, *A* = Amperemeter, *V* = Voltmeter, *R* = Entladungsrohr.
Fig. 5



R = Entladungsrohr, *F* = Funkenstrecke, *U* = Unterbrecher,
P = Primärspule, *S* = Sekundärspule, *K* = Kapazität.
Fig. 6

einen Schwingungskreis parallel, durch dessen Wirkung die Zündung immer zustande kam. In der Fig. 6 ist die Schaltung des Schwingungskreises skizziert.

II. Eichungen und Vorversuche

Der optische Aufbau war als solcher einfach, gewisse Vorarbeiten bestanden in den Eichungen. Da war vor allem das geradsichtige Spektrometer in bezug auf Wellenlängen zu eichen, d. h. die sogenannte Dispersionskurve zu bestimmen. Die jeweilige Stellung „*s*" des Fernrohres war durch eine vierstellige Zahl charakterisiert. Die ersten beiden Stellen ergaben sich durch einen am Spektrometerstativ fest aufsitzenden Maßstab, die letzten beiden Stellen durch eine am Umfang einer Trommel befindlichen Einteilung. Diese Trommel saß auf der Schraube, die die Drehung des Fernrohrs bewirkte, Zu beachten war, daß die Einstellung des Fernrohres von einer Seite aus geschehen mußte, um den toten Gang der Schraube zu vermeiden. Auf diese Weise gehörte zu jeder Wellenlänge λ ein Wert „*s*", der bis auf eine halbe Einheit der letzten Stelle genau anzugeben war. Die betreffende Wellenlänge wurde dadurch eingestellt, daß die Spektrallinie durch eine geeignete Okularblende ausgesondert und in der Mitte des Gesichtsfeldes des Fernrohres eingestellt wurde. Das von mir benutzte Spektrometer war bereits zu vielen Untersuchungen gebraucht worden, es lagen daher viele genaue

Tabelle 1

s	λ (ÅE)	*s*	λ (ÅE)
2450	7197	3850	5016
2550	6904	3950	4940
2650	6648	4050	4871
2750	6423	4150	4806
2850	6226	4250	4743
2950	6049	4350	4681
3050	5890	4550	4573
3150	5745	4650	4523
3250	5609	4750	4467
3350	5496	4850	4431
3450	5385	4950	4389
3550	5280	5050	4350
3650	5187	5150	4311
3750	5100	5450	4200

Eichungen vor. Ich prüfte die letzten Eichungen nach und fand die Dispersionskurve als solche wieder, wie sie bereits

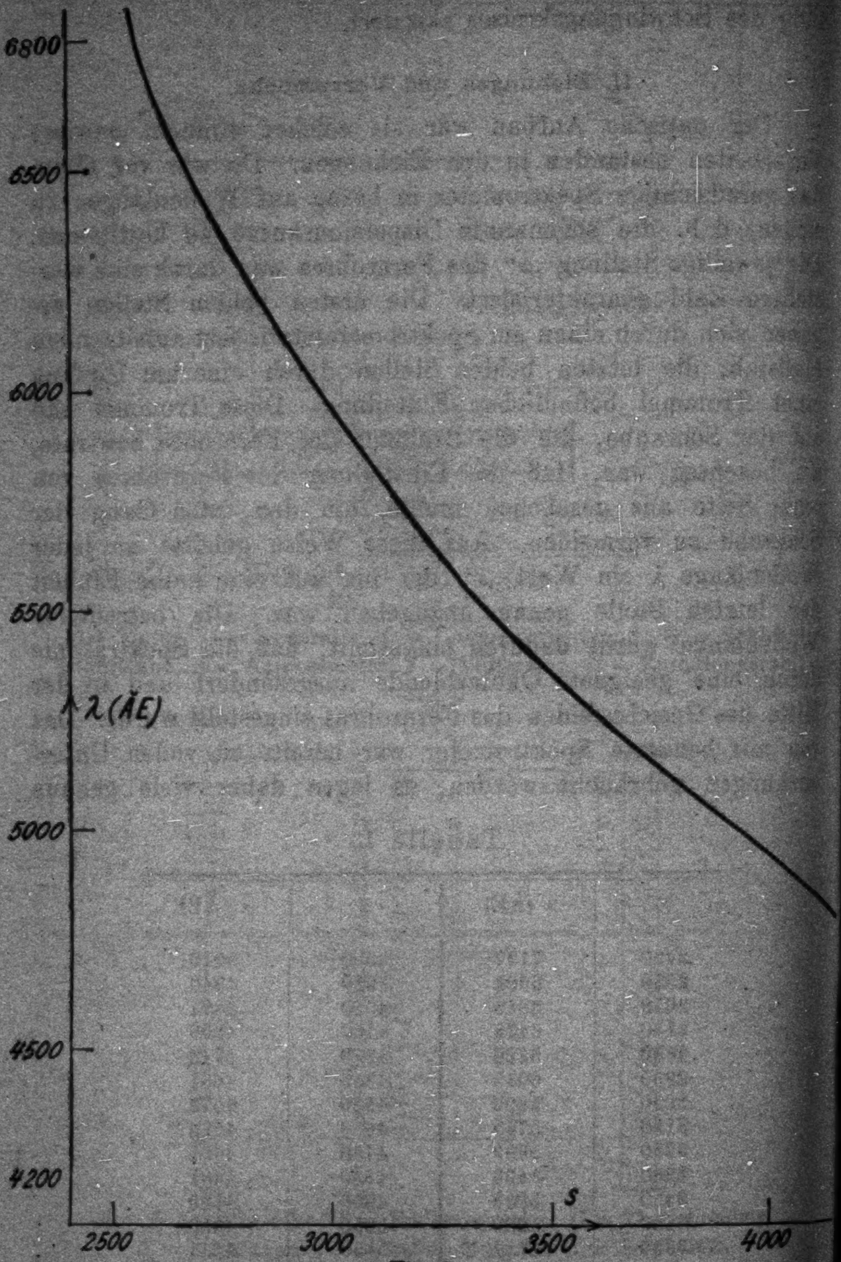


Fig. 7a

bestimmt worden war, aber um genau 50 Einheiten der *s*-Einstellungen verschoben. Die Dispersionskurve bringen Tab. 1 sowie Fig. 7 zum Ausdruck. Die Kurve ist hier im Verhältnis 1 : 20 bezüglich des Maßstabes dargestellt, in welchem ich sie bestimmte bzw. prüfte.

Der Wert für λ, den man für einen bestimmten Wert von „*s*" der Dispersionskurve entnimmt, gibt natürlich nur einen

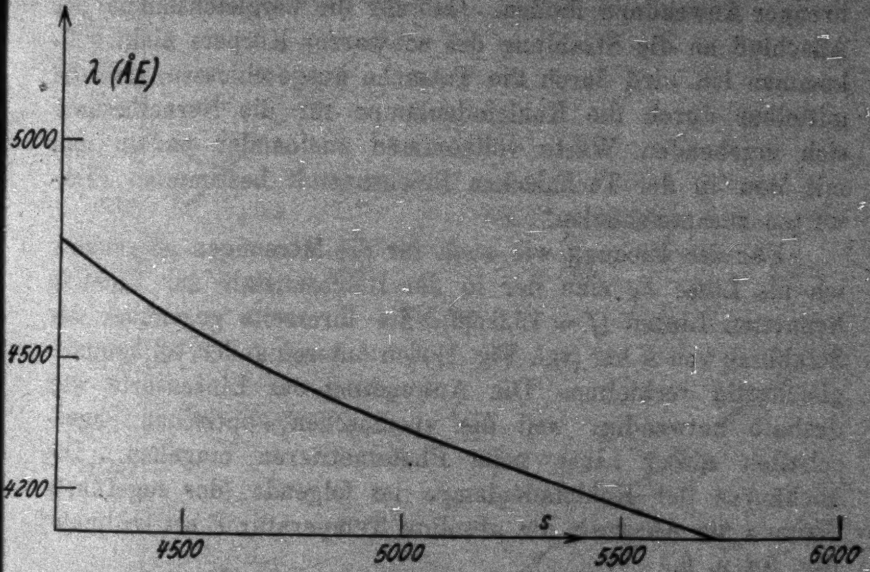


Fig. 7b

mehr oder weniger abgerundeten Wert der Wellenlänge an. Die genauen λ-Werte der Neon- und Heliumlinien sah ich in der diesbezüglichen Literatur (16–19) ein.

Neben dem Spektrometer erforderte vor allem der Vergleichsstrahler umfangreiche Untersuchungen. Als solchen wählte ich auf Grund von Erfahrungen, die man bei den bisherigen Untersuchungen gemacht hatte, eine Pyrometerlampe. Diese bestand aus einer fast kugelförmigen Glocke (Durchmesser 1,75 cm) mit einem U-förmig gebogenen, präparierten Kohlefaden. Aus den vielen zur Verfügung stehenden Lampen suchte ich eine nach bestimmten Gesichtspunkten aus. Die Lampe war mit Hilfe von mehreren am schwarzen Körper geeichten Nernstbrennern selbst auf „schwarze" Temperatur ge-

eicht worden[1]); als grauer Strahler besitzt die Kohlefadenlampe eine gleichartige Energieverteilung wie der schwarze Körper (20), allerdings bei anderer Temperatur.

Die aufgestellte Eichkurve prüfte ich an mehreren Nernstbrennern und fand eine Übereinstimmung innerhalb der Größenordnung der Meßfehler. Der benutzte Aufbau war der durch Fig. 1 skizzierte, wobei als Strahler X die einzelnen Nernstbrenner Anwendung fanden. Daß für die Vergleichslampe der Anschluß an die Strahlung des schwarzen Körpers nicht vollkommen ist, wird durch die Tatsache ausgeschlossen, daß die mittelbar durch die Kohlefadenlampe für die Nernstbrenner sich ergebenden Werte vollkommen zueinander paßten und mit den in der Technischen Reichsanstalt bestimmten Eichwerten zusammenfielen.

Für die Eichung wie auch für die Messungen gebrauchte ich als Linse L_R eine der in der Reichsanstalt zur Eichung benutzten Linsen ($f = 13{,}5$ cm), die ihrerseits gegenüber der Strahlung von X her (vgl. Fig. 1) sich untereinander vollkommen gleichartig verhielten. Die Anwendung der Linsensorte war deshalb notwendig, weil die spezifischen, optischen Eigenschaften dieser Linse beim Photometrieren eingehen. Die Eichkurve der Kohlefadenlampe ist folgende (der zugeführte Strom i als Abszisse, die absolute Temperatur T als Ordinate) Fig. 8a u. b.

Da der Strahler X so hohe „schwarze" Temperaturen aufweisen kann — wie es auch wirklich der Fall war —, daß der Strahler V wegen der Belastungsgrenze von seiten des Stromes i nicht auf gleiche Helligkeit gebracht werden kann, brachte ich nach dem bekannten Vorgange zur Schwächung der Strahlung X einen rotierenden Sektor zwischen L_R und V (21).[2]) Dieser Sektor bestand aus zwei geschwärzten Messingscheiben, aus diesen waren zwei gegenüberliegende Quadranten ausgeschnitten. Eine der Scheiben saß fest auf der Achse eines kleinen Motors, die andere dagegen war gegen die Achse drehbar angebracht und konnte gegen die feste Scheibe verschoben werden. Die Einstellung konnte bis auf 0,1 Proz. genau geschehen.

1) Vgl. Nr. (2—4); F. Schlegel, Diss. Berlin 1926.
2) Vgl. Nr. (3), S. 49ff.

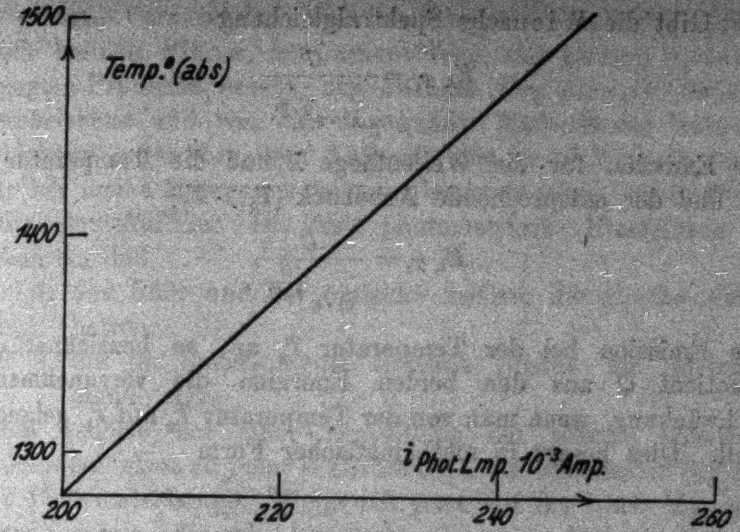


Fig. 8a

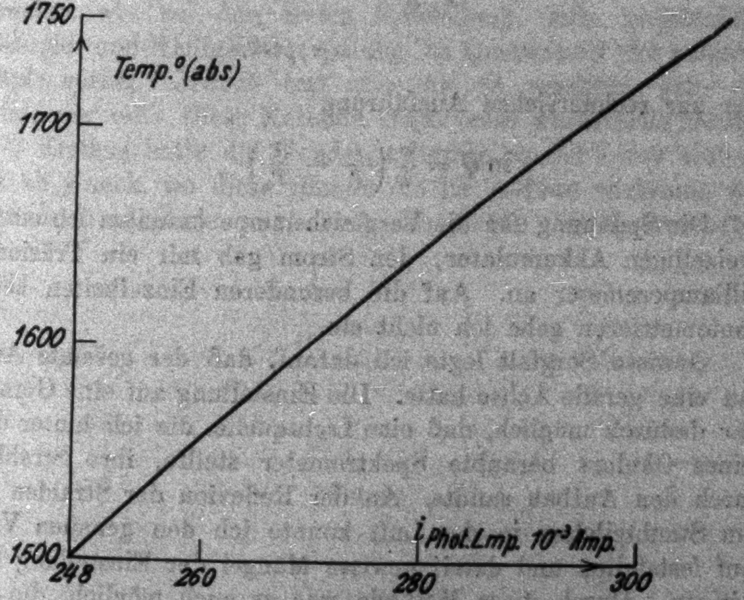


Fig. 8b

Die Schwächung mußte, sooft sie notwendig war, für jede Temperatur und Wellenlänge berechnet werden, und zwar auf Grund folgender Überlegung:

Gibt die Wiensche Spektralgleichung

$$E_{\lambda, T_1} = \frac{C}{\lambda^5 \cdot e^{\frac{c}{\lambda \cdot T_1}}}$$

die Emission für die Wellenlänge λ und die Temperatur T_1 an und der entsprechende Ausdruck ($T_2 > T_1$)

$$E_{\lambda, T_2} = \frac{C}{\lambda^5 \cdot e^{\frac{c}{\lambda \cdot T_2}}}$$

die Emission bei der Temperatur T_2 an, so bezeichnet der Quotient Q aus den beiden Energien die vorzunehmende Schwächung, wenn man von der Temperatur T_2 auf T_1 gelangen will. Dies besagt in mathematischer Form

$$Q = \frac{E_{\lambda, T_1}}{E_{\lambda, T_2}} = \frac{\dfrac{C}{\lambda^5 \cdot e^{\frac{c}{\lambda \cdot T_1}}}}{\dfrac{C}{\lambda^5 \cdot e^{\frac{c}{\lambda \cdot T_2}}}}$$

oder zur rechnerischen Ausführung

$$\text{(2)} \qquad \ln Q = \frac{c}{\lambda}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right).$$

Die Spannung für die Vergleichslampe entnahm ich einem zweizelligen Akkumulator, den Strom gab mir ein Präzionsmilliamperemeter an. Auf die besonderen Einzelheiten beim Photometrieren gehe ich nicht ein.

Gewisse Sorgfalt legte ich darauf, daß der gesamte Aufbau eine gerade Achse hatte. Die Einstellung auf eine Gerade war dadurch möglich, daß eine Lichtquelle, die ich hinter das seines Okulars beraubte Spektrometer stellte, ihre Strahlen durch den Aufbau sandte. An der Reflexion der Strahlen an den Staubteilchen in der Luft konnte ich den genauen Verlauf feststellen und damit gewisse Mängel der Einstellung beseitigen. Durch diese Methode war es auch möglich, die im Spektrometer wirksame Blende ihrer Größe nach zu bestimmen. Diese Kenntnis war für mich wichtig, da ich bei den Vorversuchen zu den Messungen über die Aperturblende im klaren sein mußte.

Diese Vorversuche, wie ich sie jetzt bezeichne, sollten nach meinen Plänen den einen Weg zur Lösung des vorgelegten Problems weisen, den anderen Weg dagegen die oben beschriebene und von mir angewandte Methode der Rohrverschiebung gegenüber dem Aufbau. Die erste Methode, nach der ich meine Messungen begann, benutzte auch den in Fig. 8 skizzierten Aufbau. Die erste photometrische Einstellung geschah so, daß

1. das Rohr und der optische Aufbau die gleiche Achse hatten,
2. die im Spektrometer sitzende Blende die Aperturblende war.

Dann gehörte bei einer Einstellung auf gleiche spektrale Flächenhelligkeit zu jeder Wellenlänge λ ein bestimmter Strom i der Photometerlampe. Wenn ich jetzt vor die Linse L_{Sp} eine Blende setzte, die als Aperturblende einen kleineren räumlichen Winkel bedingte, dann mußten sich dieselben Werte ergeben wie bei der ersten Einstellung, falls gleichmäßige Energie- und Helligkeitsverteilung im Querschnitt der positiven Säule vorlag. Jedoch trat aber wie zu erwarten war, eine Änderung ein. Diese Methode zeigte zwei wesentliche Mängel:

Erstens hatte die Blendenänderung an der Linse erst von da ab Zweck, wo diese Blende die im Aufbau wirksame war. Der Anfangsblende war durch die Größe der Spektrometer-

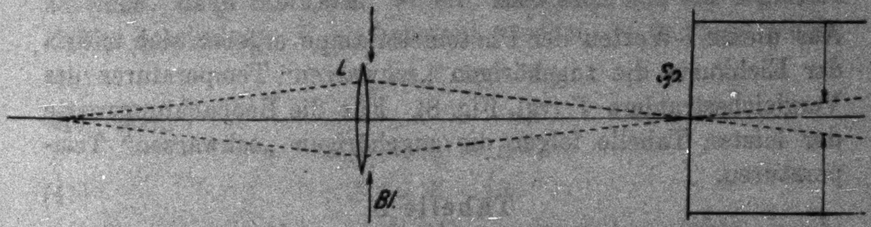


Fig. 9a

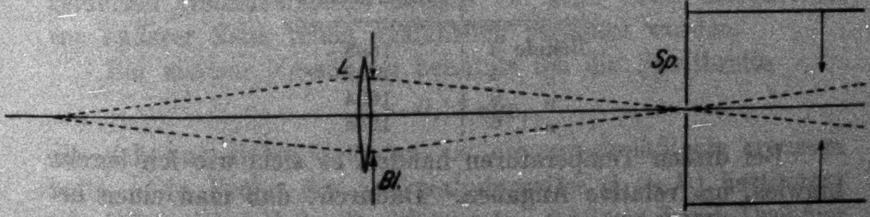


Fig. 9b

blende eine obere Grenze gesetzt; dieses wird durch vorstehende zwei Skizzen (Fig. 9a u. b) deutlich werden.

Zu den kleinen Blendenwerten hin lag in der Natur des Photometrierens eine Grenze.

Zweitens erhielt ich über die eigentliche Helligkeitsverteilung kein klares Bild, da sich für einen räumlichen Winkel, der verschieden helle Lichtzentren erfaßte, beim Photometrieren nur ein Mittelwert verschiedener Helligkeiten ergab. Die verhältnismäßig umfangreichen Messungen nach dieser Methode will ich an dieser Stelle mit Ausnahme eines Beispiels nicht bringen, doch soll mit dessen Hilfe von den Meßwerten an die Auswertung bis zu den Größen der Energie und Helligkeit besprochen werden.

Vorerst gebe ich in der folgenden Tabelle die für die genannte Wellenlänge gemessenen Stromstärken des Photometerstromes, bezogen auf die einzelnen Blendenöffnungen der Linse ϱ, der Druck p war: $p = 2{,}7$ mm Hg (bei 18° C).

Tabelle 2

Ne: $\lambda = 6334$ ÅE ($i = 15{,}10^{-10}$ Amp.)

	Radius der Blende	Phot. 10^{-3} Amp.	Sektor
Blende 3	$\varrho = 7{,}1$ mm	286,6	—
„ 4	5,0 mm	272,0	90/180
„ 5	3,5 mm	277,5	„
„ 6	2,5 mm	278,5	„

Aus diesen i-Werten der Photometerlampe ergeben sich mittels der Eichkurve die zugehörigen „schwarzen“ Temperaturen des Vergleichsstrahlers V (vgl. Fig. 8). Für die Beobachtungswerte der letzten Tabelle folgen die zugehörigen „schwarzen“ Temperaturen.

Tabelle 3

	Absol. Temp.
Blende 3	1668
„ 4	1612
„ 5	1634
„ 6	1636

Bei diesen Temperaturen handelt es sich, wie ich bereits hinwies, um relative Angaben. Dadurch, daß man einen bestimmten Wellenbereich des kontinuierlichen Spektrums auf

gleiche Flächenhelligkeit mit dem zugehörigen Bereich des diskontinuierlichen Spektrums einstellt, ist noch kein eindeutiger Zusammenhang geschaffen, sondern es geht noch die Spaltbreite bedingend ein. Denn durch ihre Änderung wird nur die Flächenhelligkeit des kontinuierlichen Spektrums betroffen, aber nicht die des Linienspektrums. Es läßt sich anscheinend also nur von einer Temperatur bei einer bestimmten Spaltbreite sprechen. Doch wie Untersuchungen gezeigt haben, lassen sich auch für diesen Fall gültige und recht wertvolle Schlüsse ziehen (vgl. Lit. Nr. 3 und 7).

Stellt man auf gleiche Flächenhelligkeit ein, so läßt sich die Energie, die bei einer bestimmten Spaltbreite auf die betrachtete Spektrallinie λ fällt, zum Ausdruck bringen durch das Integral

(3) $$E_w = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} E_\lambda \cdot d\lambda .$$

Hierbei bedeuten:

E_λ den durch die Wiensche Strahlungsformel sich ergebenden Energiewert,

λ_1 u. λ_2 die Grenzen der Spektrallinie λ,

E_w die wahre Energie.

Wenn die Dispersion des Primas im Spektrometer groß genug ist, λ_1 und λ_2 also sich nicht sehr voneinander unterscheiden, dann läßt sich, wofern man sich auf das sichtbare Gebiet beschränkt, E_λ als konstant ansehen, so daß man erhält:

(4a) $$E_w = E_\lambda(\lambda_1 - \lambda_2)$$

oder wenn

$$(\lambda_1 - \lambda_2) = \Delta\lambda ,$$

(4b) $$E_w = E_\lambda \cdot \Delta\lambda .$$

Die genaue theoretische Begründung der soeben durchgeführten Gedankengänge erlasse ich mir, denn hierüber ist von anderer Seite schon ausführlich berichtet worden.

Bei meinen Messungen benutzte ich die Spaltbreite

$$b = 0{,}12\,\text{mm},$$

die sich aus vielen Gründen als die zweckmäßigste erwiesen hatte. Die Breite des Spektralintervalles $(\lambda_1 - \lambda_2)$ bestimmte ich, indem ich bei der Spaltbreite $b = 0{,}12$ mm durch Drehung

des Fernrohres die linke Kante des Spaltfeldes in die Mitte des Fadenkreuzes brachte, die zugehörige Fernrohrstellung (s_2) ablas und dann das Entsprechende für die rechte Kante

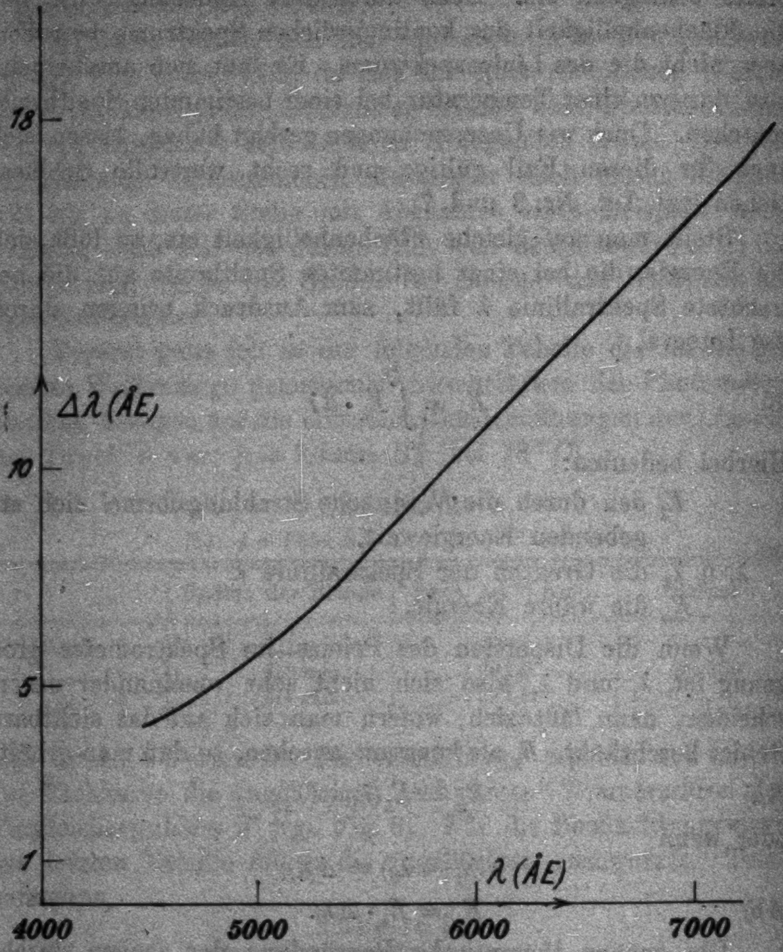


Fig. 10

tat (s_1). Zu diesen Werten s_1 und s_2 gehörten auf Grund der Dispersionskurve Werte von λ, nämlich λ_1 und λ_2. So ließ sich die Differenz

$$\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$$

berechnen. Mit Hilfe eines rein rechnerischen Verfahrens prüfte ich die Differenzwerte nach. Die folgende Tab. 3, wie auch

Fig. 10, geben die Abhängigkeit der $\Delta\lambda$ von den einzelnen Wellenlängen.

Tabelle 4

λ (ÅE)	Element	$\Delta\lambda$ (ÅE)	λ (ÅE)	Element	$\Delta\lambda$ (ÅE)
7066	He	19,0	6074	Ne	11,8
6717	Ne	18,2	6030	„	11,5
6599	„	16,5	5977	„	11,3
6583	„	15,2	5945	„	11,2
6507	„	15,2	5882	„	10,5
6402	„	14,8	5876	He	10,5
6383	„	14,1	5853	Ne	10,4
6334	„	14,0	5401	„	7,8
6305	„	13,9	5048	He	5,8
6267	„	13,2	5016	„	5,6
6217	„	13,0	4922	„	5,0
6143	„	12,3	4713	„	4,4
6096	„	12,0	4472	„	4,0

Unter Ausnutzung dieser Überlegungen lassen sich die in Tabelle 3 angegebenen Temperaturen zweckmäßig verwerten. Werden sie in die Wiensche Gleichung eingesetzt, so ergeben sich die Energiewerte

$$E_\lambda \cdot d\lambda .$$

Da die Umrechnung von „schwarzer" Temperatur auf Energie eine häufige Aufgabe war, berechnete ich für bestimmte Wellenlängen λ bei der variablen Temperatur T die zugehörige Energie und trug diese in Abhängigkeit von T (als Ordinate) logarithmisch (als Abszisse) kurvenmäßig auf; Fig. 11 zeigt einige solcher Strahlungsisochromaten. Zur Berechnung der Werte $E_{\lambda,T}$ benutzte ich in der Wienschen Gleichung

$$E_{\lambda,T} = \frac{c_1}{\lambda^5 \cdot e^{\frac{c_2}{\lambda \cdot T}}},$$

für die Konstante c_1 den Wert

$$c_1 = 3{,}68\,[\mathrm{erg\,cm^2\,sec^{-1}}]$$

und für c_2

$$c_2 = 1{,}45\,[\mathrm{cm\,grad}].$$

Die folgende Tab. 5 enthält die wichtigsten von mir berechneten Werte E.

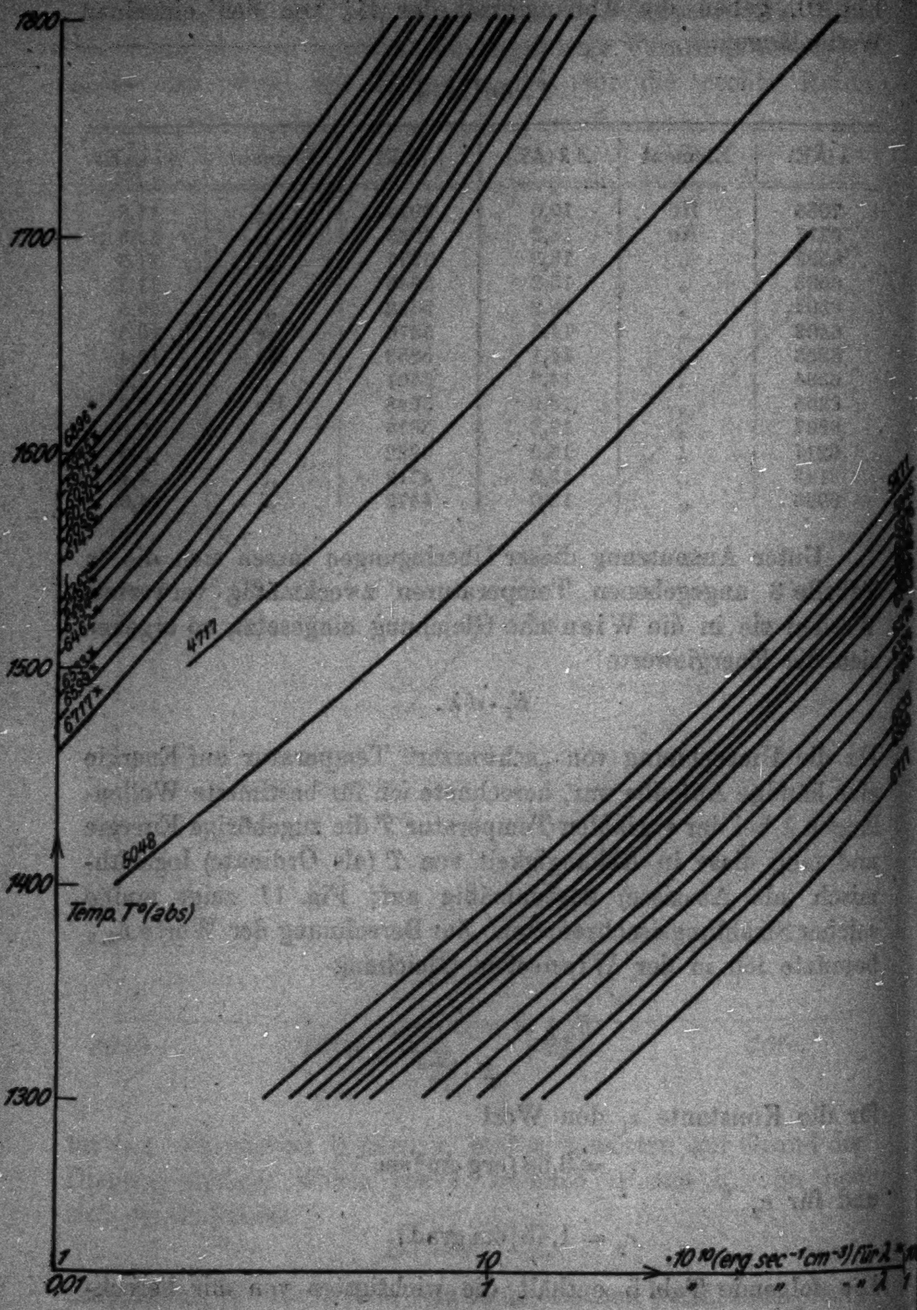

1800
1700
1600
1500
1400
1300
Temp. T° (abs)
4717
5048
1
10
·10 10 (erg sec-1 cm-3) für λ
0,01
1

Fig. 11

Tabelle 5

Element		1800°	1700°	1600°	1500°	1400°
7066	He	233,8	119,6	56,28	23,9	8,99
6717	Ne	166,5	82,3	37,2	15,1	5,42
6599	„	146,9	71,6	31,9	12,8	4,49
6533	„	136,5	66,1	29,2	11,6	4,03
6402	„	117,4	56,0	24,4	9,5	3,22
6334	„	103,2	51,2	22,1	8,5	2,86
6305	„	104,4	49,3	21,1	8,1	2,71
6267	„				7,6	2,58
6143	„	84,9	39,3	16,5	6,2	2,00
6096	„	79,7	36,6	15,3	5,7	1,88
6074	„	77,4	35,5	14,8	5,4	1,75
6030	„	72,9	33,2	13,7	5,0	1,60
5976	„	67,5	30,6	12,5	4,6	1,44
5945	„	64,6	29,1	11,9	4,3	1,35
5882	„	58,9	26,3	10,6	3,8	1,18
5876	He	58,4	26,1	10,5	3,7	1,16
5853	Ne	56,4	25,1	10,1	3,6	1,11
5401	„	26,7	11,1	4,1	1,35	0,376
5048	He	13,2	5,2	1,79	0,542	0,138
5016	„	12,3	4,77	1,65	0,495	0,125
4922	„	9,9	3,79	1,28	0,377	
4713	„	5,97	2,19	0,706	0,196	
4472	„	3,09	1,07			

$\cdot 10^{9}$ [erg sec^{-1} cm^{-3}]

Nach diesen Vorbereitungen ist es möglich, die in Tab. 3 angegebenen Temperaturen in Energiewerte umzurechnen. So ergeben sich unter Benutzung der Kurven in Fig. 11, bzw. der Wienschen Gleichung folgende Energiewerte:

Tabelle 6

	Energie	Schwächung	Energie
Blende 3	3,8	1	3,8
„ 4	2,45	$^1/_2$	4,9
„ 5	2,95	$^1/_2$	5,9
„ 6	3	$^1/_2$	6
	$\cdot 10^{10}$ [erg sec^{-1} cm^{-3}]		$\cdot 10^{10}$ [erg sec^{-1} cm^{-3}]

Der Sinn dieser Ergebnisse wird anschaulicher bei graphischer Darstellung (Fig. 12). Im folgenden sind aufgetragen

die Energiewerte E_{1T} als Ordinate,

das Quadrat des Radius ϱ, der zur kreisförmigen Blende auf L_{Sp} gehört, als Abszisse.

Im Anschluß an diese Untersuchung über die spektrale Energieverteilung ergibt sich die Frage nach der spektralen Helligkeitsverteilung. Diese ermittelt sich verhältnismäßig ein-

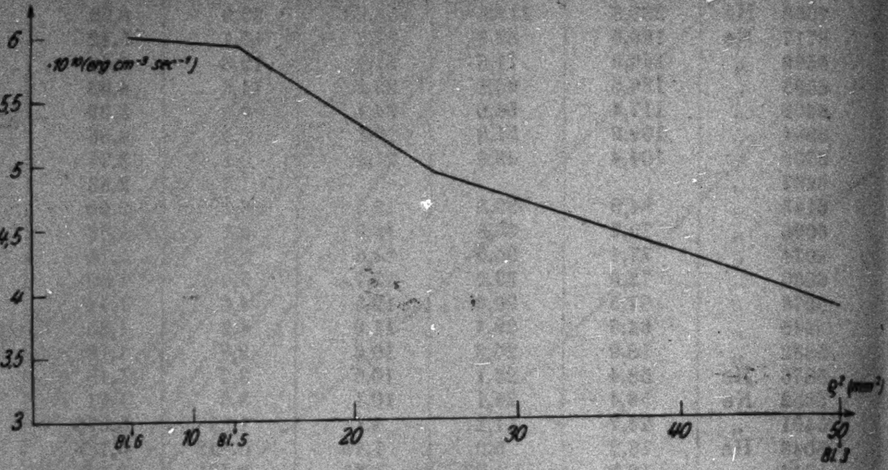


Fig. 12

fach, denn der zu einem Energiewert gehörige Helligkeitswert ist ihm proportional:

$$H = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} H_\lambda \cdot d\lambda = h_\lambda \cdot \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} E_\lambda \cdot d\lambda . \tag{5}$$

$E_\lambda \cdot d\lambda$: Energiewert, h_λ: Proportionalitätsfaktor,
H_λ: Helligkeitswert.

Allerdings ist dieser Proportionalitätsfaktor h_λ (die sogenannte Augenempfindlichkeit) mit der Wellenlänge veränderlich, denn unser Auge ist für die Farben verschieden empfindlich. Zur Bestimmung der Helligkeitswerte benutzte ich die von Ives und Bender veröffentlichten Ergebnisse[1], (22, 23). Die folgende Tabelle und Kurve (Fig. 13) stellen die Augenempfindlichkeit für die verschiedenen Farben (λ) dar; der Höchstwert von h_λ ist gleich 100 Proz. gesetzt.

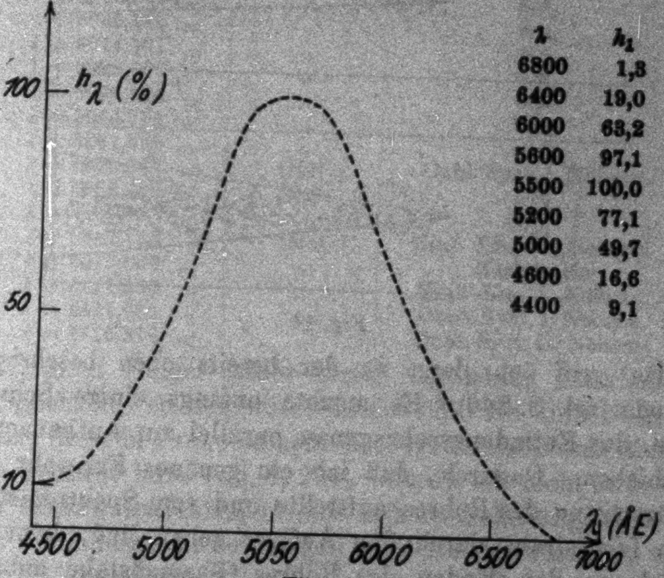
Hieraus ergeben sich für die Energiewerte in Tab. 6 mit Hilfe der Werte E (vgl. Gleichung 4b) die zugehörigen Helligkeitswerte:

---

1) O. Lummer, a. a. O. S. 60ff.

Tabelle 7

	Energie $E_\lambda\,d\lambda$ $\cdot 10^{10}$ erg sec^{-1} cm^{-3}	Energie E_ω $\cdot 10^{3}$ erg sec^{-1} cm^{-3}	Helligkeit H_λ $\cdot 10^{3}$ erg sec^{-1} cm^{-3}
Blende 3	3,8	53,2	13,3
„ 4	4,9	68,6	17,1
„ 5	5,95	83,3	20,8
„ 6	6,0	84	21



λ	h_λ
6800	1,3
6400	19,0
6000	63,2
5600	97,1
5500	100,0
5200	77,1
5000	49,7
4600	16,6
4400	9,1

Fig. 13

Die Ergebnisse der Vorversuche bestätigten mir, was schon mit bloßem Auge zu erkennen war, daß die Helligkeit der positiven Säule zum Rande hin abnimmt. Denn die mittlere Flächenhelligkeit kann, wenn der Öffnungswinkel des Lichtkegels wächst, nur dann kleiner werden, wenn die nunmehr erfaßten Randgebiete geringere Helligkeit besitzen, als die Mitte. Bei gleichmäßiger Energie- und Helligkeitsverteilung hätte sich, da der Strahler X sowie der Vergleichsstrahler V in den gleichen räumlichen Winkel hineinstrahlten, die Helligkeit bei Änderung der Blenden auf L_{S_p} nicht ändern dürfen. Graphisch hätten sich unter dieser Bedingung für die Energiewerte (E_λ als Ordinate, ϱ^2 als Abszisse) Parallelen zur Abszissenachse gezeigt.

III. Die Messungen und ihre Auswertung

Diese Untersuchungen gab ich auf, da sie in ihren Resultaten nur Mittelwerte der Helligkeit aus den einzelnen axialen Lichtzentrenkegeln anzugeben vermochten. Die beiden Fig. 14 stellen diese Erscheinung sinnbildlich dar.

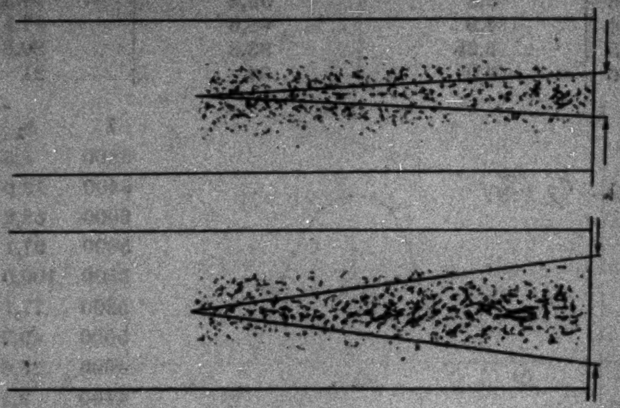


Fig. 14

Da griff ich denn zu der bereits oben beschriebenen Methode (vgl. S. 246). Es machte anfangs einige Schwierigkeiten, das Entladungsrohr genau parallel zur Aufbauachse zu verschieben. Dadurch, daß ich ein genaues Fernrohr in der Verlängerung des Rohres aufstellte und vom Spektrometer aus einen Lichtstrahl durch den Aufbau gehen ließ, konnte ich, da ich an den Enden des Rohres Glasmaßstäbe anbrachte, die gewünschte Stellung (Abstand „r“ von der Rohrachse) scharf erreichen bzw. kontrollieren. Die Einstellung war bis auf 0,1 mm genau. Nach Vorversuchen ging ich an systematische Messungen und zwar bei den Drucken

$$\left.\begin{array}{l} p_1 = 1{,}8 \text{ mm Hg} \\ p_2 = 2{,}7 \;\;\text{„}\;\;\text{„} \\ p_3 = 5{,}0 \;\;\text{„}\;\;\text{„} \\ p_4 = 10{,}0 \;\;\text{„}\;\;\text{„} \\ p_5 = 17{,}5 \;\;\text{„}\;\;\text{„} \end{array}\right\} t = 18^\circ \text{ C.}$$

Bei diesen Drucken variierte ich die Stromstärken, und zwar bei

$p_1 : i = 10, 15, 20$ MA.
$p_2 : i = 10, 15, 20, 25$ „
$p_3 : i = 20, 25$ „
$p_4 : i = 20, 25$ „
$p_5 : i = 40$ „

Diese Messungen nahm ich vor bei den Wellenlängen

Tabelle 8

λ = 7065,719 ÅE	(He)	Dubl. Syst. II. Nebens.
λ = 6717,042 „	(Ne)	mp_5
λ = 6598,953 „	„	mp_2
λ = 6532,881 „	„	mp_7
λ = 6402,246 „	„	mp_9
λ = 6334,428 „	„	mp_8
λ = 6304,789 „	„	mp_6
λ = 6266,495 „	„	mp_5
λ = 6143,061 „	„	mp_6
λ = 6096,162 „	„	mp_4
λ = 6074,337 „	„	mp_3
λ = 6029,999 „	„	mp_2
λ = 5975,534 „	„	mp_5
λ = 5944,834 „	„	mp_4
λ = 5881,896 „	„	mp_2
λ = 5875,867 „	(He)	Dubl. Syst. I. Nebens.
λ = 5852,488 „	(Ne)	mp_1
λ = 5400,556 „	„	mp_1
λ = 5047,735 „	(He)	Einf. Lin. II. Nebens.
λ = 5015,680 „	„	Hauptserie
λ = 4921,930 „	„	Einf. Lin. I. Nebens.
λ = 4471,681 „	„	Dubl. Syst. I. Nebens.
λ = 4713,378 „	„	Dubl. Syst. II. Nebens.

Die Helligkeit einiger dieser Linien lag häufig unterhalb der Meßmöglichkeit, so daß diese Linien für die aufzustellenden Resultate nicht in Frage kamen. Größere Stromstärken aber, als ich sie genannt habe (vgl. S. 264), konnte ich nicht anwenden, da die Aluminiumelektroden eine höhere Belastung nicht vertrugen. Die Linien, die bei einigen Einstellungen ausfielen, waren

λ = 7066 ÅE	λ = 5016 ÅE
λ = 5853 „	λ = 4922 „
λ = 5400 „	λ = 4477 „

In den folgenden Tabellen gebe ich die Energiewerte E_w meiner Messungen an. Während die Angaben des Druckes p, der Wellenlänge λ (in ÅE) und des Stromes i (in Milliampere) ohne weiteres verständlich sind, ist über „r“ und ΔE_w folgendes zu sagen:

„r“ ist der Abstand der Photometrierachse von der Rohrachse in Millimetern. Das maximale r = 7,5 mm ist so gewählt, daß der Lichtzentrenkegel an seiner weitesten Stelle noch um 1 mm von der Wandung entfernt war.

ΔE_w ist die Änderung der Energie E_w, bezogen auf den Wert in der Mitte ($r = 0$) und auf den Abstand r = 7,5 mm, ausgedrückt in Prozenten. Die Werte E_w sind sämtlich mit 10^2 zu multiplizieren und besitzen die Dimension:

$$[\text{erg sec}^{-1}\,\text{cm}^{-2}].$$

Anschließend an diese Tabellen folgen Kurvendarstellungen der Energien E_w, die logarithmisch als Ordinaten in Abhängigkeit von dem Abstand r der optischen Achse aufgetragen sind.

Tabelle 9
$p = 1,3$ mm Hg

λ (ÅE)	Serie	$i_R = 10 \cdot 10^{-3}$ Amp.					
		$r = 0$ mm	1	2,5	4	7,5	%
6717	mp_5	89,2	60	43,9	39,1	34,1	61
6599	mp_2	70,3	46,5	35,2	30,6	28,2	60
6583	mp_7	67,9	45,1	32,9	29,4	26,9	63
6402	mp_9	55	40,3	30,8	28	24,8	54
6334	mp_8	32,9	22,6	17,1	15	13	60
6305	mp_6	40	28,3	21,9	19,9	18	55
6266	mp_5	22,7	15,4	12	11	9,8	57
6143	mp_6	31	19,8	14,3	12,8	11,8	61
6096	mp_4	37	22,5	16,3	14,2	13	65
6074	mp_3	30,8	20,4	15,3	15,2	12,1	61
6030	mp_2	19,6	13,8	10,7	9,8	9	55
5976	mp_5	17	11,6	9,3	8,7	7,7	55
5945	mp_4						
5882	mp_3	17,4	11,8	9,8	9,2	8,3	53
5876	1. Nebens. Dublett	135,3	78,1	55,9	48,1	42	68
5048	2. Nebens. Einf.-L.						
4713	2. Nebens. Dublett						
		$i_R = 15 \cdot 10^{-3}$ Amp.					
6717	mp_5	114,6	82,1	63,9	58	50	56
6599	mp_2	87,8	65,9	53,1	48,6	43,2	51
6583	mp_7	84,3	62,4	50	45,9	42,1	50
6402	mp_9	71,1	52	40,4	37,1	33	53
6334	mp_8	42	29,6	22,4	20,4	18,8	54
6305	mp_6	43,9	31,6	24,1	22	19,9	54
6266	mp_5	40,4	27,8	21,6	19,6	17,5	55
6143	mp_6	35,3	25,1	19,4	17,5	16,8	55
6096	mp_4	57,1	41,6	32,4	29,5	27,5	50
6074	mp_3	54,5	39,3	30,4	27,5	25,3	51
6030	mp_2	27,2	18,6	14,4	12,8	12	55
5976	mp_5	22,3	15	11,4	10,2	9,7	54
5945	mp_4	28,1	19,8	15	13,6	12,7	55
5882	mp_3	21	15,1	11,7	10,6	10	52
5876	1. Nebens. Dublett	152,7	110,3	85,2	76,1	68	55
5048	2. Nebens. Einf.-L.	1,9	1,45	1,18	1,1	1,05	45
4713	2. Nebens. Dublett	0,68	0,48	0,38	0,37	0,35	44

Tabelle 9 (Fortsetzung)

$p = 1,8$ mm Hg

λ (ÅE)	Serie	$i_R = 20 \cdot 10^{-3}$ Amp.					
		$r = 0$ mm	1	2,5	4	7,5	%
6717	mp_5	130,7	100,8	85	77,9	73	44
6599	mp_2	141,2	110	92,1	85,9	82,1	42
6533	mp_7	103	81,8	67,9	64,9	60	42
6402	mp_9	110,8	88,2	74,1	69	64,9	41
6334	mp_8	63,7	49,4	41,2	39	36,9	41
6305	mp_6	47,6	36,4	29,8	27,6	26,2	44
6266	mp_5	52	41,1	33	30,9	29,9	40
6143	mp_6	40,3	31,6	25	23,6	22	45
6096	mp_4	68,4	54,7	50,2	43,1	39,1	43
6074	mp_3	60,3	47,7	39,4	37,3	35	42
6030	mp_2	32,6	23,1	17,4	16	15,3	54
5976	mp_5	29	20,6	16,2	14,8	14,1	52
5945	mp_4	35,3	25,1	19,5	17,6	17	51
5882	mp_3	22,6	17,5	14,6	13,8	12,6	48
5876	1. Nebens. Dublett	265	195	155	144	140	47
5048	2. Nebens. Einf.-L.	2,3	1,7	1,45	1,35	1,30	43
4713	2. Nebens. Dublett	0,90	0,68	0,55	0,52	0,5	44

Tabelle 10

$p = 2,7$ mm Hg

λ (aE)		Serie	$i_R = 10 \cdot 10^{-3}$ Amp.					
			$r = 0$ mm	1	2,5	5	7,5	%
6717	Ne	mp_5	49,1	28,5	20,8	16,7	15,7	68
6599	„	mp_2	38,2	22,5	15,7	12,6	11,4	70
6533	„	mp_7	37,6	21,8	15,2	12,3	11,2	70
6402	„	mp_9	30,4	18	12,3	9,8	9,5	69
6334	„	mp_8	14,2	9	6,6	5,2	4,7	67
6305	„	mp_6	20,5	13,5	9,7	7,8	6,8	66
6266	„	mp_5	21,1	14	10,1	8,1	7	67
6143	„	mp_6	12,9	8,7	6,4	5,2	4,5	66
6096	„	mp_4	25	15,2	12,3	8,4	7,3	71
6074	„	mp_3	27,5	15,6	12,3	8,6	7,9	71
6030	„	mp_2	6,3	4,4	3,8	2,8	2,2	65
5976	„	mp_5	5,9	4,0	3,0	2,4	2,1	64
5945	„	mp_4	14,2	9,1	6,6	5,5	5,1	64
5882	„	mp_3	4,75	3,4	2,6	2,2	2,0	58
5876	He	1. Nebens. Dublett	55,3	31,5	22	17,8	16,5	70
5048	„	2. Nebens. Einf.-L.	0,278	0,213	0,169	0,148	0,131	51
4713	„	3. Nebens. Dublett	0,191	0,145	0,117	0,106	0,102	48

Tabelle 10 (Fortsetzung)

$p = 2,7$ mm Hg

λ (ÅE)		Serie	$i_R = 15 \cdot 10^{-3}$ Amp.					
			r = 0 mm	1	2,5	5	7,5	%
6717	Ne	mp_5	75,3	50,2	36,7	18	30,2	60
6599	„	mp_2	69,4	45,3	34,2	29,5	27,6	60
6533	„	mp_7	69,4	45,2	34,1	29,5	27,6	60
6402	„	mp_9	65	41,1	30,2	26,3	25	62
6334	„	mp_8	16,8	12,2	9,1	7,9	7,2	57
6305	„	mp_6	28,2	19,5	14,6	12,8	12	57
6266	„	mp_5	30	20,5	15,5	13,3	12,5	58
6143	„	mp_6	16,2	11,3	8,7	7,6	7	56
6096	„	mp_4	32,6	22,1	17	14,5	14	57
6074	„	mp_3	35,2	24,1	18	15,4	15,1	57
6030	„	mp_2	9,5	6,8	5,2	4,2	4,0	58
5976	„	mp_5	9,0	6,4	4,9	4,4	3,7	59
5945	„	mp_4	17,1	12,2	9,5	8,3	7,6	56
5882	„	mp_2	8,4	6,0	4,6	4,0	3,7	56
5876	He	1. Nebens. Dublett	96,3	64,1	47,9	41,2	38	60
5048	„	2. Nebens. Einf.-L.	0,45	0,35	0,29	0,25	0,23	50
4713	„	2. Nebens. Dublett	0,241	0,175	0,143	0,133	0,130	46

λ (ÅE)		Serie	$i_R = 20 \cdot 10^{-3}$ Amp.					
6717	Ne	mp_5	106,3	72,4	54,1	47	45,5	57
6599	„	mp_2	88,2	60,1	45	38,9	37	58
6533	„	mp_7	95,3	66,1	50,1	43,6	24,1	56
6402	„	mp_9	78,4	54,2	42	36,5	35,1	55
6334	„	mp_8	34,9	23,8	18,6	16,4	16	55
6305	„	mp_6	47,4	34,2	26	23,2	22	53
6266	„	mp_5	48,2	34,9	27,1	24,2	23,1	52
6143	„	mp_6	34,5	23,6	18,4	16,3	15,5	54
6096	„	mp_4	52,3	37,1	29	25,3	24,1	54
6074	„	mp_3	55	39,1	30,2	26,6	25	55
6030	„	mp_2	20,1	15,3	12,8	10,6	10,2	49
5976	„	mp_5	19	13,9	11,6	9,8	9	58
5945	„	mp_4	33,2	26,1	19,9	18	17,5	54
5882	„	mp_2	18,1	14,3	10,1	8,9	8,5	53
5875	He	1. Nebens. Dublett	161,7	110,3	80,4	71,9	69,8	56
5048	„	2. Nebens. Einf.-L.	1,50	1,15	0,92	0,83	0,75	50
4713	„	2. Nebens. Dublett	0,71	0,55	0,46	0,41	0,38	45

Tabelle 10 (Fortsetzung)

$p = 2,7$ mm Hg

λ (ÅE)		Serie	$i_B = 25 \cdot 10^{-3}$ Amp.					
			$r = 0$ mm	1	2,5	5	7,5	%
6717	Ne	mp_5	145,7	108,6	84,3	75,2	69,9	52
6599	„	mp_2	100,8	74,3	59,2	51,9	49,2	51
6533	„	mp_7	104,9	80	62,8	56	51,1	51
6402	„	mp_9	110,7	84,4	68,2	59,1	54	51
6334	„	mp_8	44	31,9	25,2	22,1	21	53
6305	„	mp_6	51,9	37,6	29,9	27,1	25,8	50
6266	„	mp_5	69	49,2	37,5	35,1	34,2	51
6143	„	mp_6	40,6	30,2	28,6	21,1	20	51
6096	„	mp_4	62,7	46,3	36,2	32,3	31,5	49
6074	„	mp_3	74,4	58	40,6	36,1	35	53
6030	„	mp_2	29,1	21,6	17,5	15,8	15,2	48
5976	„	mp_5	22,1	16,2	12,9	11,6	11,1	50
5945	„	mp_4	48,3	35	27,5	23,2	22,5	53
5882	„	mp_2	20,9	15,6	12,5	11,3	10,4	50
5876	Ne	1. Nebens. Dublett	225	165	134	112	101,3	55
5048	„	2. Nebens. Einf.-L.	1,70	1,22	0,95	0,865	0,860	49
4713	„	2. Nebens. Dublett	0,711	0,518	0,438	0,405	0,394	44

Tabelle 11

$p = 5$ mm Hg

λ (ÅE)	Serie		$i_B = 20 \cdot 10^{-3}$ Amp.					
			$r = 0$ mm	1	2,5	5	7,5	%
6717	He	mp_5	90,8	54,3	36,7	29,2	26,1	70
6599	„	mp_3	55,4	34,7	25,3	20,5	17,9	68
6533	„	mp_7	87,5	50,6	34,7	28,2	25	70
6402	„	mp_9	98,8	61,4	42,7	34,2	30,1	69
6334	„	mp_8	31,2	21,8	16,2	13,1	11,3	65
6305	„	mp_6						
6266	„	mp_5	47,3	31,9	23,3	17,7	14,1	70
6143	„	mp_8	26,4	17,2	12,5	9,6	8,3	68
6096	„	mp_4	49,3	33,5	24,1	18,6	16	67
6074	„	mp_3	44,2	29,1	20,6	15,5	12,5	72
6030	„	mp_2	13,5	9	6,6	5,4	4,6	66
5976	„	mp_5	11,6	8,2	6,1	5,0	4,2	64
5945	„	mp_4	34,3	22,1	16,5	13,3	11,1	65
5882	„	mp_2						
5876	Ne	1. Nebens. Dublett	68,4	40,2	28,1	23	20,9	70
5048	„	2. Nebens. Einf.-L.						
4713	„	2. Nebens. Dublett						

Tabelle 11 (Fortsetzung)

$p = 5$ mm Hg

λ (ÅE)	Serie		$i_R = 25 \cdot 10^{-3}$ Amp.					
			$r = 0$ mm	1	2,5	5	7,5	%
6717	Ne	mp_5	138,7	86,4	61,1	53,6	52,1	62
6599	„	mp_2	78,4	51	38,2	32,8	31,5	60
6533	„	mp_7	92,3	55,1	40	35,2	33,9	63
6402	„	mp_9	145,7	92,3	68,4	59,5	58,1	60
6334	„	mp_8	42	27,9	20,8	18,0	17,2	58
6305	„	mp_6						
6266	„	mp_5	70,7	50,3	35,1	29,2	27	61
6143	„	mp_6	39,3	26,4	19,5	16,9	15,9	59
6096	„	mp_4	60,4	42,3	32,1	27,6	26,2	57
6074	„	mp_3	53,5	35,2	25,5	21,6	20,2	62
6030	„	mp_2	21,2	13,6	10,1	8,5	8,0	62
5976	„	mp_5	16,1	10,9	8,5	6,8	6,4	60
5945	„	mp_4	56,2	35,3	24,5	20,6	20	64
5882	„	mp_2						
5876	He	1. Nebens. Dublett	90,7	57,4	42,3	36,5	35,2	61
5048	„	2. Nebens. Einf.-L.						
4713	„	2. Nebens. Dublett						

Tabelle 12

$p = 10$ mm Hg

λ (ÅE)	Serie	$i_R = 20 \cdot 10^{-3}$ Amp.					
		$r = 0$ mm	1	2,5	5	7,5	%
6717	mp_5	58,6	43,5	31,6	24,5	20,5	77
6599	mp_2	36,4	18,6	12,4	9,6	8,5	76
6533	mp_7	76,2	39,5	26,4	20,7	18,6	76
6402	mp_9	93,1	52,8	36,4	29,2	26,6	72
6334	mp_8	25,6	16,1	11,5	9,3	8,4	67
6305	mp_6	17,7	8,4	5,95	4,85	4,51	75
6266	mp_5	30,2	17,6	12,2	9,6	8,5	71
6143	mp_6	17,5	8,3	5,6	4,6	4,4	75
6096	mp_4	37,3	20,2	13,5	10,7	9,5	74
6074	mp_3	39,1	21,1	14,2	10,9	10,0	75
6030	mp_2	8,8	5,1	3,55	2,93	2,7	69
5976	mp_5	6,6	3,98	2,82	2,31	2,1	68
5945	mp_4	24,5	15	10,7	8,7	7,8	68
5882	mp_2						
5876	1. Nebens. Dublett	44,5	22,3	14,7	11,5	10,0	77
5048	2. Nebens. Einf.-L.						
4713	2. Nebens. Dublett						

Tabelle 12 (Fortsetzung)

$p = 10$ mm Hg

λ (ÅE)	Serie	$i_R = 25 \cdot 10^{-3}$ Amp.					
		$r = 0$ mm	1	2,5	5	7,5	%
6717	mp_3	111,7	65,4	44,3	35,8	33,2	70
6599	mp_2	53,4	29,5	20,6	17	16,1	70
6533	mp_7	77,8	45,5	31,9	26,3	24,6	68
6402	mp_9	120,2	77,1	55,3	45	40,7	66
6334	mp_8	36,2	23,8	17,5	14,8	13,7	62
6305	mp_6	32,9	19,5	18,7	11,5	10,9	66
6266	mp_5	45,1	27,2	19,3	16,1	14,9	67
6143	mp_6	32,3	18,6	13,2	11,0	10,5	67
6096	mp_4	49,8	29,5	21,2	17,5	16,5	66
6074	mp_3	43,2	26	18,8	15,2	14,2	67
6030	mp_2	15,3	9,5	6,85	5,6	5,18	65
5976	mp_5	10,6	6,6	4,75	4,0	3,71	64
5945	mp_4	34,3	20,5	14,6	12,0	11,5	66
5882	mp_2						
5876	1. Nebens. Dublett	59,5	34,9	23,6	19,6	18,6	69
5048	2. Nebens. Einf.-L.						
4713	2. Nebens. Dublett						

$p = 17,5$ mm Hg

λ (ÅE)	Serie	$i_R = 40 \cdot 10^{-3}$ Amp.					
		$r = 0$ mm	1	2,5	5	7,5	%
6717	mp_3	126,7	57,4	37,2	28,1	23,9	81
6599	mp_2	55,3	27,1	17,3	13,2	11,1	80
6533	mp_7	68,4	36,2	24,1	18,0	14,9	78
6402	mp_9						
6334	mp_8	83,9	42,5	32,4	24,6	20,8	75
6305	mp_6						
6266	mp_5	78,4	33,8	21,6	16,2	13,9	82
6143	mp_6	120,4	51,2	34,5	26,6	23,6	80
6096	mp_4	80,3	38,2	25,4	19,5	16,9	79
6074	mp_3						
6030	mp_2						
5976	mp_5						
5945	mp_4	43,8	21,6	14,5	11,3	10	77
5882	mp_2						
5876	1. Nebens. Dublett	61	29,1	18,7	14,4	11,5	81
5048	2. Nebens. Einf.-L.						
4713	2. Nebens. Dublett	0,15	0,083				

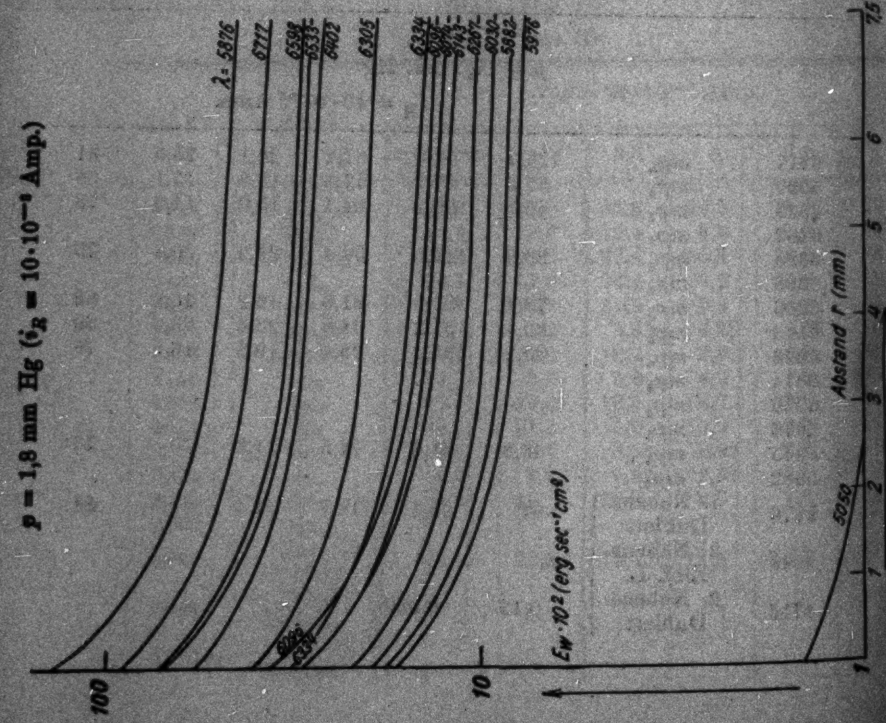

p = 1,8 mm Hg (i_R = 10·10⁻⁸ Amp.)
λ = 5876
6717
6598
6533
6402
6305
6334
6096
6074
6143
6267
6030
5882
5976
6096
6334
5050
100
10
1
$E_W \cdot 10^2$ (erg sec⁻¹ cm³)
Abstand r (mm)
1
2
3
4
5
6
7,5

Fig. 15

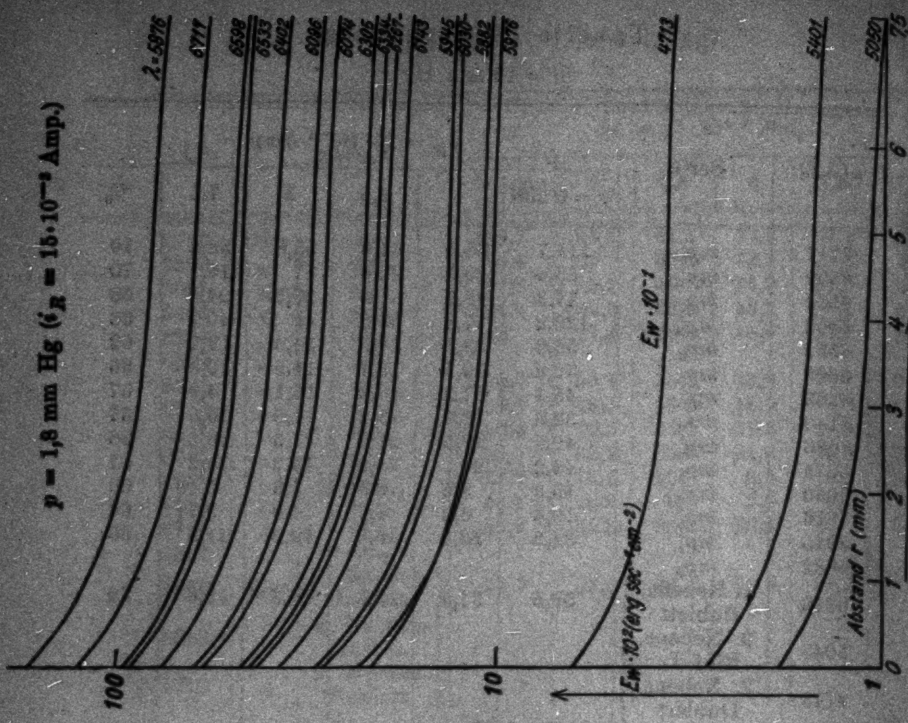
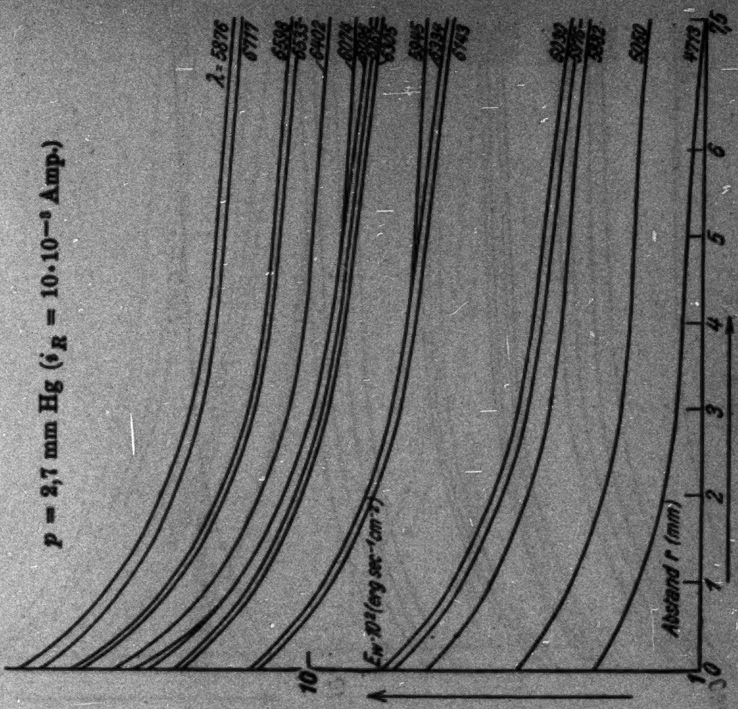
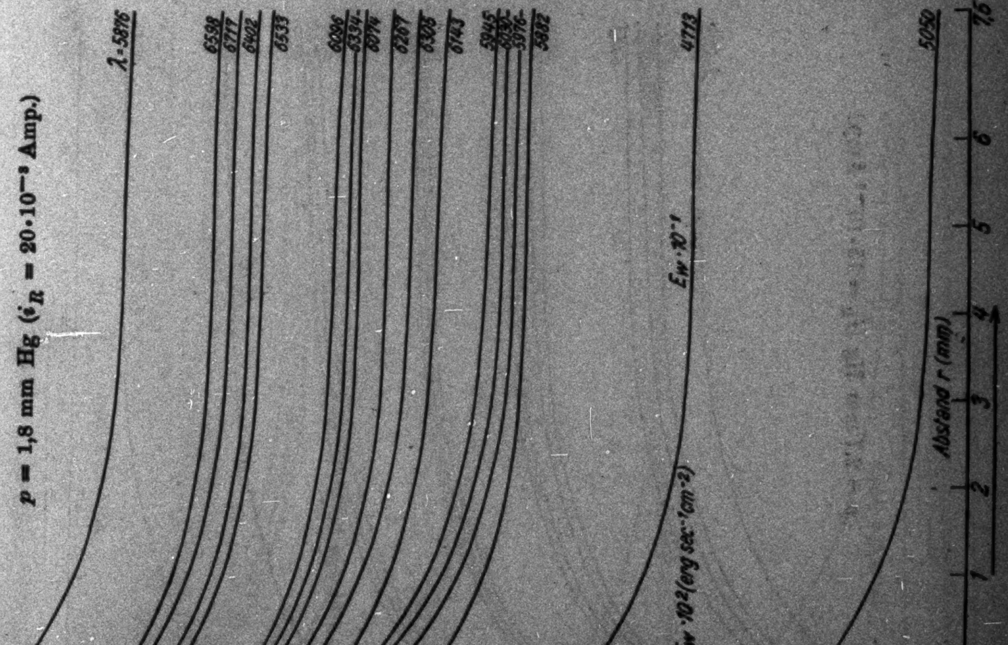

p = 1,8 mm Hg (i_R = 15·10⁻⁸ Amp.)
λ = 5876
6717
6598
6533
6402
6096
6074
6305
6334
6267
6143
5945
6030
5882
5976
4713
5401
5050
$E_W \cdot 10^{-1}$
$E_W \cdot 10^2$ (erg sec⁻¹ cm⁻³)
100
10
1
Abstand r (mm)
0
1
2
3
4
5
6
7,5

Fig. 16



p = 2,7 mm Hg (i_R = 10·10^{-5} Amp.)
λ = 5876
6717
6598
6402
5945
6143
5050
4713
$E_W \cdot 10^2$ (erg sec^{-1} cm^{-2})
Abstand r (mm)
10
1
0
1
2
3
4
5
6
7,5

Fig. 18



p = 1,8 mm Hg (i_R = 20·10^{-5} Amp.)
λ = 5876
6598
6717
6402
6533
6096
6334
6074
6217
6305
6143
5945
5976
5882
4713
5050
$E_W \cdot 10^{-1}$
$E_W \cdot 10^2$ (erg sec^{-1} cm^{-2})
Abstand r (mm)
100
10
1
1
2
3
4
5
6
7,5

Fig. 17

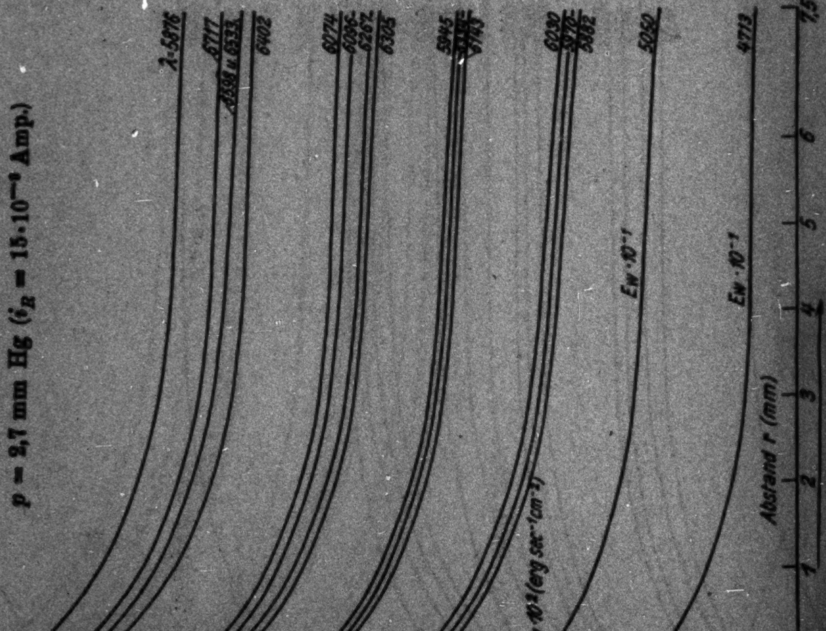

p = 2,7 mm Hg (i_R = 15·10⁻⁶ Amp.)
λ=5876
6717
5598 u 6533
6402
6074
6096
5267
6305
5945
5852
5743
6030
5976
5882
5050
4713
$E_W \cdot 10^2$ (erg sec⁻¹ cm⁻²)
$E_W \cdot 10^{-1}$
$E_W \cdot 10^{-1}$
Abstand r (mm)
100
10
1
0 1 2 3 4 5 6 7,5

Fig. 19

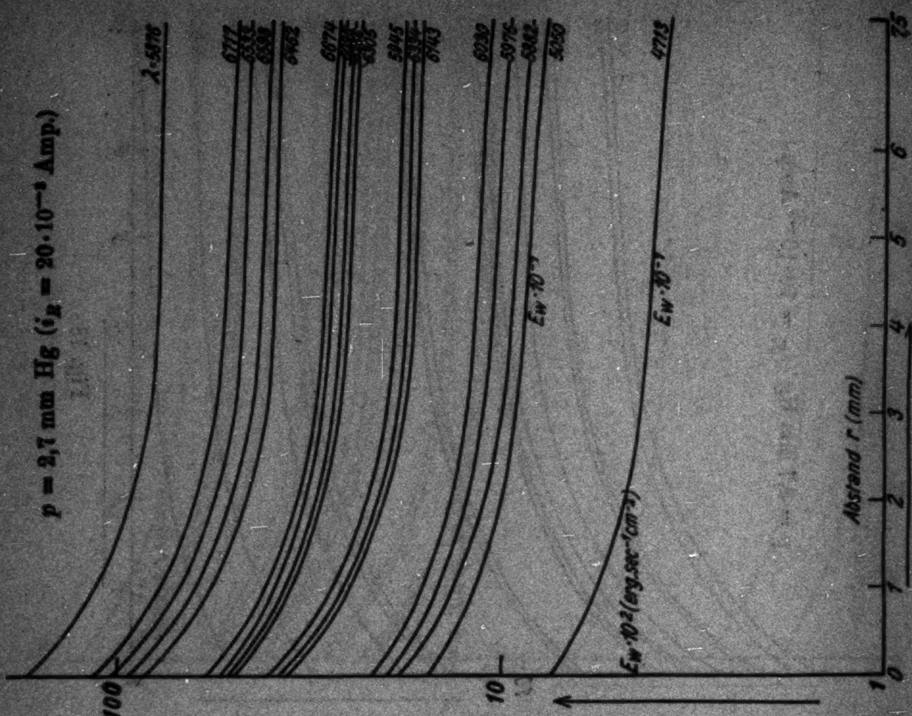

p = 2,7 mm Hg (i_R = 20·10⁻⁶ Amp.)
λ=5876
6717
6533
6598
6402
6074
6305
5945
5743
6030
5976
5882
5050
4713
$E_W \cdot 10^2$ (erg sec⁻¹ cm⁻²)
$E_W \cdot 10^{-1}$
$E_W \cdot 10^{-1}$
Abstand r (mm)
100
10
1
0 1 2 3 4 5 6 7,5

Fig. 20

$p = 2{,}7$ mm Hg ($i_R = 25 \cdot 10^{-3}$ Amp.)

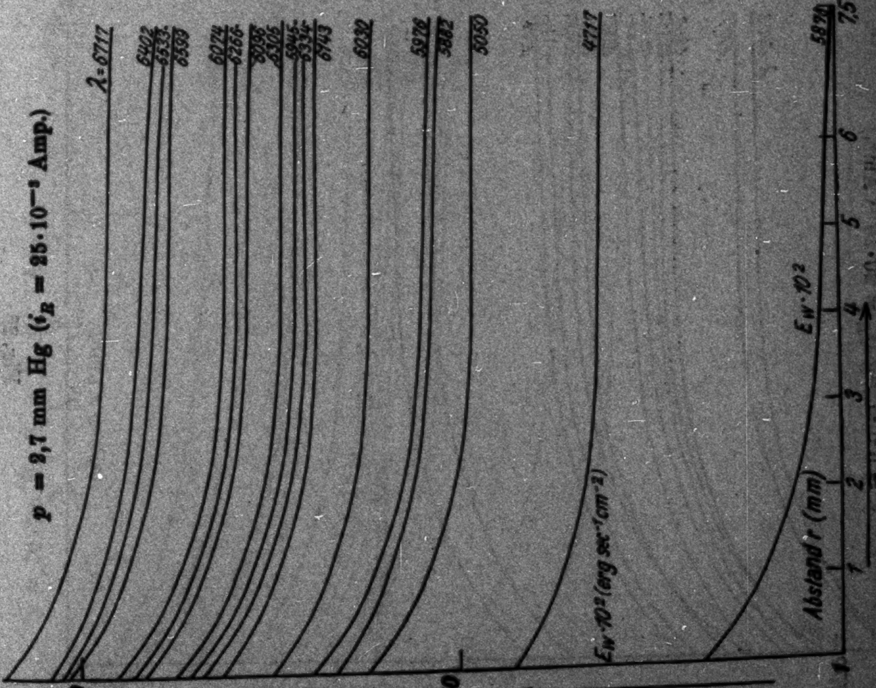


Fig. 21

$p = 5$ mm Hg ($i_R = 20 \cdot 10^{-3}$ Amp.)

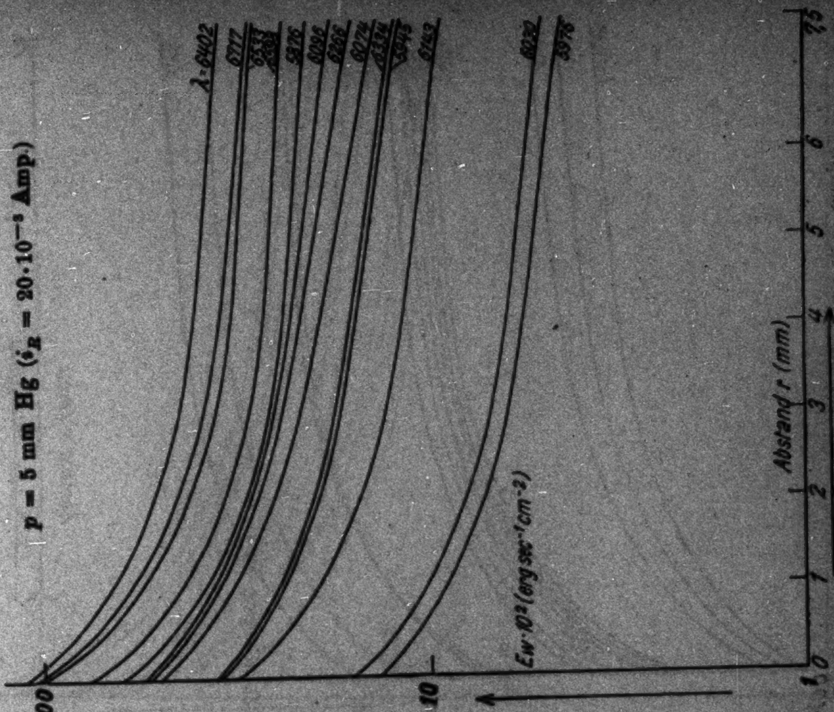


Fig. 22

$p = 5$ mm Hg ($i_R = 20 \cdot 10^{-3}$ Amp.)

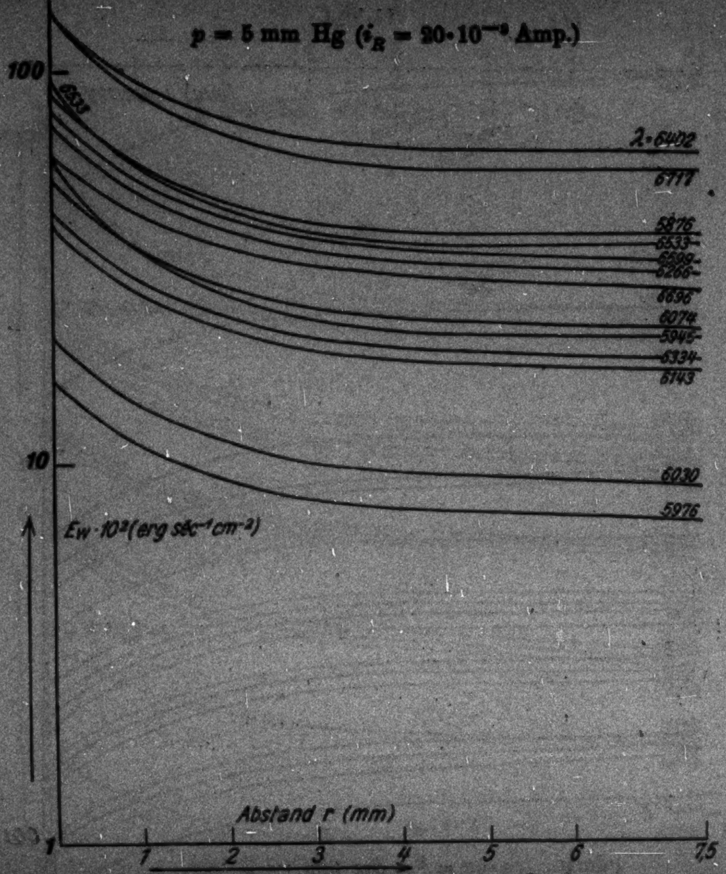


Fig. 23

$p = 10$ mm Hg ($i_R = 25 \cdot 10^{-3}$ Amp.)

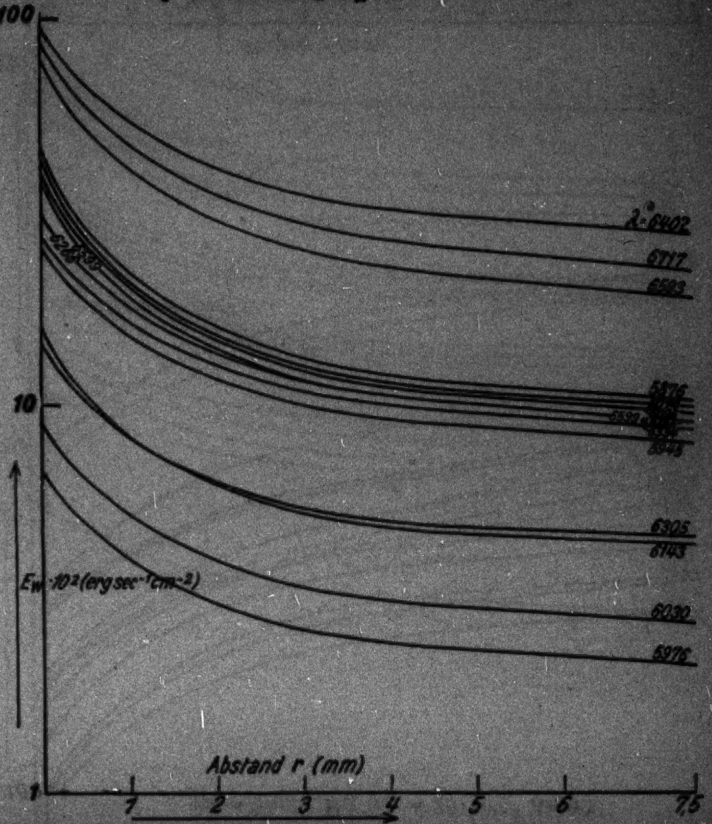


Fig. 24

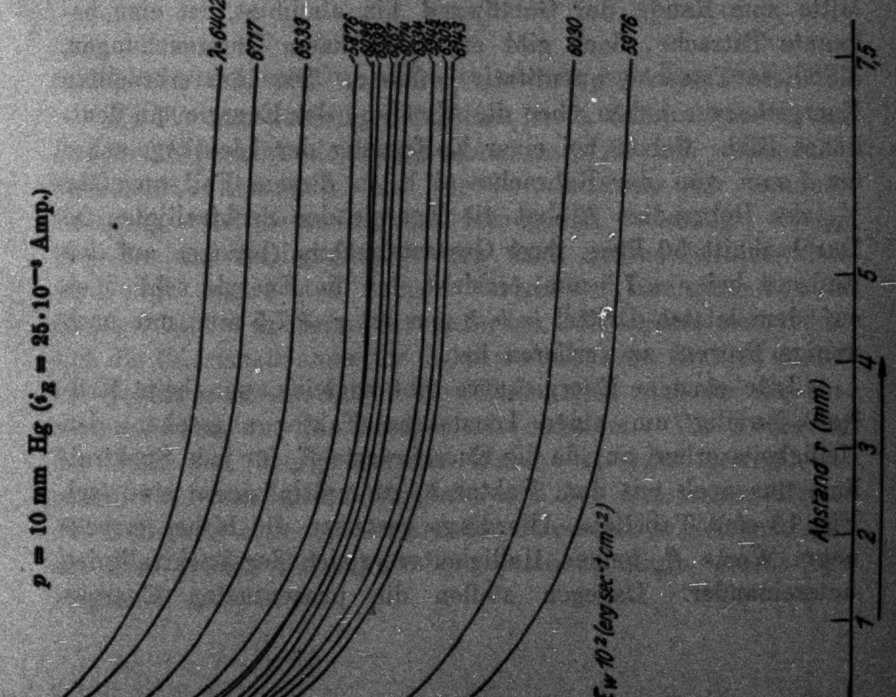

p = 10 mm Hg (i_R = 25·10⁻⁵ Amp.)
λ=6402
6717
6533
5976
6030
E_W·10²(erg sec⁻¹cm⁻²)
100
10
1
Abstand r (mm)
1
2
3
4
5
7,5

Fig. 25

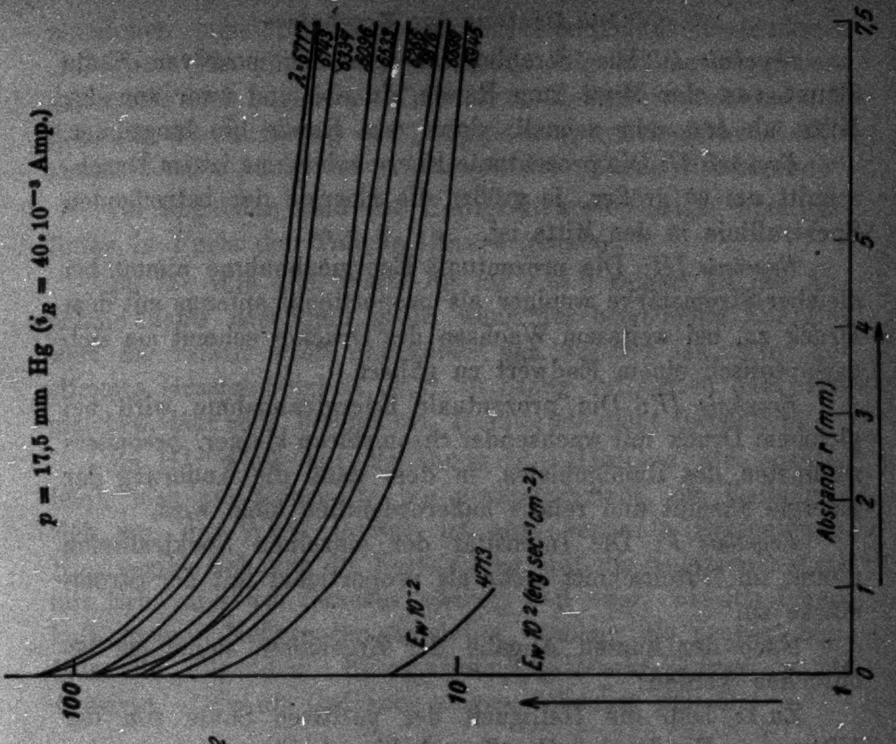

p = 17,5 mm Hg (i_R = 40·10⁻⁵ Amp.)
λ=6717
6143
6334
6096
6532
4713
E_W·10⁻²
E_W·10²(erg sec⁻¹cm⁻²)
100
10
1
Abstand r (mm)
0
1
2
3
4
5
7,5

Fig. 26

IV. Die Deutung der Ergebnisse

Ergebnis I: Die Strahlungsenergie der positiven Säule nimmt von der Mitte zum Rande hin ab, und zwar von der Mitte ab erst sehr schnell, dann zum Rande hin langsamer.

Ergebnis II: Die prozentuale Energieabnahme ist im Durchschnitt um so größer, je größer die Energie der betreffenden Spektrallinie in der Mitte ist.

Ergebnis III: Die prozentuale Energieabnahme nimmt bei gleicher Stromstärke weniger als proportional anfangs mit dem Druck zu, bei weiterem Wachsen des Druckes scheint sie sich asymptotisch einem Endwert zu nähern.

Ergebnis IV: Die prozentuale Energieabnahme wird bei gleichem Druck mit wachsender Stromstärke kleiner, besonders zugunsten des Randgebietes, in dem dann die Änderung der Energie absolut und relativ außerordentlich klein wird.

Ergebnis V: Die Intensität der einzelnen Spektrallinien nimmt im Durchschnitt mehr als proportional mit der Stromstärke zu.

Nach der kurzen Angabe der Ergebnisse sollen sie besprochen werden:

Zu I: Daß die Helligkeit der positiven Säule von der Mitte zum Rande der Gefäßwand hin abnimmt, ist eine bekannte Tatsache, doch gibt es bisher kaum Untersuchungen, die diese Tatsache quantitativ erfassen. Die hier erbrachten Energiekurven geben über die Abnahme der Energie ein deutliches Bild. Schon bei einer Entfernung der Lichtkegelachse um 1 mm von der Rohrachse (d. h. in diesem Fall ungefähr $^1/_{12}$ des Rohrradius R) hat die Energie der Spektrallinien im Durchschnitt 50 Proz. ihrer Gesamtabnahme (bezogen auf den Endwert bei $r = 7{,}5$ mm) erreicht, bis die Energie schließlich auf dem letzten Drittel ($r = 5$ mm bis $r = 7{,}5$ mm) nur noch wenige Prozent zu verlieren hat.

Jede einzelne Energiekurve gibt zugleich auch (beim Maßstab jeweilig um einen konstanten Faktor abgesehen) den Helligkeitsverlauf an, da die Energiewerte E_w für jede Spektrallinie nur noch mit dem Faktor h_λ zu multiplizieren sind (vgl. Fig. 18 und Tabelle). Allerdings gestatten die bisher errechneten Werte E_w keinen Helligkeitsvergleich der Spektrallinien untereinander. Dagegen stellen die prozentualen Energie-

abnahmen zugleich auch die prozentualen Helligkeitsabnahmen ΔH dar. Die für die Werte ΔE_w aufgestellten Ergebnisse gelten also auch in gleicher Weise für die Helligkeitsabnahme ΔH, d. h. für die Änderung des „energetisch-physiologischen Lichtstromes“ oder auch, wie man sagt, des „Energielichtstromes“.

Im folgenden sind die Helligkeitswerte einiger Spektrallinien in Form der Tabelle 13a—e genannt.

Zu II: Wie alle Werte Ew für $r = 0$ zeigen, ist die Abnahme dann besonders groß, wenn der betreffende Energiewert Ew relativ groß gegenüber den anderen ist. Eine bestimmte Gesetzmäßigkeit, z. B. in bezug auf Serien oder dergleichen, läßt sich bei meinen Resultaten nicht feststellen.

Zu III: Daß mit Erhöhung des Druckes die positive Säule sich zur Rohrmitte hin zusammenzieht, die Entladung sich von der Wand loslöst, ist eine bekannte Erscheinung. Hier ergibt sich nun die Feststellung, daß die Energieabnahme mit Erhöhung des Druckes wächst, und zwar, wie ich innerhalb meiner Meßgrenzen feststellte, weniger als proportional. Wie die folgenden „Energieänderung-Druck“-Kurven (p als Abszisse, ΔEw als Ordinate) zeigen, scheinen sich die

$$\Delta Ew_1$$

asymptotisch einem Grenzwert zu nähern (vgl. Kurven S. 282).

Zu IV: Ein auffälliges Ergebnis ist es, daß bei konstantem Druck die prozentuale Energieabnahme ΔEw mit wachsender Stromstärke abnimmt. Bei der Verminderung der Gesamtänderung wird besonders das Randgebiet bevorzugt, dessen Energie- und Helligkeitsänderung dann außerordentlich klein wird, vgl. hierzu den flachen Verlauf der Energiekurven im Randgebiet bei größeren Stromstärken. Besonders vermindert sich die Energieabnahme für die energiereicheren Linien, so daß bei größeren Stromstärken die Werte ΔEw sich für die einzelnen Linien nur um weniges unterscheiden. Die Änderung der ΔEw bei energieärmeren Linien ist sehr gering. Im ganzen bedeutet dieses Ergebnis, daß bei konstantem Druck die Helligkeit sich mit wachsender Stromstärke gleichmäßiger auf den ganzen Querschnitt der positiven Säule verteilt (vgl. Kurven S. 283).

Tabelle 13a

$p = 1{,}8$ mm Hg

	$i_R = 10\cdot10^{-3}$ Amp.					$i_R = 15\cdot10^{-3}$ Amp.				
	$r = 0$	1	2,5	4	7,5	$r = 0$	1	2,5	4	7,5
6717	3,08	2,04	1,49	1,39	1,14	3,89	2,59	2,18	1,97	1,74
6533	6,24	4,6	3,29	2,92	2,7	8,5	6,24	5,08	4,62	4,22
6334	8,22	5,62	4,27	3,75	3,25	10,5	7,4	5,62	5,12	4,70
6096	18,7	11,3	8,2	7,2	6,6	28,7	20,8	16,5	14,8	13,8
5876	103,9	60,0	43,1	36,9	32,3	117	84,6	65,3	58,4	52,8
	$i_R = 20\cdot10^{-3}$ Amp.									
6717	4,4	3,4	2,89	2,65	2,48					
6533	10,9	8,7	7,1	6,8	6,3					
6334	15,9	12,3	10,3	9,8	9,3					
6096	34,4	27,3	25,3	21,7	19,7					
5876	192	149	118,6	110,1	107,0					

$\cdot 10^{2}$ [erg sec^{-1} cm^{-2}]

Tabelle 13b

$p = 2{,}7$ mm Hg

	$i_R = 10\cdot10^{-3}$ Amp.					$i_R = 15\cdot10^{-3}$ Amp.				
	$r = 0$	1	2,5	5	7,5	$r = 0$	1	2,5	5	7,5
6717	1,67	0,97	0,69	0,57	0,48	2,55	1,71	1,26	1,08	1,02
6533	3,94	2,29	1,61	1,29	1,18	7,3	4,8	3,83	3,10	2,8
6334	3,72	2,27	1,65	1,29	1,17	4,2	3,0	2,27	1,97	1,8
6096	12,6	7,7	6,2	4,26	3,69	16,6	11,8	8,6	7,4	7,1
5876	42,1	23,8	16,8	13,6	12,3	73,5	48,9	36,7	31,4	29,1
	$i_R = 20\cdot10^{-3}$ Amp.					$i_R = 25\cdot10^{-3}$ Amp.				
6717	3,6	2,45	1,84	1,60	1,55	4,93	3,67	2,86	2,55	2,3
6533	9,9	6,62	5,25	4,57	4,41	11,0	8,4	6,62	5,88	5,8
6334	8,75	6,0	4,62	4,12	4,0	11,0	8,0	6,25	5,5	5,2
6096	26,3	18,7	14.7	12,4	12,1	31,4	23,2	18,2	16,2	15,9
5876	122,4	84,4	61,2	55,1	53,2	172,1	126,2	102,5	85,7	77,8

$\cdot 10^{2}$ [erg sec^{-1} cm^{-2}]

Tabelle 13c

$p = 5$ mm Hg

	$i_R = 20 \cdot 10^{-3}$ Amp.					$i_R = 25 \cdot 10^{-3}$ Amp.				
	$r = 0$	1	2,5	5	7,5	$r = 0$	1	2,5	5	7,5
6717	3,06	1,83	1,26	0,99	0,85	4,69	2,96	3,07	1,82	1,77
6533	9,1	5,3	3,83	2,95	2,65	9,7	5,8	4,2	3,7	3,62
6334	7,8	5,5	4,0	3,25	2,82	10,5	7,0	5,2	4,5	4,3
6096	24,7	16,9	12,1	9,4	8,1	30,3	21,2	16,2	13,9	13,1
5876	52	30,6	21,4	17,6	16,1	66,9	32,8	32,1	27,9	26,3

$\cdot 10^3$ [erg sec^{-1} cm^{-2}]

Tabelle 13d

$p = 10$ mm Hg

	$i_R = 20 \cdot 10^{-3}$ Amp.					$i_R = 25 \cdot 10^{-3}$ Amp.				
	$r = 0$	1	2,5	5	7,5	$r = 0$	1	2,5	5	7,5
6717	2,99	1,61	1,07	0,83	0,70	3,77	2,21	1,5	1,22	1,12
6533	8,0	4,2	2,77	2,21	1,98	8,1	4,8	3,35	2,83	2,56
6334	6,4	4,02	2,9	2,32	2,1	9,1	5,95	4,39	3,7	3,4
6096	18,7	10,3	6,8	5,5	4,8	25,1	14,9	10,7	8,9	8,4
5876	34	17,1	11,2	8,0	7,7	45,1	25,9	18,1	15,0	14,2

$\cdot 10^3$ [erg sec^{-1} cm^{-2}]

Tabelle 13e

$p = 17,5$ mm Hg

	$i_R = 40 \cdot 10^{-3}$ Amp.				
	$r = 0$	1	2,5	5	7,5
6717	4,28	1,94	1,26	0,95	0,81
6533	7,1	3,81	2,52	1,83	1,56
6334	21	10,6	8,1	6,2	5,2
6096	40,7	19,2	12,8	9,9	8,5
5876	46,7	22,3	14,3	11,0	8,4

$\cdot 10^3$ [erg sec^{-1} cm^{-2}]

Im Anschluß an die experimentellen Ergebnisse meiner Untersuchungen will ich kurz auf die wesentlichen Arbeiten, die über die positive Säule berichten, eingehen. Die Unter-

suchungen über die Abhängigkeit der Erscheinungen der positiven Säule von dem Füllgas, dem Druck, der Temperatur und sonstigen z. T. äußeren Bedingungen sind schon häufig

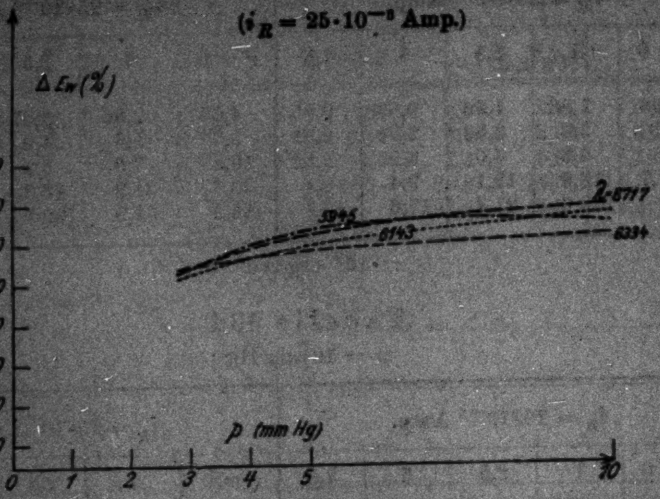


Fig. 27

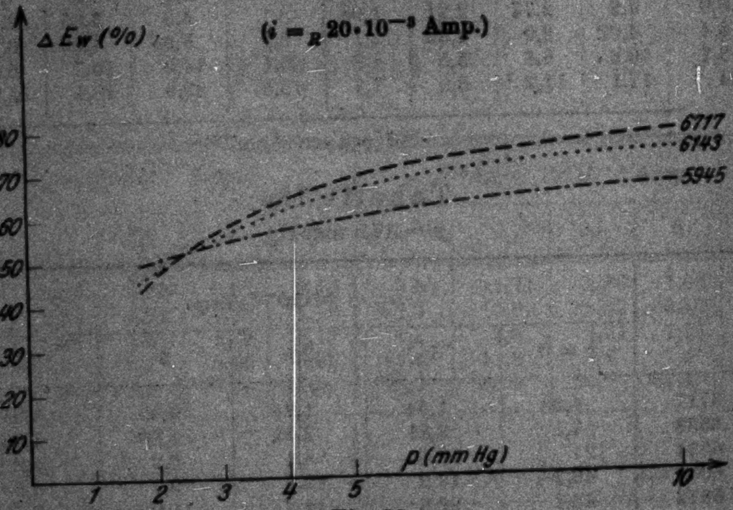


Fig. 28

literaturmäßig zusammengestellt worden, so daß sich diese Aufgabe hier erübrigt (24–27).

Für diese Zwecke hier sind besonders die theoretischen Untersuchungen von Wert. Diese laufen im wesentlichen

darauf hinaus, allgemein gültige Gesetze über die Abhängigkeit des sogenannten Potentialgradienten von den möglichen variablen Bedingungen aufzustellen. Leider ist diese Aufgabe

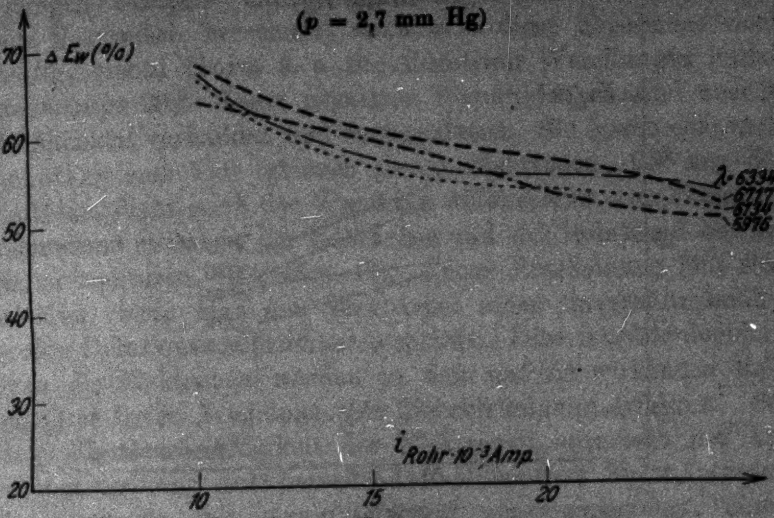


Fig. 29

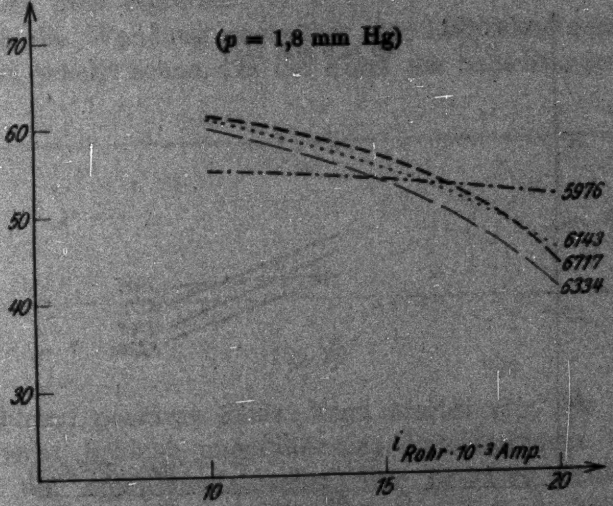


Fig. 30

noch nicht gelöst, wenn auch schon neben den meist qualitativen Untersuchungen bereits solche quantitativer Art existieren.

Hierzu gehören die Arbeiten von **Holm** (28—35), **Langmuir** (36—38), **Seeliger** (39) und **Schottky** (40—45). Die

Untersuchungen von Holm beziehen sich zum großen Teil auf die Gültigkeit der sogenannten „Ähnlichkeitsgesetze", doch

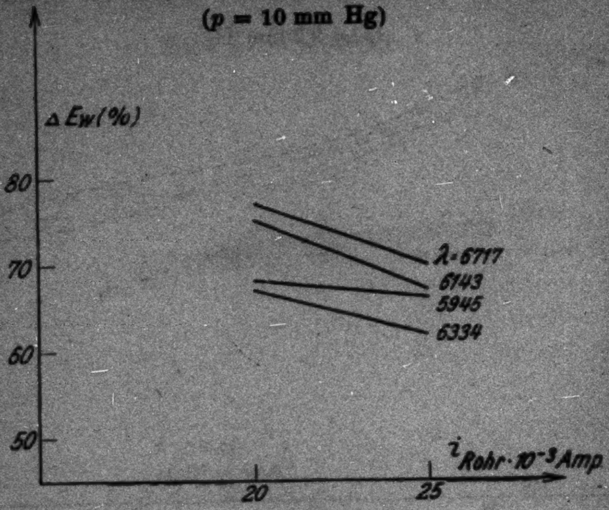


Fig. 31

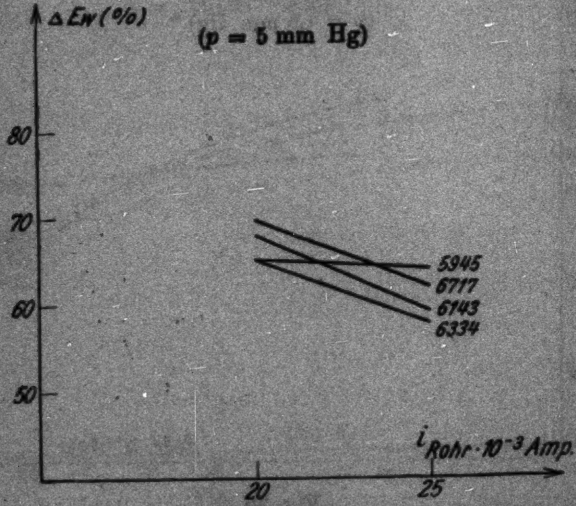


Fig. 32

bringen sie auch Ergebnisse, die für die allgemeine Theorie der positiven Säule von Wichtigkeit sind. Nach Holm wird das elektrische Feld von den in der Säule selbst befindlichen

Raumladungen fast ausschließlich bedingt, nur zum geringen Teil durch die Elektroden und ihr elektrisches Feld. Die für das Vorhandensein eines konstanten Potentialgradienten notwendigen Flächen- und Raumladungen sind von Holm bereits theoretisch berechnet, doch sind diese Ergebnisse noch strittig, zumal Holm u. a. die negativen Wandlungen unberücksichtigt läßt. Diese negativen Wandladungen sind aber in Wirklichkeit vorhanden und nachgewiesen. Sie lassen sich nach Schottky zum Teil erklären durch Elektronen, die aus der Entladungsbahn nach der Wand hin diffundieren. Der Potentialunterschied zwischen der Rohrachse und der Rohrwand beträgt bis zu mehreren Volt (46 u. 47). Diese Erscheinung läßt sich erklären, wenn man den Elektronen einen unverhältnismäßig großen Diffusionskoeffizienten zuspricht. Dies ist aber denkbar, denn die Elektronen werden in dem auf sie wirkenden Feld auf ihrer freien Weglänge eine Beschleunigung erfahren. Solange die Geschwindigkeit der Elektronen unterhalb der Anregungsspannung der betreffenden Molekülart bleibt, werden sie, wenn sie mit einem Molekül zusammenstoßen, einen elastischen Stoß erfahren.

Daß die Wandung gegenüber der Rohrachse negativ geladen ist, erhellt schon aus der Form der Schichtungen in der

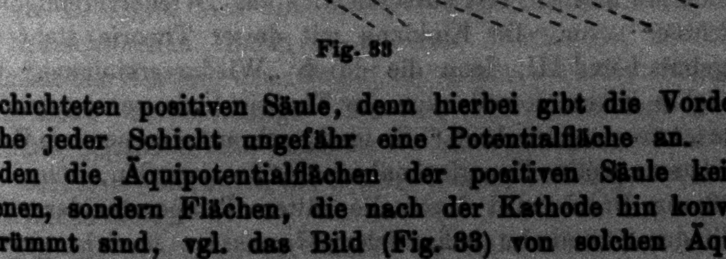


Fig. 33

geschichteten positiven Säule, denn hierbei gibt die Vorderfläche jeder Schicht ungefähr eine Potentialfläche an. So werden die Äquipotentialflächen der positiven Säule keine Ebenen, sondern Flächen, die nach der Kathode hin konvex gekrümmt sind, vgl. das Bild (Fig. 33) von solchen Äquipotentialflächen.

Die positiven Ionen werden durch diese Feldanordnung auch betroffen und gezwungen, aus der Entladungsbahn zu

wandern. Um den Verlust wieder gut zu machen, müssen neue Ionen in der mittleren Strombahn gebildet werden. Dies ist dadurch möglich, daß der Potentialgradient größer ist, als der sogenannte „Normalgradient". Mit wachsender Stromstärke nimmt der Gradient ab.

Diese Erscheinung erklärt Holm durch eine „Raumladungsverbesserung", welche Äquipotentialflächen in folgender Form (Fig. 34) verursacht.[1])

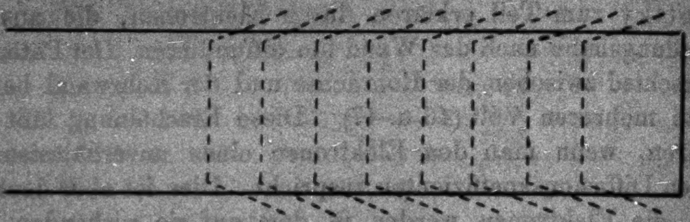


Fig. 34

Es wäre zweckmäßig, nunmehr die Schottkysche Theorie zu entwickeln. Doch will ich davon Abstand nehmen und unmittelbar die Einzelergebnisse dieser Theorie auf die dieser Arbeit zugrundeliegende Fragestellung anwenden.

Nach dem oben beschriebenen Vorgang wandern die durch Ionisation entstandenen Elektronen als leicht bewegliche Teilchen in ungeordneter Bewegung zur Wand hin, die sie negativ aufladen. Da werden nun aber von der Mitte her durch das entstehende elektrische Feld gleichviel positive Ionen an die Wand gezogen werden, in deren mehr oder weniger unmittelbaren Nähe die Wiedervereinigung stattfindet. Die eigentliche Lichtemission besteht in „Anregungsleuchten", zum Rande hin herrscht fast ausschließlich das „Wiedervereinigungsleuchten"[2]) vor. Im Einklang mit dieser Theorie steht das Ergebnis I und III, denn die durch „Wiedervereinigung" verursachte Emission soll nach der Theorie klein sein gegenüber dem „Anregungsleuchten." So muß auch mit wachsendem Druck die prozentuale Energieabnahme größer werden, denn bei größerem Druck wird durch die kältere Temperatur der außerhalb der Strombahn befindlichen Gasmassen bewirkt werden, daß die „Wiedervereinigung" schon mehr oder weniger weit

1) Vgl. R. Holm, Phys. Ztschr. 25. S. 524. 1924.
2) Vgl. I. Langmuir, Nr. (36—38).

vor der Gefäßwand stattfindet. Die Entladung löst sich von der Wand los und füllt nicht mehr den ganzen Querschnitt des Rohres aus.

In bezug auf das Ergebnis IV läßt sich mit Hilfe der Schottkyschen Theorie kaum etwas aussagen. Dies liegt daran, daß diese nur unter ganz speziellen Voraussetzungen gilt, z. B. unter folgender wichtigen Bedingung, daß der Strom an dem Gaszustand [(p), (T)] nichts ändert. Da nach dieser Theorie der Diffusionsstrom beiderartiger Ladungsträger — und somit auch die Wahrscheinlichkeit zum „Wiedervereinigen" — der Dichte der Ionen in der Achse proportional ist, kann die prozentuale Energieänderung wenigstens mit dem Strom nicht größer werden.

Um für die Energiewerte Ew die Fehlergrenzen angeben zu können, muß ich noch auf die Genauigkeit der Größen eingehen, durch die ich zu den Energiewerten Ew gelangte. Es sind dies

der Photometerstrom i,
die „schwarze" Temperatur T,
die Schwächung der Energie durch den rotierenden Sektor,
der Abstand r der optischen Achse.

Da ich für jeden Spektralbezirk und jede Temperatur mindestens sechs, bei den lichtschwachen Linien zehn und mehr Einstellungen machte, konnte ich dadurch auf die Genauigkeit schließen, daß ich die prozentuale Abweichung der Einzelwerte vom Mittelwerte feststellte. Diese Abweichung betrug maximal 0,2 Skalenteile des benutzten Milliamperemeters. Für die Energie E_λ ergibt sich ein mittlerer Fehler von 8 Proz., für die lichtschwachen Linien 4—8 Proz. Hierbei ist die Genauigkeit des Sektors, den ich auf 0,2° genau einstellen konnte, auch schon berücksichtigt. Da die Pyrometerlampe sehr schonend behandelt und andererseits hin und wieder kontrolliert wurde, ist ein durch die Pyrometerlampe bedingter Fehler nicht anzunehmen.

Für die Werte Δ_λ berechnete ich einen Mittelwert, dem eine Fehlergrenze von 4—7,5 Proz. zuzuschreiben ist. So ergibt sich für die Werte Ew im ungünstigsten Falle ein Fehler von 8—10 Proz. Doch ist zu bedenken, daß der Wert Δ_λ für

ein bestimmtes λ ein konstanter Proportionalitätsfaktor ist. Den durch ein ungenaues r bedingten Fehler suchte ich dadurch zu vermeiden, daß ich immer erst dann für ein bestimmtes r und p die Meßreihe begann, wenn ich nach zahlreichen Einjustierungen auf den bisherigen Mittelwert kam. Der r-Fehler ergibt für die E_w-Werte einen Fehler von 1—2 Proz. Dieser Fehler haftet dann aber einer ganzen Meßreihe (r = konstant, p = konstant) gleichmäßig an, so daß bei der Berechnung der ΔE_w dieser Fehler im Vergleich der einzelnen Linien untereinander kaum eine Rolle spielt.

Anhangweise will ich noch die Charakteristiken erwähnen, die ich von dem Entladungsrohr bei den einzelnen Drucken aufgenommen habe. Sie hatten alle innerhalb einer Charakteristik positive und negative Hysterese (49—52). Es folgt die Charakteristik für den Druck p = 5 mm Hg.

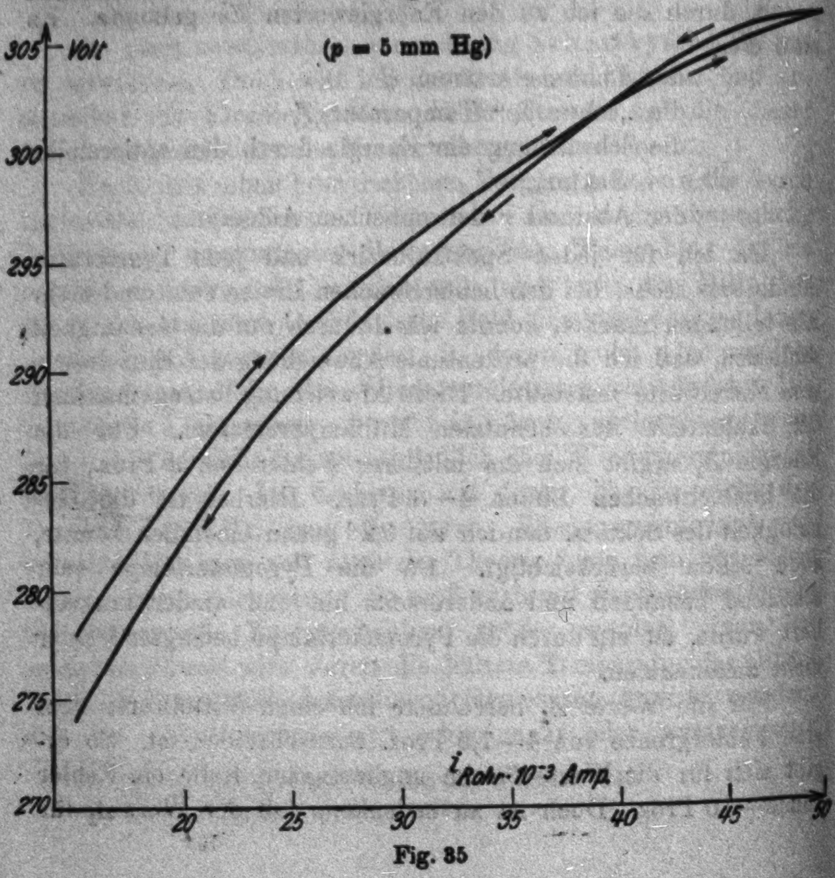


Fig. 35

C. Schluß

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit berichtet über spektralphotometrische Untersuchungen an der positiven Säule in Neon und Helium. Zur Lösung der Frage nach der Energie- und Helligkeitsverteilung wurde die Methode von Fr. Kurlbaum und Günther-Schulze angewandt.

Im ersten Teil wird über die benutzte Methode und den hier speziell angewandten Aufbau berichtet.

Im zweiten Teil wird ein kurzer Bericht über die Eichungen und Vorversuche gegeben.

Der dritte Teil berichtet über die eigentlichen Messungen und ihre Auswertung.

Der vierte über die Deutung der hier vorliegenden Ergebnisse.

Die experimentellen Untersuchungen wurden im Physikalischen Institut der Technischen Hochschule zu Berlin in der Zeit vom Sommer 1925 bis Frühjahr 1927 ausgeführt. Dem verstorbenen Direktor des Institutes, Geh. Rat Prof. Dr. Kurlbaum, sowie dem derzeitigen stellvertretenden Direktor, Hrn. Prof. Dr. R. Becker, bin ich zu außerordentlich großem Dank verpflichtet.

Literaturverzeichnis

1) F. Kurlbaum u. A. Günther-Schulze, Verhandl. D. Phys. Ges. 5. S. 428. 1903.

2) K. Kolb, Handschr. Diss. Berlin 1925.

3) C. Heinrich, Handschr. Diss. Berlin 1926.

4) E. Rockel, Handschr. Diss. Berlin 1926.

5) L. Holborn u. F. Kurlbaum, Ann. d. Phys. 10. S. 225. 1903.

6) F. Patzelt, Ztschr. f. techn. Phys. 4. S. 66. 1923.

7) F. Patzelt, Handschr. Diss. Berlin 1922.

8) C. Heinrich, Ztschr. f. Phys. 36. S. 782. 1926; vgl. Nr. 3.

9) Vgl. Nr. 2 und 4.

10) K. Mey, Ann. d. Phys. 11. S. 127. 1903.

11) R. Defregger, Ann. d. Phys. 12. S. 662. 1903.

12) G. Gehlhoff, Verhandl. D. Phys. Ges. 13. S. 271. 1911.

13) A. Gaede, Ztschr. f. techn. Phys. 4. Nr. 10. 1923.

14) A. Goetz, Physik und Technik des Hochvakuums. Samml. Vieweg Nr. 64. 1922.

15) I. Dushman, deutsch von Berthold u. Reimann, Die Grundlagen der Hochvakuumtechnik. Berlin 1926.

16) H. A. Rowland, Astrophys. Journ. 1—6. 1895.
17) H. Kayser, Handb. d. Spektroskopie.
18) F. Exner u. E. Haschek, „Die Spektren der Elemente" 1911.
19) F. Paschen u. R. Götze, „Serienges. u. Linienspektren" 1922.
20) O. Lummer, „Grundlagen, Ziele und Grenzen der Leuchttechnik", bes. S. 169.
21) F. Kurlbaum u. O. Lummer, Ann. d. Phys. 5. S. 289. 1901.
22) Lit. hierzu vgl. A. Berliner u. K. Scheel, Phys. Handwörterbuch 1924.
23) J. E. Ives, Elektrot. Z.tschr. 1. S. 143. 1916; Phys. Rev. 35. S. 401. 1913; H. Bender, Ann. d. Phys. 45. S. 105. 1914.
24) R. Seeliger, Marx' Handbuch d. Rad. 3. S. 71.
25) R. Seeliger, Handb. d. Phys. 14. S. 266ff.; vgl. Nr. 3. S. 85ff.
26) R. Holm, Phys. Ztschr. 25. S. 533. 1924.
27) R. Holm, Phys. Ztschr. 26. S. 412. 1925.
28) R. Holm, Phys. Ztschr. 15. S. 241, 289 und 782. 1914.
29) R. Holm, Phys. Ztschr. 16. S. 20—70. 1915.
30) R. Holm, Phys. Ztschr. 17. S. 402. 1916.
31) R. Holm, Phys. Ztschr. 19. S. 546. 1918.
32) R. Holm, Phys. Ztschr. 21. S. 296. 1920.
33) R. Holm, Phys. Ztschr. 25. S. 497. 1924.
34) R. Holm, Phys. Ztschr. 26. S. 412. 1925.
35) R. Holm, Wiss. Veröff. a. d. Siemens-Konzern 3. S. 159. 1923.
36) I. Langmuir, Trans. Am. El. Chem. Soc. 29. S. 125. 1916.
37) I. Langmuir, Gen. Elektr. Rev. 26. S. 731. 1923.
38) I. Langmuir, H. Mott und Smith, Gen. El. Rev. 27. S. 449, 538, 616, 762. 1924.
39) R. Seeliger, Phys. Ztschr. 15. S. 777. 1914.
40) W. Schottky, Jahrb. d. Radioakt. u. Elekt. 12. S. 147. 1915.
41) W. Schottky, Phys. Ztschr. 15. S. 656. 1914.
42) W. Schottky, Ztschr. f. techn. Phys. 1. Nr. 9. 1920.
43) W. Schottky, Ztschr. f. Phys. 31. S. 163. 1924.
44) W. Schottky, Phys. Ztschr. 25. S. 342. 1924.
45) W. Schottky, Phys. Ztschr. 25. S. 635. 1924.
46) H. Salinger, Dissert. Berlin 1915.
47) H. Salinger, Ann. d. Phys. 54. S. 347. 1917.
48) A. Günther-Schulze, Ztschr. f. Phys. 22. S. 70. 1924.
49) A. Rüttenauer, Ztschr. f. Phys. 15. S. 8. 1923.
50) A. Rüttenauer, Ztschr. f. Phys. 19. S. 124. 1923.
51) H. Kneser, Ann. d. Phys. 72. S. 519. 1923.
52) R. Seeliger, Jahrb. d. Rad. 20. S. 353. 1924.

(Eingegangen 26. März 1928)

4. *Die Gitterstrukturumwandlungen in metallischen Mischkristallen;* *von G. Borelius, C. H. Johansson und J. O. Linde*

1. Einleitung

Im hiesigen Institut ist seit einigen Jahren die Arbeitshypothese befolgt worden, daß in den metallischen Mischkristallen sowohl statistisch ungeordnete, als geordnete Verteilung der beiden Atomarten auf die Gitterpunkte als Gleichgewichtszustände vorkommen können. Die Hypothese war aus Untersuchungen der elektrischen und thermoelektrischen Konzentrationsdiagrammen gewonnen. Es gaben gewisse Legierungsreihen, wie die Au–Ag-Reihe, z. B. im Widerstandsdiagramme, immer einfach gebogene Kurven, während andere, wie die Au–Cu-Reihe, auch nach unten gerichtete Abweichungen in der Nähe gewisser einfacher Konzentrationsverhältnisse zeigen könnten, wie z. B. bei Cu_3Au und CuAu. Es lag die Vermutung nahe, daß die ersten Fälle ungeordnete, die letzten geordnete Atomverteilung entsprachen. Eine von Kurnakow, Zemczuzny und Zasedatelev[1]) in der CuAu-Reihe gefundene Umwandlungserscheinung bei etwa 400° C konnte demgemäß als Übergang zwischen ungeordneten und geordneten Zuständen gedeutet werden.

In zwei Untersuchungen von Johansson und Linde[2]) über die Systeme CuAu, CuPd und CuPt, in denen sie die in verschiedener Weise erwärmten Legierungen bei Zimmertemperatur teils röntgenographisch, teils durch Widerstandsmessungen untersuchten, wurde diese Hypothese durchaus bestätigt. Es zeigte sich, daß in einem höheren Temperaturgebiete die ungeordnete Verteilung stabil ist, in einem niederen die geordnete. Die geordnete Verteilung geht durch Erwärmung

1) N. Kurnakow, S. Zemczuzny u. Zasedatelev, Journ. of the Inst. of Metals 155 S. 305. 1916.

2) C. H. Johansson u. J. O. Linde, Ann. d. Phys. 78. S. 439. 1925; 82. S. 449. 1927.

über eine gewisse Temperatur wieder in die ungeordnete über. Die Möglichkeit zur Feststellung dieser Tatsachen durch Messungen bei Zimmertemperatur lag darin, daß die ungeordneten Zustände durch Abschrecken konserviert werden können.

In der vorliegenden Arbeit sind nun die durch die früheren Arbeiten festgestellten Umwandlungen zwischen geordneten und ungeordneten Atomverteilungen durch Widerstandsmessungen bei hohen Temperaturen näher verfolgt worden. Es wurde die Methode der Widerstandsanalyse deshalb gewählt, weil sich der Widerstand sowohl erfahrungsgemäß als theoretisch mit der Ordnung der Atome grundsätzlich verknüpft erwiesen hatte. Neben den Widerstandsmessungen sind auch weitere röntgenographische Strukturbestimmungen bei Zimmertemperatur ausgeführt worden.

2. Ausführung der Widerstandsanalyse

Die Widerstandsmessungen wurden an kleinen Drahtstücken von etwa 20 mm Länge ausgeführt. Einen Teil dieser Drähte bildeten die schon früher untersuchten, ein anderer Teil wurde aus denselben reinen Materialien wie die früheren neu hergestellt. Die Metalle wurden im allgemeinen in evakuierten Quarzröhren zusammengeschmolzen, die erhaltene Legierung eine Zeitlang in der Nähe der Schmelztemperatur wärmebehandelt und dann in solcher Weise abgekühlt, daß sie in walzbarem Zustand erhalten wurde. Die zu Viereckdraht von etwa 1 mm Breite ausgewalzten Drähte wurden dann wieder nahe der Schmelztemperatur wärmebehandelt.

Die Widerstandsmessung geschah nach der Stromspannungsmethode. Die Probedrähte wurden in der in der Fig. 1 gezeigten Anordnung eingesetzt, dessen Kupfermasse für gleichmäßige Temperatur sorgt. Die Stromzuleitung geschah durch Schneiden aus Eisen, die Spannungsabnahme durch Stahlschneiden, d. h. Stücke einer Rasierklinge. Eine wichtige Sache, die erst nach verschiedenen Versuchen gelang, war die Drähte so zu befestigen, daß die Kontakte auch bei hohen Temperaturen, wo die Drähte weich werden, sich gut halten. Die gezeichnete Anordnung ist hierfür sehr geeignet.

Diese Anordnung wurde nun in dem Vakuumofen der Fig. 2 hineingebracht. Wenn ein neuer Draht eingesetzt werden

sollte, war nur der Konus oben zu heben. Die Lackdichtung unten braucht nur dann geöffnet zu werden, wenn der Ofen geändert oder repariert werden soll. Der Sockel wird dann zweckmäßig mit durchgespültem Wasserdampf erwärmt. Um die Ofentemperatur, wenn nötig, sehr langsam variieren zu können, war im Heizstromkreise ein Widerstand eingeschaltet, dessen Kontakt mit einer motorgetriebenen Schraube sehr langsam geschoben werden konnte.

Die Spannungsmessung geschah mit einem Drehspulengalvanometer. Der Meßstrom wurde bei jeder Messung kommutiert.

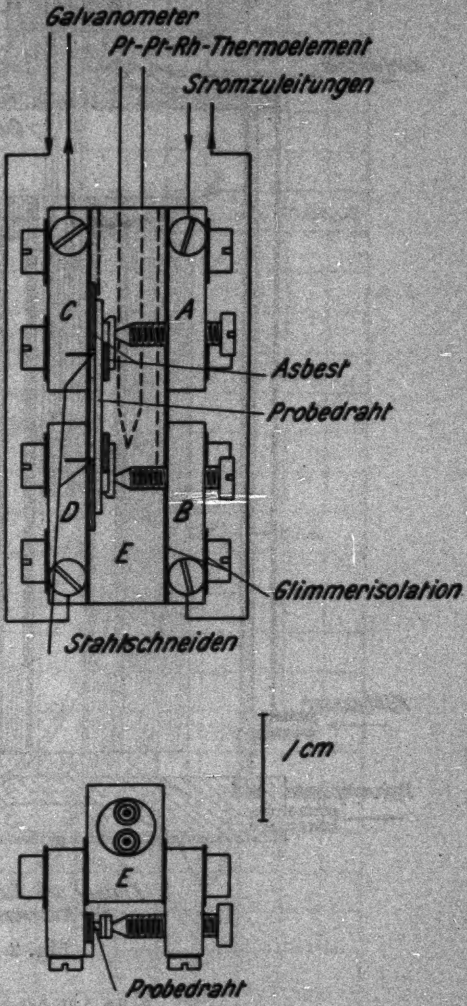


Fig. 1

3. Resultate der Widerstandsanalyse

Die Widerstandstemperaturdiagramme, Figg. 3 bis 8, sind im allgemeinen mit einer Geschwindigkeit des Temperaturgangs von 50—100 Grad pro Stunde aufgenommen worden. Die Bezifferung an den Kurven gibt die Ordnungsfolge an, in welcher die verschiedenen Kurvenzweige aufgenommen worden sind. An einzelnen Legierungen ist außerdem geprüft worden, teils wie der Umwandlungsverlauf sich bei anderen Ganggeschwindigkeiten verhält, teils welche Zweige umkehrbar und welche nicht umkehrbar sind.

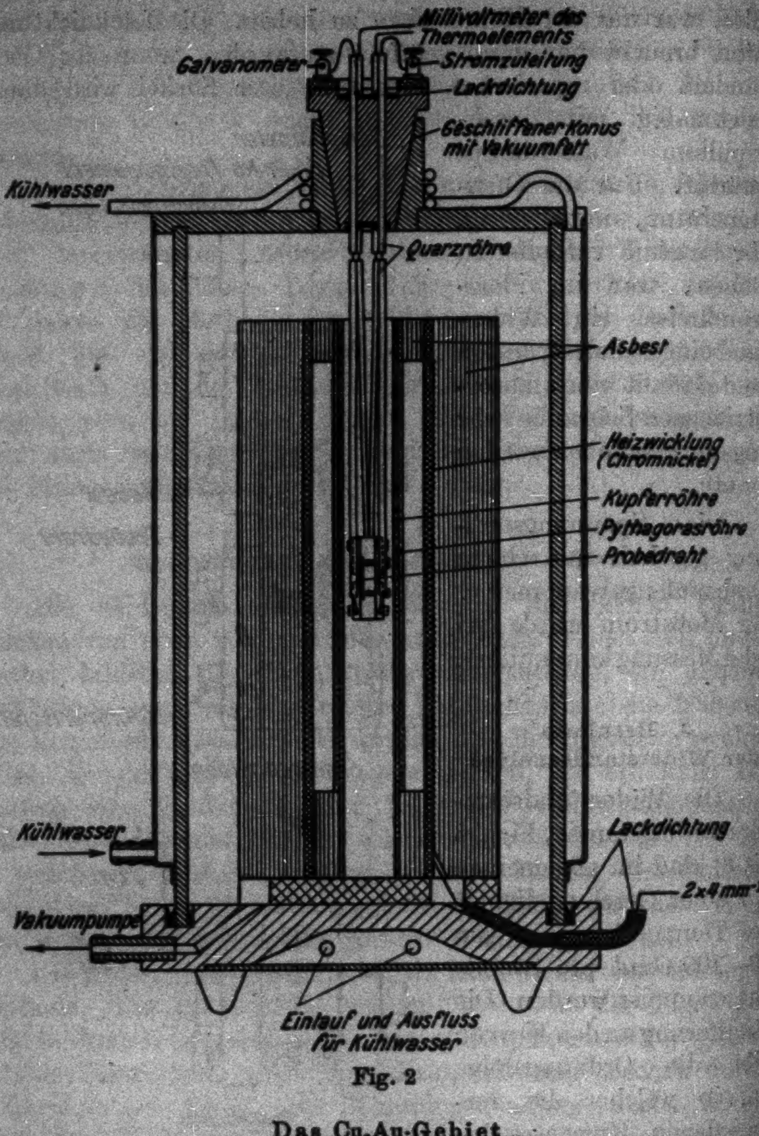


Fig. 2

Das Cu_3Au-Gebiet

Die früheren Röntgenuntersuchungen hatten gezeigt, daß die im Konzentrationsgebiete um Cu_3Au bei rund 300—400° C stattfindenden Umwandlungen einen besonders einfachen Fall ausmachen. Die Unordnung der Atome geschieht ohne Änderung des flächenzentriert kubischen Gittertypus und die unter ähnlichen Abkühlungsbedingungen erhaltene Ordnung, wie sie

aus den Intensitäten der Überstrukturlinien hervorging, war eben bei 25 Atomprozent Au am besten.

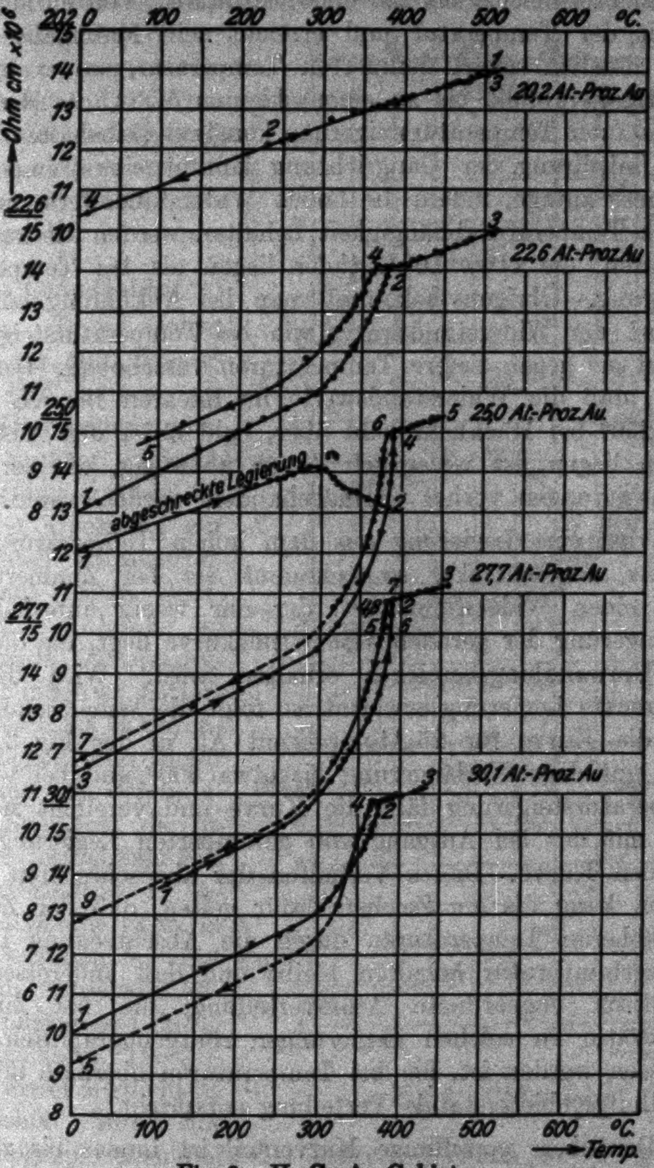


Fig. 3. H · Cu_3Au-Gebiet

Die Legierungen dieses Gebietes zeigen auch im Widerstandstemperaturdiagramm (Fig. 3) besonders einfache Ver-

hältnisse. Geht man mit einer Legierung geordneter Atomverteilung von Zimmertemperatur aus, so ist der Temperaturkoeffizient zunächst bis 250—300° konstant. Von da an steigt er mit der Temperatur und erreicht sein Maximalwert bei einer ziemlich scharf definierten Temperatur, wo er beinahe unstetig herabfällt bis zu einem kleinen Wert, der dann bei fortgesetzter Temperatursteigerung konstant beibehalten bleibt. Bei Umkehrung der Gangrichtung kommt eine Temperaturhysterese zutage, indem die hohen Widerstandswerte und die lineare Temperaturabhängigkeit behalten werden bis zu Temperaturen, die etwa 10° C tiefer liegen als bei Temperatursteigerung. Übrigens bekommt man bei Abkühlung analogen Verlauf der Widerstandskurve wie bei Temperatursteigerung, nur ist sie gegen tiefere Temperaturen verschoben. Der Umstand, daß die Widerstandswerte im linearen Bereich unterhalb 250° bei Rückkehr bald über, bald unter den Ausgangswerten liegen, ist wesentlich davon abhängig, wie sorgfältig die Legierungen vorher wärmebehandelt worden waren.

Wird eine Legierung aus dem hohen Temperaturgebiete effektiv abgeschreckt, so bekommt sie bei Zimmertemperatur einen Widerstandswert, der nur wenig unterhalb der Verlängerung der geraden Widerstndskurve liegt, die oberhalb des Umwandlungsbereiches erhalten wird. Wird die abgeschreckte Legierung erwärmt, so folgt die Widerstandskurve (wie die Kurve für 25 Atomprozent Au in der Fig. 3 zeigt) recht gut diese Verlängerung bis etwa 300° und bei weiterer Temperatursteigerung fällt die Kurve und vereinigt sich zuletzt mit der bei Ausgang von getemperten Legierungen erhaltenen Kurve. Dieses Verhalten der abgeschreckten Legierungen kann als ein Zeichen dafür gelten, daß der Zustand der höheren Temperaturen durch die Abschreckung bis auf Zimmertemperatur behalten bleibt und daß andererseits die statistisch ungeordnete Atomverteilung, die bei Zimmertemperatur in solchen Legierungen röntgenographisch nachgewiesen worden ist, die bei Temperaturen oberhalb des Umwandlungsgebiets stabile Verteilung entspricht.

Der obere geradlinige Kurventeil ist immer bis zu dem unteren Kniepunkt reversibel gefunden worden. Wie bei der Legierung mit 27,7% Au näher untersucht worden ist, macht sich der obere Kniepunkt (bei 390°) auch bei äußerst lang-

samer Temperatursenkung gar nicht bemerkbar. Die Kurve fällt erst bei 380⁰ herunter. Wenn von dem Punkt 5 an der noch steil abfallenden Kurve die Temperatur wieder erhöht wurde, stieg der Widerstand nur wenig, bis in dem Punkt 6 die vorher bei Temperatursteigerung gefundene Kurve erreicht worden war, die dann genau reproduziert wurde.

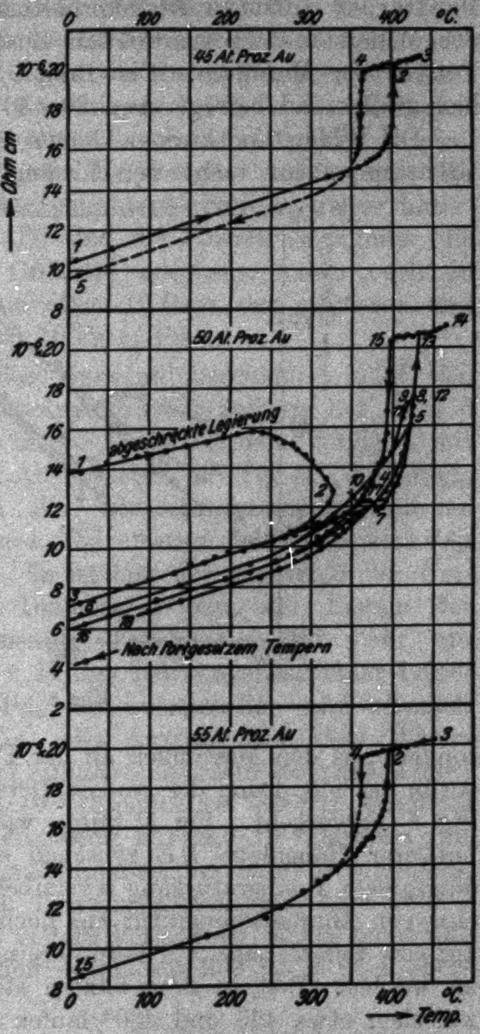


Fig. 4. CuAu-Gebiet

Das CuAu-Gebiet

Im CuAu-Gebiet (d. h. um 50 Atomprozent Au) hatten die Röntgenuntersuchungen etwas weniger einfache Verhältnisse ergeben, indem der Übergang zur geordneten Atomverteilung mit einem Übergang aus kubische in tetragonale Gitterstruktur verbunden ist. Gittertheoretisch ist es durchaus möglich, daß dieser Übergang von der kubischen Struktur, die ja als eine tetragonale mit Achsenverhältnis 1 betrachtet werden kann, in eine tetragonale mit anderem Achsenverhältnis einphasig und stetig verlaufen kann. Das Zutreffen dieser Möglichkeit war schon durch die röntgenographischen Befunde, daß verschiedene Achsenverhältnisse zwischen 1 und 1,08 erhalten werden konnten, wahrscheinlich gemacht. Es darf doch noch nicht als experimentell sicher festgestellt angesehen werden.

Die Widerstandstemperaturkurven der Fig. 4 sind in ihren großen Zügen denen des Cu_3Au-Gebietes ähnlich. Die Umwandlungstemperaturen haben auch hier ihr Maximum im Punkte des einfachen Atomverhältnisses bei 50 Proz. Au und der Widerstand in geordnetem Zustande hat in demselben Punkte ein Minimum. Die Breite der Hystereseschleife ist hier größer und beträgt etwa 30—40°.

Die Widerstandskurven können sich aber unter der oberen Grenztemperatur recht verschieden verhalten, wie dies be-

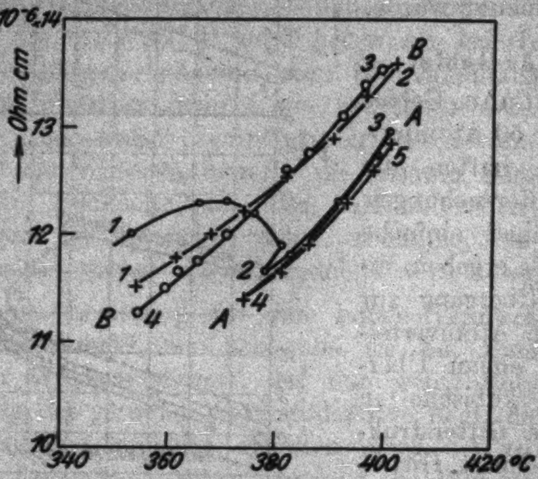


Fig. 5

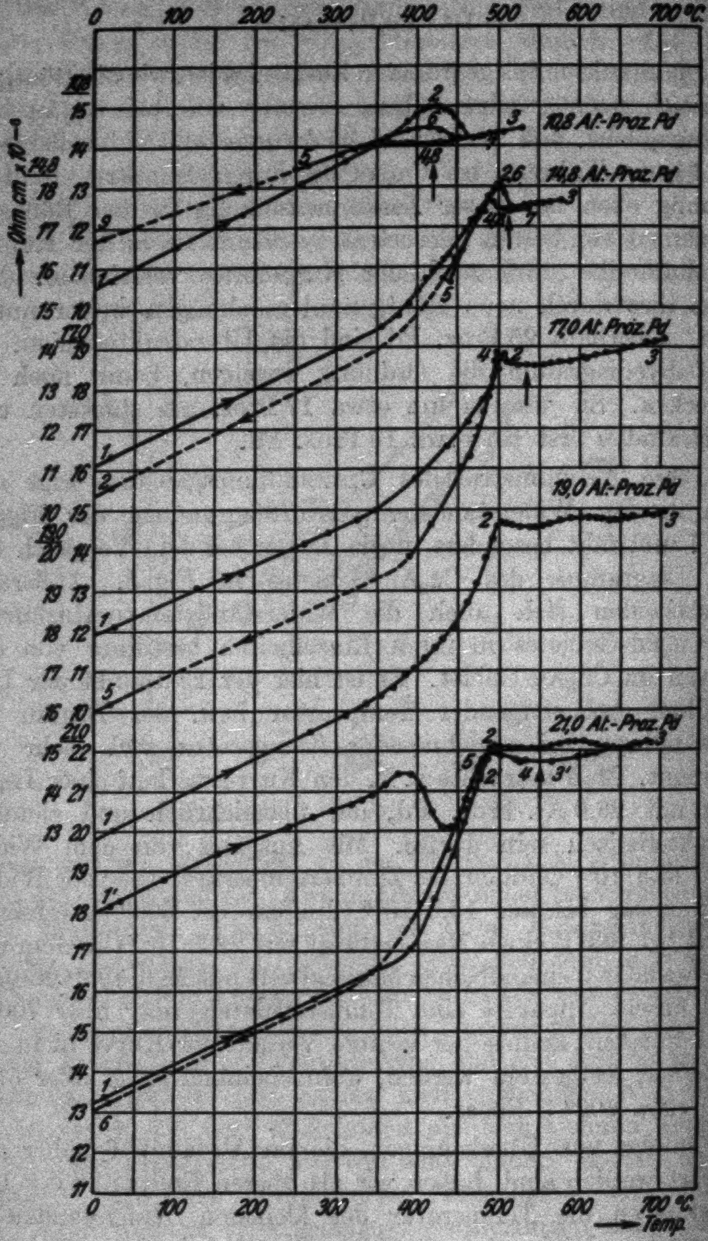
sonders aus den Messungen an der Probe mit 50 Atomprozent Au in der Fig. 4 und der gewisse Details näher hervorhebenden Fig. 5 hervorgeht. Fig. 5 zeigt, wie eine Widerstandskurve mittlerer Höhenlage *BB* zwischen etwa 350 und 400° trotz langsamem Temperaturgang reversibel erhalten wurde, während eine von Zimmertemperatur aus hoch liegende Kurve um 380° auf eine tiefere Lage *AA* herunterging, um erst dort reversibel zu werden. Erst in dem letzten steil steigenden Kurventeil zwischen etwa 425 und 430° laufen alle von tieferen Temperaturen aus kommenden Kurven zusammen. Es ist wahrscheinlich, daß diese komplizierten Verhältnisse erst durch Berücksichtigung der verschiedenen Orientierungen und Größen der tetragonalen Kristallite vielleicht auch die Drucke, die sie aufeinander ausüben, erklärt werden können (vgl. weiter die Abschnitte 6 und 7).

Das Cu_3Pd-Gebiet

Die Struktur des geordneten Zustandes ist, wie die Röntgenuntersuchungen gezeigt haben, dieselbe wie bei Cu_3Au und ist eine solche, daß sie nur bei 25 Atomprozent Pd vollständig sein kann. Während bei Cu_3Au die durch Tempern erhaltene Ordnung eben bei dieser Zusammensetzung in den Röntgenaufnahmen am besten hervortrat, erscheint sie in der Kupfer-Palladiumreihe stark nach der Kupferseite verschoben. Wir haben dies durch neue Röntgenuntersuchungen weiter untersucht. Oberhalb 25 Proz. Pd sind die Überstrukturlinien, die im Debyediagramm die Ordnung anzeigen, kaum noch zu entdecken. Sie werden um etwa 17 Proz. am stärksten und verschwinden erst bei etwa 10 Proz. Pd.

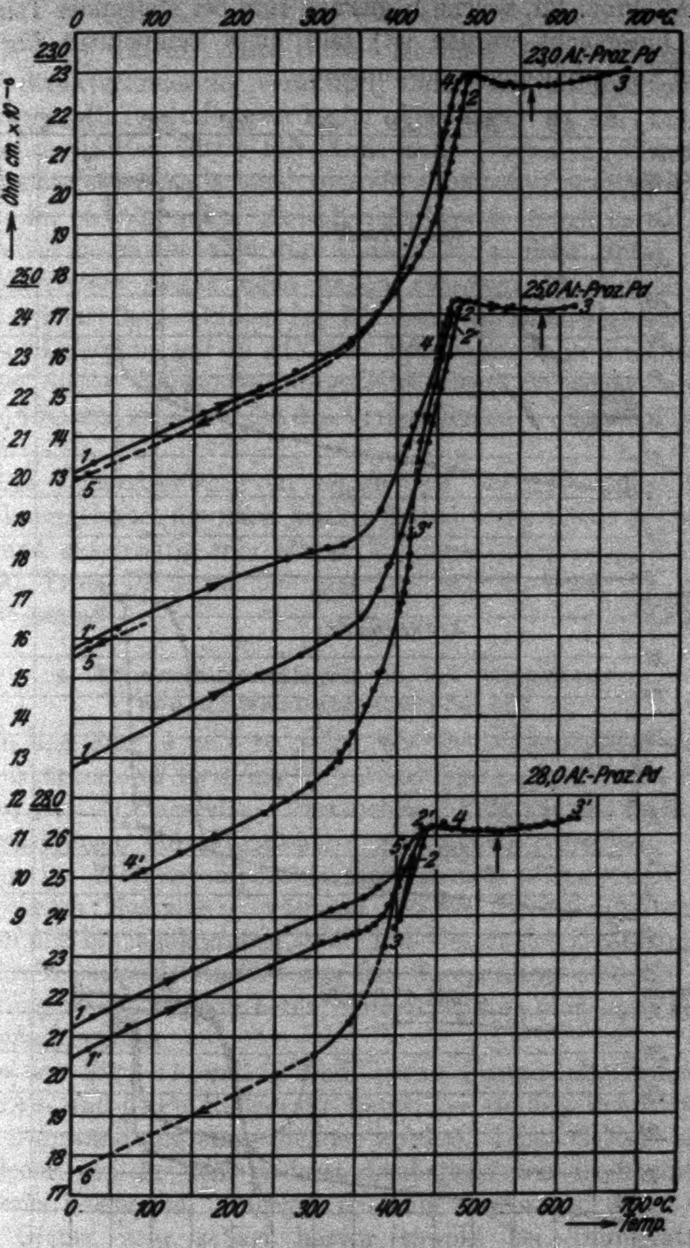
Diese Assymmetrie des Umwandlungsgebietes zeigt sich auch in den Widerstandstemperaturdiagrammen der Figg. 6 und 7 und fällt besonders in die Augen bei dem Vergleich mit dem Diagramme des Cu_3Au-Gebietes in Fig. 3. Außerdem unterscheiden sich auch die Widerstandstemperaturkurven des Cu_3Pd-Gebietes in ihren Einzelheiten bestimmt von den Kurven im Cu_3Au-Gebiet. Es ist hier der Endpunkt der Umwandlung bei steigender Temperatur bzw. der Beginn der Umwandlung bei abnehmender Temperatur viel mehr unbestimmt. Man betrachte z. B. den Kurvenverlauf einer Legierung mit 23,0 At.-Proz. Pd, der übersichtlich und ziemlich charakteristisch sein dürfte. Mit Ausgang von dem Widerstand $13{,}3 \cdot 10^{-6}$ Ohm/cm bei Zimmertemperatur stieg der Widerstand linear bis auf $15{,}8 \cdot 10^{-6}$ Ohm/cm bei 300° C, erreichte zuerst bei 493° C einen Maximalwert mit $22{,}9 \cdot 10^{-6}$ Ohm/cm und bei etwa 565° C einen flachen Minimalwert mit $22{,}6 \cdot 10^{-6}$ Ohm/cm. Weil unsere Apparate eine Temperatursteigerung über 700° C nicht zuließen, konnte der weitere Verlauf der Kurve nicht mit Sicherheit festgestellt werden, wahrscheinlich ist er aber oberhalb etwa 600° C linear.

Infolge von Überlegungen, die im Abschnitt 6 näher ausgeführt worden sind, haben wir als oberen Endpunkt der Umwandlungen die Temperatur der kleinsten Widerstandswerte des flachen Minimums gewählt. Sie sind in Figg. 6 und 7 mit Pfeilen ausgezeichnet. Mit Ausnahme für die Legierung mit 21,0 At.-Proz. Pd (dasselbe gilt wahrscheinlich auch bei



Cu$_3$Pd-Gebiet.

Fig. 6



Cu_3Pd-Gebiet.

Fig. 7

19,0 At.-Proz. Pd, welche Legierung nur bei steigender Temperatur untersucht worden ist) fällt diese Temperatur für die beiden Gangrichtungen zusammen.

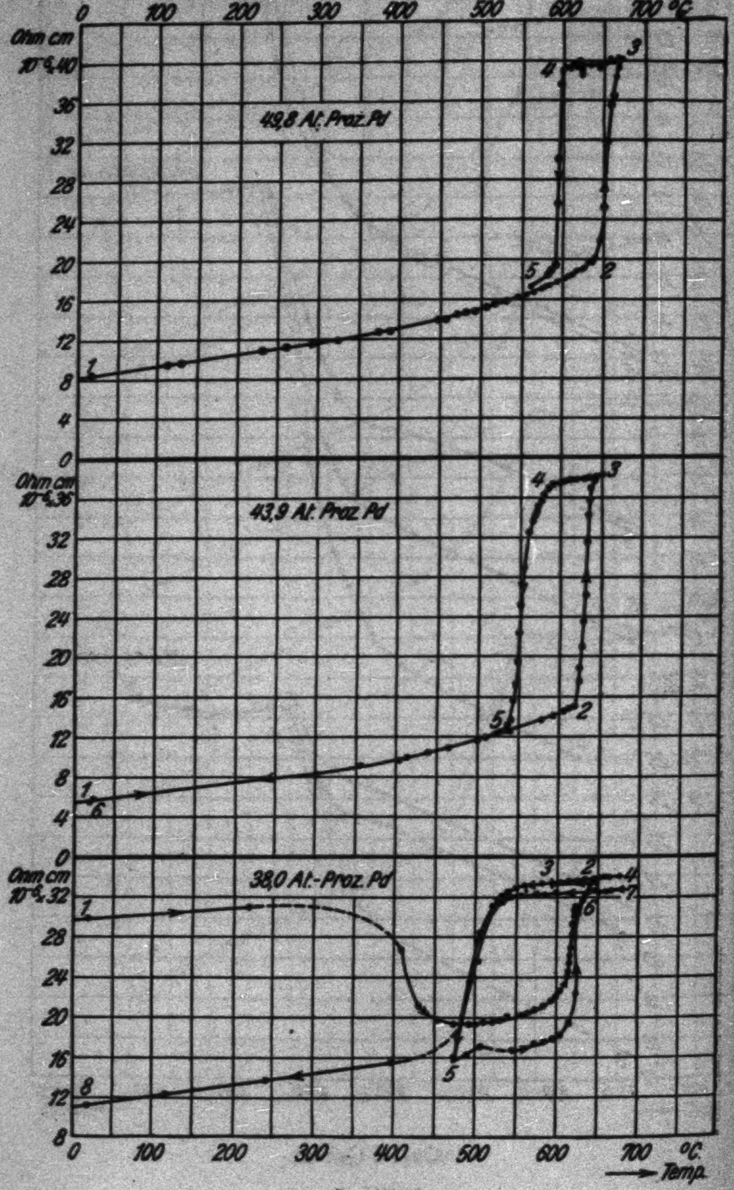


Fig. 8. CuPd-Gebiet

Das CuPd-Gebiet

Ebenso wie im CuAu-Gebiet ist diese Umwandlung mit einer Strukturänderung verknüpft, indem das kubisch körperzentrierte Gitter mit geordneter Verteilung in ein kubisch flächenzentriertes Gitter mit statistischer Verteilung übergeht. Gitterstereometrisch ist auch hier ein einphasiger, stetiger Übergang mit tetragonalen Zwischenstrukturen möglich. Wahrscheinlich geschieht aber die Umwandlung nicht stetig. Die abgeschreckten Legierungen haben zwischen 40 und 50 At.-Proz. Pd fast keine Linien im Röntgendiagramm gegeben und für eine Legierung mit 39 At.-Proz. Pd, die somit an der unteren Grenze dieses Konzentrationsgebietes liegt, ist sogar einmal eine Aufnahme erhalten, die das Vorhandensein von zwei Phasen zeigte.

Die Widerstandskurven zeigen hier besonders enge Umwandlungsgebiete, die nach beiden Seiten recht scharf begrenzt sind und gleichzeitig sehr starke Temperaturhysterese, die bei 49,8 At.-Proz. Pd etwa 60° und bei 38,0 At.-Proz. Pd über 100° C umfaßt.

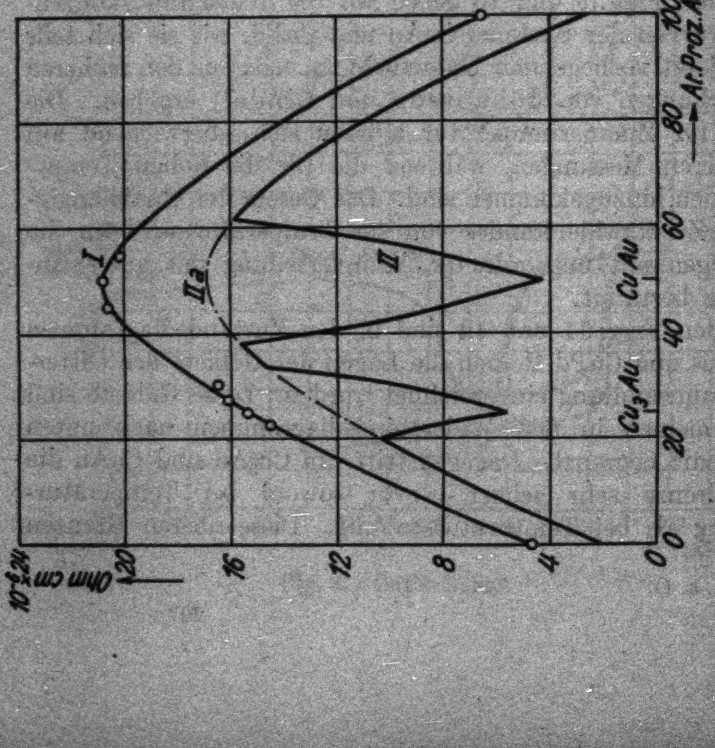
4. Konzentrationsdiagramme für Widerstand und Umwandlungstemperaturen

In den Figg. 9 und 10 geben wir die Widerstandskonzentrationskurven der Systeme CuAu und CuPd, wie sie sich teils aus der jetzt vorliegenden Untersuchung, teils aus den früheren Untersuchungen von Johansson und Linde[1]) ergeben. Die Kurven für Zimmertemperatur stützen sich überwiegend auf die früheren Messungen, während die für die hohen Temperaturen neu hinzugekommen sind. Das Gesetz der Unabhängigkeit des Zusatzwiderstandes von der Temperatur wird für die Legierungen mit ungeordneter Atomverteilung mit guter Annäherung bestätigt.

In den Figg. 11 und 12 sind in den Zustandsdiagrammen der CuAu- und CuPd-Reihen die Lagen der Gebiete der Gitterstrukturumwandlung eingezeichnet worden. Diese Gebiete sind im allgemeinen in den Widerstandsdiagrammen nach unten nicht scharf begrenzt. Dagegen tritt um Cu_3Au und CuAu die obere Grenze sehr scharf hervor sowohl bei Temperatursteigerung als bei Temperatursenkung. Diese oberen Grenzen

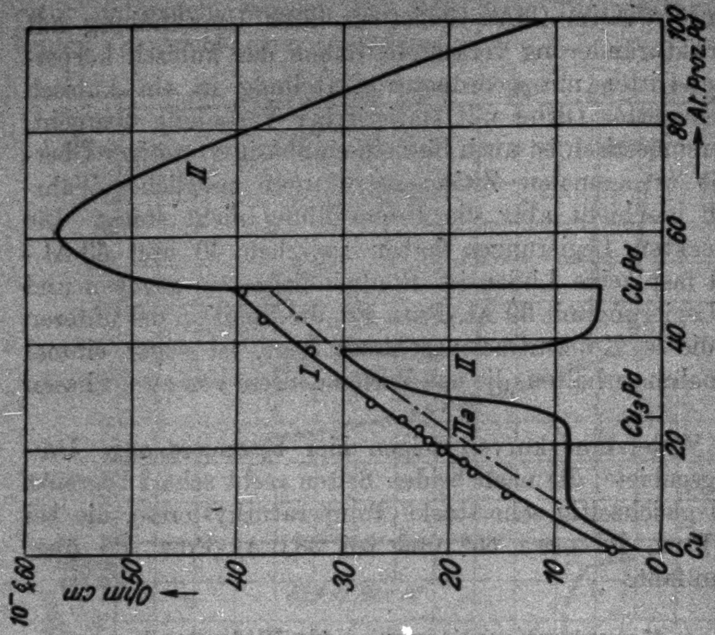
---

1) a. a. O.



I. Widerstandskurve des Gleichgewichtszustands bei 450° C.
II. Abgeschreckte Legierungen bei 20° C.
IIa. " " 20° C.

Fig. 9



I. Widerstandskurve des Gleichgewichtszustands bei 600° C.
II. Abgeschreckte Legierungen bei 20° C.
IIa. " " 20° C.

Fig. 10

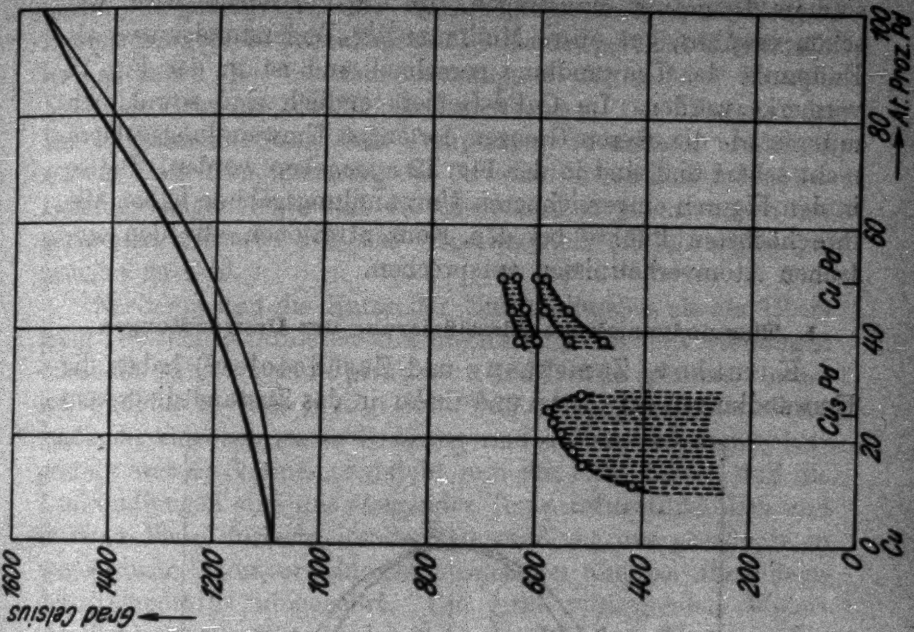


Fig. 12. Zustandsdiagramm des Systems CuPd

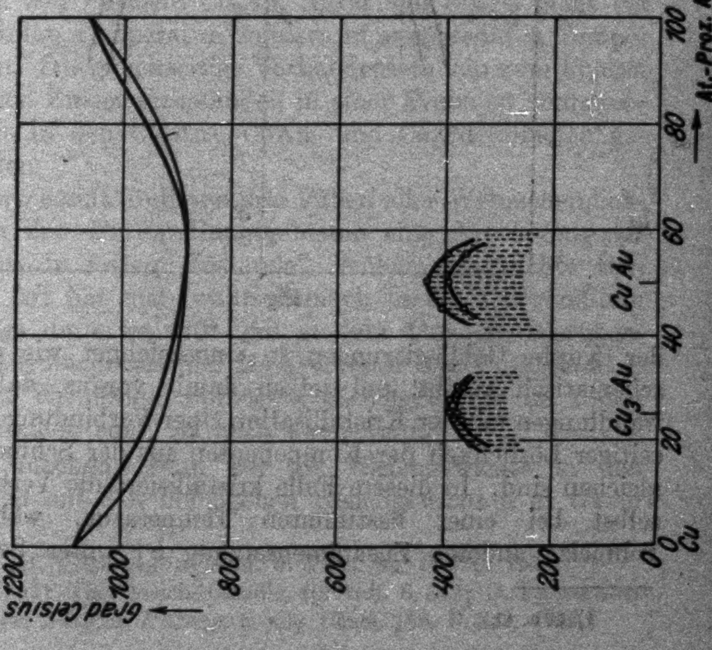


Fig. 11. Zustandsdiagramm des Systems CuAu

sind im Diagramm eingetragen. Im Cu_3-Pd-Gebiete wird, wie schon erwähnt, das obere Minimum der Widerstandskurve als Endpunkt der Umwandlung gerechnet und ist in der Fig. 12 vermerkt worden. Im CuPd-Gebiete endlich sind sowohl die unteren wie die oberen Grenzen der engen Umwandlungsgebiete recht scharf und sind in der Fig. 12 angegeben worden. Die so in den Figuren eingezeichneten Umwandlungsgebiete haben alle ihre höchsten Punkte bei den Konzentrationen, die den einfachen Atomverhältnissen entsprechen.

5. Thermodynamische Klassifizierung der Umwandlungen

Kurnakov, Zemczusny und Zasedatelev[1]) haben die Umwandlungen bei Cu_3Au und CuAu in das Zustandsdiagramm

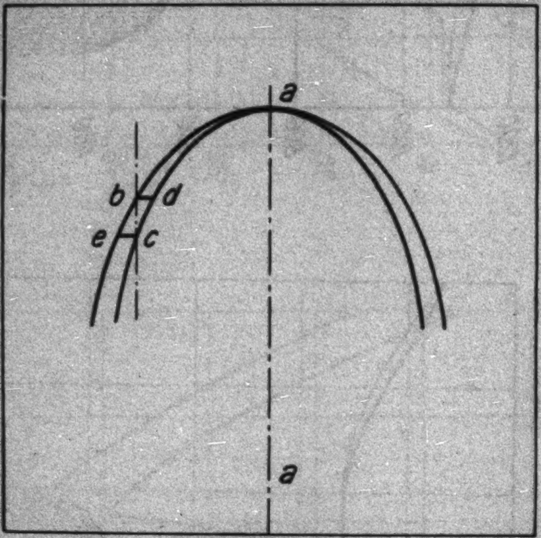


Fig. 13

der Kupfer-Goldlegierungen so eingezeichnet wie die Fig. 13 schematisch angibt und setzen damit voraus, daß die Umwandlungen mit der Kristallisation einer Verbindung mit beiderseitiger Löslichkeit der Komponenten aus der Schmelze zu vergleichen sind. In diesem Falle kristallisiert die Verbindung *a a* selbst bei einer bestimmten Temperatur, während eine Schmelze anderer Zusammensetzung *b c* unter Seigerung in

1) a. a. O.

einem ausgedehnten aber scharf begrenzten zweiphasigen Temperaturgebiete kristallisiert. Die zuerst gebildeten Kristalle haben dabei die Zusammensetzung *d*, die zuletzt zurückbleibende Schmelze die Zusammensetzung *e*. Der Übergang ist bei langsamem Gang der Temperatur reversibel. Indessen scheint diese Klassifizierung der Umwandlungen in den Kupfer-Goldlegierungen mehr auf die theoretischen Erwartungen der genannten Autoren als auf experimentelle Erfahrungen gegründet zu sein.

Nachdem nun die Natur der Umwandlungen als ein Übergang zwischen geordneten und ungeordneten Atomverteilungen durch die Arbeiten von Johansson und Linde erkannt worden ist, und da es sich gezeigt hat, daß verschiedene Zwischenzustände zwischen guter Ordnung und voller Unordnung hergestellt werden können, entsteht nun die Möglichkeit, daß die Umwandlungen eine mit steigender Temperatur allmählich und in einer Phase fortschreitender Umwandlung aus geordnete in ungeordnete Atomverteilungen ausmachen und bei abnehmender Temperatur umgekehrt. Die jetzt vorliegenden Widerstandsmessungen stützen durchaus die letzte Auffassung. Die Übergänge geschehen auch bei den einfachen Atomverhältnissen entsprechend den Formeln Cu_3Au, AuCu und Cu_3Pd nicht bei einer bestimmten Temperatur, sondern in ausgedehnten Temperaturgebieten. Das gleichzeitige Vorhandensein von zwei Phasen oder amorphen Zwischenzuständen in einer Probe ist röntgenographisch nie in den Cu_3Au-, CuAu- und Cu_3Pd-Gebieten gefunden worden.

Wir haben somit in diesen drei Fällen aller Wahrscheinlichkeit nach in den Umwandlungsgebieten eine Art homogener Gleichgewichte in festem Zustande. Früher untersuchte Beispiele dieser Art hat man wahrscheinlich in der Umwandlung des β-Messings um etwa 470° und in dem Abmagnetisierungsverlauf der ferromagnetischen Metalle unter den Curiepunkt.[1]) Ob auch rein chemische, homogene Gleichgewichte im festen Zustande gefunden sind, ist noch zweifelhaft.[2])

Freilich machen, wenn wir die Gleichgewichte in den Mischkristallen mit den homogenen Gleichgewichten in Gasen

1) Vgl. C. H. Johansson, Ann. d. Phys. 84. S. 976. 1928.

2) W. Nernst, Theoretische Chemie, 10. Aufl. S. 542; G. Tammann und O. Heusler, Zeitschr. f. anorg. u. allg. Chem. 158. S. 349. 1926.

und Lösungen vergleichen, die Erscheinungen der Temperaturhysterese zunächst einen befremdenden Eindruck. Wir werden die Hystereseerscheinungen im nächsten Abschnitt näher besprechen, und dort sehen, daß sie wahrscheinlich ein wesentliches Merkmal der hier besprochenen Art von Gleichgewichten sind.

Es fragt sich nun weiter, ob die Hilfsmittel, die uns die Beschreibung der homogenen Gleichgewichte in Gasen und Lösungen erleichtern, d. h. die chemischen Formeln, die Angabe der Konzentrationsverhältnisse und das Massenwirkungsgesetz auch im festen Zustande von Nutzen sein können.

Will man die mehr oder weniger geordneten Verteilungen der Atome durch Formeln darstellen, könnte man zunächst daran denken, die eine Atomart, die A-Atome, ins Auge zu fassen und durch die Formel angeben, wie die A-Atome von A- und B-Atomen umgeben sind. Sind die Molenbrüche der A- und B-Atome p und q $(p+q=1)$, kann z. B. der vollständig ungeordnete Zustand im flächenzentrierten Gitter, wo jedes Atom 12 Nachbarn hat, als

$$p^{12} A_{12} + 12 p^{11} q\, A_{11} B + 66 p^{10} q^2 A_{10} B_2 + \cdots\cdot q^{12}$$

geschrieben werden, wo A_{12}, $A_{11} B$, $A_{10} B_2 \cdots\cdot B_{12}$ die verschiedenen Kombinationen von A- und B-Atomen bezeichnen und die Koeffizienten p^{12}, $12 p^{11} q$ usw. nach dem Theorem von Bernouilli aus der Entwicklung von $(p+q)^{12}$ erhalten werden. Will man noch die verschiedenen Konfigurationen einer bestimmten Zahl von A- und B-Atomen unterscheiden, müssen die Therme weiter unterteilt werden. Die geordneten Zustände unterscheiden sich von den ungeordneten durch andere Werte des Koeffizienten. Das Formelschreiben wird sehr mühsam und von wenig Nutzen.

Rein formal können wohl die verschiedenen Zustände und ihre Übergänge einfacher angegeben werden, wenn wir die Paare von benachbarten Atomen ins Auge fassen. Wir haben in binären Legierungen drei Arten solcher Paare, die wir AB, AA und BB schreiben können. Der statistisch ungeordnete Zustand wird durch die Verteilung

$$p^2 AA + 2pq\, AB + q^2 BB$$

charakterisiert. Bei der Ordnung ändern sich die Koeffizienten, und es kann leicht bewiesen werden, daß die Änderung immer der Formel

$$2\delta AB \rightleftharpoons \delta AA + \delta BB$$

genügt, wo den δ in den verschiedenen Fällen verschiedene Werte zukommen. So berechnet sich für den Übergang aus vollständig geordnetem in vollständig ungeordneten Zustand bei den Zusammensetzungen Cu_3Au und Cu_3Pd $\delta = {}^1/_{16}$ und bei CuAu $\delta = {}^1/_{12}$. Trotz der Einfachheit dieser Formel dürfte sie doch von wenig Nutzen sein, weil der Anordnung der Paare benachbarter Atome wahrscheinlich keine wesentliche physikalische Bedeutung zukommt. Es dürfte vielmehr in erster Linie die Raumanordnung und Packung der Atome sein, die die potentielle Energie des Gitters bestimmen und dadurch für die Umwandlungen maßgebend sind. Es ist deshalb kaum wahrscheinlich, daß die gewöhnliche Gitterbeschreibung durch eine einfachere, dem chemischen Formelschreiben ähnliche, ersetzt werden kann.

Bei homogenen Gleichgewichten in Gasen oder Lösungen kann der Stand des Gleichgewichtes durch die Konzentrationsverhältnisse der reagierenden Moleküle angegeben werden, und die Konzentrationen können oft durch Gasdruck, osmotischen Druck, elektrolytische Leitfähigkeit oder chemische Nebenreaktionen bestimmt werden. Der Stand des Gleichgewichtes in den hier besprochenen Umwandlungen in den metallischen Mischkristallen ist durch den Grad der Ordnung (bzw. Unordnung) der Atomverteilung bestimmt. Es hat keine große Schwierigkeit, diese Größe für eine gegebene homogene Verteilung mathematisch eindeutig festzulegen. Zu der Frage, ob wir auch Möglichkeiten haben, eine so definierte Größe experimentell zu bestimmen, kommen wir im nächsten Abschnitt zurück.

Um zu einem tieferen thermodynamischen Verständnis der Gitterstrukturumwandlungen zu kommen, muß man dann die freie Energie der Mischkristalle in ihrer Abhängigkeit von Konzentration, Ordnungsgrad und Temperatur bestimmen. Diese Aufgabe enthält u. a. die Bestimmung des vielfach gesuchten sogenannten „Mischungsgliedes" in festen Kristallen. Sie dürfte bei den metallischen Mischkristallen experimentell verhältnismäßig leicht zugänglich sein. Proben verschiedener Ordnung, die unterhalb etwa 200—300° C im untergekühlten Zustande praktisch stabil sind, können ja durch geeignete Wärmebehandlung hergestellt werden, und es gilt dann, um ihre freie Energie zu erhalten, teils die spezifischen Wärmen

von tiefen Temperaturen aus zu messen, teils die Wärmetönungen bei Übergang zwischen verschieden geordneten Zuständen zu bestimmen. Zurzeit liegen aber gar keine Messungen dieser Größen vor.

6. Die Beziehungen der Ordnung der Atomverteilung zum Widerstand und zur Intensität der Überstrukturlinien

Es geht aus den Überlegungen im vorigen und im nächsten Abschnitt hervor, daß die Festlegung und experimentelle Bestimmung eines Maßes für die Ordnung (bzw. Unordnung) der Atomverteilung der verschiedenen unter dem Umwandlungsgebiete stabilen Zustände der Legierungen eine notwendige Bedingung für die thermodynamische Beschreibung der Umwandlungen sein wird. Es liegt dann am nächsten, ein solches Maß entweder auf die Widerstandswerte oder auf die Intensitäten der Überstrukturlinien in den Röntgendiagrammen zu gründen. In beiden Fällen hat man durch die Erfahrung gut gestützte Theorien[1]) für den Zusammenhhang zwischen den experimentell gemessenen Größen und die Ordnung der Atomverteilung.

Es muß aber hervorgehoben werden, daß die Theorien nur im Falle von nicht zu kleinen, regulären Kristallen ohne innere Störungen im Gitter auf die Resultate der Messungen von Widerstand oder Röntgenintensitäten gut angewendet werden können. Nur in diesem Falle (der wahrscheinlich bei Cu_3Au realisiert worden ist) dürften beide Methoden gute Aufschlüsse über die Ordnung geben. Es sind nämlich die folgenden drei Komplikationen zu beachten.

1. Hat die geordnete Verteilung wie um CuAu eine nicht kubische Struktur, so wird der Widerstand nicht nur von der Anordnung der Atome im Gitter, sondern auch von der Orientierung der Kristallkörner in dem untersuchten Drahte abhängig. In Wirklichkeit zeigt es sich auch, daß die Legierungen im CuAu-Gebiete nicht durch ihre Lage im Widerstand-Temperaturdiagramme vollständig bestimmt sind. Wir haben mit Ausgang von demselben Punkte im Diagramme (Figg. 4 und 5) sehr verschiedene Kurven erhalten, obschon die äußeren

1) Für den Widerstand: K. Höjendahl, Phil. Mag. **48**. S. 349. 1924; G. Borelius, Ann. d. Phys. **77**. S. 109. 1925. Für die Röntgenintensitäten: L. Vegard und H. Schjelderup, Phys. Ztschr. **18**. S. 95. 1917.

Versuchsbedingungen möglichst gleich gehalten wurden. Es läßt sich doch nicht feststellen, ob diese Komplizierung aus der hier unter 1. besprochenen Ursache herrührt oder aus den unter 2. und 3. zu besprechenden. Eine vorhandene aber unbekannte Orientierung der Kristallite kann auch die quantitative Auswertung der Röntgenintensitäten hindern.

2. Bei sehr feinem Korn ist ein Einfluß der Korngröße auf den Widerstand zu erwarten. Ähnliches gilt auch nach Bearbeitung.

3. In einer Legierung mit statistischer Verteilung dürfte beim Übergang in eine geordnete Verteilung das Einordnen der Atome in gewissen Zentren anfangen. Macht man die plausible Annahme, daß innerhalb des einzelnen Einkristalls mehrere solche Zentren vorhanden sind, die anwachsen, bis der ganze Kristall eine Verteilung, der das Gleichgewicht bei der vorhandenen Temperatur entspricht, bekommen hat, so wird der Kristall in mehreren Gebieten der geordneten Verteilung gespaltet. Dabei müssen, wenn ein Gebiet mit einem anderen, das anfangs nicht gleichorientiert ist, verwachsen soll, sämtliche Atome des einen Gebietes ihren Platz im Gitter vertauschen, wie es aus Fig. 14, die die 001-Ebene eines kubisch flächenzentrierten Gitters mit der Verteilung Cu_3Au oder Cu_3Pd wiedergibt, hervorgeht. Beim tetragonalen CuAu-Gitter ist die Wahrscheinlichkeit, daß zwei anfangs aneinander grenzende Gebiete gleich orientiert sein sollen, so daß sie ohne weiteres verwachsen können, noch kleiner als bei Cu_3Au und Cu_3Pd. Eine solche Zerlegung der Kristallite in kleine Elementarbereiche muß, wenn die gut bewährten Vorstellungen Höjendahls über die Leitung in Mischkristallen zutreffen, den Widerstand erhöhen. Sie muß aber auch, und zwar in anderer Weise, auf die Röntgenintensitäten Einfluß haben. Gemäß der Theorie v. Laue[1]) sind die Intensitäten der Röntgeninterferenzen von sehr kleinen Kristallen oder Kristallen mit Darwinscher Mosaikstruktur proportional dem Quadrate des Strukturfaktors, während von Ewald[2]) gezeigt worden ist, daß sie bei größeren, idealen Kristallen, wie sie z. B. in Diamant vorhanden sind, direkt proportional dem Strukturfaktor sind. Durch eine Untersuchung von Waller[3])

---

1) M. v. Laue, Enzykl. d. math. Wissenschaften Bd. V. 3.
2) P. P. Ewald, Phys. Ztschr. 26. S. 29. 1925.
3) I. Waller, Ann. d. Phys. 79. S. 261. 1926.

ist es wahrscheinlich, daß bei mittleren Kristallgrößen die Intensitäten zwischen diesen Grenzen liegen. Für die wegen der geordneten Verteilung auftretenden Überstrukturlinien dürfte dasselbe gelten, wenn man statt der Kristallgröße die

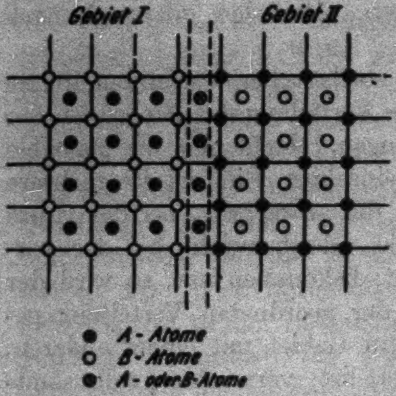
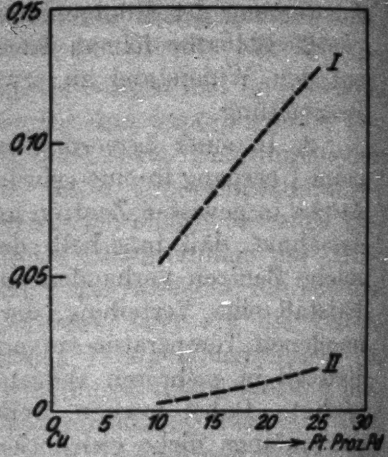


Fig. 14



I. $J_ü : J_n = S_ü : S_n$
II. $J_ü : J_n = S_ü^2 : S_n^2$

Fig. 15. Intensitätsverhältnis der Überstrukturlinien zu den normalen Linien

Größe von den elementaren Bereichen der Ordnung betrachtet. In Fig. 15 sind die Intensitätsverhältnisse der Überstrukturlinien zu denen der normalen Linien eingetragen, sowohl wenn die Intensität proportional dem Strukturfaktor als auch wenn sie proportional dem Quadrate dieses Faktors ist. Die Berechnung ist ausgeführt für die ideale Cu_3Pd-Verteilung bei 25 At.-Proz. Pd und für die kleineren Pd-Gehalte unter der Voraussetzung, daß die überschüssigen Cu-Atome die Pd-Atome der idealen Ordnung nach Zufall ersetzt haben. Je größer die Bereiche der geordneten Verteilung sind, um so näher kommt man der oberen Kurve, während man umgekehrt bei kleinen Bereichen sich der unteren Kurve annähert. Aus der Figur geht ohne weiteres hervor, daß die Röntgenintensitäten sehr wohl bei einer Konzentration an der Seite der multiplen Proportion am stärksten erscheinen können, wenn nur die Bereiche der Ordnung dort am größten sind.

In der Tat scheint es ohne solche Vorstellungen über die Zerlegung der Kristallite in kleinen Bereichen kaum möglich, die merkwürdigen experimentellen Befunde im Cu_3Pd-Gebiete zu erklären. Es sind hier die Intensitäten der Überstrukturlinien maximal um etwa 17 At.-Proz. Pd und sie werden von hier aus mit steigendem Pd-Gehalt immer schwächer, so daß sie bei exaktem Cu_3Pd auch in sehr langsam gekühlten Legierungen sehr schwach sind. Wegen der Lage der Überstrukturlinien und ihrer Intensität relativ zueinander ist es trotzdem nicht zu bezweifeln, daß alle Legierungen dieses Gebietes eine Atomanordnung haben, die der Metallverbindung Cu_3Pd entspricht, nur daß mit steigendem Cu-Gehalt einige Pd-Atome von Cu-Atomen ersetzt sind. Die Widerstand-Konzentrationskurve (Fig. 10), die für dieselben langsam gekühlten Legierungen erhalten wurde, die röntgenographisch untersucht waren, zeigt ferner, daß um etwa 25 At.-Proz. Pd die Widerstandsverkleinerung wegen der Ordnung am größten ist, d. h. die Ordnung dürfte hier mehr vollständig sein als z. B. bei 17 At.-Proz. Pd. Die kleine Intensität der Überstrukturlinien ist somit auf die Kleinheit der elementaren Bereiche der Ordnung zurückzuführen. Diese Bereiche dürften wegen der erfahrungsgemäß sehr kleinen Diffusion in den CuPd-Legierungen bei den Umwandlungstemperaturen hier verhältnismäßig beständig sein.

Im Cu_3Au-Gebiete gehen die Widerstandsverkleinerung und die Intensität der Überstrukturlinien einander parallel und beide haben beim Atomverhältnis 1:3 ihre Maximalwerte.

Jedes Maß der Grad der Ordnung, das auf Widerstandswerte oder Intensitäten der Überstrukturlinien gegründet wird, wird nach dem gesagten leicht mit einer bedeutenden Unbestimmtheit und Unsicherheit behaftet. Da wir aber zurzeit keine bessere Möglichkeit kennen, um ein solches Maß zu bekommen, empfiehlt es sich, dieses Maß bis auf weiteres auf eine der besprochenen, Erscheinungen zu gründen und es ist dabei der Widerstand, der ja experimentell leichter und sicherer zugänglich ist als die Röntgenintensitäten, zu bevorzugen. Die aus dem Widerstand ϱ der betreffenden Legierung, ϱ_0 einer Legierung derselben Konzentration mit bestmöglicher Ordnung und ϱ_u einer mit voller Unordnung gebildeten Größe

$$\xi = \frac{\varrho - \varrho_0}{\varrho_u - \varrho_0}$$

wird ein geeignetes Maß der Unordnung und hat den Vorteil, von 0 bis 1 zu variieren. $1 - \xi$ wird somit ein Maß der Grad der Ordnung. Die Widerstandswerte ϱ, ϱ_0 und ϱ_u sollen sich dabei auf dieselbe Temperatur beziehen und es empfiehlt sich aus praktischen Gründen hierzu die Zimmertemperatur $+ 18^0$ C zu wählen. Die Änderung des Widerstandes mit der Temperatur ist doch eine solche, daß auch eine andere nicht zu hohe Temperatur sehr nahe denselben Wert für ξ geben dürfte.

7. Die Natur der Hysteresiserscheinungen

Die experimentellen Erfahrungen weisen darauf hin, daß die Hysteresiserscheinungen ein wesentliches Merkmal der untersuchten Umwandlungen sind. Sie scheinen durch noch so langsamen Gang der Temperatur nicht beseitigt werden zu können, und Teile der beiden Kurvenzweige sind in demselben Temperaturgebiete reversibel gefunden worden.

Wir haben in verschiedenen Richtungen nach einer Erklärung dieser Erscheinungen gesucht. Trotzdem die gewöhnliche Gleichgewichtslehre der chemischen Thermodynamik vor den Hysteresiserscheinungen hilflos dasteht, können doch Erklärungsmöglichkeiten auf thermodynamischer Grundlage gefunden werden. Wir wollen im folgenden auf zwei verschiedene derartige Möglichkeiten aufmerksam machen. Über ihre Gültigkeit dürfte erst nach weiteren Messungen entschieden werden können.

1. Eine Möglichkeit ist, daß die Hysteresiserscheinungen schon durch die Form der freien Energie als Funktion der Grad der Unordnung ξ und der Temperatur T bedingt werden. Wir erläutern dies durch die Figg. 16 und 17. Die Kurven 11 geben die freie Energie bei der bestmöglichen Ordnung der Atome ($\xi = 0$) als Funktion der Temperatur, die Kurven 55 bei der vollen Unordnung ($\xi = 1$), 22, 33 und 44 gehören zwischenliegenden Zuständen an. Der Übersichtlichkeit halber sind alle Kurven als Gerade gezogen. Die stabilen Zustände sind die der kleinsten freien Energie. Schneiden sich die Kurven wie in der Fig. 16, werden bei steigender Temperatur die Zustände 1, 2, 3, 4 und 5 nacheinander die stabilsten. Die Unordnung nimmt stetig zu. Das Schema stimmt qualitativ mit dem überein, das bei der Verschiebung eines chemischen Gleichgewichtes in einer Gasphase gültig ist. Schneiden sich

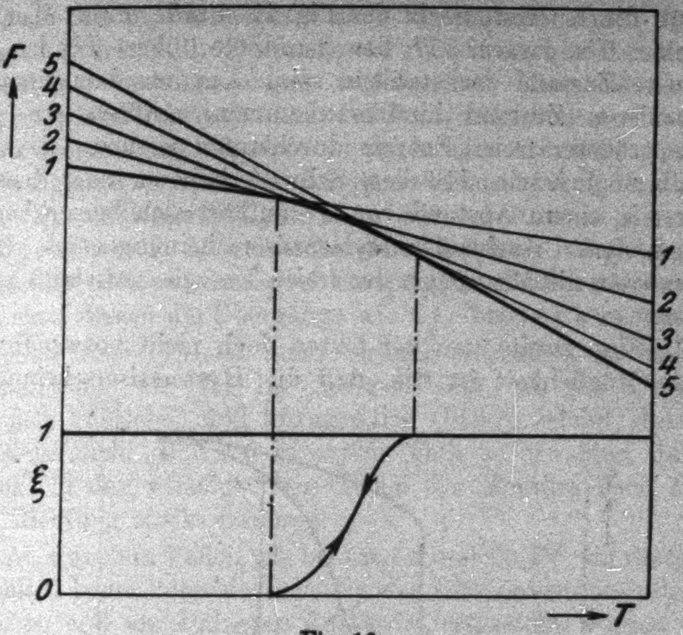


Fig. 16

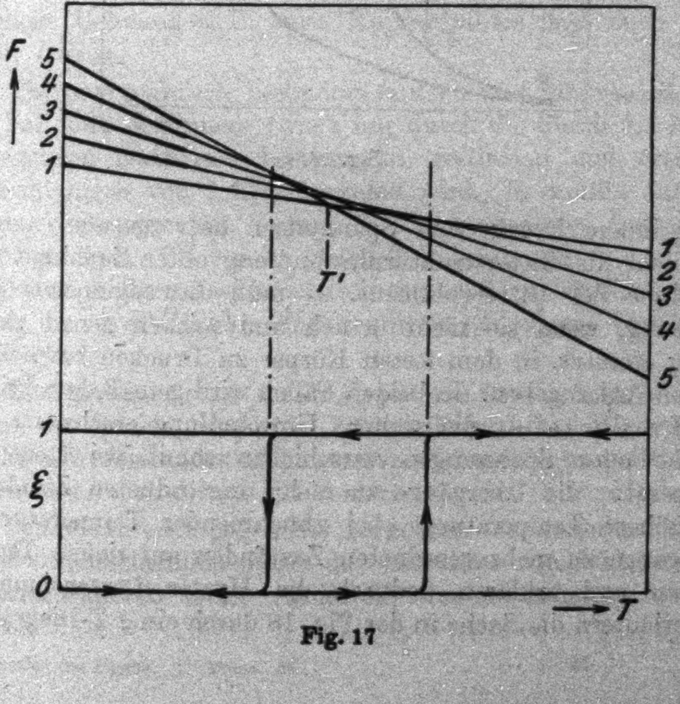


Fig. 17

dagegen die Kurven wie in der Fig. 17, würde unter einer bestimmten Temperatur T^1 der geordnete, über T^1 der ungeordnete Zustand der stabilste sein. Um aus dem einen in den anderen Zustand hinüberzukommen, müßten aber Zustände größerer freier Energie durchlaufen werden. Es kann deshalb möglich sein, daß diese Schwelle höherer freier Energie, die erst in einem Abstand von T^1 aufhört sich bemerkbar zu machen, eine Ursache der Hysteresiserscheinungen ist. Hierüber müssen die Messungen der freien Energie Aufschluß geben können.

2. Eine zweite von der ersten doch nicht notwendig getrennte Möglichkeit ist die, daß die Hysteresiserscheinungen

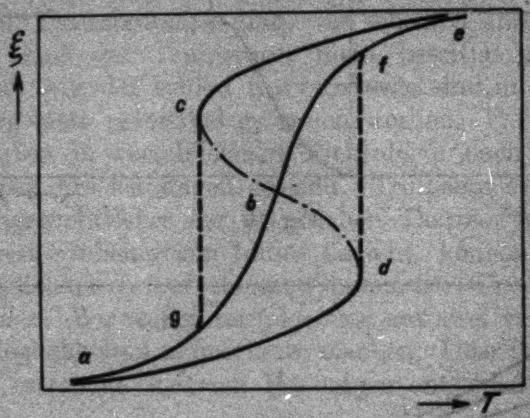


Fig. 18

durch innere Drucke und Spannungen hervorgerufen werden. Geschieht die Gitterstrukturumwandlung unter Zunahme bzw. Abnahme des Gittervolumens, so muß die beginnende Umwandlung, wenn sie nicht örtlich und zeitlich genau gleichmäßig einsetzt, in dem festen Körper zu Drucken bzw. Spannungen Anlaß geben. In beiden Fällen wird gemäß dem Prinzip von Le Chatelier die weitere Umwandlung erschwert. Die Drucke oder Spannungen verschieben somit bei steigender Temperatur die Übergänge zu mehr ungeordneten Zuständen auf höhere Temperaturen, bei abnehmender Temperatur die Übergänge zu mehr geordneten Zuständen auf tiefere Temperaturen und erklären dadurch die Hysteresiserscheinungen. Wir erläutern die Sache in der Fig. 18 durch ein ξ T-Diagramm.

a b c sei die, in Wirklichkeit nicht erreichbare, Kurve für den inneren Druck Null. Die inneren Drucke verschiedener Zeichen geben die den Messungen zugänglichen Kurvenstücke *a d* und *c e*. Es ist vorauszusehen, daß bei einem mittleren Wert von ξ, wo positive und negative Abweichungen von dem mittleren ξ-Wert gleich vorkommen, der innere Druck durch Null gehen soll. Die Gleichgewichtskurve würde somit etwa die Form *a d b e c* erhalten. Das Zwischenstück ist doch bei gleichmäßig steigender oder abnehmender Temperatur nicht erreichbar. Es sind statt dessen die Übergänge wie *d f c* bzw. *e g a* zu erwarten.

Daß innere Drucke auch wirklich entstehen, ist bei einer Umwandlung wie der im AuCu-Gebiete, wo ein Übergang zwischen kubischen und tetragonalen Gittern erfolgt, durchaus wahrscheinlich. Man hat in diesem Falle zu erwarten, daß die Drucke in den verschiedenen Teilen des Metalles nach Größe und Richtung stark variieren.

Aber auch in Fällen wie bei Cu_3Au und Cu_3Pd, wo röntgenographisch keine Verschiedenheiten der Gitterkonstanten der geordneten und ungeordneten Zustände festgestellt worden sind, ist die Entstehung von Drucken durchaus möglich. Die Gitterkonstanten sind nur auf etwa 0,5 Proz. genau und die größtmögliche Dehnung z. B. eines Kupferdrahtes liegt noch unter dieser Grenze.

Thermodynamisch besonders einfach und interessant wäre der Fall, daß der innere Druck nur durch die durch die Atombewegungen statistisch bestimmten, zeitlichen und örtlichen Schwankungen von ξ hervorgerufen wird. Es müßte dann zu jedem Wertepaar von ξ und T ein bestimmter homogener Druck gehören. Bei ξ nahe gleich 0 und nahe gleich 1 müßten die Schwankungen assymmetrisch sein und zu Drucken Anlaß geben, die in den beiden Fällen mit verschiedenen Vorzeichen auftreten.

Eine gewisse Stütze dieser Hypothese von inneren Drucken findet man darin, daß die Röntgenlinien von Legierungen mittleren Widerstandes (d. h. auch mittlerer Ordnung) diffus gefunden worden sind, was auf Verzerrungen im Gitter hindeutet.

Belege für oder gegen die Hypothese der inneren Drucke würden wahrscheinlich durch die Aufnahme von Widerstandstemperaturkurven unter variierten Drucken erhalten werden können.

8. Zusammenfassung

1. Durch frühere Arbeiten von Johansson und Linde war nachgewiesen worden, daß u. a. in den Mischkristallreihen Kupfer-Gold und Kupfer-Palladium in der Nähe der Zusammensetzungen Cu_3Au, CuAu, Cu_3Pd und CuPd bei niederen Temperaturen eine geordnete Verteilung der Atome stabil ist, bei höheren eine ungeordnete Verteilung. Die Übergänge zwischen diesen Zuständen sind jetzt durch Aufnahme von Widerstandstemperaturdiagramme, in denen die Lagen der Umwandlungen sehr deutlich hervortreten, untersucht worden.

2. Sämtliche Beispiele zeigen eine deutliche Temperaturhysterese im Umwandlungsgebiete.

3. Die Einzelheiten im Verlauf der Widerstandstemperaturkurven sind in den vier Beispielen recht verschieden und werden in ihrem Zusammenhang mit früheren und neueren röntgenographischen Befunden besprochen.

4. Die Zustands- und Widerstandsdiagramme der beiden Legierungsreihen sind durch die Messungen vervollständigt worden.

5. Die Übergänge zwischen geordneten und ungeordneten Zuständen geschehen in den Konzentrationsgebieten um Cu_3Au, CuAu und Cu_3Pd wahrscheinlich stetig und sind thermodynamisch als Verschiebung eines homogenen Gleichgewichtes zu klassifizieren. Nur bei CuPd, wo das Gitter bei Unordnung der Atome flächenzentriert kubisch und im geordneten Zustand raumzentriert kubisch ist, scheint der Übergang nicht stetig zu verlaufen.

6. Die Grundlagen für die thermodynamische Behandlung der homogenen Gleichgewichte dieser Art sind besprochen worden. Unter anderem geht hervor, daß auch die Erscheinungen der Temperaturhysterese auf thermodynamischer Grundlage behandelt werden können. Es zeigt sich aber, daß zur Entscheidung zwischen verschiedenen Erklärungsmöglichkeiten weitere Messungen über die freie Energie der Mischkristalle und über die Einwirkung von hohem Druck auf die Umwandlungen nötig sein dürften.

Stockholm, Physikal. Institut der Techn. Hochschule, April 1928.

(Eingegangen 21. April 1928)

5. *Zur Wellenmechanik des Atomgitters;*

von M. J. O. Strutt

Zusammenfassung

Es wird die Elektronenbewegung im ein-, zwei- und dreidimensionalen Atomgitter wellenmechanisch behandelt. Für das Potential wird hierbei eine rein sinusförmige Verteilung angenommen. Die Eigenwertspektren ergeben sich aus der Theorie der Mathieuschen Differentialgleichung.

I. Eindimensionales Gitter

In der Wellengleichung für die eindimensionale Bewegung:

(1) $$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2}{h^2}\cdot m\cdot(E - V(x))\cdot\psi = 0$$

nehmen wir als Potentialfunktion an:

(2) $$V(x) = -A\cdot\cos 2a\cdot x,$$

so daß die Gitterkonstante x_0 beträgt:

(3) $$x_0 = \frac{\pi}{a}.$$

Durch Einführung von (2) in (1) und die gleichzeitige Transformation:

(4) $$2ax = 2y,$$

schreibt sich die Wellengleichung:

(1a) $$\frac{d^2\psi}{dy^2} + \frac{8\pi^2}{a^2\cdot h^2}\cdot m\cdot(E + A\cdot\cos 2y)\cdot\psi = 0.$$

Für kleine A könnte man diese Gleichung mit Hilfe der Eigenwertstörungstheorie behandeln. Die Theorie der Mathieuschen Differentialgleichung[1]) gibt uns aber fast unmittelbar

1) Verf., Ann. d. Phys. 84. S. 485. 1927; 85. S. 129. 1928.

die völlige Lösung des Eigenwertproblems (1a) mit der Randbedingung

$$\psi = 0 \quad \text{für} \quad x = \pm\infty.$$

Die allgemeine Lösung von (1a) hat nach dem Floquetschen Satze die Gestalt[1])

$$\psi = \alpha \cdot e^{\mu y} \cdot \Phi(y) + \beta \cdot e^{-\mu y} \cdot \Phi(-y) \tag{5}$$

mit α und β Integrationskonstanten, Φ eine periodische Funktion mit der Periode 2π und μ ein Koeffizient, unabhängig von y, aber abhängig von E und A der Gl. (1a). Es ist leicht nachzuweisen, daß bei Beschränkung auf *reelle* ψ der Koeffizient μ nur entweder reell oder rein imaginär sein kann. Weiter ist klar, daß unsere Randaufgabe *nur bei reellem* μ gelöst werden kann, und zwar läßt sich dann die Lösung im Gesamtgebiet zusammenstellen aus je einer Lösung (5) für $y \geqq 0$ und für $y \leqq 0$. Die Übergangsbedingung für $y = 0$ lautet ψ und $\frac{d\psi}{dy}$ stetig. Die Konstanten α und β sind dann eindeutig bestimmbar bis auf einen gemeinschaftlichen, willkürlichen und gleichgültigen Faktor.

Es ist:

$$\text{für } y \geqq 0: \quad \psi = \beta \cdot e^{-\mu y} \cdot \Phi(-y)$$
$$= \beta \cdot e^{-\mu y} \cdot \left(B_1 \varphi_1(y) - B_2 \varphi_2(y)\right),$$

mit φ_1 eine gerade, φ_2 eine ungerade periodische Funktion.

Für $y \leqq 0$ gilt:

$$\psi = \beta \cdot e^{\mu y} \cdot \Phi(y) = \beta \cdot e^{\mu y} \left(B_1 \varphi_1(y) + B_2 \varphi_2(y)\right),$$

da die Übergangsbedingungen für $y = 0$ ergeben: $\alpha = \beta$.

Aus dieser Überlegung erhellt, daß für das obige Problem die Grenzkurven in einer Ebene mit

$$m \cdot \frac{8\pi^2}{a^2 h^2} \cdot E = \lambda \quad \text{und} \quad m \cdot \frac{8\pi^2}{a^2 h^2} \cdot A = \gamma \tag{6}$$

als rechtwinklige Koordinaten, zwischen jenen Gebieten, für die μ reell, und jenen Gebieten, für die μ imaginär ist, aus-

---

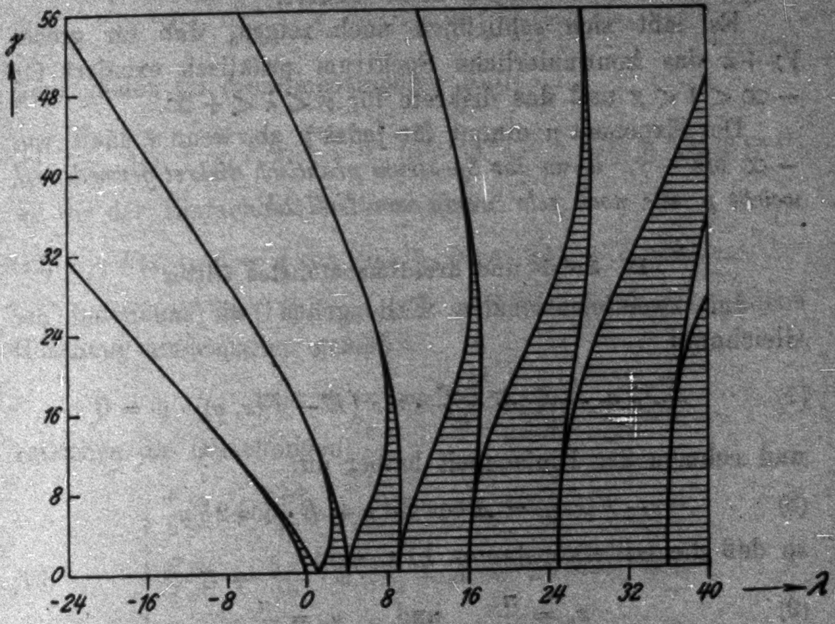
1) E. T. Whittaker und G. N. Watson, Modern Analysis, 1920.

schlaggebende Bedeutung haben. Sie sind in Fig. 1 gezeichnet worden[1]) (Gebiete für imaginäres μ schraffiert).

Man kann nachweisen, daß diese Kurven paarweise von

$$\lambda = 1,\ 4,\ 9\ \ldots\ n^2$$

ausgehen und weiterhin, daß zwei Kurven, die vom Punkte $\lambda = n^2$ ausgehen, sich hier von $(n-1)$-ter Ordnung berühren.[2])



Gebiete für reelle (weiß) und imaginäre μ (schraffiert) der Mathieuschen Gleichung

Fig. 1

Man ersieht hieraus, daß für negative E ein kontinuierliches Eigenwertspektrum entsteht. Für positive E wird das Spektrum intervallweise kontinuierlich. Aus der obigen Bemerkung über die „Berührung" erhellt, daß die kontinuierlichen Intervalle stets schmäler werden für große positive E und daß es für jedes A einen Wert E gibt, derart, daß die

1) Nach Angaben von E. L. Ince, Proc. Roy. Soc. Edinb. 46 S. 316. 1926.

2) Verf., Math. Ann. 1928 (im Erscheinen).

kontinuierlichen Spektrumsintervalle eine Breite besitzen, kleiner als eine beliebig vorgegebene kleine Zahl.

Ich möchte erwähnen, daß diese letzteren Eigenschaften auch bestehen bei *periodischem* Potential $V(x)$, *das nicht rein sinusförmig verläuft*, wie schöne Sätze von O. Haupt[1]) zeigen.

Zusammenfassend kann man sagen, das Eigenwertspektrum ist für negative E und kleine positive E kontinuierlich; für steigendes E wird es stets mehr diskret.

Es läßt sich schließlich noch zeigen, daß für großes $\sqrt{\gamma + \lambda}$ das kontinuierliche Spektrum praktisch existiert für $-\infty < \lambda < \gamma$ und das diskrete für $\gamma < \lambda < +\infty$.

Der Exponent μ nimmt für jedes γ ab, wenn λ läuft von $-\infty$ bis $-\gamma$. *Wenn das Spektrum praktisch diskret geworden ist, weicht μ nur noch sehr wenig von Null ab.*

II. Zwei- und dreidimensionales Gitter

Im zweidimensionalen Fall gehen wir aus von der Gleichung:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{8\pi^2}{h^2} \cdot m \cdot (E - V(x, y)) \cdot \psi = 0 \tag{7}$$

und nehmen der Einfachheit halber an:

$$-V(x, y) = A \cos 2ax + B \cdot \cos 2by, \tag{8}$$

so daß die Gitterkonstanten bzw. sind:

$$x_0 = \frac{\pi}{a} \quad \text{und} \quad y_0 = \frac{\pi}{b}\,. \tag{9}$$

Durch Einsetzen von (8) in (7) und Aufspalten der entstandenen Gleichung gemäß:

$$\psi = \psi_1(x) \cdot \psi_2(y)$$

entstehen:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\psi_1}{dx^2} + \dfrac{8\pi^2}{h^2} \cdot m \cdot (E_1 + A \cos 2ax) \cdot \psi_1 = 0, \\ \dfrac{d^2\psi_2}{dy^2} + \dfrac{8\pi^2}{h^2} \cdot m \cdot (E_2 + B \cos 2by) \cdot \psi_2 = 0, \end{cases} \tag{10}$$

mit

$$E = E_1 + E_2\,.$$

1) O. Haupt, Math. Ann. 79. S. 281. 1919.

Jede der Gl. (10) läßt sich in der gleichen Weise behandeln, wie die Gl. (1) im Abschnitt I. Wieder liegt die Lösung wesentlich in der Fig. 1. Nur muß man beachten, daß bei der ersten Gl. (10) für λ und γ zu setzen sind:

$$\lambda = \frac{8\pi^2}{a^2 h^2} \cdot E_1 \cdot m; \quad \gamma = \frac{8\pi^2}{a^2 \cdot h^2} \cdot A \cdot m.$$

und bei der zweiten Gl. (10):

$$\lambda = \frac{8\pi^2}{b^2 h^2} \cdot E_2 \cdot m; \quad \gamma = \frac{8\pi^2}{b^2 h^2} \cdot B \cdot m.$$

Ganz analog im dreidimensionalen Fall:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{8\pi^2}{h^2} \cdot m \cdot \big(E - V(x, y, z)\big) \cdot \psi = 0, \tag{11}$$

wo wir der Einfachheit halber setzen:

$$-V(x, y, z) = A \cos 2ax + B \cos 2by + C \cos 2cz. \tag{12}$$

Indem (12) in (11) eingesetzt wird und die so entstandene Gleichung aufgespalten gemäß:

$$\psi = \psi_1(x) \cdot \psi_2(y) \cdot \psi_3(z),$$

entstehen die Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d^2 \psi_1}{d x^2} + \frac{8\pi^2}{h^2} \cdot m \cdot (E_1 + A \cos 2ax) \cdot \psi_1 = 0, \\ &\frac{d^2 \psi_2}{d y^2} + \frac{8\pi^2}{h^2} \cdot m \cdot (E_2 + B \cos 2by) \cdot \psi_2 = 0, \\ &\frac{d^2 \psi_3}{d z^2} + \frac{8\pi^2}{h^2} \cdot m \cdot (E_3 + C \cdot \cos 2cz) \cdot \psi_3 = 0; \end{aligned}\right. \tag{13}$$

mit

$$E = E_1 + E_2 + E_3.$$

Wieder kann man das Eigenwertspektrum im wesentlichen aus Fig. 1 ablesen, nur daß man bei der ersten Gl. (13) zu setzen hat:

$$\lambda = \frac{8\pi^2}{a^2 h^2} \cdot E_1 \cdot m; \quad \gamma = \frac{8\pi^2}{a^2 h^2} \cdot A \cdot m;$$

bei der zweiten Gl. (13):

$$\lambda = \frac{8\pi^2}{b^2 h^2} \cdot E_2 \cdot m; \quad \gamma = \frac{8\pi^2}{b^2 h^2} \cdot B \cdot m;$$

und bei der dritten Gl. (13):

$$\lambda = \frac{8\pi^2}{c^2 h^2} \cdot E_3 \cdot m; \quad \gamma = \frac{8\pi^2}{c^2 h^2} \cdot C \cdot m.$$

Es scheint mir möglich, durch die Betrachtung der oben gefundenen Spektren und Lösungen gewisse Erscheinungen der Metallleitung, insbesondere die Supraleitung dem Verständnis näher zu bringen.

Eindhoven, Natuurkundig Laboratorium der N. V. Philips' Gloeilampen Fabrieken, 2. April 1928,

(Eingegangen am 11. Mai 1928)

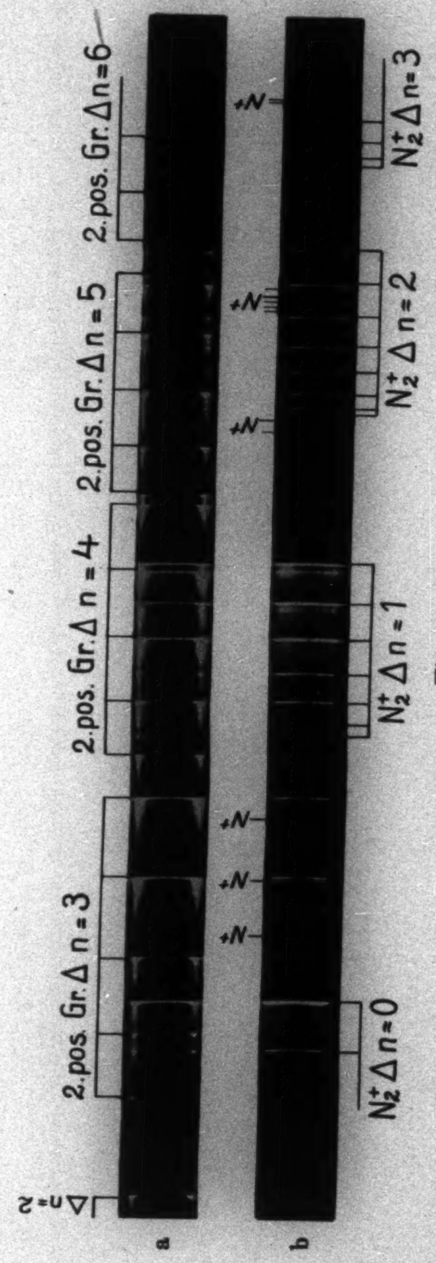


Fig. 1

G. Herzberg

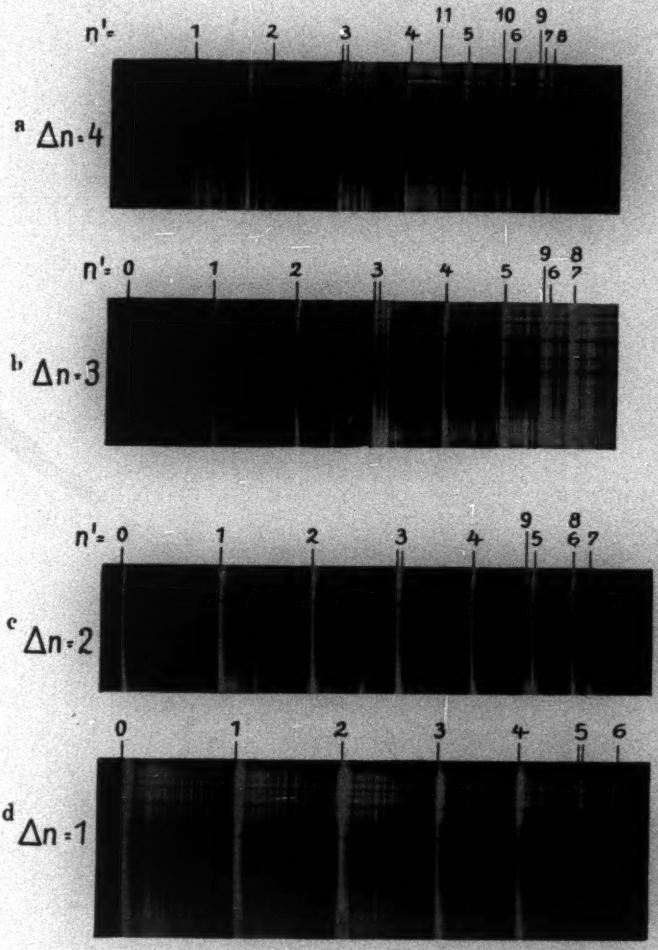


Fig. 2

G. Herzberg

1928 № 11

ANNALEN DER PHYSIK

VIERTE FOLGE. BAND 86

1. *Über die Faserstruktur des Bromsilbers in den Schichten photographischer Trockenplatten;*

von Hans H. Meyer

(Hierzu Tafel VIII bis X)

1. Vorbemerkungen

Zur Untersuchung der Struktur von Kristallpulverteilchen hat die Röntgenstrahlenanalyse in der Form des bekannten von Debye und Scherrer angegebenen Verfahrens häufig Anwendung gefunden. Bei den nach dieser Methode ausgeführten Untersuchungen über die Entstehung des latenten Bildes im photographischen Prozeß fanden Koch und Vogler[1]), daß die Intensitätsverteilung in den am Bromsilber erhaltenen Ringsystemen Unterschiede aufweist, welche durch die Art des benutzten Bromsilbers bedingt sind. Besonders ausgeprägt sind diese Unterschiede an den beiden inneren Ringen, die den Reflexionen an den Würfel- bzw. Rhombendodekaederebenen [Indizes (100) bzw. (110)] des einfach-kubischen Bromsilbergitters entsprechen. Während nämlich beim bindemittel-*freien* Bromsilberpulver der erste Ring (100) intensiver ist als der zweite (110), ist bei der Substanz von technischen Trockenplatten umgekehrt Ring (100) schwächer als Ring (110).

Die Aufklärung dieser Unterschiede war der Ausgangspunkt für die im folgenden mitgeteilten Untersuchungen.

2. Vorbereitende Untersuchungen

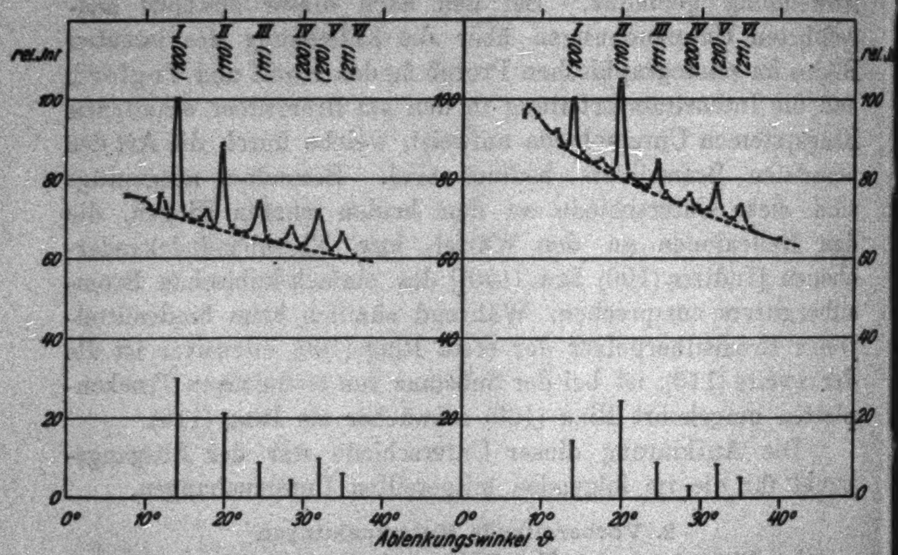
In Figg. 1a und b Taf. VIII sind die mit zirkongefilterter Molybdänstrahlung am bindemittelfreien Bromsilber und an mehreren hintereinandergesetzten Schichten photographischer Trockenplatten erhaltenen Diagramme als Positive in natürlicher Größe wiedergegeben. Im letzteren Falle wurden die einzelnen Schichten senkrecht vom Röntgenstrahl durchsetzt.[2]) Die sechs

1) P. P. Koch u. H. Vogler, Ann. d. Phys. 77. S. 495—502. 1925.

2) Einzelheiten über die Herstellung der Präparate sowie über die Röntgentechnik sind unten (Abschn. 3 und 4) mitgeteilt.

intensivsten Ringe der Figg. 1a und b, Taf. VIII sind im folgenden in der Reihenfolge der wachsenden Ringradien mit I—VI beziffert. Sie sind durch Reflexion der Molybdän-$K\alpha$-Strahlung (λ = 0,71 ÅE.) an den Netzebenen der Bromsilberkriställchen mit den Indizes (100), (110), (111), (200), (210) und (211) entstanden. Weiter außerhalb sind noch merklich schwächere Ringe vorhanden, welche höher indizierten Reflexionen entsprechen. Die beiden dicht innerhalb der Ringe I bzw. II schwach sichtbaren Ringe sind durch Reflexion der mit dem Zirkonfilter nicht völlig unterdrückten Mo $K\beta$-Strahlung (λ = 0,63 ÅE.) an den (100)- bzw. (110)-Ebenen entstanden.[1])

Die eingangs erwähnten Unterschiede in den Intensitätsverhältnissen für die beiden inneren intensiven Ringe (I und II) sind an den in Figg. 1a und b, Taf. VIII wiedergegebenen Auf-



Radialer Intensitätsverlauf in den Debye-Scherrerdiagrammen von bindemittelfreiem Bromsilber (a) und photographischen Schichten (b). (Abszisse = Ablenkungswinkel ϑ; Ordinate = relative Intensität)

Fig. 2

1) Die Schwärzungssprünge auf den horizontalen Mittellinien der in den Figg. 1a und b reproduzierten Filme sind für Absorptionsmessungen, die in diesem Zusammenhang nicht interessieren, durch Einschalten von 0,2 mm dicken Aluminiumfolien unmittelbar vor dem linken oberen und dem rechten unteren Viertel der Filme hervorgerufen worden.

nahmen deutlich zu erkennen. Noch klarer treten diese Unterschiede in den Kurven der Fig. 2 hervor, welche den durch Ausphotometrieren der Photogramme mit dem Registriermikrophotometer[1]) erhaltenen Intensitätsverlauf auf dem Ringradius darstellen, wobei in beiden Fällen die Maximalintensität des inneren Ringes gleich 100 gesetzt ist. Nach Abzug der kontinuierlich verlaufenden Untergrundintensität von den Maximalintensitäten bleiben die gleichzeitig in der Fig. 2 schematisch durch senkrechte Striche dargestellten reinen Ringintensitäten übrig. Tab. 1 enthält die Relativwerte der reinen Ringintensitäten für die beiden Bromsilberarten. Für das Intensitätsverhältnis zwischen Ring I und II ergibt sich daraus bei bindemittel*freiem* Bromsilber der Wert 1,43, bei photographischen Schichten 0,61.

Tabelle 1

Relative Intensitäten der Ringe in den Debye-Scherrerdiagrammen von bindemittelfreiem Bromsilber (a) und photographischen Schichten (b)

1	2	3	4
Ring	Indizes	*Relative Ringintensitäten* a) bindemittelfreies Bromsilber	b) photogr. Schichten
I	(100)	100	100
II	(110)	70	164
III	(111)	30	57
IV	(200)	14	21
V	(210)	34	60
VI	(211)	20	34
	$\frac{J_I}{J_{II}} =$	1,43	0,61

Daß die Verstärkung des zweiten Ringes im letzteren Falle nicht durch eine einfache Überlagerung des Diagrammes der in den Schichten enthaltenen Gelatine über das Bromsilberdiagramm hervorgerufen wird, geht daraus hervor, daß Gelatine außer einigen diffusen Ringen, welche nur zur Verstärkung des kontinuierlichen Untergrundes beitragen, einen auffallend scharfen Ring aufweist, der genau auf den ersten Bromsilberring fällt und diesen verstärken müßte, während

1) F. Goos u. P. P. Koch, Ztschr. f. Phys. 44. S. 855—859. 1927.

die Aufnahmen gerade umgekehrt eine Schwächung des ersten Ringes bei photographischen Schichten zeigen.

Aber auch auf chemische Veränderungen des Bromsilbers in den Schichten etwa bei der Herstellung der Emulsion können die Veränderungen nicht zurückgeführt werden, denn man erhält mit denselben Schichten wieder ein Diagramm vom Typ a (des bindemittelfreien Bromsilbers), wenn man nach einem geeigneten Verfahren (vgl. S. 330) die Schichten von der Gelatine befreit, oder wenn man sie in Wasser quellen läßt und darauf im feuchten Zustande untersucht. Nach dem Wiedereintrocknen der Schichten bekommt man dann wieder ein Diagramm vom Typ b.

Besonders diese letzte Tatsache in Verbindung mit den unten (S. 350) erwähnten Überlegungen von Silberstein führte zu der Vermutung, daß die reflektierenden Netzebenen der Bromsilberkriställchen beim Eintrocknen der photographischen Schicht eine Orientierung erfahren, welche für die Veränderung der Ringintensitäten verantwortlich gemacht werden kann, daß also das Bromsilber in der photographischen Schicht eine Faserstruktur zeigt.

Dem widerspricht nicht etwa die Tatsache, daß auf dem Diagramm der Fig. 1b, Taf. VIII nichts von den für Faserstrukturen typischen Schwärzungspunkten oder -streifen zu sehen ist; denn als Faserachse, d. h. Achse, zu der eine bestimmte kristallographische Richtung aller Kristallite parallel steht, kommt nur die Schichtennormale in Betracht, und diese fällt bei senkrechtem Durchgang der Röntgenstrahlen durch die Einzelschichten mit der Achse des Strahlenbüschels zusammen, so daß in diesem Sonderfall die Intensitätsverteilung im Diagramm allseitig symmetrisch zum Durchstoßpunkt des unabgelenkten Röntgenstrahles sein muß.

Die Faserstruktur kann aber im Diagramm in augenfälliger Weise zum Ausdruck gebracht werden, wenn man Präparate benutzt, bei denen die Normale der einzelnen photographischen Schichten gegen den Röntgenstrahl um einen endlichen Winkel geneigt ist, also etwa einen rechten Winkel bildet („rechtwinkliges“ Faserdiagramm), wie es bei den unten beschriebenen Untersuchungen der Fall war. Die hierzu benötigten Präparate sind nach dem im folgenden Abschnitt angegebenen Ver-

fahren hergestellt worden. Dort werden auch die Einzelheiten über die Anfertigung der bei den oben mitgeteilten Voruntersuchungen benutzten Präparate beschrieben.

3. Die Herstellung der Präparate

a) Das *bindemittelfreie Bromsilber* wurde durch Hinzufügen von $^1/_{10}$ norm. Silbernitratlösung zur gleichen Menge von $^1/_{10}$ norm. Bromkalilösung ausgefällt, der Niederschlag auf dem de Haënschen Ultrafilter mehrmals mit Wasser ausgewaschen und schließlich auf der Filtermembran getrocknet. Als Präparatträger dienten rechteckige Neusilberbleche von 0,1—0,2 mm Dicke, die in der Mitte ein rundes Loch von 5 mm Durchmesser besaßen. Dies Loch wurde bei pulverförmigen Präparaten auf der einen Seite mit etwa 0,1 mm dickem schwarzen Papier beklebt, die gewünschte Menge der benutzten Substanz fein zerrieben hineingefüllt und das Loch schließlich auf der anderen Seite ebenfalls mit schwarzem Papier verschlossen. Die Dicke des bei Fig. 1a, Taf. VIII benutzten Präparates wurde nachträglich unter Berücksichtigung der Papierdicke mit dem Schraubenmikrometer zu 0,06 mm bestimmt.

b) Die untersuchten *photographischen Schichten* stammten von Hauff-Extrarapidplatten. Um chemische Komplikationen mit Sicherheit zu vermeiden, sollte zum Ablösen der photographischen Schichten von der Glasplatte an Stelle des üblichen Verfahrens unter Anwendung von Flußsäure oder deren Salzen ein mechanisches Verfahren benutzt werden. Zu diesem Zwecke wurden die Platten eine halbe Stunde in Wasser eingelegt und darauf die aufgeweichten Schichten unter Wasser in mehreren Streifen mit einer Rasierklinge abgehoben. Die Streifen wurden auf sauberen Glasplatten ausgebreitet und nach vollständigem Trocknen wieder mit der Klinge abgetrennt. Aus den trockenen Streifen wurden 30 kreisförmige Plättchen von 5 mm Durchmesser ausgestanzt und aufeinandergelegt. Da die Dicke jedes Einzelplättchens 0,02 mm betrug (gleich der Dicke der von der Glasplatte abgetrennten photographischen Schicht), hatte das ganze Präparat eine Gesamtdicke von 0,6 mm. Ein wenig Syndetikon hielt diese Plättchen am Rande zusammen und diente zugleich zur Befestigung in der

Durchbohrung des Präparatträgers. (Durch diese Schichten ging dann der Röntgenstrahl senkrecht hindurch.)

c) Das *von der Gelatine befreite Bromsilber* wurde ebenfalls aus einer Hauff-Extrarapidplatte gewonnen. Diese wurde etwa 15 Stunden lang bei 30° C in Degomma-P-Lösung[1]) gelegt, welche die Gelatine durch „enzymatische“ Prozesse verflüssigt. Die nach dem Herausnehmen der Glasplatte übrigbleibende Aufschwemmung wurde dann wie unter a) beschrieben auf dem Ultrafilter gewaschen, getrocknet und zu einem 0,07 mm dicken AgBr-Pulverpräparat verarbeitet.

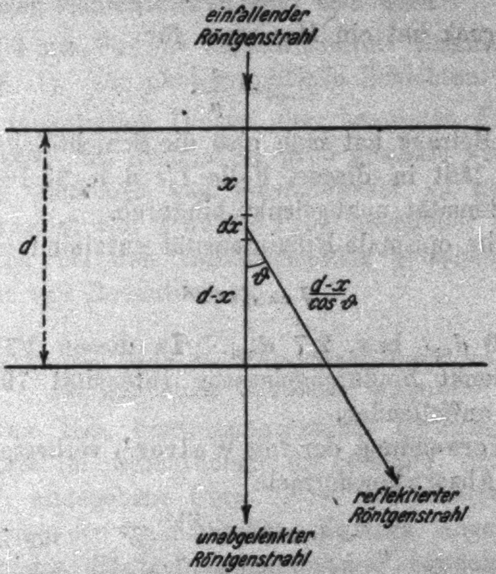
d) Von der *in Wasser gequollenen photographischen Schicht* wurden 18 Scheibchen von 5 mm Durchmesser ausgestanzt und im nassen Zustand zu einer Dicke von $3^1/_2$ mm hintereinander in eine dünnwandige Zelluloidküvette gelegt, die, allseitig verschlossen, das Präparat vor dem Austrocknen schützte. (Auch dieses Präparat wurde senkrecht zu den Einzelschichten vom Röntgenstrahl durchsetzt.) Nach der Aufnahme wurde der obere Rand der Küvette aufgeschnitten; die eingeschlossene Feuchtigkeit verdunstete dann im Verlaufe einiger Stunden, und die Schichten trockneten auf etwa 0,4 mm Gesamtdicke zusammen.

e) In den zum Nachweis der Faserstruktur benötigten Präparaten sollten die *Einzelschichten parallel zum Röntgenstrahl* angeordnet sein. Zu diesem Zwecke wurden aus den nach b) von der Platte abgetrennten trockenen Schichten etwa 160 Streifen vom Format $0{,}02 \times 5 \times 10\ mm^3$ ausgeschnitten, aufeinandergelegt und mit Syndetikon verklebt. Dieser etwa 3 mm hohe Block wurde dann durch einige senkrecht zu den Einzelschichten geführte Schnitte in Plättchen von etwa 1 mm Dicke und $3 \times 5\ mm^2$ Fläche zerlegt. Jedes einzelne an der Durchbohrung des Neusilberrahmens befestigte Präparat bestand somit aus 160 Streifen photographischer Schichten von je 5 mm Länge und 1 mm Breite. (Der Röntgenstrahl ging, wie in Fig. 5 schematisch dargestellt, durch dieses 1 mm dicke Präparat parallel zu den Einzelschichten, also senkrecht zu deren Normale hindurch.)

---

1) F. Limmer, Photogr. Rundsch. 60. S. 58—62. 1923.

Die Herstellung der das lichtempfindliche Bromsilber enthaltenden Präparate geschah bei rotem oder stark gedämpften gelben Licht, so daß eine merkliche Silberausscheidung, die nach Koch und Vogler[1]) erst bei mehrstündiger intensiver Belichtung eintritt, sicher vermieden wurde.



Verlauf des direkten und des reflektierten Röntgenstrahles in einem durch parallele Ebenen begrenzten Präparate
Fig. 3

Für die Wahl der Präparatdicken waren folgende Überlegungen maßgebend. Sowohl bei unendlich kleiner wie bei unendlich großer Dicke des Präparates ist die Intensität der Debye-Scherrerringe gleich Null, da im ersten Falle keine reflektierende Substanz vorhanden ist und im letzten Falle die ganze einfallende und reflektierte Röntgenstrahlung im Präparat selbst absorbiert wird. Die folgende Berechnung der optimalen Schichtdicke, d. h. derjenigen Dicke, bei der die Ringe maximal geschwärzt werden, ist aus Fig. 3 ohne weiteres verständlich.

Die bei einer Schichtdicke d unter dem Ablenkungswinkel ϑ aus dem Präparat mit dem Absorptionskoeffizienten μ austretende Strahlung ist proportional

1) P. P. Koch u. H. Vogler, a. a. O.

$$J = \int_0^d e^{-\mu\left(x + \frac{d-x}{\cos\vartheta}\right)}\, dx = \frac{e^{-\frac{\mu d}{\cos\vartheta}}}{\mu\left(1 - \frac{1}{\cos\vartheta}\right)}\left[1 - e^{-\mu d\left(1 - \frac{1}{\cos\vartheta}\right)}\right].$$

Für kleine Ablenkungswinkel ϑ wird hieraus

$$J \sim d e^{-\mu d}.$$

Dieser Ausdruck hat ein Maximum für

$$d_{\text{opt}} = \frac{1}{\mu}.$$

Von diesem Betrage hat man also die Schichtdicke zu wählen. Die Schicht läßt in diesem Falle $1/e$ d. h. 37 Proz. der auffallenden Intensität unabgelenkt hindurch.

Die halbe optimale Ringintensität entnimmt man aus der Kurve

$$J = d e^{-\mu d}$$

für $d = 0{,}23\ d_{\text{opt}}$ bzw. $2{,}7\ d_{\text{opt}}$. In diesen Fällen beträgt die unabgelenkt hindurchgelassene Intensität 79 Proz. bzw. 7 Proz. der auffallenden.

Unter Verwendung der von Walter[1]) verbesserten Richtmyerschen Absorptionsformeln

$$\frac{\mu'}{\varrho} = 0{,}0160\ \frac{Z^{3{,}94}}{A}\lambda^3 \qquad \text{für } \lambda < \lambda_{K\text{-Grenze}},$$

$$\frac{\mu''}{\varrho} = 0{,}000522\frac{Z^{4{,}30}}{A}\lambda^3 \qquad \text{für } \lambda > \lambda_{K\text{-Grenze}},$$

wo

μ = wahrer Absorptionskoeffizient,
ϱ = Dichte,
Z = Ordnungszahl,
A = Atomgewicht,
λ = Wellenlänge in ÅE.,

erhält man nach dem bekannten von Walter eingehend mitgeteilten Rechenverfahren für das Bromsilber und die Wellenlänge $\lambda = 0{,}709$ ÅE. den Absorptionskoeffizienten

$$\mu = 350\ \text{cm}^{-1}.$$

Aus den von Koch und Vogler[2]) mitgeteilten Daten über den Silbergehalt der Trockenplatten (0,77 mg/cm²) und dem nach

---

1) B. Walter, Fortschr. Röntgenstr. 35. S. 929—947 und 1308 bis 1310. 1927.

2) P. P. Koch u. H. Vogler, a. a. O.

den numerischen Angaben von Blunck und Koch[1]) berechneten Absorptionskoeffizienten für Gelatine ($\mu = 1,3\ \mathrm{cm}^{-1}$) ergibt sich für die photographische Schicht ein mittlerer Absorptionskoeffizient

$$\mu = 30\ \mathrm{cm}^{-1}.$$

Die optimalen Schichtdicken sind also etwa

0,03 mm für das bindemittelfreie Bromsilber,
0,3 „ für photographische Schichten.

Die oben mitgeteilten Dicken der benutzten Präparate sind durchweg zwei- bis dreimal so groß gewählt worden, um die Herstellung einfacher und einwandfreier zu gestalten. Der Intensitätsverlust von etwa 50 Proz. gegenüber der optimalen Intensität ist bei den verhältnismäßig geringen Belichtungszeiten nicht von Bedeutung.

4. Einzelheiten über die Aufnahmetechnik und die bei der Aufnahme benutzten Apparate

Die von Hrn. Institutsmechaniker Schumann gebaute *Kamera* hatte im wesentlichen die übliche von Debye und Scherrer[2]) angegebene Form. Vor dem Auftreffen auf das in der Achse der zylindrischen Kamera angebrachte Präparat ging das Röntgenstrahlenbüschel zunächst durch die 100 bzw. 30 mm vor dem Präparat aufgestellten Kollimatorblenden hindurch. Diese bestanden aus mehrere Millimeter starken Bleiblechen mit zylindrischen Durchbohrungen von 1,2 mm Durchmesser in der ersten und 1,5 mm Durchmesser in der zweiten Blende. Unmittelbar vor dem Präparate befand sich noch eine dritte den Strahlengang begrenzende Bleiblende von 9 mm Stärke mit einer Durchbohrung von 0,8 mm Durchmesser, die in der hinteren Hälfte auf 1,2 mm aufgeweitet wurde, um den Film vor der an dieser letzten Blende gestreuten Strahlung zu schützen. Aus der Größe und Lage dieser Blenden berechnet sich für die obere Grenze der Divergenz des direkten Strahlenkegels ein halber Öffnungswinkel von $^1/_2{}^0$ für den an der hinteren Blende gestreuten

---

1) R. Blunck u. P. P. Koch, Ann. d. Phys. 77. S. 477–494. 1925.

2) Vgl. z. B. R. Zsigmondy, Lehrb. d. Kolloidchem. 3. Aufl. S. 396 1920 im Anhang von P. Scherrer.

Sekundärstrahlenkegel von 11°. Da der Radius des inneren Bromsilberringes 14° beträgt, so sind bei dieser Anordnung alle Ringe vor der Streustrahlung der Blende geschützt.

Als Filmträger standen verschiedene Messingrahmen zur Verfügung. Benutzt wurden entweder zylindrisch gebogene Filme von 66,4 bzw. 104,2 mm Durchmesser (1 mm des Umfangs entspricht 1,72° bzw. 1,10°) oder ebene Filme in 22,6 bzw. 44,6 mm Abstand von der Präparatmitte. Der unabgelenkte zentrale Röntgenstrahl wurde in kleinen Bleikästchen aufgefangen, die so vor dem Film angebracht waren, daß dieser keine an dem „Strahlenfänger" gestreute Strahlung erhalten konnte.

Zum Schutze gegen Streustrahlung von außen besaß die zylindrische Kamerawand (Durchmesser 150 mm) einen 1 mm dicken Bleipanzer.

Die *Röntgenröhre*, eine von der Röntgenröhrenfabrik C. H. F. Müller[1]) in Hamburg gelieferte Media-Materialuntersuchungsröhre mit Molybdänantikathode und zylindrischer Glühspirale hatte einen zylindrischen Glaskolben von 56 mm Durchmesser. Somit war es möglich, ohne Gefahr der Beschädigung der Röhre den Abstand Brennfleck—vordere Kollimatorblende zu etwa 80 mm zu wählen. Befestigt war die Röhre in einem mit 5—10 mm dickem Bleigummi ausgelegten Schutzkasten, mit dem auch die Kamera starr verbunden war.

Die Röhre wurde mit 30 mA und 50 oder 55 kV konstanter Gleichspannung an einem Radiospektralapparat mit Kondensatorzusatz der Firma Koch & Sterzel, Dresden betrieben. Da es bei dieser hohen Leistung nötig war, die Antikathode direkt aus der Wasserleitung zu kühlen, war die Antikathode geerdet.

Durch ein vor dem Kollimatorrohr der Kamera angebrachtes *Zirkonfilter* (0,05 g Zirkondioxyd auf 1 cm² Fläche) wurde erreicht, daß die in die Kamera eintretende Strahlung im wesentlichen von der Wellenlänge der MoK_α-Strahlung ($\lambda = 0{,}71$ ÅE.) bestand. Der außerdem von dem Filter durchgelassene geringe

1) Der Firma C. H. F. Müller spreche ich meinen verbindlichsten Dank aus für die kostenlose Überlassung der Röhre, die trotz der starken Dauerbelastung von 1½ bis 2 Kilowatt nunmehr bereits 500 Stunden im Betriebe ist.

Anteil an Strahlung von der Wellenlänge der MoK_{β}-Linie ($\lambda = 0{,}63$ ÅE.) sowie vom kurzwelligen Ende des kontinuierlichen Spektrums wurden bei der unten (S. 341) beschriebenen photometrischen Auswertung der Diagramme berücksichtigt.

Bei Benutzung von doppelseitig begossenem Agfa-*Röntgenfilm* ergaben Belichtungszeiten von 3—4 Stunden kräftige, gut photometrierbare Schwärzungen.

Die Filme wurden in der Kamera durch mindestens doppelte Lagen schwarzen Papiers vor optischem Licht geschützt.

Die Entwicklungsdauer betrug 10 Minuten bei 18° C in Rodinal 1:20 mit Bromkalizusatz.

5. Das Faserdiagramm der photographischen Schichten

Mit den parallel zum horizontal verlaufenden Röntgenstrahl angeordneten Einzelschichten (vgl. Abschn. 3e) wurden in der Tat die für Faserstrukturen typischen Streifendiagramme erhalten. Die beiden in Fig. 4, Taf. IX als Positive in natürlicher Größe wiedergegebenen Aufnahmen wurden auf ebenen Filmen hergestellt (Abstand Präparat-Film 44,6 mm). Auf der oberen lag die Normale der Einzelschichten (Faserachse) horizontal, auf der unteren vertikal (Richtung der nebengezeichneten Pfeile). Auf jeder Aufnahme wurden Stückchen der äußeren Ringe durch den Filmrand abgeschnitten, beide Aufnahmen zusammen lassen aber die Intensitätsverteilung in den ganzen 6 inneren Ringen[1]) erkennen. Man bemerkt

4	Intensitätsmaxima	auf	Ring	I	(Indizes	(100))
6	„	„	„	II	(„	(110))
6	„	„	„	III	(„	(111))
4	„	„	„	IV	(„	(200))
8	„	„	„	V	(„	(210))
8	„	„	„	VI	(„	(211))

Aus der Lage der Maxima soll in den nächsten Abschnitten die Richtung der reflektierenden Netzebenen und damit die Orientierung der Einzelkriställchen berechnet werden. Es sind jedoch schon vorweg ohne Rechnung einige Aussagen darüber möglich. Die Tatsache nämlich, daß weder Ring I noch Ring II Maxima in der durch die Faserachse und den Röntgenstrahl

1) Über die Bezifferung der Ringe vgl. S. 326.

bestimmten „Nullmeridian"-Ebene haben (vgl. Pfeilrichtung in Fig. 4a und b, Taf. IX), zeigt, daß weder die Würfel- noch die Rhombendodekaederflächen den Schichten parallel geordnet sein können. Das ist vielmehr für die Oktaederflächen der Fall, wie sich aus dem Vorhandensein der Maxima auf dem Ring III in der Meridian- (Pfeil-) Richtung ergibt. Die endgültige Bestätigung hierfür bleibt der unten folgenden Ausmessung sämtlicher Maxima vorbehalten.

6. Geometrische Ausmessung der Intensitätsmaxima in den Streifendiagrammen

Nach der Bezeichnungsweise von Polanyi[1]) handelt es sich im vorliegenden Falle um ein *einfaches, rechtwinkliges, reales Faserdiagramm*. Hier gilt nach Polanyi die Beziehung

$$\cos \varrho = \cos \delta \cos \gamma,$$

wo ϱ = Winkel zwischen Faserachse und Netzebenennormale oder Winkel zwischen Einzelschichten und reflektierenden Netzebenen,

δ = Winkel zwischen Faserachse und Reflexionsebene (dies ist die durch den einfallenden und den abgelenkten Strahl definierte Ebene),

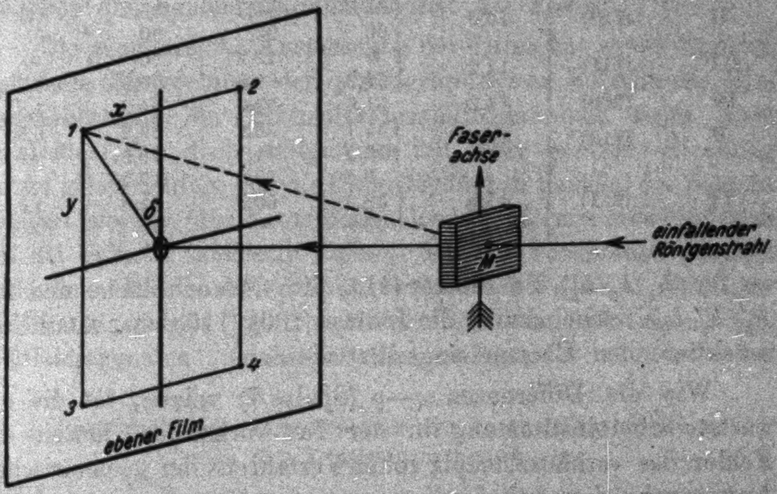
γ = Glanzwinkel, d. h. halber Ablenkungswinkel.

Zur Ausmessung der Diagramme wurden Aufnahmen benutzt, bei denen ebene Filme senkrecht auf dem unabgelenkten Röntgenstrahl standen. In der perspektivisch gezeichneten Fig. 5 ist der Durchstoßungspunkt des unabgelenkten Röntgenstrahls mit 0 bezeichnet. Die symmetrisch zu 0 liegenden Punkte 1, 2, 3 und 4 seien die Durchstoßpunkte der an einer Netzebenenart (etwa Würfelflächen) reflektierten Strahlen. Denken wir uns auf dem Film ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit dem Mittelpunkt in 0 so gelegt, daß die y-Achse der Faserachse des Präparates M parallel, die x-Achse senkrecht dazu verläuft, so findet sich auf dem Film der Winkel δ wieder als Winkel zwischen den Verbindungslinien 0 1, 0 2, 0 3 und 0 4 einerseits und der y-Achse andererseits. Es ist also

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{x}{y}.$$

1) M. Polanyi, Ztschr. f. Phys. 7. S. 149—180. 1921; M. Polanyi und K. Weissenberg, Ztschr. f. Phys. 9. S. 123—130. 1922.

An 4 ebenen Filmen vom Format $6 \cdot 9\ cm^2$, von denen 2 je 22,6 mm, die anderen beiden je 44,6 mm (vgl. Fig. 4, Taf. IX) hinter dem Präparat standen, wurden die ebenen Koordinaten x und y für die Maxima auf den inneren 6 Ringen ausgemessen und aus den entsprechend gebildeten Mitteln die zugehörigen Winkel δ nach obiger Formel berechnet. Die Werte stehen in der Spalte 4 der Tab. 2. Unter Benutzung der in Spalte 3 angegebenen Werte für γ erhält man daraus die ϱ-Werte der Spalte 5.



Das rechtwinklige Koordinatensystem auf dem ebenen Film und seine Orientierung zu den Einzelschichten des Präparates und zum Röntgenstrahl

Fig. 5

Wenn nun die oben (S. 336) geäußerte Vermutung richtig ist, daß die Oktaederflächen der Bromsilberkriställchen sich der Ebene der photographischen Schicht beim Trocknen gleichrichten, so müssen die aus den Messungen erhaltenen Winkel ϱ zwischen Schicht und reflektierenden Netzebenen übereinstimmen mit den Winkeln φ zwischen einer Oktaederfläche und den durch die Gitterpunkte gelegten Ebenen, an denen Reflexionen stattfinden. Diese Winkel φ wurden (Spalte 6) berechnet nach der Gleichung

$$\cos\varphi = \frac{h_1 h_1' + h_2 h_2' + h_3 h_3'}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2} \cdot \sqrt{h_1'^2 + h_2'^2 + h_3'^2}}\,,$$

Tabelle 2

Die Neigung der reflektierenden Netzebenen gegen die Ebene der photographischen Schicht (ϱ) und gegen die Oktaederfläche der Bromsilberkriställchen (φ). γ = Glanzwinkel, δ = Winkel zwischen der Reflexionsebene und der Nullmeridianebene.

1	2	3	4	5	6	7
Ring	Indizes	γ in Grad	δ in Grad	ϱ in Grad	φ in Grad	$\varphi-\varrho$ in Grad
I	(100)	7,1	53,5	53,8	54,8	1,0
II	(110)	10,0	33,6	34,7	35,2	0,5
			90	90	90	0
III	(111)	12,2	0	12,2	0	—
			69,3	69,8	70,5	0,7
IV	(200)	14,2	51,6	53,0	54,8	1,8
V	(210)	15,8	35,7	38,6	39,2	0,6
			73,5	74,1	75,0	0,9
VI	(211)	17,5	0	17,5	19,2	—
			58,9	60,5	61,8	1,3
			90	90	90	0

wo für (h_1 h_2 h_3) die Indizes (111) der Oktaederfläche und für (h_1' h_2' h_3') nacheinander die Indizes (100), (110) usw. sämtlicher reflektierenden Ebenen eingesetzt wurden.

Wie die Differenzen $\varphi-\varrho$ (Spalte 7) zeigen, ist die erwartete Übereinstimmung in der Tat vorhanden, soweit die Fehler des verhältnismäßig rohen Verfahrens der geometrischen Ausmessung dies zulassen.

In den Fällen (Zeilen 4 und 9 der Tab. 2), wo $\delta = 0$ gemessen worden war, wurden die Differenzen $\varphi - \varrho$ nicht gebildet. Im ersten Falle wurde nämlich $\varphi = 0$ berechnet, was besagt, daß die Fläche (111) der Schicht und dem Röntgenstrahl parallel liegt. Bei einer *idealen* Faserstruktur, d. h. bei absolut paralleler Gleichrichtung der Flächen, wären hier überhaupt keine Reflexionen zu erwarten. Wenn diese, wie die Aufnahmen ergeben, doch auftreten, so heißt dies, daß auch unter einem Winkel von $\varrho = 12^\circ$ gegen die ideale Richtung ($\varrho = 0^\circ$) noch eine beträchtliche Anzahl von Oktaederflächen vorhanden ist. Diese „Streuung" der Flächen um eine mittlere Lage herum ergibt sich ja auch aus der Streifenform der Schwärzungen, deren Beschaffenheit im einzelnen unten noch näher zu untersuchen sein wird.

Ähnlich liegen die Verhältnisse bei der für Ring VI an erster Stelle angegebenen Interferenz. Hier berechnet man rückwärts aus der idealen Neigung $\varphi = 19{,}2^{\circ}$ nach der Gleichung

$$\cos\delta = \frac{\cos\varphi}{\cos\gamma}$$

mit $\gamma = 17{,}5^{\circ}$ den Winkel $\delta = 8{,}0^{\circ}$, d. h. es sind hier zwei Maxima im Abstande $\delta = 8^{\circ}$ beiderseits vom „Nullmeridian" zu erwarten. Diese beiden Streifen überlagern sich wegen der Streuung und ergeben ein Gesamtmaximum in der Mitte zwischen den beiden Teilmaxima also bei $\delta = 0^{\circ}$.

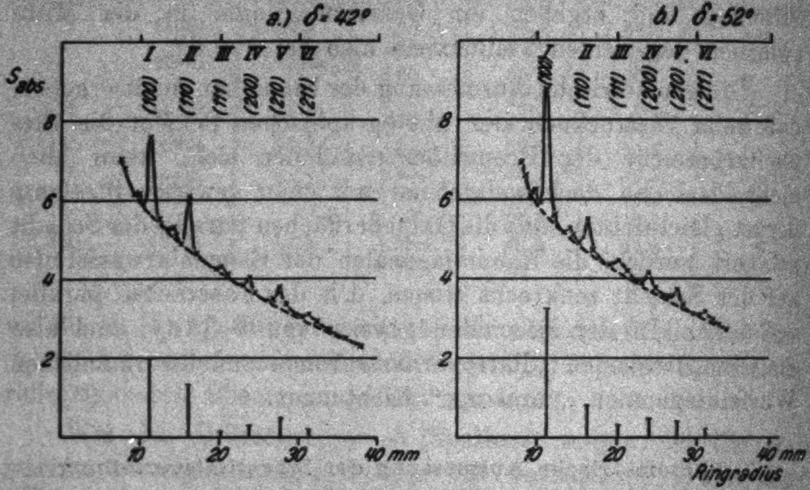
Die geometrische Ausmessung der Filme hat somit ergeben, daß beim Eintrocknen der photographischen Schicht die Elementarbereiche der Bromsilberkriställchen sich, wenn auch nicht ideal, so doch weitgehend mit einer gewissen Streuung derart gleichrichten, daß die Oktaederflächen parallel der Schicht gelagert werden, die Raumdiagonalen der Elementarwürfel also auf der Schicht senkrecht stehen, d. h. der Faserachse parallel verlaufen. In der Bezeichnungsweise von Polanyi sind also die Oktaederebenen „diatrope" Netzebenen und die räumlichen Würfeldiagonalen „paratrope" Richtungen.

7. Photometrische Ausmessung der Intensitätsverteilung in den Diagrammstreifen

Die *reale* Faserstruktur unterscheidet sich, wie bereits erwähnt, von der *idealen* dadurch, daß dort die Scharen gleich indizierter Netzebenen nicht streng parallel angeordnet sind, sondern um eine mittlere Richtung herum streuen. Ein Maß für diese Streuung, d. h. die Verteilung der reflektierenden Netzebenen auf die verschiedenen Neigungen ϱ gegen die photographischen Einzelschichten ergibt sich aus der Intensitätsverteilung längs der einzelnen Ringe des Streifendiagramms.

Um diese einwandfrei messen zu können, ist es zweckmäßig, keinen zylindrischen Film (wie bei den Pulverdiagrammen des Abschnittes 2), sondern einen ebenen Film zu benutzen, da hier alle Punkte eines Kreises den gleichen Abstand vom Präparat haben und somit hinsichtlich der Schwärzungen unmittelbar vergleichbar sind.

Die Ausmessung erfolgte mit dem Registriermikrophotometer Modell 1927 von Koch und Goos[1]) an der in Fig. 4a reproduzierten Aufnahme in der Art, daß der Photometerspalt von 0,03 · 0,7 mm² Größe in 46 verschiedenen Richtungen radial durch das Ringsystem hindurchgeführt wurde. Die Photometrierrichtungen waren vorher durch Tintenpunkte am Rande des Films markiert worden. Vor und nach dem Photometrieren sowie mehrmals zwischendurch wurde das Photo-



Radialer Schwärzungsverlauf in den Streifendiagrammen auf ebenem Film (a = 44,6 mm) unter den Azimuten $\delta = 42^\circ$ (a) bzw. $\delta = 52^\circ$ (b). Abszisse = Ringradius in mm auf dem Film; Ordinate = S_{abs}.

Fig. 6

meter in üblicher Weise mit bekannten Schwärzungen auf absolute Schwärzung geeicht und seine Konstanz nachgeprüft. Da die größten vorkommenden Schwärzungen kleiner als 1 waren, konnte zur Berechnung der relativen Intensitäten die von Friedrich und Koch[2]) gefundene lineare Beziehung zwischen Intensität und Schwärzung benutzt werden.

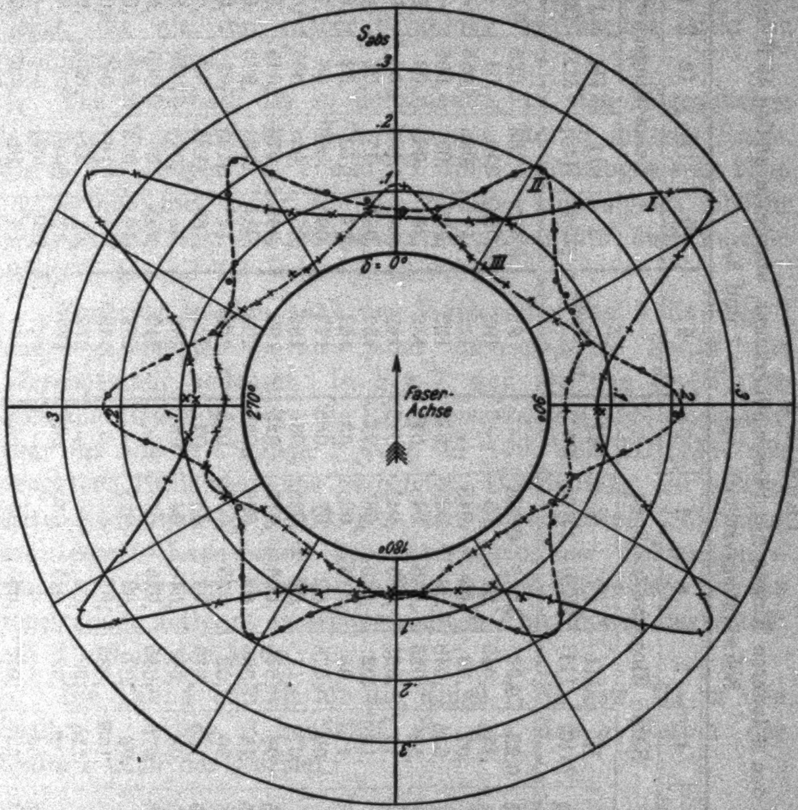
Von den 46 so erhaltenen radialen Schwärzungskurven sind die für die Azimute $\delta = 42^\circ$ und $\delta = 52^\circ$ (über die Bedeutung von δ vgl. S. 336 und Fig. 5) in Fig. 6 dargestellt.

1) F. Goos und P. P. Koch, a. a. O.

2) W. Friedrich und P. P. Koch, Ann. d. Phys. 45. S. 399—418. 1914.

Wie man daraus ersieht, ist in dieser Gegend die Intensitätsänderung für Ring I und II mit wachsendem Azimutwinkel δ besonders stark.

Aus diesen Kurven wurden die in derselben Fig. 6 schematisch durch senkrechte Striche dargestellten reinen Ring-



Darstellung des Schwärzungsverlaufes in den drei inneren Ringen des Streifendiagramms in Polarkoordinaten nach Tabelle 8.
Radius = reine Ringschwärzung; Azimut = Winkel δ.
Fig. 7

schwärzungen gefunden, indem als Tangierende der Minima der Verlauf des Untergrundes eingezeichnet und dieser von den Maximalschwärzungen abgezogen wurde. Bei diesem Verfahren wird der Einfluß der vom Zirkonfilter außer der Mo $K\alpha$-Strahlung noch schwach durchgelassenen $K\beta$-Strahlung sowie

Tabelle 3

Verlauf der Schwärzungen in den 6 inneren Ringen des Streifendiagramms, abgelesen an den 46 Kurven für die radialen Schwärzungsverläufe (vgl. Fig. 7 und 8).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Registrierplatte Nr.	δ in Grad	Reine Ringschwärzungen						δ in Grad	Reine Ringschwärzungen					
		I (100)	II (110)	III (111)	IV (200)	V (210)	VI (211)		I (100)	II (110)	III (111)	IV (200)	V (210)	VI (211)
1	272	0,075	0,22	0,03	0,015	0,035	—	92	0,085	0,205	0,025	0,01	0,03	—
2	282	,09	,18	,045	,02	,05	—	102	,09	,18	,04	—	—	—
3	292	,14	,07	,06	,03	,045	—	112	,19	,065	,055	—	—	—
4	302	,32	,065	,045	,03	,025	,045	122	,335	,05	,055	—	—	—
5	312	,32	,10	,025	,045	,045	,015	132	,29	,085	,03	,04	,03	0,02
6	322	,19	,19	,025	,035	,045	,025	142	,155	,185	,02	,03	,05	,025
7	332	,11	,18	,02	,015	,055	,01	152	,085	,17	,02	,015	,05	,02
8	342	,08	,115	,04	,015	,03	,03	162	,07	,10	,03	,01	,04	,03
9	352	,07	,09	,075	,02	,03	,045	172	,065	,065	,06	,005	,045	,035
10	2	,06	,07	,11	,02	,025	,035	182	,055	,06	,065	,015	,025	,03
11	12	,065	,08	,065	,005	,015	,025	192	,065	,075	,045	,03	,03	,03
12	22	,075	,18	,035	,02	,035	,025	202	,08	,12	,035	,03	,03	,01
13	32	,10	,20	,02	,025	,055	,015	212	,11	,195	,03	,03	,055	,01
14	42	,195	,185	,015	,03	,05	,02	222	,185	,125	,02	,035	,04	,01
15	52	,315	,08	,03	,045	,04	,02	232	,34	,07	,025	,045	,035	,02
16	62	,27	,075	,045	,025	,025	—	242	,255	,06	,065	,03	,035	,025
17	72	,15	,08	,07	,03	,035	—	252	,14	,075	,075	,025	,05	—
18	82	,09	,155	,035	,01	—	—	262	,09	,16	,045	,015	,035	—
19	92	,08	,215	,03	,02	—	—	272	,09	,22	,025	,01	,04	—
20	307	,38	,09	,03	,045	,035	,035	127	,37	,07	,03	—	—	—
21	57	,365	,08	—	—	—	—	237	,365	,055	—	—	—	—
22	327	,185	,23	,015	,025	,55	,035	147	,125	,20	,025	,025	,07	,02
23	27	,095	,175	,02	,025	,05	,02	207	,085	,16	,025	,025	,04	,015

des kurzwelligen kontinuierlichen Spektrums auf die Intensitätsverteilung im Diagramm unwirksam gemacht; denn das kontinuierliche Spektrum gibt diffuse Ringe, die den Untergrund verstärken und mit diesem zusammen abgezogen werden, während die $K\beta$-Strahlung schwache scharfe Ringe (vgl. Fig. 6a und b bei den Abszissen 9,8 bzw. 14,1 mm Ringradius) erzeugt, die als von dieser Strahlung herrührend leicht zu identifizieren sind.

Tab. 3 enthält die so gefundenen, zu den angegebenen Azimuten δ gehörenden Schwärzungen der 6 inneren Ringe. Da in den Ringen IV, V und VI die Schwärzungen sehr klein ($S_{\text{abs.}} < 0{,}05$) und daher nur mit geringer Genauigkeit meßbar sind, wurden für das Folgende nur noch die drei inneren Ringe I, II und III weiter ausgewertet.

Zunächst wurden nach den Werten der Tab. 3 die Figg. 7 und 8 gezeichnet, wo also jeder eingezeichnete Punkt eine Einzelmessung bedeutet. In Fig. 7 sind auf den Radien des Polarkoordinatensystems die Ringschwärzungen abgetragen und zwar für alle drei Ringe I (100), II (110) und III (111) von demselben Nullniveau aus gerechnet. Die Zählung der azimutalen Koordinate (δ) geht von dem senkrechten Nullradius aus, dessen Lage nach der Symmetrie der Schwärzungsmaxima festgelegt wurde. In Fig. 8 sind dieselben Kurven voneinander getrennt in rechtwinkligen Koordinaten dargestellt mit $\delta = 0$ in der Mitte.

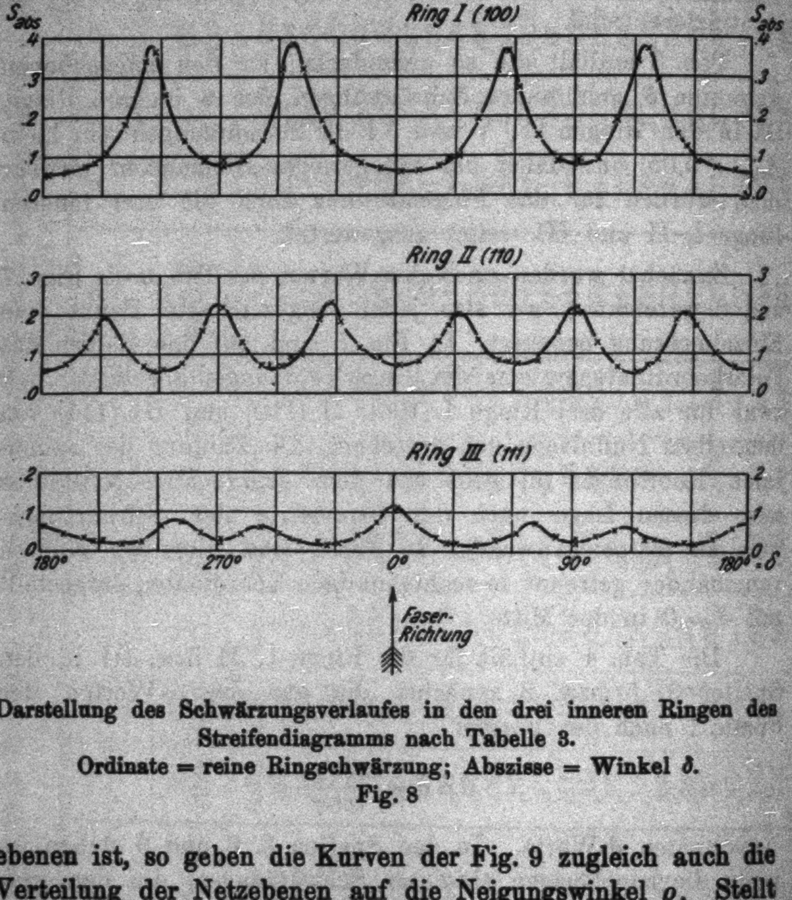
Die Tab. 4 enthält für die Ringe I, II bzw. III in den Spalten 2, 5 bzw. 8 zunächst die aus den ϱ-Werten der Spalte 1 nach der Formel

$$\cos\delta = \frac{\cos\varrho}{\cos\gamma}$$

berechneten δ-Werte. In den Spalten 3, 6 und 9 stehen jeweils die zugehörigen absoluten Schwärzungen, die den graphisch ausgeglichenen Kurven der Fig. 8 entnommen und für die vier Kreisquadranten gemittelt wurden. Weiter sind in den Spalten 4, 7 und 10 unter der Bezeichnung n_ϱ die den Schwärzungen proportional gesetzten relativen Intensitäten angegeben, wobei die Maximalintensität jedes Ringes willkürlich gleich 100 gesetzt wurde.

Diese gemittelten relativen Intensitäten sind für die Ringe I bis III als Ordinaten in Fig. 9 eingetragen (Punkte ×), während die Abszissen die Winkel ϱ zwischen der Schichtennormale und der Netzebennormale darstellen.

Da die Intensität des reflektierten Röntgenstrahls proportional der Anzahl der vorhandenen reflektierenden Netz-



Darstellung des Schwärzungsverlaufes in den drei inneren Ringen des Streifendiagramms nach Tabelle 3.
Ordinate = reine Ringschwärzung; Abszisse = Winkel δ.
Fig. 8

ebenen ist, so geben die Kurven der Fig. 9 zugleich auch die Verteilung der Netzebenen auf die Neigungswinkel ϱ. Stellt man also auf der „Lagenkugel" nach Polanyi[1]) jede Netzebene durch den Punkt dar, in welchem die zur Netzebene parallele Ebene die Kugeloberfläche berührt, so bedeutet die Ordinate der ausgezogenen Kurve in Fig. 9 die Flächendichte

1) M. Polanyi, a. a. O.

Tabelle 4

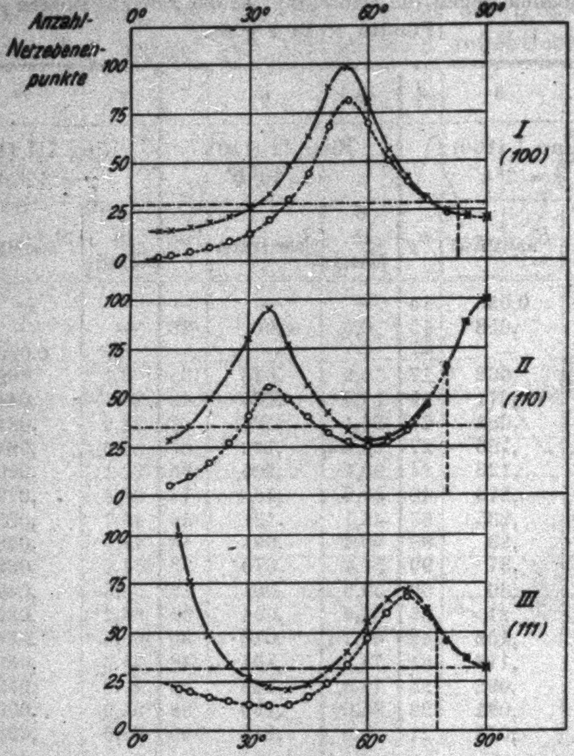
Graphisch ausgeglichene Werte der Schwärzungen in den Diagrammstreifen, ($S_{\text{abs. Mittel}}$) und der relativen Flächendichten der reflektierenden Netzebenenpunkte (n_ϱ) in ihrer Abhängigkeit von der Neigung (ϱ) der Netzebenen gegen die photographischen Einzelschichten (Punkte × in Fig. 9).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ϱ in Grad	Ring I (100) $\gamma = 7^0 4'$			Ring II (110) $\gamma = 10^0 0'$			Ring III (111) $\gamma = 12^0 16'$		
	δ in Grad	$S_{\text{abs. Mittel}}$	n_ϱ	δ in Grad	$S_{\text{abs. Mittel}}$	n_ϱ	δ in Grad	$S_{\text{abs. Mittel}}$	n_ϱ
7,1	0,0	0,055	15	—	—	—	—	—	—
10,0	7,1	,058	15	0,0	0,06	28	—	—	—
12,3	—	—	—	—	—	—	0,0	0,090	100
15	13,3	,062	17	10,9	,076	35	8,1	,068	76
20	18,9	,071	19	17,5	,105	49	16,1	,044	49
25	24,0	,084	22	23,1	,136	63	21,9	,031	34
30	29,2	,100	27	28,4	,176	80	27,6	,024	27
35	34,4	,128	34	33,7	,205	95	33,1	,020	22
40	39,5	,178	48	38,9	,165	77	38,4	,019	21
45	44,6	,235	63	44,1	,121	56	43,7	,022	24
50	49,7	,33	88	49,2	,091	42	48,9	,028	31
55	54,7	,37	99	54,4	,070	33	54,0	,036	40
60	59,8	,30	80	59,5	,061	28	59,3	,049	55
65	64,8	,21	56	64,6	,064	30	64,4	,060	67
70	69,9	,158	42	69,7	,076	35	69,5	,065	72
75	74,9	,116	31	74,7	,104	48	74,6	,056	62
80	79,9	,092	25	79,8	,142	66	79,8	,042	47
85	85,0	,081	22	85,0	,190	88	84,9	,033	37
90	90,0	,078	21	90,0	,215	100	90,0	,029	32

dieser Punkte (n_ϱ). Die Maxima dieser Kurven liegen, in bester Übereinstimmung mit den in Tab. 2, Spalte 5 angegebenen, durch direkte geometrische Ausmessung der Filme gefundenen Werten, bei $\varrho = 54^0$ für Ring I, $\varrho = 35^0$ und 90^0 für Ring II und $\varrho = 69^0$ für Ring III. Die Flächendichte der Punkte ist auf die Hälfte des Maximalbetrages gesunken im Abstande $\Delta\varrho = \pm 13^0$ vom Maximum für Ring I, $\Delta\varrho = \pm 14^0$ für die beiden Maxima von Ring II und $\Delta\varrho = \pm 16^0$ für Ring III.

Die Kurven der Fig. 9 weisen Lücken auf für $\varrho < \gamma$, da in diesem Bereich die Netzebenengürtel auf der Lagenkugel

nicht von dem Reflexionskreisen geschnitten werden.[1]) Man könnte die Kurven hier vervollständigen, indem man bei der Aufnahme die Präparate um den Betrag γ gegen den Röntgenstrahl neigt.



Relative Flächendichte der Netzebenenpunkte bei der vorliegenden Faserstruktur (n_ϱ, ausgezogene Kurven) und bei regelloser Verteilung der Bromsilberkriställchen (n_0, strichpunktierte Geraden), sowie relative Gesamtzahlen der Netzebenenpunkte auf den Netzebenenkreisen ($n_\varrho \sin \varrho$, punktierte Kurven) nach Tabellen 4 und 5. Abszisse = Winkel ϱ zwischen den Normalen der photographischen Schichten und der reflektierenden Netzebenen

Fig. 9

8. Das „parallele" Faserdiagramm

Nach dem Gesagten ist nunmehr auch die Erklärung für die eingangs angegebenen Unterschiede in den Ringintensitäten

1) M. Polanyi, a. a. O.

bei bindemittelfreiem Bromsilber und senkrecht zum Röntgenstrahl aufgestellten photographischen Schichten möglich. Im ersten Falle sind nämlich die reflektierenden Ebenen regellos gelagert, im zweiten Falle verläuft die Symmetrieachse der Gleichrichtung parallel zum Röntgenstrahl. Hier liegt also ein „paralleles“ Faserdiagramm vor im Gegensatz zu dem in den vorigen Abschnitten behandelten „rechtwinkligen“ Faserdiagramm, bei dem Faserachse und Röntgenstrahl senkrecht aufeinander standen.

Im parallelen Diagramm sind aus Symmetriegründen die Ringe unter allen Azimuten δ gleichmäßig geschwärzt. Die Schwärzung ist um so stärker, je näher der Reflexionskreis dem Maximum des Netzebenengürtels liegt.

Die relativen Intensitäten der Ringe im *parallelen* Faserdiagramm sollen jetzt berechnet werden aus den relativen Intensitäten der mit bindemittelfreiem Bromsilber erhaltenen Ringe und der in Fig. 9 durch die ausgezogenen Kurven in relativem Maß dargestellten Dichte der Netzebenenpunkte, wie sie sich durch die photometrische Ausmessung des *senkrechten* Faserdiagramms ergeben hat.

Zur Bestimmung der Gesamtzahl N der vorhandenen Netzebenen einer Art muß zunächst die Flächendichte n_ϱ über die Halbkugel integriert werden. Die Integration wurde auf folgendem teils rechnerischen, teils graphischen Wege vorgenommen. Die Flächendichten n_ϱ (Spalten 4, 7 und 10 der Tab. 4) ergaben mit den $\sin \varrho$ (Tab. 5, Spalte 2) multipliziert, die in Tab. 5, Spalten 3, 4 und 5 angegebenen und in Fig. 9 (Punkte ○) eingezeichneten Werte. Sie stellen die relative Anzahl der betreffenden Netzebenenpunkte auf dem zum Winkel ϱ gehörenden Netzebenenkreise dar. Die diese Punkte verbindende punktierte Kurve begrenzt mit den Koordinatenachsen eine Fläche, welche gleich dem gesuchten Integral ist. Diese Fläche wurde mit dem Polarplanimeter ausgemessen, nachdem die für $\varrho < \gamma$ fehlenden Kurventeile (vgl. S. 345) nach Schätzung ergänzt worden waren. Die in Fig. 9 eingezeichneten horizontalen Geraden (strichpunktiert) wurden dann so gezeichnet, daß sie zusammen mit den Koordinatenachsen je eine Fläche begrenzen, die gleich der Fläche zwischen der zugehörigen punktierten Kurve und den Achsen ist.

Tabelle 5

Relative Gesamtzahlen $n_\varrho \cdot \sin \varrho$ der Netzebenenpunkte auf den durch die Winkel ϱ bestimmten Netzebenenkreisen (Punkte ○ in Fig. 9) sowie ihre Mittelwerte.

1	2	3	4	5
in Grad ϱ	$\sin \varrho$	$n_\varrho \cdot \sin \varrho$		
		Ring I	Ring II	Ring III
7,1	0,123	1,8	—	—
10,0	,174	2,7	4,8	–
12,3	,213	—	—	21
15	,259	4,3	9	20
20	,342	6,5	17	17
25	,423	9,5	27	15
30	,500	13	41	13
35	,574	20	55	13
40	,643	31	49	13
45	,707	44	40	17
50	,766	68	32	24
55	,819	81	27	33
60	,866	70	25	47
65	,906	51	27	60
70	,940	40	33	68
75	,966	30	46	60
80	,985	24	65	46
85	,996	22	88	37
90	1,000	21	100	32
Mittelwerte der $n_\varrho \cdot \sin \varrho$:		29	35	32

Die an der Fig. 9 abgelesenen Ordinaten dieser Geraden, die also den Mittelwerten der $n_\varrho \sin \varrho$ entsprechen (letzte Zeile der Tab. 5), stellen nun die Dichte n_0 der Netzebenenpunkte bei *regelloser* Verteilung der Netzebenen dar. Für jedes beliebige ϱ erhält man also das Verhältnis der Flächendichte bei der vorliegenden Faserstruktur zur Flächendichte bei völliger Unordnung der Ebenen, indem man bei dem Abszissenwert ϱ den Ordinatenwert n_ϱ der ausgezogenen Kurve durch den Ordinatenwert n_0 der horizontalen (strichpunktierten) Gerade dividiert.

Beim *parallelen* Faserdiagramm treten nach Polanyi[1]) Reflexionen auf, wenn

$$\varrho = 90^0 - \gamma,$$

wo ϱ und γ wieder die Seite 336 angegebenen Bedeutungen

1) M. Polanyi, a. a. O.

haben. Für die ersten drei Ringe sind in Tab. 6, Spalte 4, die nach dieser Gleichung aus den γ-Werten (Spalte 3) berechneten ϱ angeben. In den Spalten 5, 6 und 7 stehen die zugehörigen, aus Fig. 9 abgelesenen Flächendichten bei der vorliegenden Faserstruktur (n_ϱ) und bei regelloser Verteilung der Netzebenen (n_0), sowie die Quotienten n_ϱ / n_0. In diesem Verhältnis ändern sich also die Ringintensitäten beim Übergang vom ungeordneten zum geordneten Zustand der Netzebenen. Die im ersten Falle, d. h. am bindemittelfreien Bromsilberpulver gemessenen relativen Ringintensitäten J_a sind in Spalte 8 aus Tab. 1 übernommen. Das Produkt dieser Intensitäten mit den Werten n_ϱ / n_0 der Spalte 7 gibt Spalte 9 und, auf 100 für Ring I bezogen, Spalte 10. Die so berechneten Ringintensitäten des parallelen Faserdiagramms stehen in befriedigender Übereinstimmung mit den gemessenen, die (nach Tab. 1) zum Vergleich in Spalte 11 der Tab. 6 noch einmal angegeben sind.

Tabelle 6

Berechnung der relativen Ringintensitäten beim parallelen Faserdiagramm (J_b ber.) aus denen des Pulverdiagramms (J_a) und aus den Flächendichten der Netzebenenpunkte bei der vorliegenden Faserstruktur (n_ϱ) einerseits und bei regelloser Verteilung der Kriställchen (n_0) andererseits.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ring	Indizes	γ (°)	ϱ (°)	n_ϱ	n_0	$\frac{n_\varrho}{n_0}$	J_a	$\frac{n_\varrho}{n_0} J_a$	J_b ber.	J_b gem.
I	(100)	7,1	82,9	23	29	0,79	100	79	100	100
II	(110)	10,0	80,0	66	35	1,89	70	132	167	164
III	(111)	12,2	77,8	53	32	1,66	30	50	63	57

Damit ist die eingangs gestellte Frage nach der Ursache für die Verschiedenheit der relativen Ringintensitäten im Diagramm des bindemittelfreien Bromsilbers und der photographischen Schichten beantwortet. Die Unterschiede lassen sich, wie gezeigt, auch quantitativ deuten aus der Faserstruktur der Bromsilberkriställchen in der trockenen photographischen Schicht.

Im Anschluß hieran sollen im nächsten Abschnitte noch einige Ergebnisse der angestellten Untersuchungen in bezug auf den Aufbau der Bromsilberkörner in den photographischen Schichten und in bezug auf die Gelatine mitgeteilt werden.

9. Über den Bau der Bromsilberkörner in den photographischen Schichten und über die Struktur der trockenen Gelatine

Durch mikroskopische Untersuchungen des Bromsilberkornes in photographischen Trockenschichten stellten Koch und du Prel[1]) fest, daß das Korn räumlich plättchenförmig gestaltet ist. Die Rechnungen von Silberstein[2]) ergaben, daß diese Plättchen sich beim Eintrocknen der Emulsion parallel zur Schicht anordnen müssen.

Hält man damit die im vorigen nachgewiesene Tatsache zusammen, daß in der trockenen Schicht auch die Oktaederflächen der Bromsilberkriställchen parallel zur Schicht liegen, so folgt daraus über den Bau der Bromsilberkörner, daß die ausgedehnte Begrenzungsfläche des plättchenförmigen Kornes durch die Oktaederfläche [Indizes (111)] gebildet wird.

Als Bestätigung für das Gesagte möge noch erwähnt werden, daß in den Schichten von *Diapositiv*-Platten das Korn weniger ausgeprägte Plättchenform hat als in denen von *Extrarapid*-Platten und in der Tat das damit erhaltene Diagramm auch weniger ausgesprochene Faserstruktur aufweist.

Beim Eintrocknen der *Gelatine* auf einer festen Unterlage schrumpft die Schicht in Richtung ihrer Normalen auf etwa $^1/_{10}$ ihrer Dicke zusammen, während sie in den ihr parallelen Richtungen ihre Dimension beibehält. Der mit dieser einseitigen Deformation verbundene Spannungszustand der Gelatine hat einen auffallenden Einfluß auf das Röntgendiagramm auch der *reinen* Gelatine zur Folge, wie aus den Aufnahmen der Fig. 10, Taf. X hervorgeht.

Diese Diagramme der Gelatine wurden mit einer Aufnahmekamera von Koch & Sterzel auf zylindrisch gebogenen Filmen von 114 mm Durchmesser (also 1 mm des Umfanges = 1,01^0) angefertigt. Gegenüber der üblichen Ausführungsform dieser Kamera wurde jedoch hier der zentrale Röntgenstrahl in einem kleinen Bleikästchen (ähnlich dem S. 334 beschriebenen) aufgefangen. Benutzt wurde die in 0,02 mm Nickelblech gefilterte Strahlung einer Röntgenröhre mit *Kupfer*-

---

1) P. P. Koch und G. du Prel, Physik. Ztschr. 17. S. 535—540. 1916.

2) L. Silberstein, Journ. Opt. Soc. Am. 5. S. 171—177 und 363 bis 365. 1921.

Antikathode und zylindrischer Glühspirale bei 20 mA Röhrenstrom und 25 kV konstanter Gleichspannung.

Bei den drei Aufnahmen der Fig. 10, Taf. X bestanden die Präparate aus trockenen Gelatineschichten, die durch Ausfixieren von Hauff-Extrarapid-Platten erhalten wurden. Die Schichtennormalen verliefen bei Fig. 10a, Taf. X parallel (paralleles Faserdiagramm), bei Fig. 10b und c, Taf. X senkrecht zum Röntgenstrahl (senkrechte Faserdiagramme) und zwar in der Richtung der nebengezeichneten Pfeile, d. h. bei Fig. 10b, Taf. X horizontal, bei Fig. 10c, Taf. X vertikal.

Die beiden senkrechten Faserdiagramme sind von derselben Art wie Katz und Gerngroß[1,2]) sie an gedehnten Gelatinestreifen erhalten haben. Dabei entspricht die Richtung der Dehnung in den Aufnahmen von Katz und Gerngroß der auf der Faserachse senkrechten Richtung bei der geschrumpften Gelatine, d. h. der Richtung der Einzelschichten selbst. Außerdem treten bei der auf $^1/_{10}$ ihrer Dicke zusammengetrockneten Gelatine die Eigentümlichkeiten der Faserstruktur in den Diagrammen noch stärker hervor als bei den von Katz und Gerngroß veröffentlichten Aufnahmen der um 300 Proz. ihrer ursprünglichen Länge gedehnten Gelatine.

Gegenüber dem parallelen Faserdiagramm (Fig. 10a, Taf. X), das übrigens dasselbe Aussehen hat wie die am Gelatinepulver erhaltenen Diagramme, zeigen die rechtwinkligen Faserdiagramme (Fig. 10b und c, Taf. X) folgende bei bloßer Betrachtung ins Auge fallenden Unterschiede. Auf den diffusen Ringen sind mehr oder weniger ausgeprägte knotenartige Verdichtungen der Schwärzungen in der Nullmeridianebene ($\delta = 0$, Definition vgl. S. 336; in Fig. 10b, Taf. X links und rechts, in Fig. 10c, Taf. X oben und unten) vorhanden, entsprechend den Identitätsperioden von bzw. 24, 11 und 4 ÅE., während der oben (S. 327) erwähnte auffallend scharfe Ring mit der Identitätsperiode 2,9 ÅE. zu zwei segmentförmigen Streifen mit dem Maximum in der zur Nullmeridianebene senkrechten Ebene der Gelatineschichten ($\delta = 90°$; in Fig. 10c links und rechts) zusammengeschrumpft ist.

---

1) J. R. Katz und O. Gerngroß, Naturw. 13. S. 900—903. 1925.
2) O. Gerngroß und J. R. Katz, Koll.-Ztschr. 39. S. 181—183. 1926.

Nähere Einzelheiten über die Faserstruktur der trocknen Gelatine sollen nach Abschluß der beabsichtigten photometrischen Auswertung der Faserdiagramme mitgeteilt werden.

10. Zusammenfassung

1. Durch röntgenographisch-photometrische Untersuchungen wurde festgestellt, daß das Bromsilber in den Schichten photographischer Trockenplatten eine Faserstruktur zeigt, daß nämlich die Oktaederflächen (111) der Bromsilberkriställchen beim Eintrocknen der photographischen Schicht sich weitgehend der Schicht parallel anordnen.

2. Als Maß für die Gleichrichtung der Kriställchen in Schichten von Extrarapidplatten wird die Verteilung ihrer (100)-, (110)- und (111)-Ebenen auf die verschiedenen Neigungen gegen die Ebene der photographischen Schicht in Tabellen- und Kurvenform gegeben.

3. Die ermittelte Verteilung wird benutzt zur quantitativen Deutung gewisser Unterschiede der Ringintensitäten in den an bindemittelfreiem Bromsilberpulver und an photographischen Schichten bei senkrechtem Durchgang der Röntgenstrahlen erhaltenen Diagrammen.

4. Auch die auf einer festen Unterlage getrockneten Schichten reiner Gelatine ergeben bei Anordnung der Einzelschichten parallel zum Röntgenstrahl ein ausgesprochenes Faserdiagramm.

Für die Förderung der vorliegenden Arbeit durch häufige Diskussionen sowie durch weites Entgegenkommen in bezug auf die Überlassung der Mittel und Einrichtungen des Institutes spreche ich dem Direktor, Herrn Professor Dr. P. P. Koch, meinen ergebenen Dank aus.

Hamburg, Physikal. Institut d. Universität, 30. April 1928.

(Eingegangen 4. Mai 1928)

2. *Über die Vorgänge am System Halbleiter-Leiter*
(unter bes. Berücksichtigung der Feuchtigkeitsverhältnisse)[1];
von Hans Toby

A. Einleitung

In den Arbeiten, die sich mit der Erscheinung der elektrischen Adhäsion am System Halbleiter–Leiter, dem sogen. Johnsen-Rahbek[2])-Effekt, beschäftigen, wird immer wieder darauf hingewiesen, wie schwierig es sei, die Versuche exakt reproduzierbar zu gestalten. So wurden z. B. die meisten Kurven der elektrischen Adhäsion auf dem Wege der Mittelwertsbestimmung zwischen Ordinaten gleicher Abszisse gefunden [Rottgardt[3]), Pause[4]), Bergmann[5]) u. a.], und zwar weichen, wie ich mich bei Nachprüfung der angegebenen Versuche überzeugen konnte, die zu einem Mittelwert zusammengefaßten Werte teilweise um 100 und mehr Prozent voneinander ab. Auch Antinori[6]) gibt trotz der Exaktheit seiner Versuche ihre Reproduzierbarkeit als schwierig an, und in fast allen Arbeiten sind die mechanischen und elektrischen Werte nur als Relativwerte angegeben.

Da ein Zusammenhang zwischen den Erscheinungen am JR-System und dem Grade seiner Durchfeuchtung besteht, so macht sich die Undefiniertheit des Feuchtigkeitsgehaltes allenthalben störend bemerkbar. So können Johnsen und Rahbek[7]), Rottgardt, Regener[8]) u. a. den elektrischen Wider-

---

1) Auszug aus der Berliner Dissertation 1928.

2) Im folgenden mit „JR" abgekürzt.

3) K. Rottgardt, Ztschr. f. techn. Phys. 2. S. 315. 1921.

4) G. Pause, Dipl.-Arb. an der Techn. Hochsch. Dresden 1923.

5) L. Bergmann, Ztschr. f. techn. Phys. 4. S. 11. 1923.

6) A. Antinori, Ztschr. f. Phys. 34. S. 705. 1925.

7) A. Johnsen u. K. Rahbeck, Journ. Inst. Electr. Eng. London. 61. S. 713. 1923.

8) E. Regener, Ztschr. f. techn. Phys. 3. S. 220. 1922.

stand des Systems nur größenordnungsweise angeben; A. und E. Ball[1]) deuten einen Einfluß der Feuchtigkeit auf das Gleichrichtverhältnis des Stromes an; Laube[2]) und Ullrich[3]) finden bei großer Trockenheit störende Restladungen am System; Regener findet einen Einfluß der Feuchtigkeit auf den Elektrophoreffekt am JR-System; Lübben[4]) stellt allgemein die Abhängigkeit der dielektrischen Nachwirkung von der Feuchtigkeit des Dielektrikums bei Kondensatoren fest, u. a. m. Vorallem aber scheint ein großer Teil der *Abweichungen* zwischen den Ergebnissen der einzelnen Autoren auf eine mangelnde Definiertheit des Feuchtigkeitsgrades, bei dem gearbeitet wurde, zurückzuführen sein. Es lag daher nahe, durch quantitative Regulierung der Feuchtigkeit zu exakteren, stets reproduzierbaren und in Absolutwerten angebbaren Versuchsergebnissen zu gelangen.

Die Überlegung führte zu einer Anordnung des JR-Systems in einer evakuierbaren Glasröhre; denn in einer solchen kann die Zuführung von Feuchtigkeit am ehesten der unter natürlichen Bedingungen stattfindenden, nämlich in Form von Wasserdampf, angeglichen werden. Die Versuche und ihre Ergebnisse seien im folgenden mitgeteilt.

B. Die Versuchsanordnung

Nach längerem Probieren erwies sich folgende Anordnung (Fig. 1) als die zweckmäßigste:

I. Das System

Da unter verschiedenen Halbleitermaterialien der Solenhofener Schiefer sich als besonders stark hygroskopisch erweist, seine Leitfähigkeit auch bei größerer Trockenheit mit den üblichen Instrumenten gut meßbar und seine Adhäsionswirkung extrem hoch ist (vgl. a. Bergmann), so wurde für die Durchfeuchtungsversuche nur Schiefer als Halbleiter benutzt.

Das JR-System bestand aus einem quadratischen Stück Schiefer *St* von 32×32 qmm Oberfläche und 10 mm Dicke

1) A. u. E. Ball, Ztschr. f. Phys. 35. S. 207. 1925.
2) Fr Laube, Ztschr. f. Unt. 35. S. 254. 1922; 36. S. 186. 1923.
3) R. Ullrich, Ztschr. f. Unt. 35. S. 249. 1922.
4) C. Lübben, Ztschr. f. Fernmeldetechnik 3. S. 40. 1922.

Maßstab 1 : 4

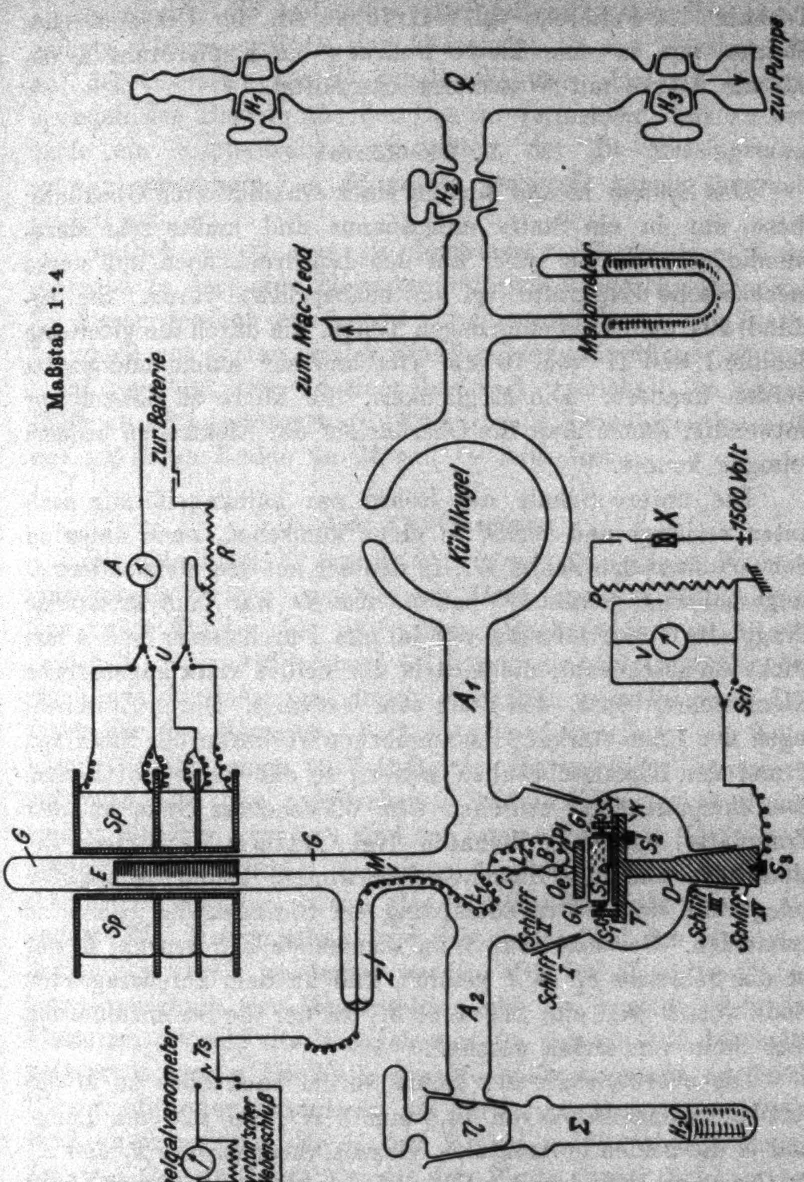


Fig. 1

und einer kreisrunden Messingplatte *Pl* von 27 mm Durchmesser und 3 mm Dicke. Die aufeinanderliegenden Flächen der Elektroden waren plangeschliffen und gut poliert (über die

Technik des Polierens vgl. Ullrich). An der Unterseite des Steines war in eine kleine Bohrung ein Kupferdraht K von 0,5 mm Stärke mit Wasserglas eingekittet.

II. Die Röhre

Das System befand sich in einer evakuierbaren Glasröhre; diese war in ein Stativ eingespannt und mußte sehr starkwandig sein, da sie außer auf den Luftdruck noch auf starke mechanische Zugkräfte (vgl. u.) beansprucht wurde. Sie bestand aus zwei schalenförmigen Teilen, die durch die gefetteten Schliffe I und II von 70 mm Durchmesser aufeinandergesetzt werden konnten. Die Möglichkeit, die Röhre zu öffnen, war notwendig, damit man die Oberflächen der Elektroden bequem reinigen konnte.

Die untere Schale der Röhre war halbkugelförmig nach unten verjüngt und verlief in einen konischen, nach unten zu sich erweiternden Schliff *III*, in den der auf den Messingdorn D aufgeschliffene Schliff *IV* paßte. Auf D war eine kreisrunde Tragplatte T aus Messing von 50 mm Durchmesser und 4 mm Dicke aufgeschraubt, die mittels der beiden stark angezogenen Klemmschrauben S_1 den Stein sehr fest hielt. Durch Zwischenlegen der 1 mm starken Glasscheibchen Gl wurde der Stein von T und den Klemmschrauben isoliert, so daß keine Voltaschen Kontaktspannungen zwischen dem oft feuchten Stein und der Tragplatte entstehen konnten (vgl. Laube). Zwischen die Metallteile und die Glasscheibchen wurden kleine Lederstücke gelegt, um durch Druckdämpfung ein Springen des Glases zu vermeiden. Der aus dem Stein kommende Kupferdraht K war zu der Schraube S_2 an T geführt, und an dem herausragenden Ende von D war eine Schraube S_3, zu der die Stromzuführung zum Stein von außen geschah.

Die obere Schale der Röhre verlief nach oben zu in das vertikale Glasrohr G von 14,5 mm l. W. und 220 mm Länge und in die beiden horizontalen Glasausführungsrohre A_1 und A_2. In G war ein zylindrischer Weicheisenkern E von 90 mm Länge und 14 mm Durchmesser fast reibungslos beweglich; ein Überzug von Messinglack und gutes Verrunden der Kanten verhinderten ein Zerkratzen der Glaswände. — In E war eine Messingstange M von 2 mm Durchmesser und 140 mm Länge

eingeschraubt, die unten in einer hakenförmigen Biegung *B* endigte. Diese griff in eine kleine Öse *Oe* aus Messing, die auf der Oberseite von *Pl* angebracht war. Um ein Herausspringen des Hakens aus der Öse zu vermeiden, war an sein Ende ein Kupferdraht *C* angelötet, der die Messingstange spiralig umschlang. — *M* mußte gegen *St* genau senkrecht justiert sein.

Seitlich an *G* war ein horizontaler Glasstutzen *Z* angebracht, in dem eine Platindurchführung eingeschmolzen war. Zu dieser geschah von außen die Stromzuführung zur Platte. Innerhalb von *Z* war an der Einschmelzung ein dünner Kupferdraht angelötet, der, zu einer Locke L_1 gewickelt, an seinem Ende an *M* angelötet war. Eine zweite Kupferdrahtlocke L_2 war mit ihren Enden an *M* und *Oe* angelötet.

III. Der Elektromagnet

Die Glasröhre *G* wurde von einer dreiteiligen Elektromagnetspule *Sp* eng umschlossen. Diese war aus Kupferdraht (von 1 mm Stärke) bis auf einen Durchmesser von 80 mm gewickelt (Gesamtwiderstand 20 Ohm); der Spulenkörper bestand aus Pertinax und hatte eine Höhe von 80 mm. Der Strom für den Magneten (0—2 Amp.) wurde anfangs der Netzleitung, später einer 40-Volt-Batterie entnommen, konnte an mehreren sehr fein regulierbaren Schiebewiderständen *R* (insgesamt 80 Ohm) reguliert und am Amperemeter *A* (Reiniger, Gebbert und Schall) gemessen werden. Durch den Umschalter *U* konnten einmal der mittlere und der obere, ein anderes Mal der mittlere und der untere Teil des Magneten in den Stromkreis geschaltet werden. Die Ruhelage des Eisenkerns innerhalb des Magnetfeldes war so gewählt, daß die Platte im ersten Falle hochgehoben, im zweiten auf den Stein aufgepreßt wurde. Im Falle des Hochhebens gelang es durch Übung, daß der Eisenkern bei einer gewissen Stromstärke sanft ansprang und der Haken *B* sich in den oberen Bogen der Öse *Oe* einhängte, ohne die Platte wesentlich zu erschüttern oder gar vom Stein auch nur im geringsten abzuheben. Erst eine weitere Steigerung der Stromstärke bewirkte eine Überwindung des Gewichtes der Platte (bzw. beim Adhäsionsversuch eine Überwindung von Plattengewicht + Ad-

häsion) und ein gleichmäßiges, planparalles Abheben. Hier ergibt sich auch der Zweck der Locke L_2: ohne sie wären im Moment des Anspringens des Eisenkerns *B* und *Oe* eine kurze Zeit lang elektrisch unterbrochen. Andererseits konnte die Locke L_1 nicht direkt der Platte zugeführt werden, da dies eine zu starke mechanische Hemmung für das leicht bewegliche System der Platte bedeutet, mithin die Adhäsionswerte gefälscht hätte. Aus demselben Grunde mußten die Locken selbst sehr elastisch sein, *E* durfte in *G* weder zu starke Reibung erleiden, noch andererseits durch zu großen Spielraum bei ausgeschaltetem Magneten seine Vertikallage zu sehr verlassen (Differenz der Durchmesser: 0,5 mm), die Widerstände *R* mußten sehr gleichmäßig und empfindsam reguliert werden, die Spannungsquelle für den Magneten mußte absolut konstant sein. Bei Nichtbeachtung dieser Maßregeln geschah das Ansteigen der Zugkraft des Magneten nicht stetig: ein vorzeitiges Abreißen der Platte und eine Fälschung der Adhäsionsmessung war die Folge. (Eine zu Beginn der Vakuumversuche gewählte Anordnung, bei der *M* und *Pl* starr verbunden waren, erwies sich aus diesen Gründen als völlig unzulänglich.)

Die Zugkraft des Elektromagneten in Gramm in Abhängigkeit von der Stromstärke an *A* war unter Berücksichtigung des Gewichtes des Systems der Platte vor Beginn der Versuche für eine bestimmte Stellung von *E* in *Sp* kurvenmäßig festgestellt worden (Genauigkeit: ± 2 g; Maximum: 400 g). Diese Stellung nahm bei den Adhäsionsversuchen *E* ein, wenn der Eisenkern bereits um die innere Höhe von *Oe* angesprungen war, die Platte sich aber noch nicht vom Stein abhob.

IV. Die Trocknungs- und Durchfeuchtungsanlage

Die horizontale Ausführung A_1 der oberen Schale der Röhre führte zu einem elektrisch geheizten dreistufigen Volmeraggregat (eine Quecksilberdampfstrahl- und zwei Diffusionsstufen) mit rückschaltbarem Vorvakuum-Ballastvolumen; zur Erzeugung des Vorvakuums diente eine Wasserstrahlpumpe. Das Volmeraggregat evakuierte (bei trockenem System, vgl. u.) die gesamte Apparatur trotz der zahlreichen Fettschliffe innerhalb weniger Minuten auf einen Druck von 10^{-6} mm Hg. — Zwischen der Pumpe und der Röhre befand sich eine doppel-

wandige Kühlkugel, in der durch Einfüllen von flüssiger Luft die Hg-Dämpfe der Pumpe usw. und die Fettdämpfe der Schliffe ausgefroren wurden; ferner ein McLeodsches Manometer, das bei Kleben des Hg-Fadens in der Kapillare („Klebevakuum") einen schätzungsweisen Druck von 10^{-6} mm anzeigte und quantitative Ablesungen von 10^{-5} mm bis 1,4 mm Hg gestattete. Zur Messung höherer Drucke diente ein gewöhnliches Hg-Manometer, das zwischen 1 und 40 mm bequem ablesbar war. Außerdem befand sich im Pumpweg eine Kombination von drei Durchgangshähnen H mit weiten Bohrungen, durch die ein Absperren der Röhre gegen die Pumpe, das Einlassen von Luft bzw. Gasen in die Röhre und zwar in Form kleiner Quanten vom Volumen Q ($\sim$ 30 ccm), ebenso umgekehrt ein quantenmäßiges Auslassen von Gas aus der Röhre in die Pumpe ermöglicht wurde. — Alle Glasverbindungen erhielten möglichst große lichte Weiten (im Durchschnitt 18 mm); alle Abdichtungen mußten sehr gut sein, da die Röhre oft tagelang, ohne daß die Pumpe arbeitete, konstantes Vakuum halten mußte.

Die horizontale Ausführung A_2 der oberen Schale der Röhre endigte nach 100 mm Länge in einen Glashahn η, der einen senkrechten, unten geschlossenen Glasstutzen Σ von 100 mm Länge und 14 mm Durchmesser gegen die Röhre öffnete oder abschloß. In Σ wurden vor Beginn der Versuche etwa 3 ccm destilliertes Wasser eingefüllt. Durch ein diesen Glasstutzen umschließendes, oben gut abgedichtetes Dewargefäß, das eine Kältemischung oder ein Wasserbad von konstanter Temperatur enthielt, konnte der Wasserdampfdruck in Σ, also bei geöffnetem η der Wasserdampfdruck in der Röhre reguliert werden. Bei der Konstanthaltung der Temperatur, die oft mehrere Tage notwendig war, wurde darauf geachtet, daß die Abweichungen von der gewünschten Temperatur höchstens $\pm 0{,}1^{\circ}$ betrugen. — Diese Methode, dem System durch Dampfdruckregulierung Feuchtigkeit wohl definierter Quantität zuzuführen, wurde von Hrn. Prof. Wehnelt angegeben und bewährte sich, wie sich zeigen wird, aufs beste. Sie ist bei nichttrockenem System unbedingtes Erfordernis, wenn man die Bedingungen, unter denen ein bestimmter Adhäsionswert auftritt, exakt angeben will. Außerdem geschieht

bei ihr die Feuchtigkeitszuführung in derselben Weise wie unter atmosphärischen Bedingungen, nämlich in Form von Wasserdampf.

V. Die elektrische Schaltung des Systems

Der Stromkreis des JR-Systems war folgendermaßen geschaltet: Das System der Platte mußte immer an Erde liegen, da der Magnet an Erde lag und der Eisenkern im Falle einer hohen Potentialdifferenz zwischen ihm und dem Magneten in der Glasröhre *G* klebte und in ihr wie durch eine zähe Flüssigkeit kroch (wahrscheinlich, weil die Glaswand Ladungen trug und mit der Lackschicht des Eisenkerns eine Art JR-Systems bildete; vgl. a. Schirmann.[1]) Im folgenden ist daher in dubio immer, wenn von einer positiven oder negativen Spannung am „System" die Rede ist, verstanden, daß die betreffende Spannung am Stein lag. — Die Durchschmelzung an dem Stutzen *Z* wurde über eine Dreifachtaste *Ts* und ein Spiegelgalvanometer (Siemens & Halske; Empfindlichkeit: 3×10^{-9} Amp. pro Zentimeter Skalenausschlag bei 2,5 m Skalenabstand) mit Ayrtonschem Nebenschluß geerdet. Die Taste *Ts* gestattete das Galvanometer nur zur Stromablesung einzuschalten; plötzlich auftretende Glimmentladungsströme bedingten diese Vorsichtsmaßregel.

Die Spannung für das System wurde einer 1600-Volt-Akkumulatorenbatterie entnommen, mit einer Sicherung *X* gesichert, an einem Potentiometerwiderstand *P* (Flüssigkeitswiderstand — Jodcadmium in Amylalkohol — von 200000 Ohm) reguliert, mit einem elektrodynamischen Voltmeter *V* (Weston; 0—1500 Volt) gemessen und über einen Schalter *Sch* zu der Schraube S_2, d. h. zum Stein geführt. Die Spannungsquelle mußte demnach, je nachdem der Stein gegen die Platte positiv oder negativ sein sollte, an ihrem negativen oder positiven Pol geerdet werden. — Der Schalter *Sch* gestattete ein schnelles Erden des Steins, d. h. Kurzschließen des Systems. Überhaupt wurde wegen des Einflusses der Zeit auf die Messungen mit Schaltern nicht gespart; außerdem mußten alle Isolierungen bzw. Erdungen sehr gut sein, da der hohe Widerstand des Systems oft die Isolationswiderstände übertraf [vgl. Kollatz[2]].

1) M. A. Schirmann, Phys. Ztschr. 27. S. 659. 1926.
2) C. W. Kollatz, Helios 32. S. 76. 1926.

C. Allgemeine Arbeitsmethoden und Definitionen

Vor Beginn jeder längeren Versuchsreihe wurden die Oberflächen der Elektroden gründlich gesäubert (vgl. Ullrich). Ferner wurde der Hahn η geöffnet, in das Dewargefäß flüssige Luft gefüllt, d. h. das in Σ befindliche H_2O gefroren, und Σ evakuiert; dann wurde η geschlossen und die flüssige Luft entfernt.

I. Die Trocknung des Systems

Die Trocknung des Systems geschah durch die Pumpe (nicht durch chemische Trockenmittel); η war dabei geschlossen, in der Kühlkugel befand sich flüssige Luft, die Platte war möglichst dauernd vom Stein abgehoben. — Der Stein gab große Mengen Gas ab, so daß sich meistens am ersten Tage des Trocknens noch kein Klebevakuum einstellte. Über Nacht jedoch entgaste der Stein bei einem Drucke von $\sim 1/_{100}$ mm so stark, daß am zweiten Tage gleich nach Beginn des Pumpens Klebevakuum erschien.

Hatte das System vor Beginn des Trocknens Strom und Adhäsion gezeigt, so sanken diese gleich zu Beginn des Pumpens stark ab, um mit fortschreitender Trocknung immer mehr zu sinken. Vom zweiten Tage an bleibt bei Ausschalten der Pumpe der Strom konstant, während er vorher infolge selbsttätiger, auch bei ausgeschalteter Pumpe stattfindender Entgasung des Steines langsam abnahm. Nach 3 Tagen Trocknung betrug er bei Anlegen von + 600 Volt an den Stein erstmalig ballistisch (vgl. hierüber Ball) $\sim 10^{-8}$ Amp. Im folgenden soll der Trockenheitsgrad immer durch derartige Stromstärken definiert werden. — Trocknete man das System in der beschriebenen Weise etwa 5 Tage lang, so sanken Strom und Adhäsion bei Spannungen bis zu 1500 Volt unter die Grenze der Meßbarkeit. Diesen Zustand wollen wir im folgenden immer mit „absolute Trockenheit" bezeichnen (s. a. Kramer[1]).

II. Die Durchfeuchtung des Systems

Öffnete man bei dem so zur absoluten Trockenheit gebrachten System jetzt den Hahn η, wobei sich im Dewargefäß Eis + NaCl, also eine Kältemischung von $-21°$, einen Wasserdampf-

---

1) W. Kramer, Ztschr. f. Phys. 27. S. 74. 1924.

druck von 0,70 mm in Σ erzeugend, befand, so wurden Strom und Adhäsion bei Konstanthaltung der Temperatur auch nach 20 Tagen noch nicht meßbar. Um bei Kältemischungen von Temperaturen zwischen -20 und 0^0 Strom und Adhäsion zu erhalten, bedurfte es ähnlicher, wenn auch nicht gar so langer Wartezeiten. Erst bei Anwesenheit von Eis von 0^0 im Dewargefäß (4,6 mm Hg) zeigten sich schon nach kürzerer Zeit, bei noch höheren Temperaturen in Σ sogar schon nach Minuten Adhäsion und Strom. — In Fig. 2 sind beispielshalber die Grade der Durchfeuchtung bei 0^0 und 1^0 (4,6 mm und 4,9 mm Hg) in Σ, ausgedrückt in Stromstärken, in ihrer Abhängigkeit von der Dauer der Durchfeuchtung graphisch dargestellt. (Auch hier, wie bei der Definition der Trockenheitsgrade, die erstmaligen ballistischen Stromstärken, und zwar bei Anlegen von $+600$ Volt an den Stein). Die Stundenzahlen sind diejenigen Zeiten, während deren η geöffnet war. Man sieht, daß bei Wasser von 1^0 in Σ nach 100 Stunden ein Sättigungszustand der Durchfeuchtung eintritt; bei 0^0 tritt dieser erst nach 150 Stunden ein.

Die hygroskopischen Eigenschaften des Steines beruhen offenbar auf der Eigenschaft seiner Kristalle, bei einem bestimmten Wasserdampfdruck eine bestimmte Menge Kristallwasser aufzunehmen bzw. in Dampfform abzugeben. Bei dem aus den Kurven ersichtlichen Sättigungszustande ist also die aufsaugende Kraft der Kristalle mit dem Wasserdampfdruck des umgebenden Gases im Gleichgewicht. Dieses Gleichgewicht stellt sich nach absoluter Trockenheit bei höheren Dampfdrucken schneller ein. — Vor Eintritt der Sättigung konnten niemals exakt definierte Versuchsergebnisse erzielt werden. Im folgenden ist daher in dubio immer, wenn der Feuchtigkeitsgrad des Systems durch die Werte des Dampfdrucks bzw. der Temperatur in Σ angegeben wird, derjenige Zustand verstanden, bei dem bereits die Sättigung des Systems durch den betr. Dampfdruck eingetreten ist. Dies wurde nach Art der Versuche Fig. 2 an den Stromstärken kontrolliert. — η war bei den Adhäsions- und Strommessungen selbst stets geschlossen. — Vor Beginn einer solchen Durchfeuchtung war das System jedesmal zur absoluten Trockenheit gebracht worden. — Man sieht, daß jede Versuchsreihe eines bestimmten Durchfeuchtungsgrades ziemlich lange Vorbereitungszeit (6—7 Tage) in Anspruch nimmt.

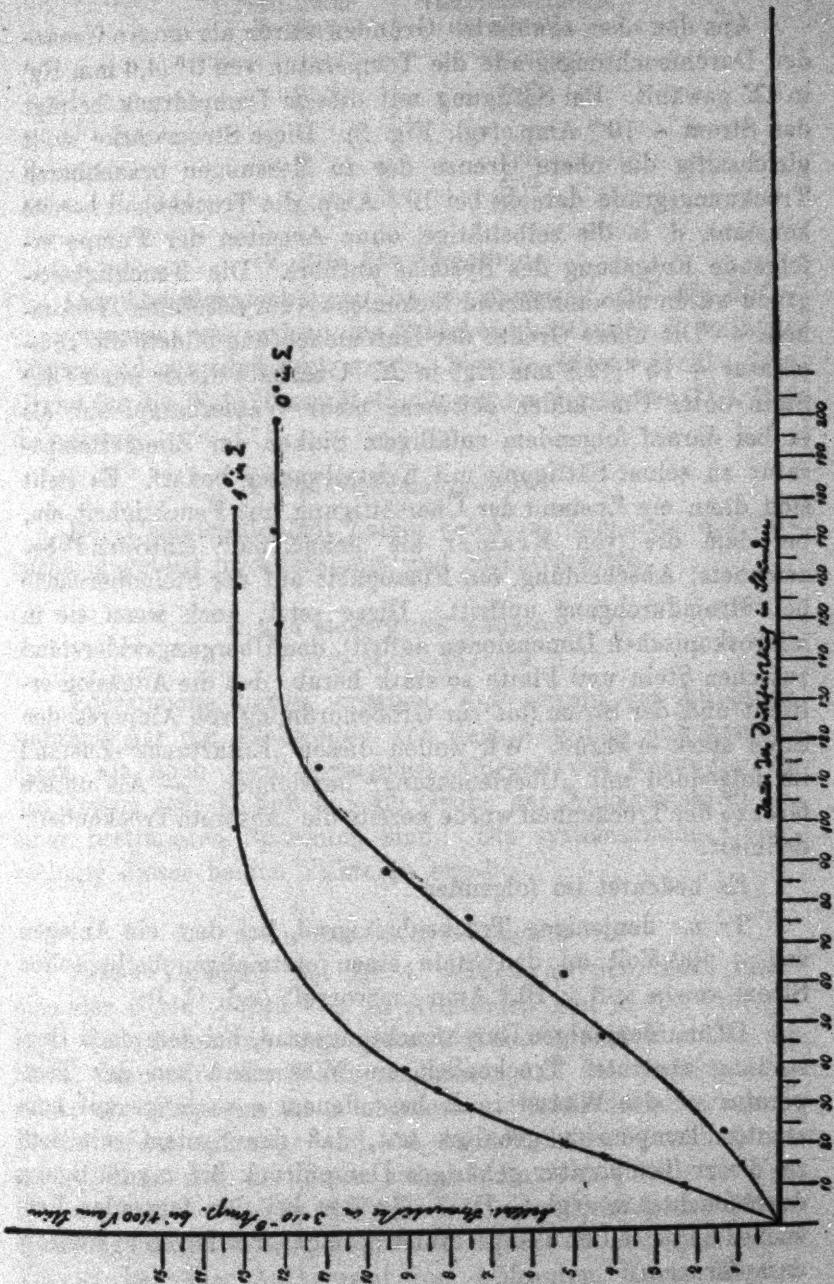


Fig. 2

III. Definition der Feuchtigkeitsgrade

Aus den oben erwähnten Gründen wurde als untere Grenze der Durchfeuchtungsgrade die Temperatur von 0° (4,6 mm Hg) in Σ gewählt. Bei Sättigung mit diesem Dampfdruck beträgt der Strom $\sim 10^{-8}$ Amp. (vgl. Fig. 2). Diese Stromstärke stellt gleichzeitig die obere Grenze der zu Messungen brauchbaren Trocknungsgrade dar, da bei 10^{-8} Amp. die Trockenheit bereits konstant, d. h. die selbsttätige, ohne Arbeiten der Pumpe erfolgende Entgasung des Systems aufhört. Die Feuchtigkeitsgrade waren also annähernd lückenlos bis zur absoluten Trockenheit. — Die obere Grenze der Durchfeuchtung bildete die Temperatur + 15° (12,8 mm Hg) in Σ. Oberhalb dieser nimmt der Stein unter Umständen zeitweise mehr Wasserdampf auf, als er bei darauf folgendem zufälligem Sinken der Zimmertemperatur zu seiner Sättigung mit Kristallwasser bedarf. Es stellt sich dann ein Zustand der Übersättigung mit Feuchtigkeit ein, bei dem die (von Kramer als „manchmal" eintretend bezeichnete) Abscheidung von Flüssigkeit auf der Steinoberfläche bei Stromdurchgang auftritt. Diese setzt, auch wenn sie in mikroskopischen Dimensionen auftritt, den Übergangswiderstand zwischen Stein und Platte so stark herab, daß die Adhäsion erlischt und der Strom (bis zur Größenordnung von Amperes) den Stein stark erwärmt. Wir wollen diesen „Entartungs"-Zustand im folgenden mit „Überfeuchtung" bezeichnen. — Als untere Grenze der Trockenheit wurde bereits die „absolute Trockenheit" definiert.

Es bedeutet im folgenden:

Tr. n.: denjenigen Trockenheitsgrad, bei dem ein Anlegen von + 600 Volt an den Stein einen erstmaligen ballistischen Strom von $n \times 3 \times 10^{-9}$ Amp. hervorruft (vgl. C, I);

Df. m.: denjenigen Durchfeuchtungsgrad, bei dem nach Herstellung absoluter Trockenheit ein Wasserbad von der Temperatur m^0 das Wasser in Σ bei offenem η so lange auf konstanter Temperatur gehalten hat, daß das System mit dem zu dieser Temperatur gehörigen Dampfdruck bis zur Sättigung durchfeuchtet ist (vgl. C, II). — Zu den bei den folgenden Versuchen hergestellten Temperaturbädern gehören folgende Wasserdampfdrucke:

Temperatur in Grad	Wasserdampfdruck in mm Hg
0	4,58
3	5,69
4	6,10
6	7,01
9	8,61
15	12,79

IV. Die Abreißmethode

Die Abreißversuche wurden so angestellt, daß die Spannung konstant war und an den Schiebewiderständen *R* so lange Widerstand ausgeschaltet wurde, bis die Platte abriß. Den Grund für die Wahl dieser Methode werden wir später (D, I, 2, c) diskutieren.

D. Die Versuchsergebnisse

Der Übersichtlichkeit halber seien im folgenden die Versuche eingeteilt in Adhäsions- und Stromversuche.

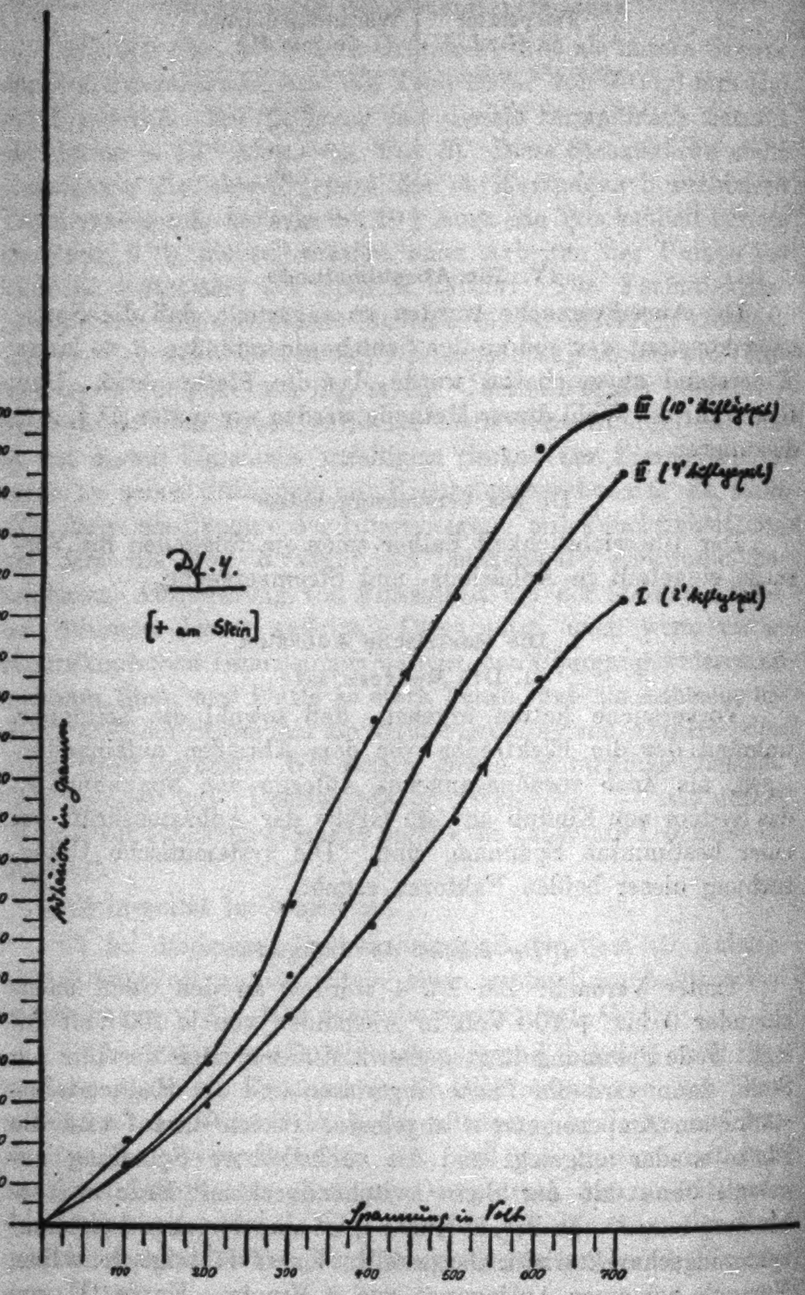
I. Die elektrische Adhäsion

1. Die Meßresultate

Vorversuche hatten ergeben, daß sowohl die Zeitdauer, während der die Elektroden vor dem Abreißen aufeinanderlagen, als auch vorangegangenes Anlegen von Spannung an das System von Einfluß auf die Größe der Adhäsionskraft bei einer bestimmten Spannung sind. Die systematische Untersuchung dieser beiden Faktoren ergab:

a) *Der Einfluß der Auflagezeit*

Erster Versuch: Bei Df. 4 werden an den Stein nacheinander 0 bis + 700 Volt in Abständen von je 100 Volt gelegt. Jede Spannung liegt genau 2 Minuten nach der Uhr am Stein, dann wird die Platte abgerissen und die Magnetstromstärke am Amperemeter *A* abgelesen. Gleich darauf wird die Platte wieder aufgelegt und die nächsthöhere Spannung angelegt, ohne daß der Stein zwischendurch mit Erde in Verbindung kam. — In Fig. 3, Kurve I, ist eine derartige Adhäsionspannungscharakteristik dargestellt. Kurve II zeigt denselben Versuch bei einer Auflagezeit von 4 Minuten, Kurve III von



III
II
I
[+ am Stein]
Adhäsion in Gramm
Spannung in Volt
400
380
360
340
320
300
280
260
240
220
200
180
160
140
120
100
80
60
40
20
200
300
400
500
600
700

Fig. 3

10 Minuten. Eine weitere Steigerung der Auflagezeit ist ohne Einfluß: es ergibt sich immer wieder annähernd Kurve III.

Aus der graphischen Darstellung folgt: Die Adhäsion steigt mit der Auflagezeit. Mit wachsender Auflagezeit wird dieser Effekt schwächer; von einer bestimmten Zeitdauer der Auflagezeit an (10 Minuten) steigt die Adhäsion nicht mehr mit der Auflagezeit. Diesen Wert der Auflagezeit wollen wir, da es sich offenbar um eine Art Aufladung des Systems handelt, im folgenden als „Ladesättigungszeit" bezeichnen. — Ferner: mit wachsender Spannung wird der Einfluß der Auflagezeit größer.

Zweiter Versuch: Bei Tr. 4 werden + 1100 Volt an den Stein gelegt. Nach 5 Minuten wird die Platte abgerissen: die Adhäsion beträgt 34 g. — Darauf wird (aus im nächsten Abschnitt erklärten Gründen) das System 5 Minuten lang kurz geschlossen und geerdet. Darauf wird die Platte aufgelegt, dieselbe Spannung angelegt und nach 10 Minuten die Platte abgerissen: Adhäsion 60 g. Darauf 10 Minuten kurz geschlossen und geerdet. — In derselben Weise fortfahrend, ergeben: 15 Minuten 84 g; 20 Minuten 90 g; eine weitere Steigerung der Auflagezeit ergibt keine nennenswerte Veränderung dieses letzten Adhäsionswertes mehr. Das heißt: Bei Tr. 4 und + 1100 Volt am Stein stellen 20 Minuten die Ladesättigungszeit dar.

Ähnliche Versuche ergaben: Positive und negative Spannungen verhalten sich annähernd gleichartig. — Mit wachsender Feuchtigkeit nimmt die Ladesättigungzeit ab, und zwar beträgt sie für Spannungen von 1500 Volt für Tr. 1 und Tr. 4 20 Minuten; für Tr. 8, Df. 0 und Df. 3 15 Minuten; für Df. 4 und Df. 6 10 Minuten; für Df. 9 5 Minuten; für Df. 15 genügt schon eine Auflagezeit von wenigen Sekunden, um die Ladesättigung zu erreichen.

Es wurde daher cet. par. bei allen im folgenden mitgeteilten Versuchen streng darauf geachtet, daß die Auflagezeiten die genannten, zu den betreffenden Feuchtigkeitsgraden und den höchsten verwendeten Spannungen gehörigen Ladesättigungszeiten nie unterschritten. Diese Meßmethode soll im folgenden nicht immer wieder erwähnt werden, doch wurde sie

bei der Aufnahme aller Adhäsionspannungscharakteristiken streng befolgt; die genannten Auflagezeiten wurden genau nach der Uhr abgemessen.

b) *Der Einfluß vorangegangener Spannung*

α) **Schwächung der Adhäsion**

Versuch: Legt man bei Df. 3 eine konstante Spannung von + 300 Volt an den Stein, reißt die Platte alle 15 Minuten ab, liest die Stromstärke an *A* ab und legt die Platte gleich wieder auf, ohne den Stein zwischendurch mit Erde in Verbindung zu bringen, so erhält man nacheinander folgende Adhäsionswerte: 175 g, 120 g, 107 g, 94 g, 88 g, 85 g, 80 g, 82 g, 82 g, 80 g, 81 g. — Das heißt: die Adhäsion *fällt* bei Abreißen der Platte nach je 15 Minuten mit der Zeit erst schnell, dann langsamer, um schließlich einen konstanten Endwert zu erreichen.

Ähnliche Versuche ergaben: Sowohl die „Fallhöhe" der Adhäsion wie auch die „Fallzeit" nehmen mit höherer Spannung zu, mit höherer Feuchtigkeit ab. — Positive und negative Spannungen verhalten sich annähernd gleichartig. — Bei Df. 9 und Df. 15 ist dieser Effekt für alle Spannungen bis ± 500 Volt verschwunden. Bei Tr. 1 ist er so groß, daß bei — 1200 Volt am Stein nach fünfmaligem Abreißen (Auflagezeit 20 Minuten — vgl. o. —, d. h. nach im ganzen 200 Minuten) die Adhäsion unmeßbar klein geworden ist.

Das heißt: vorangegangene Spannung setzt die Adhäsion herab, und zwar desto mehr, je trockener das System und je höher die vorangegangene Spannung ist.

Eine Konsequenz dieser Tatsache ist die merkwürdig geschweifte Form der Kurven Fig. 3: die Adhäsion wurde dort mit wachsender Spannung ohne spannungslose Pausen nach dem jeweiligen Abreißen der Platte gemessen. — In Fig. 4 sind nun Adhäsionspannungscharakteristiken ohne spannungslose Pausen nach dem Abreißen der Platte bei Tr. 8, Df. 3 und Df. 6 dargestellt, und zwar für zunehmende und abnehmende Spannung. Aus Fig. 3 und 4 ist deutlich der Einfluß der vorangegangenen Spannung festzustellen: in den aufsteigenden Ästen der Kurven bewirkt die Schwächung der Adhäsion durch die vorangegangene niedrigere Spannung, daß der anfangs annähernd quadratische Anstieg der Adhäsion gehemmt, gerad-

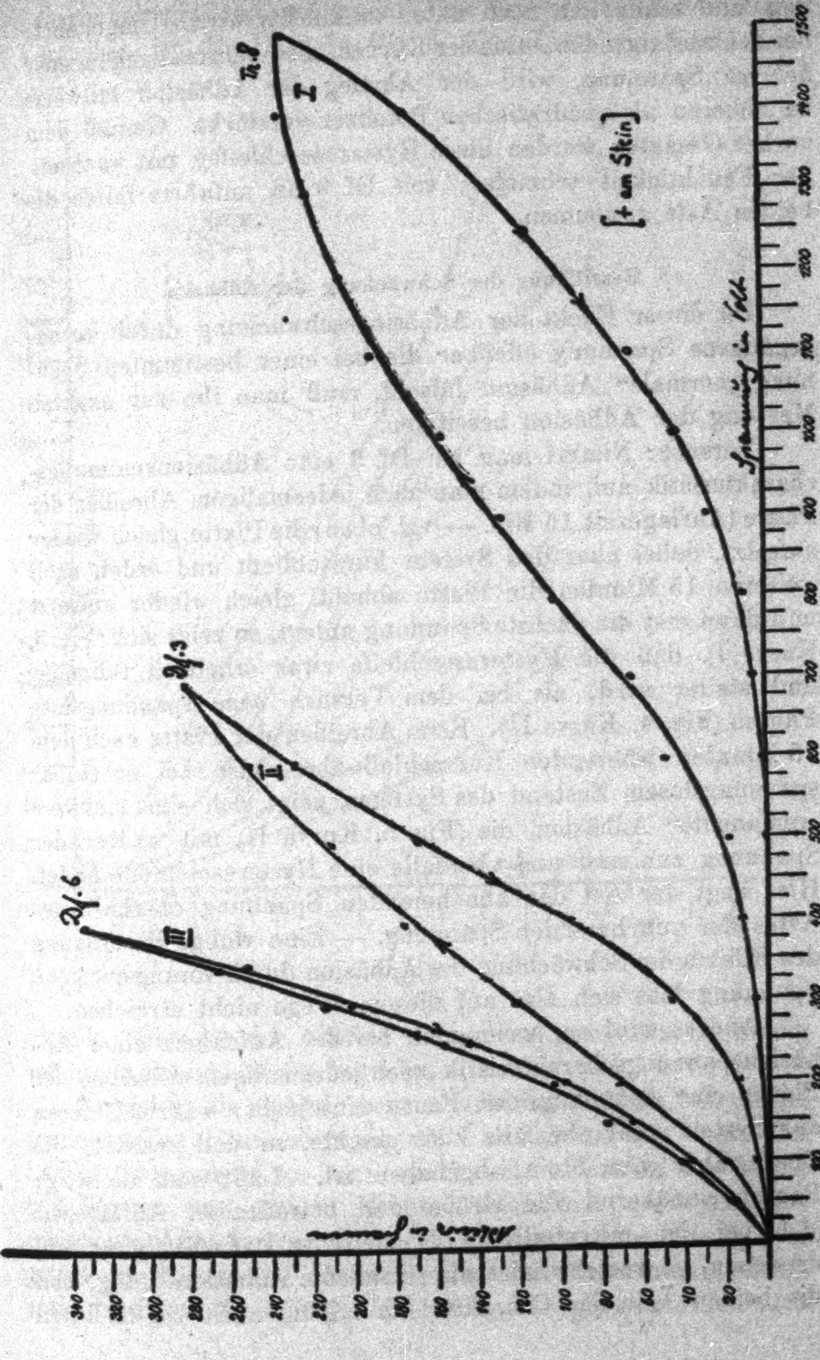


Fig. 4

linig und schließlich nach unten zu konkav wird. Umgekehrt: bei den absteigenden Ästen der Kurven, also bei vorangegangener *höherer* Spannung, wird der Abstieg der Adhäsion teilweise zu höheren als quadratischen Potenzen verstärkt. Gemäß dem vorher Gesagten werden diese Hystereseschleifen mit wachsender Feuchtigkeit schmaler; von Df. 9 an aufwärts fallen die beiden Äste zusammen.

β) Beseitigung der Schwächung der Adhäsion

Da dieser Effekt der Adhäsionsschwächung durch vorangegangene Spannung offenbar die bei einer bestimmten Spannung „normale" Adhäsion fälscht, muß man ihn zur exakten Messung der Adhäsion beseitigen.

Versuch: Nimmt man bei Df. 3 eine Adhäsionspannungscharakteristik auf, indem man nach jedesmaligem Abreißen der Platte (Auflagezeit 15 Min. — vgl. oben) die Platte gleich wieder aufsetzt, dabei aber das System kurzschließt und erdet, nach weiteren 15 Minuten die Platte abhebt, gleich wieder aufsetzt und dann erst die nächste Spannung anlegt, so zeigt sich (Fig. 5, Kurve I), daß die Hystereseschleife zwar erheblich schmaler und steiler wird, als bei dem Versuch *ohne* spannungslose Pausen (Fig. 4, Kurve II). Beim Abreißen der Platte nach dem 15 Minuten währenden Kurzschluß aber, also bei scheinbar spannungslosem Zustand des Systems, zeigt sich eine meßbare „remanente" Adhäsion, die (Fig. 5, Kurve II) mit wachsender Spannung zunimmt und ebenfalls eine Hystereseschleife bildet. Hier liegt der Ast der abnehmenden Spannung oberhalb des Astes der zunehmenden Spannung. — Eine völlige Beseitigung des Effekts der Schwächung der Adhäsion durch vorangegangene Spannung läßt sich also auf diesem Wege nicht erreichen.

Anders wird es, wenn man bei der Aufnahme einer Adhäsionspannungscharakteristik nach jedesmaligem Abreißen der Platte eine spannungslose Pause einschiebt, während deren das System zwar ebenfalls kurz geschlossen und geerdet, die Platte aber vom Stein abgehoben ist. Läßt man derartige Pausen annähernd die Größe der betreffenden Auflagezeit (d. h. bei den mitgeteilten Versuchen die Lade-Sättigungszeit) erreichen, so verschwindet die remanente Adhäsion völlig, und die beiden Äste der Charakteristik fallen, auch bei höchsten

Trockenheitsgraden, zusammen. Das Ergebnis eines derartigen Versuches ist für Df. 3 in Fig. 5, Kurve III, graphisch dar-

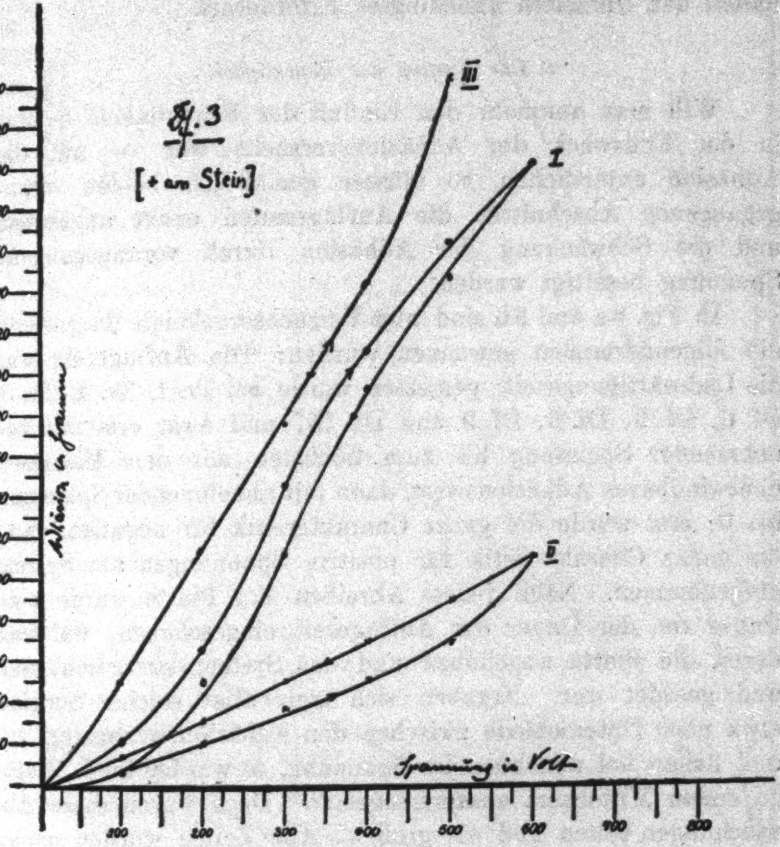


Fig. 5

gestellt. Hier ist der Einfluß der vorangegangenen Spannung auf die Adhäsion völlig beseitigt.

Erreicht die selbst bei *abgehobener* Platte eingelegte spannungslose Pause dagegen nicht annähernd die Größe der Ladesättigungszeit, so kann man nach Aufsetzen der Platte und Warten von einigen Minuten auch hier wiederum eine remanente Adhäsion erhalten, ohne Spannung an das System gelegt zu haben. — Beseitigt man die Schwächung durch vorangegangene Spannung nicht völlig, so spielt natürlich auch

der größenmäßige Abstand, mit dem die angelegten Spannungen einander folgen, eine Rolle für die Größe der Schwächung. — Auch bei diesem Teil der Messungen ist also genauestes Innehalten der Uhrzeiten unbedingtes Erfordernis.

c) *Der Einfluß der Feuchtigkeit*

Will man nunmehr den Einfluß der Feuchtigkeit — was ja der Endzweck der Adhäsionsversuche war — auf die Adhäsion untersuchen, so müssen gemäß den beiden vorangegangenen Abschnitten die Auflagezeiten exakt angegeben und die Schwächung der Adhäsion durch vorangegangene Spannung beseitigt werden.

In Fig. 6a und 6b sind nun Versuchsergebnisse dargestellt, die folgendermaßen gewonnen wurden: Die Auflagezeit war die Ladesättigungszeit; gemessen wurde bei Tr. 1, Tr. 4, Tr. 8, Df. 0, Df. 3, Df. 6, Df. 9 und Df. 15, und zwar erst mit zunehmender Spannung bis zum höchsten mit dem Magneten überwindbaren Adhäsionswert, dann mit abnehmender Spannung bis 0; erst wurde die ganze Charakteristik für negative, dann die ganze Charakteristik für positive Spannungen am System aufgenommen. Nach jedem Abreißen der Platte wurde eine Pause von der Dauer der Auflagezeit eingeschoben, während deren die Platte abgehoben und das System kurzgeschlossen und geerdet war. Ergaben sich trotz aller solcher Sorgfalt etwa noch Unterschiede zwischen den Adhäsionswerten bei zu- und denen bei abnehmender Spannung, so wurden diese Werte zu einem Mittelwert zusammengefaßt. Doch waren diese Abweichungen selten und nie groß. — Alle Zeiten wurden genau nach der Uhr abgemessen.

Diese Kurven stellen die exakteste Fassung der Beziehung zwischen Adhäsion und Spannung dar. Aus den Ergebnissen ist ersichtlich:

1. Mit wachsender Feuchtigkeit nimmt die Adhäsion zu.

2. Mit größerer Trockenheit werden die Adhäsionswerte unexakter (die Streuung der Kurvenpunkte wird größer).

3. Bei großer Trockenheit (Tr. 1 und Tr. 4) ist die Adhäsion bei negativer Spannung am Stein größer als bei positiver. Mit wachsender Feuchtigkeit wächst die Adhäsion bei positiver Spannung am Stein stärker als bei negativer, d. h. die Kurven

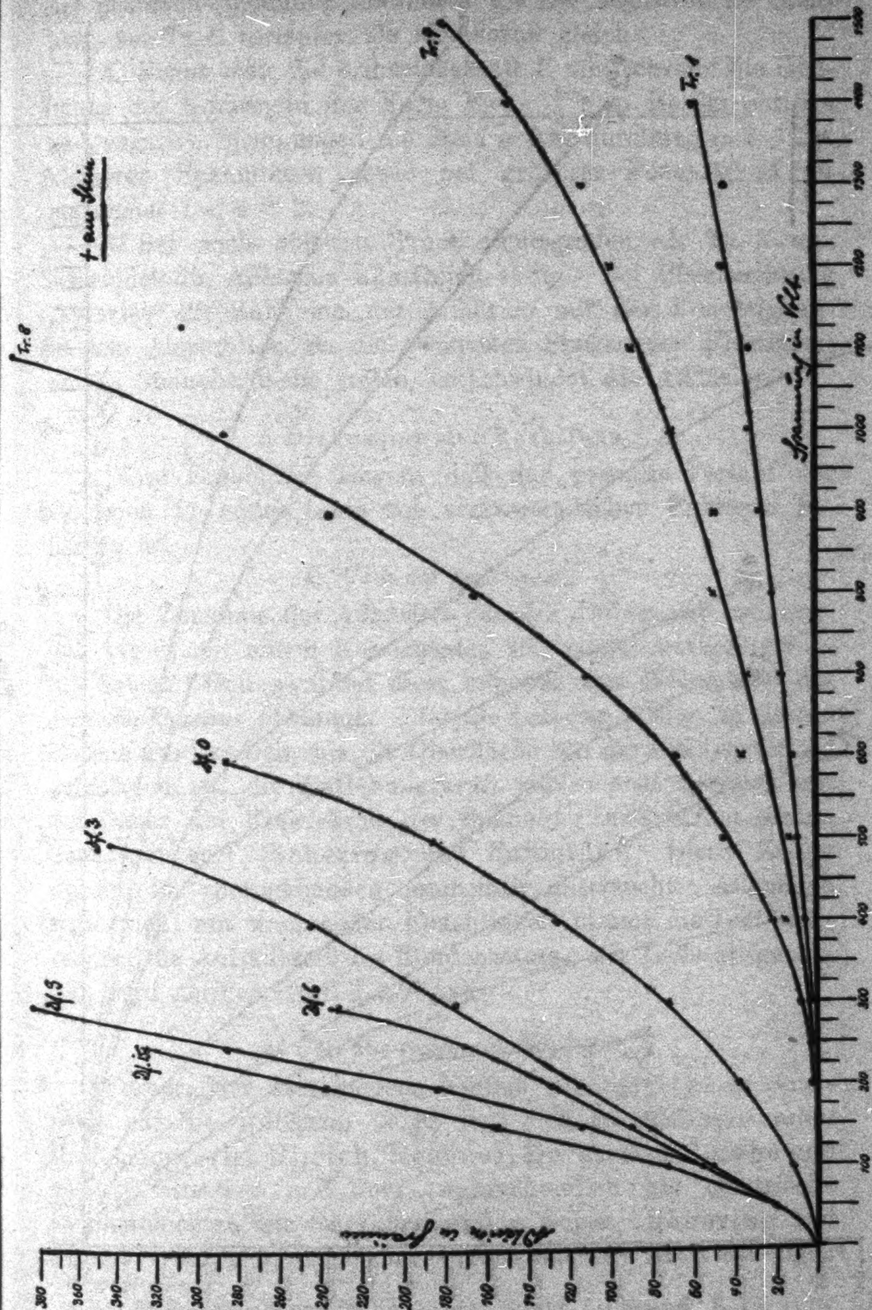


Fig. 6a

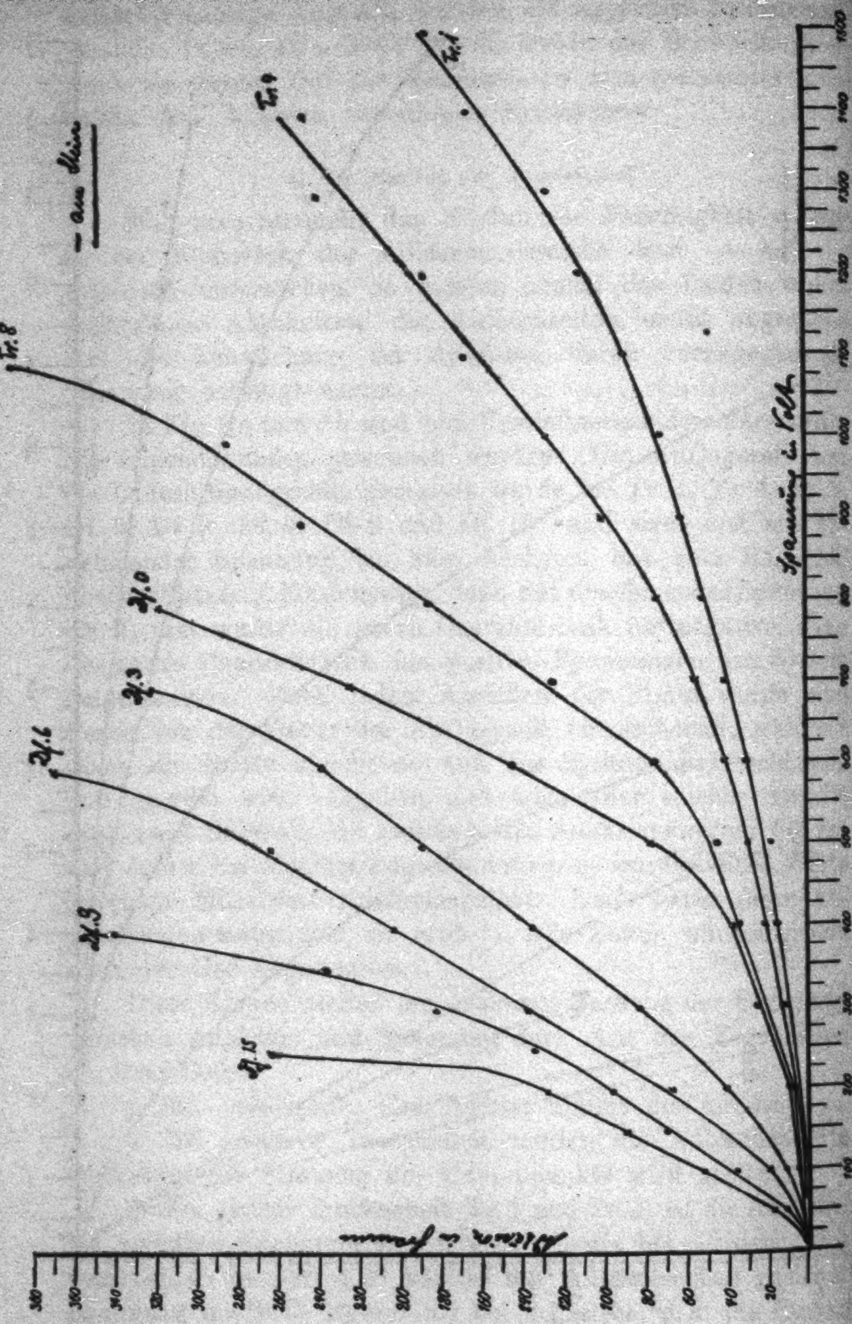


Fig. 8b

der positiven Spannung überholen die der negativen an Steilheit; bei Tr. 8 verlaufen sie annähernd gleich.

4. Nennt man die Adhäsionskraft F und schreibt die Gleichung der Kurven in der Form $F = c \cdot V^n$, so ist für positive und negative Spannungen am Stein n fast durchweg $= 2$. Bei kleineren Spannungen sowie bei größerer Feuchtigkeit ist manchmal $1 < n < 2$.

5. Bei noch höheren Trockenheitsgraden als Tr. 1 verschwindet die Adhäsion allmählich völlig. Bei Überfeuchtung „entartet" die Zunahme der Adhäsion mit der Feuchtigkeit: in dem Augenblick, da die geringsten Spuren von Flüssigkeit an die Steinoberfläche treten, verschwindet die Adhäsion.

2. Diskussion der Resultate

Diese Ergebnisse zeigen, daß der gesamte Verlauf der Adhäsion in erster Linie von elektrostatischen Faktoren abhängig ist.

a) *Über die Auflagezeit*

Die Zunahme der Adhäsion mit der Auflagezeit bedeutet, daß wir es mit einem Kondensator von großer Aufladezeit zu tun haben. Und zwar ist diese offenbar vom Widerstand des *gesamten Systems* abhängig. „Ist die Leitung gering, so dauert es eine gewisse Zeit, bis die Oberfläche auf die volle Spannung aufgeladen ist; die Anziehungskraft wächst also merklich mit der Dauer des Einwirkens der Spannung und strebt einem Grenzwert zu." (Schering und Schmidt.[1]) Diese Zeiten wurden im vorangehenden quantitativ untersucht. Allgemein ergab sich: mit wachsender Feuchtigkeit nimmt die Leitfähigkeit zu; die Aufladezeit des Kondensators, d. h. Ladesättigungszeit, wird geringer (vgl. Lübben).

b) *Über die remanente Adhäsion*

Ferner: Der beschriebene Einfluß vorangegangener Spannung auf die Adhäsion zeigt, daß sich *im Halbleiter selbst* Restladungen (vgl. Ullrich, Regener, Bergmann, Laube und andere) festsetzen und dort, wahrscheinlich als elektrische Doppelschichten, ein Gegenpotential erzeugen. Schering und Schmidt sagen: „Umgekehrt verschwindet die Kraft bei einem

1) H. Schering und R. Schmidt, Ztschr. f. Phys. 6. S. 19. 1925.

Stoff mit geringer Leitung auch nicht sofort, wenn die Spannungszuleitung zur Metallplatte unterbrochen wird, sondern erst nach einiger Zeit, wenn durch die Leitung die Spannungsdifferenz der Isolierstoffoberfläche gegen die Metallplatte ausgeglichen ist."

Aber sie fahren fort: „Verbindet man aber die Metallplatte leitend mit der Belegung der Unterseite, welche keine nennenswerte Spannungsdifferenz gegen die Isolierstoffoberfläche hat, so verschwindet die Kraft sofort." Ebenso gibt Laube zur Beseitigung der Restladungen einfaches Kurzschließen des Systems als Methode an. Wie wir dagegen (Fig. 5) quantitativ feststellen konnten, hält der Kondensator Stein-Platte durch elektrostatische Bindung bei aufgelegter Platte die Restladungen erheblich länger als bei abgehobener Platte. Die Kurve II Fig. 5 stellt die remanente Adhäsion bei Kurzschließen mit aufgelegter Platte dar. Daß die Lage ihrer Äste im Vergleich zu den Ästen der Kurve I vertauscht ist, erklärt sich daraus, daß sie ja die Schwächung der in Kurve III dargestellten „normalen" Adhäsion durch die vorangegangene Spannung darstellt, so daß sie die Differenz zwischen Kurve III und Kurve I bilden muß. — Auch dieser Effekt der remanenten Adhäsion nimmt mit wachsender Feuchtigkeit ab, doch ist es hier offenbar die Beschaffenheit des *Halbleiters allein*, die von Einfluß ist. Dies wird dadurch bestätigt, daß nach spannungslosen Pausen, die wesentlich kürzer als die Auflagezeit waren, und während deren die Platte *abgehoben* war, eine Art Regeneration der Restladungen auftritt, wenn man dann die Platte auflegt und bei Kurzschluß des Systems einige Minuten wartet; es zeigt sich dann, wie wir sahen, eine erneute Adhäsion: die Restladungen sind infolge der Schließung des Kondensators an die wirksamen Oberflächen gewandert, binden sich dort gegenseitig durch Influenz und rufen eine elektrische Adhäsion hervor.

Die Tatsache, daß die Aufladezeit des Kondensators Stein-Platte erst bei Df. 15 sehr klein wird, während die störenden Restladungen schon bei Df. 9 in kürzester Zeit abfließen, deutet ebenfalls darauf, daß die Aufladezeit eine Frage des Widerstandes des *Systems*, die Abflußzeit der Restladungen eine Frage des Widerstandes des *Steins allein* ist, da ja ersterer wesentlich höher als letzterer ist (vgl. Rottgardt).

Im ganzen scheinen auch bei größerer Feuchtigkeit sowohl die Kontaktpunkte zwischen Stein und Platte, als auch die leitenden Punkte innerhalb des Steines erheblich weniger gut für eine Beseitigung von Potentialdifferenzen zu sorgen, als sich vermuten läßt.

c) *Über die Gültigkeit der Thomsonschen Formel*

Nachdem in dieser Weise die Bedingungen für eine exakte Ausführung der Adhäsionsmessungen festgelegt waren, ergaben sich die in Fig. 6 dargestellten Resultate als durchaus im Einklang mit der Thomsonschen Formel für die elektrostatische Anziehung zwischen ebenen Platten:

(1) $$F = c \cdot \frac{\varepsilon \cdot S \cdot V^2}{8 \pi r^2},$$

wo F die Adhäsionskraft, c eine Konstante, ε die Dielektrizitätskonstante, S die (berührende) Fläche, V die Spannung und r der Abstand der Platte vom Stein sind.

An dieser Stelle sei eine Bemerkung über das viel umstrittene Problem „mit welcher Potenz der Spannung wächst die Adhäsion?" gestattet. Rottgardt findet experimentell den Exponenten zu > 2. Er erklärt sich dies dadurch, daß er annimmt, r werde mit wachsendem V kleiner. Auch Antinori stellt an den Anfang seiner Arbeit diese Hypothese. — Hierzu sagt Waszik[1]): „Nach meiner Meinung kann man die durch Herrn Rottgardt erhaltene Abhängigkeit, nach welcher die Anziehungskraft rascher als quadratisch mit der Spannung zunimmt, nicht damit erklären, daß, wie er sagt, mit zunehmender Potentialdifferenz der Abstand zwischen beiden Oberflächen geringer wird. Es ist zu beachten, daß die Messungen im Moment gemacht werden, in welchem es keine Anpressung zwischen den Platten gibt. Die anziehende Kraft ist im Moment der Messung gleich und umgekehrt der abziehenden Kraft des Wagearmes; im andern Falle des Herrn Rottgardt könnten sich doch die Platten überhaupt nicht voneinander trennen." Nur ein Abreißen der Platte in unendlich kleiner Zeit bei sogleich richtig bemessener Zugkraft würde die durch die Span-

1) J. Waszik, Ztschr. f. techn. Phys. 5. S. 29. 1924; Ztschr. f. Phys. 35. S. 720. 1926.

nung event. bewirkte Abstandsverkleinerung erkennen lassen. — Aus den Antinorischen Messungen geht nun hervor, daß diese Abstandsverkleinerung tatsächlich eintritt. Ihr Einfluß auf die Meßergebnisse kann aber als Folge der Geltung des Gesetzes von actio und reactio sowohl bei den Rottgardtschen wie den Antinorischen Messungen nicht bemerkbar werden: diese Kraft, die mit höherer als der zweiten Potenz der Spannung wächst, ist nur vorhanden, wenn an der Platte keine der Adhäsion entgegengerichteten Zugkräfte angreifen und die Adhäsion teilweise kompensieren, indem nämlich mit wachsender Zugkraft allmählich der Abstand vergrößert wird und unmittelbar vor dem Abreißen der Anfangsabstand wieder erreicht ist. — Damit dürften alle Erklärungsversuche des Adhäsionsverlaufes, die auf eine durch die Spannung bewirkte Abstandsverkleinerung zurückgreifen, endgültig erledigt sein.

Eine andere Formel geben Wägler[1]), Coursey[2]), Marchand[3]) u.a. an. Durch Kombination der Formeln:

$$F = c \cdot \frac{Q^2}{r^2}\,[\text{Coulomb}];\quad Q = C \cdot V \text{ und } C = \frac{\varepsilon \cdot S}{4\pi r},$$

wo Q die (auf beiden Elektroden gleiche) Ladungsmenge und C die Kapazität ist, finden sie:

$$F = c \cdot \frac{\varepsilon^2 \cdot S^2 \cdot V^2}{16\pi^2 r^4}\,.$$

Diese Formel ist auf das JR-System nicht anwendbar, da das Coulombsche Gesetz nur für punktförmige Ladungen gilt.

Es bleibt die Frage: Warum findet Rottgardt den Exponenten der Spannung in der Formel $F = c \cdot V^n$ experimentell zu > 2, Antinori zu < 2, ja sogar zu < 1? — Da beide weder die Feuchtigkeitsgrade, bei denen die Messungen vorgenommen wurden, angeben, noch anscheinend die oben dargestellten Einflüsse der Auflagezeit und der Restladungen berücksichtigen (die Abweichungen zwischen den einzelnen von Antinori mitgeteilten Kurven *untereinander* ist wohl die Folge hiervon), so ist ein Urteil über die Herkunft dieser Divergenz erschwert. Doch kann die Ursache in folgendem zu suchen sein: Rottgardt legt an das System eine Spannung, belastet

1) W. Wägler, Ztschr. f. Fernmeldetechnik 2. S. 224. 1921.
2) P. R. Coursey, Wireless World 9. S. 225, 256, 289, 311, 1921.
3) H. Marchand, Journ. Télégr. Bern. Jahrg. 1923. Nr. 6. S. 113.

die Wage mit einem Gewicht, das schätzungsweise unterhalb des zu dieser Spannung gehörigen Abreißgewichtes liegt, und reguliert dann die Spannung so lange zu *kleineren* Werten, bis die Platte abreißt. Auf die Ergebnisse dieser Meßmethode sind die *absteigenden* Äste der Kurven Fig. 4 anwendbar: die vorangegangene *höhere* Spannung verstärkt den Abfall der Kurven bis zu *höherer* als der zweiten Potenz. Mit der Form dieser absteigenden Kurvenäste stimmen die Rottgardtschen Kurven besser überein als mit den auf exaktem Wege gefundenen Kurven Fig. 6. — Antinori dagegen belastet die Wage und reguliert bei angenäherten Elektroden die Spannung so lange zu *höheren* Werten, bis die Kontrolle an den Newtonschen Ringen die Herstellung des Anfangsabstandes anzeigt[1]); auf die Ergebnisse dieser Meßmethode sind die *aufsteigenden* Äste der Kurven Fig. 4, sowie die Kurven Fig. 3 anwendbar: die vorangegangene *niedrigere* Spannung schwächt den Anstieg der Kurven bis zur 1. und sogar <1. Potenz. Mit der Form dieser Kurven stimmen die Antinorischen Kurven in auffallender Weise überein. — Auch Waszik mißt nach dieser Methode und findet ebenfalls den Anstieg der Adhäsion von kleinerer als quadratischer Ordnung.

Rottgardt selbst deutet übrigens diese starke Abhängigkeit des Steigungsexponenten der Kurven von der Wahl der Meßmethode an, ohne näher darauf einzugehen. Die Tatsache, daß vorangegangene Spannung, die sich in ihrer Größe von der zu untersuchenden Spannung unterscheidet, die Versuchsbedingungen auf jeden Fall verändert, gab mir die Veranlassung, die Abreißmethode so zu gestalten, daß die zu untersuchende Spannung konstant am System lag und statt ihrer die Zugkraft variiert wurde.

Aus allen diesen Ausführungen geht hervor, daß die Anwendbarkeit der Thomsonschen Formel auf den JR-Effekt, wenigstens durch alle *bisher* veröffentlichten Meßergebnisse, in keiner Weise beeinträchtigt ist. Die Form der Kurven Fig. 6 bestätigt dies: sie sind im großen ganzen von quadratischer Ordnung.

---

1) Vgl. hierzu A. Güntherschulze, Physikal. Ber. **7**. S. 371. 1926; Ztschr. f. Phys. **39**. S. 245. 1926. — E. Perucca, Ztschr. f. Phys. **39**. S. 241. 1926.

d) *Über den Einfluß der Feuchtigkeit*

Was nun den Einfluß der Feuchtigkeit auf die Steilheit der Kurven anlangt, so wäre mit einem Hinweis auf die Herabsetzung des Übergangswiderstandes zwischen Stein und Platte bei zunehmender Feuchtigkeit nichts erklärt. Diese Herabsetzung müßte ja vielmehr die elektrostatischen Erscheinungen stören, und die Adhäsion müßte mit wachsender Feuchtigkeit abnehmen. Wir sahen aber, daß dies nur sprungweise bei Überfeuchtung eintritt, wo die sonst als Kondensator wirkenden Teile der Zwischenschicht durch die ausgeschiedene Flüssigkeit ausgefüllt werden und somit die Adhäsion erlischt. Die Adhäsion scheint also in weiten Grenzen vom Übergangswiderstand unabhängig. Auch die Annahme, daß mit wachsender Trockenheit der Widerstand des Steines zunehme und somit der Spannungsabfall an den wirksamen Oberflächen immer mehr abnehme, ist unstatthaft, da der Übergangswiderstand den inneren Widerstand des Steines meist um mehrere Zehnerpotenzen übertrifft. Nur bei sehr großer Trockenheit ist diese Annahme berechtigt; daraus erklärt sich auch das Verschwinden der Adhäsion bei absoluter Trockenheit. — Den bisher üblichen Weg, die Adhäsion als eine Funktion des Stromes aufzufassen, müssen wir daher verlassen.

Halten wir uns an die Thomsonsche Formel. In ihr kämen bei dieser Betrachtung als Variable nur ε und r in Frage. Gasdruckversuche hatten ergeben, daß ein Einfluß der Dielektrizitätskonstanten auf die Erscheinungen unwahrscheinlich ist. Es bleibt also der Abstand r. Ein Zusammenhang zwischen diesem und der Feuchtigkeit ist nur dadurch zu erklären, daß die Oberfläche des Steines sich *strukturmäßig* verändert (vgl. Bergmann, Regener, Kramer, Ball), und zwar daß die aus der idealen Fläche herausragenden Kristallkomplexe mit wachsender Feuchtigkeit „weicher" werden, so daß das Gewicht der Platte die Oberfläche des Steines einebnet und somit der Abstand zwischen den wirksamen Teilen der beiden Flächen kleiner wird. Dieser Vorgang müßte umkehrbar sein, d. h. bei abnehmender Feuchtigkeit müßte sich die alte Oberflächenstruktur wieder einstellen. Die Tatsache, daß, wie wir sahen, mit größerer Trockenheit, d. h. bei geringerer mechanischer Nachgiebigkeit der Oberflächenvorsprünge, die Kurven-

punkte zerstreuter liegen, spricht für diese Theorie. (Alle Ergebnisse — z. B. Bergmann — die eine *Abnahme* der Adhäsion mit der Leitfähigkeit des Systems feststellen, sind so zu verstehen, daß bei dem betreffenden Halbleitermaterial diejenige Strukturveränderung, die zu geringerer Adhäsion führte, als *Nebenerscheinung* eine Herabsetzung des Systemwiderstandes mit sich brachte. Das ist eine Materialfrage.) Auf diesem Wege lassen sich ferner die noch vorhandenen Abweichungen der Kurven von der quadratischen Form erklären: ein momentanes „unelastisches" Verhalten der Strukturveränderung mit der Feuchtigkeitsveränderung mag die Ursache für diese Abweichungen sein. — Für den Unterschied des Verhaltens der Adhäsion bei positiver und negativer Spannung ließ sich bisher keine befriedigende Erklärung finden.

Aus den Adhäsionsmessungen ergibt sich also: Die für den Verlauf der Adhäsion maßgeblichen Vorgänge sind elektrostatischer Natur. Nur ihre genaue Kenntnis und Berücksichtigung gestattet eine exakte Gestaltung der Versuchsbedingungen. Dann zeigt sich, daß die Thomsonsche Formel unangefochten bleibt. — Die Struktur der Halbleiteroberfläche ist von maßgeblichem Einfluß auf die Größe der Adhäsion; sie ändert sich mit der Feuchtigkeit. — Die Veränderung des Übergangswiderstandes ist von untergeordneter Bedeutung. Die Auffassung: Adhäsion = f (Stromstärke) ist abzulehnen.

II. Die Stromstärke

1. Theoretischer Teil

Bisher hielt man, wie erwähnt, den Stromverlauf am JR-System für geeignet, Aufklärung in das Dunkel der Adhäsionsvorgänge zu bringen. Wir sahen im vorigen Kapitel, daß dieser Weg verlassen werden muß: die Unklarheiten des Adhäsionsverlaufes sind eher elektrostatischer Herkunft. Dagegen liegt es nahe, umgekehrt die gewonnenen exakten Resultate der Adhäsionsmessungen zu benutzen, um die Unklarheiten des Stromverlaufes aufzuhellen.

Vorversuche hatten ergeben, daß der Einfluß des mechanischen Druckes auf den Strom sehr beträchtlich ist (auch Kramer und Ball teilen diese Beobachtung mit, ohne näher

darauf einzugehen; dagegen beschäftigen sich Barlow[1]) und Poirson[2]) sehr intensiv mit dieser Frage), und daß der Strom mechanischen Druckänderungen sehr elastisch folgt. Nun stellt aber das JR-System eine Anordnung dar, bei der die angelegte Spannung *selbst* eine Erhöhung des mechanischen Druckes auf die berührenden Kontaktflächen, infolgedessen eine Veränderung des Übergangswiderstandes produziert. Wir wollen im folgenden diese Überlegung in eine mathematische Form bringen.

a) Die Stromstärke als Funktion des mechanischen Druckes

Nehmen wir (mit Poirson) an, die Unebenheiten des Steines hätten die Form von rechtwinkligen Kreiskegeln (die Annahme anderer mathematischer Körper würde zu ähnlichen Resultaten führen). Wir wollen den Widerstand eines solchen Kegels berechnen.

Es sei (Fig. 7) s_1 die Erzeugende des Kegels, M seine Spitze, die die Platte berührt, und α sein räumlicher Öffnungswinkel. Denken wir uns den Kegel von unendlich vielen Oberflächen von Kugeln durchschnitten, die ihren Mittelpunkt sämtlich in M und die Radien s von der Größe 0 bis zur Größe s_1 haben, so sind die Flächen, die der Kegel aus den Kugeloberflächen ausschneidet, von der Größe $e = \alpha \cdot s^2$. Diese stellen gleichzeitig die Äquipotentialflächen dar. — Ist nun ds der Abstand zwischen zwei benachbarten derartigen Flächen und ϱ der spezifische Widerstand des Halbleiters, so ist der gesamte elektrische Widerstand des Kegels:

$$R = \int_0^{s_1} \frac{\varrho\, d s}{\alpha \cdot s^2} = \left[\frac{-\varrho}{\alpha \cdot s}\right]_0^{s_1} = \infty\,.$$

Ist der Kegel ein wenig abgeplattet, z. B. um das Stück s_0, so ist:

$$R = \int_{s_0}^{s_1} \frac{\varrho\, d s}{\alpha \cdot s^2} = \left[\frac{-\varrho}{\alpha \cdot s}\right]_{s_0}^{s_1} = \frac{\varrho}{\alpha}\left(\frac{1}{s_0} - \frac{1}{s_1}\right).$$

Daraus folgt, je kleiner α, d. h. je spitzer der Kegel wird,

1) H. M. Barlow, Journ. Inst. Electr. Eng., London **62**. S. 133. 1924.
2) E. Poirson, L'Onde Électrique, Paris **1**. S. 334. 1922.

desto größer wird der Widerstand. — Ferner: da $s_1 \gg s_0$, so ist:

$$R = \frac{\varrho}{\alpha \cdot s_0}, \tag{2}$$

d. h. der größte Teil des Widerstandes ist an der Spitze des Kegels konzentriert und mit der Größe der Abplattung s_0 ändert sich der Widerstand umgekehrt proportional.

Nennen wir nun die Kraft, die diese Abplattung bewirkt, F und die die Platte berührende Oberfläche des so hergestellten Kegelstumpfes $e_0 = \alpha \cdot s_0^2$, so ist:

$$F = e_0 \cdot \zeta = \alpha \cdot s_0^2 \cdot \zeta,$$

wo ζ ein Faktor ist, der den Widerstand charakterisiert, den das betreffende Halbleitermaterial einer mechanischen Druckänderung entgegengesetzt. Oder:

$$s_0 = \sqrt{\frac{F}{\alpha \cdot \zeta}}\,. \tag{3}$$

Dann folgt aus (2):

$$R = \varrho \sqrt{\frac{\zeta}{\alpha \cdot F}}$$

und:

$$\frac{dR}{dF} = -\frac{\varrho}{2}\sqrt{\frac{\zeta}{\alpha \cdot F^3}},$$

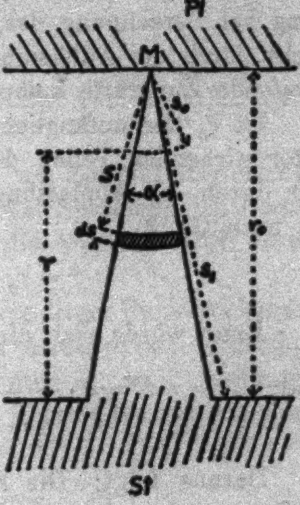


Fig. 7

d. h. je größer der mechanische Druck, desto geringer die Widerstandsänderung mit der Druckänderung. Der Strom durch das System als Funktion des mechanischen Drucks ist also:

$$J = \frac{V}{R} = \frac{1}{\varrho} \cdot \sqrt{\frac{\alpha}{\zeta}} \cdot V \cdot \sqrt{F}\,. \tag{4}$$

b) *Die Stromstärke als Funktion der elektrischen Adhäsion*

Beim JR-System wird nun die Kraft F von der elektrischen Adhäsion dargestellt; wir müssen daher jetzt die Kraft F als Funktion der Spannung V untersuchen. Nach der Thomsonschen Formel ist:

$$F = c \cdot \frac{\varepsilon \cdot S \cdot V^2}{8\pi r^2} \quad \text{(vgl. D, I, 2, c, Gl. 1);}$$

hieraus und aus Gl. (4) würde folgen:

$$(5)\qquad J = c' \cdot V^2; \quad \left[c' = \frac{1}{2 \cdot \varrho \cdot r} \cdot \sqrt{\frac{\alpha \cdot c \cdot s \cdot S}{2\pi \cdot \zeta}}\right].$$

Diese Gleichung trifft aber nur in erster Annäherung zu. Denn während wir bei der Untersuchung der Formel für die *Adhäsion* sahen, daß die Abstandsverkleinerung mit höherer Spannung auf die aus der Abreißmethode folgenden Ergebnisse ohne Einfluß sein muß, müssen wir im vorliegenden Falle der Untersuchung des *Stromes* tatsächlich die Abstandsverkleinerung bei Berechnung der Kraft berücksichtigen, da sie ja hier nicht durch der Adhäsion entgegenwirkende, an der Platte angreifende Zugkräfte kompensiert wird.

Ist r_0 der anfängliche Abstand zwischen den als Kondensator wirkenden Teilen der Elektrodenflächen und $r = r_0 - s_0$ der durch die Abplattung um s_0 hervorgerufene Abstand, so ist nach Gl. (3):

$$r = r_0 - \sqrt{\frac{1}{\alpha \cdot \zeta}} \cdot \sqrt{F}.$$ [1]

Dann würde sich die Gl. (1) schreiben:

$$(5\,a)\qquad F = c \cdot \frac{s \cdot S \cdot V^2}{8\pi \cdot \left[r_0 - \sqrt{\frac{1}{\alpha \cdot \zeta}} \cdot \sqrt{F}\right]^2}$$ [1]

Daraus folgt: Die Kraft wächst stärker als mit der 2. Potenz der Spannung. — Wir wollen diese Gleichung nach $\sqrt{F}$ auflösen. Es ist:

$$F \cdot \left[r_0 - \sqrt{\frac{1}{\alpha \cdot \zeta}} \sqrt{F}\right]^2 = \frac{c \cdot s \cdot S}{8\pi} \cdot V^2.$$

Oder:

$$\sqrt{F} \cdot \left[r_0 - \sqrt{\frac{1}{\alpha \cdot \zeta}} \sqrt{F}\right] = \sqrt{\frac{c \cdot s \cdot S}{8\pi}} \cdot V$$

(es gilt nur das positive Vorzeichen bei der Wurzelziehung, da alle Faktoren, auch der Klammerausdruck, der ja gleich r ist, positiv sind.) Oder umgeformt:

$$F - r_0 \sqrt{\alpha \cdot \zeta} \cdot \sqrt{F} + \sqrt{\frac{c \cdot s \cdot S \cdot \alpha \cdot \zeta}{8\pi}} \cdot V = 0\,.$$

---

[1] Diese Gleichungen sind gegenüber den von Antinori abgeleiteten zu bevorzugen; dieser nimmt nämlich eine *lineare* Abnahme von r mit F an.

Daraus folgt:

$$\sqrt{F} = \sqrt{\frac{r_0^2 \cdot \alpha \cdot \zeta}{4}} - \sqrt{\frac{r_0^2 \cdot \alpha \cdot \zeta}{4} - \sqrt{\frac{c \cdot s \cdot S \cdot \alpha \cdot \zeta}{8\pi}} \cdot V},$$

da F mit V wächst, so kann sinngemäß nur das negative Zeichen hinter der ersten Wurzel der rechten Seite dieser Gleichung gelten.)

Setzen wir diesen Wert für $\sqrt{F}$ in die Gl. (4) ein, so ergibt sich schließlich:

$$(6)\quad \begin{cases} J = \dfrac{1}{\varrho} \cdot \sqrt{\dfrac{\alpha}{\zeta}} \cdot V \\ \quad \cdot \left[\sqrt{\dfrac{r_0^2 \cdot \alpha \cdot \zeta}{4}} - \sqrt{\dfrac{r_0^2 \cdot \alpha \cdot \zeta}{4} - \sqrt{\dfrac{c \cdot s \cdot S \cdot \alpha \cdot \zeta}{8\pi}} \cdot V}\right]. \end{cases}$$

Dies ist der vor dem Angreifen von Zugkräften durch das System gehende Strom als Funktion der Spannung bei Berücksichtigung der am JR-System durch die Adhäsionskraft hervorgerufenen Kontaktveränderung.

Um den genauen Verlauf der Kurve dieser Funktion kennenzulernen, müßte man, etwa nach der Antinorischen Methode der Newtonschen Ringe, die Konstanten r_0, α, ζ bestimmen. Doch können wir uns durch folgende Überlegung ein ungefähres Bild von ihm machen: Nach Gl. (5a) ist:

$$F \sim \text{const} \cdot V^n; \quad [2 < n < 4].$$

Dann ist:

$$\sqrt{F} \sim \text{const}\ V^{n/2}.$$

Daraus und aus Gl. (4) folgt:

$$(7)\quad \begin{cases} J = \text{const} \cdot V \cdot \sqrt{F} \sim \text{const} \cdot V^{1+n/2} = \text{const} \cdot V^m; \\ [2 < m < 3]. \end{cases}$$

Schreibt man die Gl. (6) in der Form

$$y = a \cdot x \cdot \left[b - \sqrt{b^2 - c \cdot x}\right],$$

so genügt die Kurve dieser Funktion, wie man sich aus einer graphischen Darstellung von ihr leicht überzeugen kann, tatsächlich der Gl. (7). Das heißt: Bei Berücksichtigung der am JR-System durch die Spannung hervorgerufenen, auf die Kon-

taktflächen wirkenden mechanischen Druckkräfte wächst der Strom in erster Annäherung mit der zweiten bis dritten Potenz der Spannung. — Die Gll. (6) und (7) stellen die infolge dieser Berücksichtigung verbesserte Form der Gl. (5) dar.

c) *Konsequenzen der Theorie*

Wir wollen schließlich noch auf die Beziehung dieser Funktion zu den im vorigen Kapitel mitgetelten Ergebnissen der Adhäsionsversuche eingehen. Es ist anzunehmen, daß die für den Stromverlauf maßgeblichen, *vor* Angreifen von Zugkräften herrschenden Adhäsionskräfte auf äußere Einflüsse wie Feuchtigkeit usw. in derselben Weise reagieren, wie *die durch die Abreißmethode festgestellten* Adhäsionskräfte. Sahen wir also, daß diese sich verschiedener Polarität gegenüber verschieden verhalten, daß sie mit der Feuchtigkeit wachsen, daß ihre Kurven Hystereseschleifen bilden usw., so wird dies wohl auch für die Adhäsionskräfte, die die Stromstärke beeinflussen, also auch für die Stromstärken selbst zutreffen. Doch werden sich alle Abweichungen von der quadratischen Formel an den Stromstärken weniger bemerkbar machen, als dies bei der Adhäsion der Fall war, da ja nach Gl. (4) J nur mit der 0,5ten Potenz von F wächst.

2. Experimenteller Teil

Das Experiment bestätigt nun diese Theorie in vollem Umfange. — In Fig. 8 sind Stromspannungscharakteristiken dargestellt, die in genau derselben Art (Auflagezeit = Ladesättigungszeit; spannungslose Pausen von der gleichen Größe usw.) gewonnen wurden wie die Adhäsionspannungscharakteristiken in Fig. 6; teilweise wurden sie gleichzeitig mit diesen aufgenommen. Sie stellen denjenigen Strom in Abhängigkeit von der Spannung dar, der am Ende der Auflagezeit (d. h. wenn die Erhöhung der Adhäsion mit der Auflagezeit ihr Ende erreicht hat), vor Einsetzen von an der Platte angreifenden Zugkräften, d. h. vor Einschalten des Magneten, durch das System fließt. Dieser Strom unterscheidet sich in seiner Stärke erheblich von demjenigen Strom, der zu *Beginn* der Auflagezeit fließt: dieser hat ballistischen Charakter und ungefähr den doppelten Wert des Endstromes. — Ähnliche

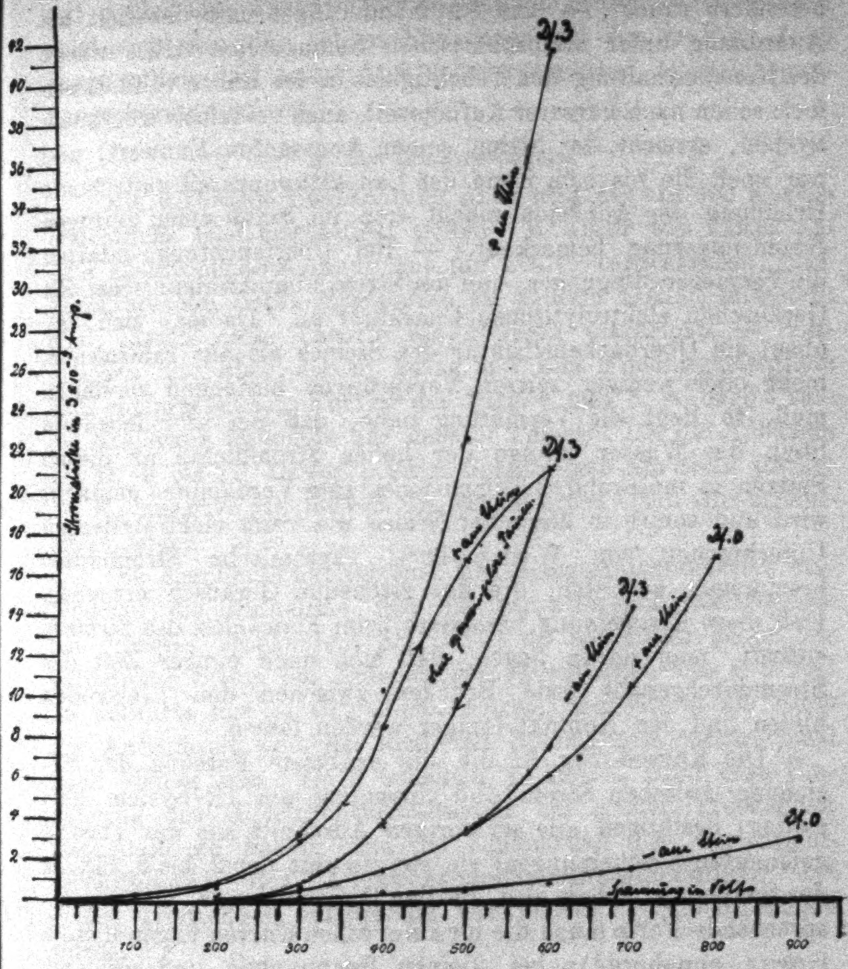


Fig. 8

Kurven wie die in Fig. 8 dargestellten ergeben sich bei höheren Feuchtigkeitsgraden.

a) *Der allgemeine Stromverlauf*

Allgemein sei bemerkt: Die meisten der von Kramer und Ball inzwischen mitgeteilten Beobachtungen über den Stromverlauf, sowohl in bezug auf seine zeitliche Veränderung wie in bezug auf das Gleichrichtverhältnis, konnten bestätigt werden; sie zeigten sich bei Verwendung der Vakuumapparatur

besonders sauber. — Die Stromänderungen mit der Zeit bei Anordnung unter atmosphärischen Bedingungen fallen infolge der Konstanthaltung der Feuchtigkeit in der Röhre vollkommen fort: schon nach kürzerer Auflagezeit, auch bei relativ trockenem System, erreicht der Strom seinen konstanten Endwert, und nur noch die bis zum Ende der Ladesättigungszeit auftretende Erhöhung der Adhäsion macht sich im Sinne einer geringen Stromsteigerung bemerkbar. — Bei Überfeuchtung entarten die Versuchsbedingungen, und der Strom nimmt unter zischenden Geräuschen elektrolytischen Charakter an. Da man sich (vgl. oben) die Oberflächenstruktur des Steines als aus zahlreichen, mehr oder weniger spitzen Vorsprüngen bestehend vorstellen muß, so liegt die Vermutung nahe, daß bei sehr feuchtem Stein das Wasser infolge der hohen Stromdichte an diesen Spitzen in molekularen Dimensionen zum Verdampfen gebracht wird und somit, in ähnlicher Weise wie beim elektrolytischen Unterbrecher von Wehnelt[1]), rhythmische Stromunterbrechungen auftreten, die das zischende Geräusch erzeugen. Daß diese Erscheinung besonders beim *Einschalten* des Stromes auftritt, mag daran liegen, daß sich nach einiger Zeit des Stromdurchganges feste Brücken zwischen den Elektroden bilden und den Kontakt inniger werden lassen.

Die Kurven Fig. 8, die die exakteste Fassung der Beziehung zwischen Strom und Spannung am JR-System darstellen, bestätigen alle im vorigen Abschnitt aus der Theorie gefolgerten Erscheinungen: sie steigen mit der 2. bis 3. Potenz der Spannung, haben also die den Gleichungen (6) und (7) entsprechende Form (auch die Kramerschen Kurven folgen diesem Gesetz annähernd); bei kleinen Spannungen und größerer Feuchtigkeit wird der Exponent, mit dem die Kurven ansteigen, manchmal kleiner, doch nehmen diese Abweichungen, entsprechend der Gleichung (4), bei weitem nicht die Größe an, mit der die *Adhäsion* manchmal von der quadratischen Formel abweicht; ferner zeigen sich am Strom alle Remanenzerscheinungen, die wir auch bei der Adhäsion fanden: eine bei Df. 3 ohne spannungslose Pausen aufgenommene Charakteristik (Fig. 8) zeigt die auch für die Adhäsion typische Hystereseschleife;

1) A. Wehnelt, Wied. Ann. 68. S. 233. 1899.

mit wachsender Feuchtigkeit wächst der Strom. — Im ganzen zeigt sich also eine völlige Kongruenz mit den in Figg. 4—6 dargestellten und unter D, I, 2 interpretierten Adhäsionspannungscharakteristiken.

b) *Der Gleichrichteffekt*

Als wichtigste Beobachtung aber mag der aus den Kurven ersichtliche Gleichrichteffekt gelten. Kramer will diesen auf eine Elektronenabtrennung aus der Platte zurückführen; Gasdruckversuche, deren Ergebnisse an anderer Stelle[1]) mitgeteilt sind, lassen diese Theorie als abwegig erscheinen. — Vergleichen wir aber die in bezug auf ihre Feuchtigkeitsgrade sich entsprechenden Kurven der Figg. 6 und 8, so ergibt sich die Erklärung zwanglos aus unserer Theorie: Da die Adhäsion bei Df. 0 bis Df. 15 für positive Spannungen am Stein stärker als für negative ist, müssen die Stromkurven einen Gleichrichteffekt zeigen.

Die Empfindlichkeitsgrenze des Spiegelgalvanometers verhinderte die Aufnahme von Stromspannungscharakteristiken bei größerer Trockenheit als Df. 0, da bei dieser schon der ballistische Strom bei Anlegen von Spannungen von 600 Volt an aufwärts nur $\sim 10^{-8}$ Amp. betrug, der Strom am Ende der Auflagezeit und bei kleineren Spannungen entsprechend noch kleiner war. Doch scheinen A. und E. Ball eine Umkehrung des Gleichrichtverhältnisses bei großer Trockenheit festgestellt zu haben, was der Umkehrung des „Gleichrichtverhältnisses“ der Adhäsionspannungscharakteristiken bei großer Trockenheit entsprechen und unsere Theorie bestätigen würde.

Leider geben Kramer und Ball die Feuchtigkeitsgrade, bei denen sie experimentierten, nicht an. Außerdem vernachlässigt Kramer durch eine willkürlich gewählte Zeitmethode die bei den verschiedenen Feuchtigkeitsgraden notwendigerweise zu variierenden Auflagezeiten. Alles dies erschwert einen Vergleich mit den von diesen Autoren gewonnenen Resultaten. (Dagegen beschäftigt sich Barlow eingehend auch mit der *zeitlichen* Veränderung des Stromes bei mechanischem Druck auf die Kontaktflächen.)

---

1) Meine Berliner Dissertation, 1928.

Aus den Strommessungen ergibt sich also: Der Strom durch das JR-System ist in starkem Maße von dem infolge der Adhäsion auf die Elektrodenflächen ausgeübten mechanischen Druck abhängig; er wächst mit der 2. bis 3. Potenz der Spannung. Die Stromspannungscharakteristiken ähneln infolgedessen in Absolutwerten, Verlauf, Steilheit usw. sehr stark den Adhäsionspannungscharakteristiken; hierdurch findet auch die Gleichrichtung des Stromes ihre Erklärung.

E. Zusammenfassung

Sowohl die zum Thema JR-Effekt vorliegende Literatur, als auch von mir angestellte Vorversuche führten zu der Überzeugung, daß die elektrischen Erscheinungen am JR-System sich unter atmosphärischen Bedingungen nicht eindeutig erfassen lassen. Es wurde daher eine Vakuumapparatur konstruiert, die vor allem eine nach Angaben von Hrn. Prof. Wehnelt angebrachte Vorrichtung enthielt, die eine exakte Regulierung der Feuchtigkeit durch Zuführung nach Druck definierter Wasserdampfquanten zum System gestattete. Die elektrische Adhäsion wurde durch eine Methode bestimmt, bei der ein nach Zugkraft geeichter Elektromagnet die Trennung der Elektroden besorgte. — Nachdem die Durchfeuchtungs- und Trocknungserscheinungen und -methoden genauestens studiert waren, konnten mit Hilfe dieser Anordnung folgende Ergebnisse festgestellt werden:

I. *Die elektrische Adhäsion*: Die Abhängigkeit der elektrischen Adhäsion von der Spannung läßt sich nur dann exakt erfassen, wenn man die Einflüsse der Auflagezeit und der vorangegangenen Spannung berücksichtigt. Die Untersuchung dieser Einflüsse führte zu der von mir benutzten Abreiß-Zeit-Methode. Die Divergenz zwischen den Ergebnissen Rottgardts und Antinoris konnte als Folge einer verschiedenartigen Meßmethode dieser Autoren erklärt werden. — Bei voller Berücksichtigung jener Einflüsse aber erweist sich, daß die Adhäsion durchaus der Thomsonschen Formel folgt, also quadratisch mit der Spannung steigt. Sie ist von dem durch das System gehenden Strom in weiten Grenzen unabhängig. Die bisher übliche Auffassung: Adhäsion $= f$ (Stromstärke) ist also aufzugeben. — Dagegen ist die Adhäsion zum größten Teil

von elektrostatischen Faktoren abhängig. Zu letzteren gehören hauptsächlich die im Stein auftretenden Restladungen, die vermutlich eine Folge der inneren Struktur des Halbleiters sind. — Der Einfluß der Feuchtigkeit auf die Adhäsion besteht darin, daß mit wachsender Feuchtigkeit die Oberflächenstruktur des Halbleiters zu kleineren Elektrodenabständen verändert, also die Adhäsion erhöht wird. Die Adhäsion verhält sich verschiedener Polarität gegenüber verschieden. Bei höchster Trockenheit und höchster Feuchtigkeit verschwindet sie. — Die Hypothese eines Einflusses der mit wachsender Spannung auftretenden Abstandsverkleinerung auf die nach der Abreißmethode gemessene Adhäsion muß aus theoretischen Überlegungen verworfen werden. — Die exakteste Fassung der Beziehung zwischen Adhäsion, Spannung und Feuchtigkeit ist in Fig. 6a und b dargestellt.

II. *Der Stromverlauf:* Die Stärke des durch das System gehenden Stromes ist in erster Linie eine Funktion des auf die Kontaktflächen ausgeübten mechanischen Druckes, also auch derjenigen Adhäsion, die *vor* dem Angreifen von Zugkräften an der Platte herrscht. Es wurde eine Theorie abgeleitet, nach der der Strom mit der 0,5. Potenz dieser Adhäsion, also mit der 2. bis 3. Potenz der Spannung steigen muß. Berücksichtigt man alle für die Adhäsion maßgeblichen Meßmethoden auch bei den Strommessungen, so wird diese Theorie bestätigt. Der Stromverlauf ähnelt also in weiten Grenzen dem Adhäsionsverlauf. U. a. wächst auch der Strom mit der Feuchtigkeit. Seine Gleichrichtung ist eine Folge des verschiedenen Verhaltens der Adhäsion verschiedener Polarität gegenüber. — Bei höchster Trockenheit wird der Strom 0. Bei höchster Feuchtigkeit nimmt er elektrolytischen Charakter an; die Stromverhältnisse ähneln dann denen im elektrolytischen Gleichrichter von Wehnelt. — Die meisten inzwischen veröffentlichten Meßergebnisse über den Stromverlauf am JR-System konnten bestätigt werden. Die exakteste Fassung der Beziehung zwischen Stromstärke, Spannung und Feuchtigkeit ist in Fig. 8 dargestellt.

III. *Experimentelle Grundlagen*: Abgesehen von denjenigen Versuchen, die ausdrücklich die Abhängigkeit der elektrischen Werte von der Feuchtigkeit feststellen sollten, zeigte sich auch

bei fast allen übrigen Versuchen, daß die Erscheinungen am JR-System nur dann eindeutig und reproduzierbar angegeben werden können, wenn der Feuchtigkeits- bzw. Trockenheitsgrad des Systems definiert ist. Ein großer Teil der Divergenzen zwischen den Resultaten der einzelnen Autoren ist auf Rechnung einer Vernachlässigung dieses Gesichtspunktes zu setzen. — In demselben Sinne ist auch die Wahl der Abreißmethode von maßgeblicher Bedeutung für die Ergebnisse. — Ebenso ist genauestes Innehalten der Uhrzeiten und der elektrischen Schaltungen sowohl für die Auflagedauer wie für die Dauer der zwischen den aufeinanderfolgenden Spannungen einzuschaltenden Pausen unbedingtes Erfordernis für eine exakte Erfassung der Vorgänge.

Die Versuche zu der vorliegenden Arbeit wurden im wissenschaftlichen Laboratorium der Fa. Dr. Erich F. Huth, G. m. b. H., Berlin, begonnen. Der Fa. Huth, insbesondere ihrem Direktor, Hrn. Dr. Karl Rottgardt, spreche ich für stets bereitwillige Hilfe auch hier meinen ergebensten Dank aus.

Fortgesetzt und beendet wurde die Arbeit unter Leitung von Prof. Dr. A. Wehnelt im Physikalischen Institut der Universität Berlin. Ich danke Hrn. Prof. Wehnelt aufrichtig und ehrerbietigst für sein stetes Interesse am Fortgange der Arbeit und seine wertvollen Ratschläge.

(Eingegangen am 10. Mai 1928)

3. *Über die magnetische Doppelbrechung von Flüssigkeitsgemischen;*

von G. Szivessy und M. Richartz

(Hierzu Tafel XI)

Inhalt: I. Einleitung: § 1. Molekulare Orientierungstheorie und magnetische Doppelbrechung; § 2. Gesetz der magnetischen Doppelbrechung binärer Gemische. — II. Versuchsanordnung: § 3. Allgemeines über die Versuchsanordnung; § 4. Optischer Teil der Versuchsanordnung; § 5. Bracescher Halbschattenkompensator; § 6. Magnetfeld und Flüssigkeitstrog; § 7. Bestimmung der Brechungsindizes; § 8. Bestimmung der Volumverhältnisse. — III. Einzelheiten des Meßverfahrens: § 9. Orientierung des optischen Teiles der Versuchsanordnung; § 10. Konstanthaltung und Messung der Temperatur während einer Messungsreihe; § 11. Gang der Messung einer Doppelbrechung und ihre Berechnung; § 12. Gang der Messung der Brechungsindizes; § 13. Berücksichtigung der Volumkontraktion bei Bestimmung der Volumverhältnisse; § 14. Benutzte Materialien. — IV. Messungsergebnisse: § 15. Empfindlichkeit des Braceschen Kompensators; § 16. Störende akzidentelle Doppelbrechungen; § 17. Konstanz der Temperatur; § 18. Resultate der Beobachtungen; § 19. Zusammenfassung.

I. Einleitung

§ 1. Molekulare Orientierungstheorie und magnetische Doppelbrechung

Reine, isotrope Flüssigkeiten verhalten sich in einem Magnetfelde wie ein optisch einachsiger Kristall, dessen Achsenrichtung in die Feldrichtung fällt. Cotton und Mouton[1]) haben diese magnetische Doppelbrechung zuerst nachgewiesen und nach ihren Beobachtungen[2]) gilt für den in Wellenlängen gemessenen Gangunterschied δ zwischen der außerordentlichen und der ordentlichen Welle die Beziehung

$$(1) \qquad \delta = 2\pi C \cdot l H^2,$$

1) A. Cotton u. H. Mouton, Compt. rend. 145. S. 229. 1907.

2) A. Cotton u. H. Mouton, Ann. chim. phys. 19. S. 169. 1910; 20. S. 194. 1910.

wobei l die Länge der durchstrahlten Flüssigkeitsschicht, H die äußere magnetische Feldstärke und C die sog. Cotton-Moutonsche Konstante bedeutet. Die Konstante C hängt von der Natur der Flüssigkeit, ihrer Temperatur und der Wellenlänge der auffallenden Strahlung ab.

Eine Erklärung dieser künstlichen Doppelbrechung versucht die von Langevin quantitativ durchgeführte molekulare Orientierungstheorie, nach welcher die einzelnen Moleküle einer isotropen Flüssigkeit in optischer und magnetischer Hinsicht anisotrop sind und unter dem Einfluß eines äußeren magnetischen Feldes eine durch die Wärmebewegung behinderte, teilweise Ausrichtung erfahren[1]); diese Theorie ergibt für die Cotton-Moutonsche Konstante C ein bestimmtes *Dispersions-* und *Temperaturabhängigkeitsgesetz.*

Das *Dispersionsgesetz* ist identisch mit der sog. Havelockschen Formel

$$C = h\,\frac{(n^2-1)^2}{n\lambda},$$

in welcher h eine von der Wellenlänge λ der durchgehenden Strahlung unabhängige Konstante und n den Brechungsindex der isotropen Flüssigkeit bedeutet; die Richtigkeit dieser Formel wurde durch die Messungen von Skinner[2]) und des einen[3]) von uns erwiesen.

Das von der Langevinschen Theorie gelieferte *Temperaturabhängigkeitsgesetz*, welches durch die Beziehung

$$C = g\,\frac{d(n^2+2)^2}{n\vartheta}$$

gegeben ist, in welcher g eine von der Temperatur unabhängige Konstante, n den Brechungsindex, d die Dichte und ϑ die absolute Temperatur der Flüssigkeit bedeutet, wird dagegen von den Beobachtungen nicht bestätigt; wie der eine von uns gezeigt hat[4]), nimmt die Cotton-Moutonsche Konstante C bei abnehmender Temperatur vielmehr stärker zu, als die Theorie verlangt.

---

1) Vgl. z. B. die Darstellung von P. Debye im Handbuch der Radiologie (herausgeg. von E. Marx) 6. S. 154. Leipzig 1924.

2) C. A. Skinner, Phys. Rev. 29. S. 541. 1909.

3) G. Szivessy, Ztschr. f. Phys. 18. S. 97. 1923.

4) G. Szivessy, Ann. d. Phys. 68. S. 127. 1922; 69. S. 231. 1922.

Eine weitere Prüfungsmöglichkeit der Langevinschen Theorie ergibt die Messung der *magnetischen Doppelbrechung von Mischungen.*

§ 2. Gesetz der magnetischen Doppelbrechung binärer Gemische

Schon Cotton und Mouton[1]) haben Flüssigkeitsgemische im magnetischen Felde untersucht und für die Konstante C eines binären Gemisches, dessen eine Komponente eine verschwindend kleine magnetische Doppelbrechung besitzt, folgende „Mischungsformel" aufgestellt:

$$(2) \qquad C = \frac{(n^2+2)^2}{n} \cdot \frac{n_1}{(n_1^2+2)^2} \cdot \frac{v_1}{v} \cdot C_1\,;$$

hierin bedeutet n den Brechungsindex des Gemisches, v sein Gesamtvolumen, n_1 bzw. v_1 den Brechungsindex bzw. das Partialvolumen derjenigen Mischungskomponente, deren Cotton-Moutonsche Konstante C_1 von Null verschieden ist.

Die Cotton-Moutonsche Mischungsformel ergibt sich aber als Folgerung aus der Langevinschen molekularen Orientierungstheorie[2]), und zwar gilt allgemein für eine Mischung von k Mischungskomponenten:

$$(3) \qquad \frac{n}{(n^2+2)^2} \cdot C = \sum_{i=1}^{k} \frac{v_i}{v} \cdot \frac{n_i}{(n_i^2+2)^2} \cdot C_i\,.$$

Hierin haben C, n und v dieselbe Bedeutung wie in (2), n_i ist der Brechungsindex der i-ten Mischungskomponente, C_i ihre Cotton-Moutonsche Konstante, v_i ihr Partialvolumen; die Summation ist über alle k-Mischungsbestandteile zu erstrecken. Die Mischungsformel (3) geht für ein binäres Gemisch, dessen eine Komponente eine verschwindend kleine Cotton-Moutonsche Konstante besitzt ($k = 2$, $C_2 = 0$), in die Formel (2) über. Nach vereinzelten Messungen, die Cotton und Mouton angestellt haben, wird ihre spezielle „Mischungsformel" (2) nicht bestätigt; doch reichen diese Beobachtungen zur Prüfung der allgemeinen Beziehung (3) nicht aus.

Die nachfolgende Untersuchung, welche die Münsterische Dissertation des einen von uns darstellt, wurde daher zur

1) A. Cotton u. H. Mouton, Ann. chim. phys. 30. S. 321. 1913.

2) G. Szivessy, Ztschr. f. Phys. 7. S. 285. 1921.

Prüfung der aus der Langevinschen Theorie folgenden Formel (3) ausgeführt; es wurden binäre Gemische untersucht, deren eine Mischungskomponente eine verhältnismäßig große Cotton-Moutonsche Konstante C_1 aufweist, während der andere Bestandteil des Gemisches eine kleinere, aber noch gut meßbare Konstante C_2 besitzt.

II. Versuchsanordnung

§ 3. Allgemeines über die Versuchsanordnung

Die Versuchsanordnung war ähnlich jener, die der eine von uns früher bei seinen Messungen der Temperaturabhängig-

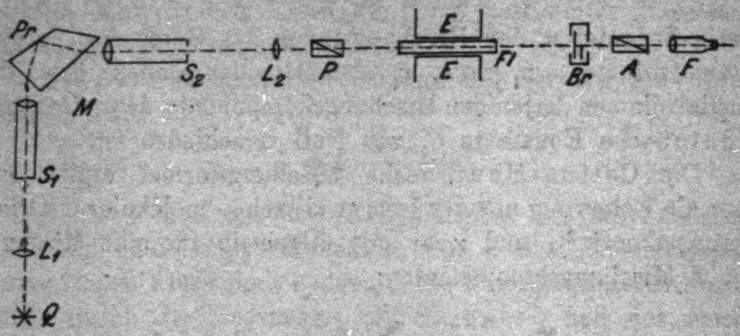


Fig. 1

keit der magnetischen Doppelbrechung[1]) benutzt hat. Das Prinzip der Versuchsanordnung ergibt sich aus der schematischen Fig. 1.

Der Krater der Bogenlampe Q wurde durch ein Linsensystem L_1 auf den Kollimatorspalt S_1 eines Monochromators M abgebildet. Die aus dem Fernrohrspalt S_2 austretende, einen schmalen Spektralbereich umfassende Strahlung wurde von einer Linse L_2 parallel gemacht, durchsetzte dann nacheinander den Polarisator P, den Flüssigkeitstrog Fl, den Braceschen Kompensator Br, den Analysator A und das kleine Beobachtungsfernrohr F. Der Flüssigkeitstrog befand sich zwischen den Polschuhen E eines Elektromagneten. Die gesamte Versuchsanordnung ist aus Fig. 2, Taf. XI zu ersehen.

1) G. Szivessy, Ann. d. Phys. 68. S. 127. 1922.

§ 4. Optischer Teil der Versuchsanordnung

Als *Lichtquelle Q* diente eine kleine elektrische Bogenlampe von Zeiss mit Uhrwerkregulierung und horizontal gelagerter positiver Kohle; die Stromstärke betrug etwa 10 Amp.

Die beiden achromatischen *Linsensysteme* L_1 und L_2 waren jedes für sich durch Triebhandregulierung vertikal und horizontal verschiebbar. L_1 hatte eine Öffnung von 38 mm und eine Brennweite von 125 mm, L_2 eine Öffnung von 24 mm und eine Brennweite von 140 mm.

Der Monochromator *M*, geliefert von C. Leiss[1]), Berlin-Steglitz, besaß zwei feste, unter 90° zueinander stehende Fernrohre mit symmetrischen Spalten und ein Abbesches Prisma mit konstanter Ablenkung von 90°. Die Öffnung der Fernrohrobjektive betrug 34 mm, die Brennweite 210 mm. Die Bewegung des Prismas erfolgte durch Trommel mit Spiralnut und umfaßte das Gebiet von 390 mμ bis 775 mμ. Das Prisma wurde so gestellt, daß bei Beleuchtung mit weißem Lichte der von dem Austrittsspalt ausgeschnittene Spektralbezirk seinen optischen Schwerpunkt bei 589 mμ hatte; die beiden Spalte erhielten eine solche Weite, daß die Breite des ausgeschnittenen Spektralbezirkes etwa 23 mμ betrug.

Polarisator P und *Analysator A* waren Glansche Nicols, deren Fassungen je an einem Teilkreise befestigt und drehbar waren. Die Grobeinstellung erfolgte mittels eines Hebels, die Feineinstellung nach Anziehung einer Klemme mit Hilfe einer Mikrometerschraube. Um eine schnelle und genaue Justierung zu ermöglichen, waren Polarisator, Analysator und der gleich zu besprechende Bracesche Halbschattenkompensator (§ 5) auf Präzisionsstativen befestigt, die in der hiesigen Institutswerkstatt angefertigt worden waren. Die Vertikalbewegung eines Statives konnte mittels eines Zahntriebes bewerkstelligt werden. Zur Neigung der Stativachse dienten die Fußschrauben, zur seitlichen Verschiebung zwei horizontale, senkrecht zueinander stehende, mikrometrisch verschiebbare Schlitten; eine weitere Mikrometerschraube ermöglichte die Drehung um die Stativachse.

---

1) C. Leiss, Ztschr. f. Instrumentenk. 29. S. 68. 1909; Ztschr. f. techn. Phys. 2. S. 256. 1921.

§ 5. Bracescher Halbschattenkompensator[1])

Der Bracesche Halbschattenkompensator ist in neuerer Zeit wiederholt zur Messung kleiner Gangunterschiede benutzt worden und besteht bekanntlich aus einer sog. Halbschattenplatte und einer Kompensatorplatte, die zwischen zwei gekreuzten Nicols senkrecht zur monochromatischen Parallelstrahlung angebracht sind. Die erstere, eine dünne, planparallele Glimmerplatte, bedeckt nur die eine Gesichtsfeldhälfte und ist fest montiert; die andere, ebenfalls eine dünne Glimmerplatte, nimmt das ganze Gesichtsfeld ein und kann in ihrer Ebene gedreht werden. Bei einmaliger Umdrehung gibt es 4 Stellungen der Kompensatorplatte, bei welchen man gleich geringe Helligkeit der beiden Gesichtsfeldhälften, den sog. Halbschatten, erhält.

Wird nun zwischen Polarisator und Kompensator eine planparallele, doppelbrechende Schicht im Azimut $\pi/4$, bezogen auf die Schwingungsrichtung des Analysators, gebracht, deren in Wellenlängen gemessener Gangunterschied δ ist, so wird der Halbschatten gestört und man muß die Kompensatorplatte in ihrer Ebene um einen gewissen kleinen Winkel drehen, um ihn wieder herzustellen. Bezeichnet man das auf die Schwingungsrichtung des Analysators bezogene Azimut der Kompensatorplatte in der Halbschattenstellung *vor* bzw. *nach* Einbringung der doppelbrechenden Schicht mit α bzw. α', so ist

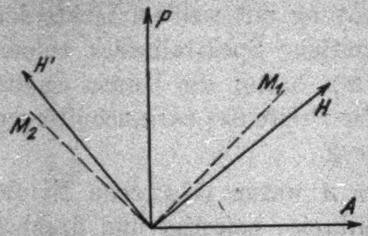


Fig. 3

$$(4) \qquad \delta = \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi\varphi \cdot (\sin 2\alpha' - \sin 2\alpha),$$

wobei φ der in Wellenlängen gemessene Gangunterschied der Kompensatorplatte bedeutet.

Es war bei unseren Messungen nicht möglich, das Azimut β der doppelbrechenden Schicht *genau* gleich $\pi/4$ zu machen, d. h. das Magnetfeld so zu orientieren, daß es die Schwingungsrichtungen des Nikols *genau* halbierte. Wir verstehen (Fig. 3)

1) G. Szivessy, Ztschr. f. Phys. 6. S. 311. 1921; daselbst auch Literatur.

unter P die Schwingungsrichtung des Polarisators, A die dazu senkrechte Schwingungsrichtung des Analysators, M_1 bzw. M_2 die Halbierungslinie des Winkels (P, A) bzw. seines Nebenwinkels, H_1 und H_2 die Hauptschwingungsrichtungen der doppelbrechenden Schicht mit dem in Wellenlängen gemessenen Gangunterschied δ, dann sind die nach H_1 bzw. H_2 genommenen Komponenten des Lichtvektors beim Austritt aus der Schicht

$$a \cos \beta \cos \nu t, \qquad a \sin \beta \cos (\nu t - 2\pi \delta),$$

wobei a die Amplitude des Lichtvektors der aus dem Polarisator austretenden Welle von der Frequenz ν ist. Die nach M_1 bzw. M_2 genommenen Komponenten des Lichtvektors sind

$$\text{(5)} \quad \left\{ \begin{aligned} & a \cos \beta \cos \left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) \cos \nu t \\ & \qquad + a \sin \beta \sin \left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) \cos (\nu t - 2\pi\delta) \\ & \qquad = a' \cos (\nu t - \Delta'), \\ & - a \cos \beta \sin \left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) \cos \nu t \\ & \qquad + a \sin \beta \cos \left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) \cos (\nu t - 2\pi\delta) \\ & \qquad = a'' \cos (\nu t - \Delta''); \end{aligned} \right.$$

dabei ist $\Delta'' - \Delta' = \Phi$ der in Wellenlängen gemessene Gangunterschied, welcher durch die Messung mit Hilfe des Braceschen Kompensators geliefert wird. Aus (5) folgt nun durch eine einfache Rechnung die Beziehung

$$\sin 2\pi \Phi = \sin 2\beta \sin 2\pi \delta \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 4 \left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) \cos^4 \pi \delta}},$$

die für kleine $\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right)$ in

$$\sin 2\pi \Phi = \sin 2\beta \sin 2\pi \delta,$$

oder, da Φ und δ klein sind, in

$$\text{(6)} \qquad \Phi = \delta \sin 2\beta$$

übergeht.

Der benutzte Bracesche Halbschattenkompensator ist schon an anderer Stelle beschrieben worden.[1]) Er saß, ebenso wie die Nicols, an einem besonderen Präzisionsstativ; die Teil-

1) G. Szivessy, Ztschr. f. Instrumentenk. 47. S. 152. 1927.

kreise, welche Kompensator- bzw. Halbschattenplatte trugen, waren jeder für sich mikrometrisch drehbar und besaßen Nonien, die noch halbe Minuten abzulesen gestatteten. Die Aufstellung erfolgte so, daß die Kompensatorplatte dem Polarisator, die Halbschattenplatte dem Analysator zugewandt war; auf die Trennungslinie der letzteren wurde mittels des kleinen Beobachtungsfernrohres *F* scharf eingestellt.

Die Justierung der Instrumente und die Messung der Halbschattenazimute erfolgte in der bekannten Weise.[1]) Die zur Bestimmung des Gangunterschiedes der Kompensatorplatte benutzte Eichplatte war eine parallel zur optischen Achse geschnittene Quarzplatte[2]), deren Gangunterschied mittels eines Soleilschen Kompensators mit Halbschattenvorrichtung[3]) bestimmt wurde und sich für $\lambda = 589$ mμ zu 0,256 λ ergab.

Die bei den schließlichen Messungen benutzte Kompensatorplatte hatte für $\lambda = 589$ mμ den Gangunterschied $\varphi = 0{,}0103\ \lambda$. Der Gangunterschied der zur Verwendung kommenden Halbschattenplatte betrug für dieselbe Wellenlänge $\lambda/140$; die günstigste Halbschattenempfindlichkeit ergab sich, wenn ihre Schwingungsrichtung etwa unter 60° gegen die Schwingungsrichtung des Analysators geneigt war.[4])

Die Herstellung der Halbschatten- und Kompensatorplatten aus Glimmer gelang nach dem von Bergholm[5]) angegebenen Verfahren. Die Brauchbarkeit der Glimmerblättchen von geringer Dicke ließ sich schon an den Interferenzfarben im reflektierten Lichte erkennen; auch ihre Planparallelität war bei einheitlicher Interferenzfarbe gesichert. Die so gewonnenen Glimmerblättchen wurden zwischen spannungsfreie Mikroskopierglasplatten (15 × 15 mm) mit dünnflüssigem Kanadabalsam blasenfrei eingekittet; die als Kompensatorplatten geeigneten bedeckten das Glasplättchen ganz, die Halbschattenplatten nur

1) G. Szivessy, Ztschr. f. Phys. **6**. S. 311. 1921; vgl. auch F. Kohlrausch, Lehrbuch d. prakt. Phys. 15. Aufl. S. 408. Leipzig 1927.

2) Geliefert von der Fa. Dr. Steeg & Reuter, Homburg v. d. H.

3) G. Szivessy, Verh. d. Dtsch. Phys. Ges. **21**. S. 271. 1919; Ztschr. f. Phys. **29**. S. 372. 1924; vgl. z. B. auch F. Kohlrausch, Lehrbuch d. prakt. Phys. 15. Aufl. S. 407.

4) N. Wedeneewa, Ztschr. f. Instrumentenk. **43**. S. 17. 1923; G. Szivessy, a. a. O. **47**. S. 153. 1927.

5) C. Bergholm, Ann. d. Phys. **44**. S. 1053. 1914.

zur Hälfte. Die Befestigung einer fertigen Platte in den zugehörigen Schlitten erfolgte in der Weise, daß nur eine Ecke mit Syndetikon festgekittet, die anderen Ecken dagegen nur leicht mit Klebwachs befestigt wurden; hierdurch wurde einerseits verhindert, daß bei erhöhter Temperatur eine Verschiebung der Platte infolge Weichwerdens des Klebwachses eintrat, andererseits eine spannungsfreie Befestigung erzielt.

§ 6. Magnetfeld und Flüssigkeitstrog

Der benutzte *Elektromagnet* war ein Halbringelektromagnet der Firma Hartmann & Braun und besaß zylindrische Polschuhe von 8 cm Durchmesser; ihre ebenen Endflächen lagen horizontal und hatten bei allen Messungen einen Abstand von 8 mm, der durch kleine, zwischen ihnen befindliche Messingzylinder von 8 mm Höhe gewährleistet wurde. Jeden Polschuh umgaben 5 Windungen einer Spirale aus Kupferrohr mit einem lichten Durchmesser von 2,5 mm. Beide Spiralen waren durch Schlauchverbindung parallel geschaltet und an die geöffnete Wasserleitung angeschlossen, um eine Erwärmung der Polschuhe zu verhüten, falls die Beobachtungen bei eingeschaltenem Magnetfeld längere Zeit benötigten. Als Stromquelle diente eine Batterie von 60 Akkumulatoren. Die Stromstärke, welche an einem Präzisionsamperemeter bis auf $^1/_5$ Amp. festgestellt und durch Regulierwiderstand konstant gehalten werden konnte, war bei allen Messungen 20 Amp.; die Feldstärke war daher ebenfalls bei allen Messungen die nämliche und betrug 12500 Gauss.[1])

Der *Flüssigkeitstrog* war mit einigen Abänderungen derselbe, den der eine von uns[2]) bei Messung des Temperaturkoeffizienten benutzt hat und konnte nach Art eines Schlittens in einer Schwalbenschwanzführung auf den unteren Polschuh aufgeschoben werden. Er bestand im wesentlichen aus einer Messingplatte, die 3 parallele Ausbohrungen von kreisförmigem Querschnitt enthielt. Die beiden seitlichen Ausbohrungen von je 0,4 cm Durchmesser wurden zwecks Kühlung und Konstanthaltung der

1) Gemessen mit Hilfe einer geeichten Wismutspirale. Da nur relative Messungen der magnetischen Doppelbrechung ausgeführt wurden, war eine genaue Kenntnis des Betrages der Feldstärke nicht erforderlich.

2) G. Szivessy, Ann. d. Phys. 65. S. 139. 1922.

Temperatur von Leitungswasser durchspült und waren durch Schlauchverbindungen mit den Kupferrohrspiralen der Polschuhe verbunden; die mittlere Ausbohrung von 0,5 cm Durchmesser diente zur Aufnahme der zu untersuchenden Flüssigkeit und war von zwei Spiegelglasplättchen von 1 mm Stärke und 15 mm Durchmesser abgeschlossen, die durch Schraubenverschlüsse festgehalten wurden. Vor Einfüllen der Flüssigkeit wurde die Wandung der Ausbohrung schwach berußt, um Reflexionen der hindurchgehenden Strahlung zu vermeiden. Dem gleichen Zwecke diente eine Blende, die zwischen Polarisator und Flüssigkeitstrog saß und den Querschnitt des in diesen eintretenden Parallelstrahlenbündels auf etwa 3 mm Durchmesser einengte.

Besondere Sorgfalt wurde auf die erwähnten Verschlüsse des Flüssigkeitstroges verwandt. Um einerseits den nicht oder nur sehr wenig doppelbrechenden Verschlußglasplättchen durch Druck der Schraubenverschlüsse keine merkliche Doppelbrechung zu erteilen, andererseits sie möglichst parallel zu stellen, wurde folgende Anordnung getroffen. Die eine Fläche eines dünnen Gummiringes *r* wurde auf die mit einer kreisförmigen Ausbohrung versehene Grundfläche des Messingzylinders *m* geklebt (Fig. 4), auf die andere Fläche wurde das Verschlußglasplättchen *g* aufgekittet; als Kittstoff wurde Syndetikon benutzt. Der Messingzylinder wurde dann zwecks Abdichtung auf dünne Gummi- oder Korkscheiben *k* gesetzt und mittels des Schraubenverschlusses fest auf den Trog aufgeschraubt. Diese Vorrichtung gewährleistete eine spannungsfreie Befestigung der Verschlußglasplättchen und hatte außerdem den Vorteil, daß Trog und Verschlußplättchen nach jeder Messung bequem und schnell gereinigt werden konnten.

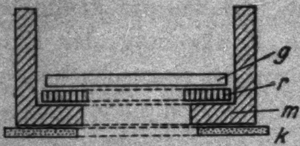


Fig. 4

§ 7. Bestimmung der Brechungsindizes

Die zur Prüfung der Formel (3) erforderlichen Brechungsindizes n, n_1, n_2 wurden mittels eines Pulfrichschen Refraktometers der Firma Zeiss gemessen; als Lichtquelle diente hierbei eine Natriumflamme. Damit die Flüssigkeitstemperatur, bei welcher die Bestimmung der Brechungsindizes erfolgte, zu-

sammenfiel mit der Temperatur, bei welcher die fast gleichzeitig erledigte Messung der Doppelbrechung ausgeführt worden war (§ 12), wurde der zur Kühlung der Polschuhe und des Flüssigkeitstroges dienende Wasserstrom längere Zeit durch die Kühlvorrichtung des Refraktometers geleitet.

§ 8. Bestimmung der Volumverhältnisse

Das Volumverhältnis $v_1 : v$ bzw. $v_2 : v$ ergibt sich als Quotient des Gewichtsverhältnisses $g_1 : g$ bzw. $g_2 : g$ zu dem Dichteverhältnis $d_1 : d$ bzw. $d_2 : d$. Die Dichten wurden in der üblichen Weise mittels Pyknometers bestimmt, die Flüssigkeitstemperaturen waren dabei nahezu dieselben wie bei der Messung der magnetischen Doppelbrechung.

III. Einzelheiten des Meßverfahrens

§ 9. Orientierung des optischen Teiles der Versuchsanordnung

Der Polarisator mußte so orientiert werden, daß die Schwingungsrichtung des aus ihm austretenden, linearpolarisierten Lichtes mit der Kraftlinienrichtung des Magnetfeldes, welches vertikal verlief, einen Winkel von angenähert 45° bildete; nach (6) gibt sich diese Stellung dadurch zu erkennen, daß bei ihr Φ ein Maximum wird. Der Polarisator wurde daher zuerst ungefähr in die gewünschte Stellung gebracht, dann die magnetische Doppelbrechung Φ ein und derselben Flüssigkeit für verschiedene, von dieser Ausgangsstellung nach rechts und links abweichende Polarisatorstellungen gemessen und so durch mehrmaliges Einengen diejenige Stellung ermittelt, für welche die magnetische Doppelbrechung ihren maximalen Wert erreichte; dann war β nahezu gleich $\pi/4$. β hatte bei den meisten Messungsreihen denselben Wert (vgl. § 18).

Die genaue Kreuzung von Polarisator und Analysator erfolgte mittels einer drehenden Halbschattenplatte[1]), die nach Art der Soleilschen Doppelplatte aus zwei senkrecht zur optischen Achse geschnittenen, dünnen Quarzplatten gleicher Dicke besteht, von denen die eine rechts-, die andere linksdrehend ist und jede nur eine Gesichtsfeldhälfte bedeckt.[2])

---

1) S. Nakamura, Ztrbl. f. Min. 1905. S. 267; vgl. auch G. Szivessy, Ztschr. f. Instrumentenk. 47. S. 148. 1927.

2) Die Doppelplatte wurde von der Firma Dr. Steeg und Reuter, Homburg v. d. H., in vorzüglicher Ausführung geliefert.

Die vollständige Kreuzung der Nicols gibt sich dadurch zu erkennen, daß beide Gesichtsfeldhälften bei Beleuchtung mit parallelem Lichte gleich dunkel sind und die Trennungslinie, auf welche mit dem Beobachtungsfernrohr scharf eingestellt wird, verschwindet. Die drehende Halbschattenplatte konnte durch Schlittenführung leicht mit der doppelbrechenden Halbschattenplatte des Braceschen Kompensators ausgewechselt werden.

Die Kreuzung der Nicols wurde vor jeder Messungsreihe wiederholt. Hierauf wurde (durch Einschieben der betreffenden Schlitten) an Stelle der drehenden Halbschattenplatte die doppelbrechende Halbschattenplatte des Braceschen Kompensators, sowie seine Kompensatorplatte in den Strahlengang gebracht und ersterer das erforderliche empfindliche Azimut (§ 5) erteilt. Die Justierung des Braceschen Kompensators erfolgte dann in der bekannten Weise.[1])

§ 10. Konstanthaltung und Messung der Temperatur während einer Messungsreihe

Zur Kühlung der Magnetpolschuhe, des Flüssigkeitstroges und des Refraktometers wurde bei allen Messungen das Leitungswasser benutzt. Damit die Temperaturunterschiede der Messungen innerhalb einer Messungsreihe nicht mehrere Grade betrugen, wurde dafür gesorgt, daß eine Messungsreihe innerhalb eines kurzen Zeitraumes (meist in zwei aufeinander folgenden Tagen) fertiggestellt wurde, innerhalb welcher Zeit die Zimmertemperatur sich höchstens um 2 Grad änderte. Zur Temperaturbestimmung wurden zwei Thermometer benutzt, von welchen das eine im Kühlwasser bei dessen Austritt aus dem Flüssigkeitstrog, das andere in der Kühlvorrichtung des Refraktometers saß, der Mittelwert der von diesen beiden Thermometern angezeigten Temperaturen wurde als Flüssigkeitstemperatur genommen.

§ 11. Gang der Messung einer Doppelbrechung und ihre Berechnung

Nachdem der Flüssigkeitstrog mit der zu untersuchenden Flüssigkeit zwischen die gekreuzten Nicols in die monochromatische Parallelstrahlung gesetzt, die Halbschattenplatte in

1) Vgl. das Zitat S. 400, Anm. 1.

das geeignete Azimut gebracht und mit der Kompensatorplatte justiert, sowie das Fernrohr scharf auf die Trennungslinie der Halbschattenplatte eingestellt war, wurde nach Erzielung hinreichend konstanter Temperatur die Messung der magnetischen Doppelbrechung vorgenommen. Zuerst wurde das Azimut α der Halbschattenstellung des Braceschen Kompensators *vor* Einschaltung des Magnetfeldes, dann das entsprechende Azimut α' *nach* Erregung desselben in der üblichen Weise gemessen, indem man der Kompensatorplatte in ihrer Ebene eine volle Umdrehung erteilte und die hierbei auftretenden 4 Halbschattenstellungen am Kompensatorteilkreis ablas. Jeder der Werte α und α' wurde 6 mal gemessen, aus den je 6 Einzelmessungen die Mittel gebildet und diese als endgültige Werte α bzw. α' benutzt.

Aus (1) und (6) folgt

$$\Phi = 2\pi C \cdot l \cdot H^2 \cdot \sin 2\beta;$$

Φ ist somit der Cotton-Moutonschen Konstante proportional, falls die Länge der durchstrahlten Flüssigkeitsschicht l, die Stärke des Magnetfeldes H und sein Azimut konstant gehalten werden, was bei ein und derselben Messungsreihe stets der Fall war. Die Prüfung der Mischungsformel (3) für ein binäres Gemisch ist daher gleichbedeutend mit der Prüfung der Formel

$$(7) \quad \Phi = \frac{(n^2+2)^2}{n}\left\{\frac{v_1}{v}\,\Phi_1\,\frac{n_1}{(n_1^2+2)^2} + \frac{v_2}{v}\,\Phi_2\,\frac{n_2}{(n_2^2+2)^2}\right\}.$$

§ 12. Gang der Messung der Brechungsindizes

Bei der Untersuchung einer bestimmten Flüssigkeit wurden Flüssigkeitstrog und Refraktometerzylinder gleichzeitig gefüllt. Die Messung des Brechungsindex mittels des Refraktometers erfolgte in der üblichen Weise und zwar vor, während und nach Bestimmung der magnetischen Doppelbrechung. Als Lichtquelle diente eine Natriumflamme.

§ 13. Berücksichtigung der Volumkontraktion bei Bestimmung der Volumverhältnisse

Obwohl bei der Mischung zweier Flüssigkeiten die Volumänderung im allgemeinen so gering war, daß sie vernachlässigt werden durfte, konnte sie doch nicht immer außer acht gelassen werden. Dies ergibt sich z. B. aus folgenden Tabellen, in

welchen v_1 das Partialvolumen des Chlornaphthalin, v das wahre Volumen der Mischung, v' das mit Hilfe der Dichten der Einzelkomponenten berechnete Volumen der Mischung ist (Tab. 1 und 2).

Tabelle 1

Chlornaphthalin–Bromoform

$v_1 : v'$	0,179	0,376	0,570	0,788
$v_1 : v$	0,198	0,398	0,598	0,808

Tabelle 2

Chlornaphthalin-Cumol

$v_1 : v'$	0,250	0,476	0,662	0,845
$v_1 : v$	0,202	0,407	0,601	0,804

§ 14. Benutzte Materialien

Die zur Untersuchung gelangten Flüssigkeiten waren teils von Kahlbaum, teils von Merck als chemisch rein geliefert worden und wurden ohne vorherige Reinigung benutzt. Bei jeder Messungsreihe wurden außer den Einzelkomponenten der Gemische die binären Mischungen von 20, 40, 60 und 80 Proz. untersucht.

IV. Messungsergebnisse

§ 15. Empfindlichkeit des Braceschen Kompensators

Die Genauigkeit der Beobachtungsresultate hängt hauptsächlich von drei Faktoren ab:

1. von der Empfindlichkeit des Braceschen Kompensators,
2. von einer etwaigen vorhandenen störenden Doppelbrechung (§ 16),
3. von der Konstanz der Temperatur während einer Messungsreihe (§ 17).

Die Empfindlichkeit des Braceschen Kompensators war bei den vorliegenden Messungen bedingt durch die Schärfe der Trennungslinie der Halbschattenplatte, die Intensität der Lichtquelle und die Phasendifferenzen der Kompensator- und Halbschattenplatte.

Die *Schärfe der Trennungslinie der Halbschattenplatte* soll so ausgeprägt sein, daß sie bei den Halbschattenstellungen möglichst vollständig verschwindet; bei der benutzten Halbschattenglimmerplatte war diese Bedingung nicht ganz erfüllt,

ein Fehler, der bei allen Messungen der gleiche war, da ein und dieselbe Halbschattenplatte benutzt wurde.

Die *Intensität der Lichtquelle* war bei allen Messungen die gleiche, da der Speisestrom stets konstant gehalten wurde; die untersuchten Flüssigkeiten absorbierten aber verschieden stark. Indessen war der Unterschied zwischen zwei zu mischenden Flüssigkeiten gering, so daß innerhalb einer Messungsreihe die Empfindlichkeit durch die Absorption wenig beeinträchtigt wurde.

Die *Phasendifferenzen* der Kompensator- und Halbschattenplatte waren die oben (§ 5) erwähnten; sie waren ausreichend, um auch bei der durch die Flüssigkeiten geschwächten Intensität noch eine Phasendifferenz von $5 \cdot 10^{-5} \cdot 2\pi$ mit Sicherheit zu messen; ohne Flüssigkeitstrog konnte eine solche von $2 \cdot 10^{-5} \cdot 2\pi$ gemessen und von $1 \cdot 10^{-5} \cdot 2\pi$ mit Leichtigkeit festgestellt werden.

Die Einstellungsgenauigkeit, die bei der Messung der Azimute α und α' erzielt wurde, zeigt z. B. Tab. 3; in dieser bedeuten p_1, p_2, p_3, p_4 die den Halbschattenazimuten entsprechenden Ablesungen am Teilkreise der Kompensatorplatte, wenn diese vor Erregung des Magnetfeldes in ihrer Ebene eine volle Umdrehung ausführte. Wie man aus der Tabelle ersieht, genügen die Ablesungen durchweg gut der Bedingung

$$p_2 - p_1 = \pi - (p_3 - p_2) = (p_4 - p_3) = -\pi - (p_1 - p_4),$$

die für eine gute Orientierung des Kompensators gefordert ist.

Tabelle 3

Benzoesaures Benzyl

p_1	p_2	p_3	p_4	
104° 11′	174° 42,5′	284° 7′	354° 29′	
19,5	38	15	32	$p_2 - p_1 = 70°\ 22'$
20,5	30	13,5	41	$\pi - (p_3 - p_2) = 70\ \ 25$
14,5	29,5	7	40	
10	43	13,5	48	$p_4 - p_3 = 70\ \ 28$
14,5	39	16	49	$-\pi - (p_1 - p_4) = 70\ \ 25$
104° 15′	174° 37′	284° 12′	354° 40′	

§ 16. Störende akzidentelle Doppelbrechungen

Fehler in der gemessenen Phasendifferenz konnten bei der benutzten Anordnung nur verursacht werden durch Reflexion

des Lichtbündels an den Trogwänden (Metallreflexion) und durch Doppelbrechung der Verschlußglasplatten des Flüssigkeitstroges. Erstere Störung wurde durch schwaches Berußen der Innenwände des Flüssigkeitstroges und durch Einengen des einfallenden Lichtbündels (§ 6) verhindert.

Von den beiden Verschlußglasplättchen muß das dem Polarisator zugewandte auf jeden Fall frei von akzidenteller Doppelbrechung sein, da sonst die in die Flüssigkeit eintretende Strahlung elliptisch polarisiert ist; es konnte schließlich unter den zur Verfügung stehenden Spiegelglasplättchen eines gefunden werden[1]), welches keine merkliche Doppelbrechung aufwies.

Das dem Analysator zugewandte Verschlußglasplättchen besaß eine geringe Doppelbrechung, die aber auf die mit dem Kompensator ausgeführten Messungen keinen merklichen Einfluß hatte. Hiervon konnte man sich überzeugen, indem die Phasendifferenz einer sehr dünnen Glimmerplatte, welche von derselben Größenordnung war wie die später zu bestimmenden Phasendifferenzen, einmal *ohne* und das andere Mal *mit* gleichzeitig in den Strahlengang gebrachtem doppelbrechendem Glasplättchen gemessen wurde, dessen Phasendifferenz erheblich größer war als die des benutzten Verschlußglasplättchens. Die Resultate ergeben sich nach Tab. 4, deren Meßreihen I und II

Tabelle 4

	$2\alpha_0$	2α	$2\alpha'$	$2\alpha''$	Φ	Φ'	Φ''	$\lvert\Phi'' - \Phi'\rvert$
I.	$20^0 14'$	$22^0 29,5'$	$34^0 17'$	$31^0 32,5'$	$3,803 \cdot 10^{-3}$	$1,877 \cdot 10^{-3}$	$1,837 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-5}$
II.	$20^0 14'$	$22^0 29,5'$	$23^0 55,5'$	$21^0 42,5'$	$3,803 \cdot 10^{-3}$	$0,238 \cdot 10^{-3}$	$0,249 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-5}$

sich auf zwei verschiedene Glimmerplatten beziehen; in dieser bedeutet

α_0 = das Azimut der Halbschattenstellung des Kompensators, wenn sich überhaupt keine doppelbrechende Schicht im Strahlengang befand,

1) Der Firma Fr. Schmidt u. Haensch danken wir auch an dieser Stelle bestens für die kostenlose Überlassung einer größeren Anzahl von Verschlußglasplättchen.

α = das Halbschattenazimut, wenn sich das doppelbrechende Glasplättchen allein im Strahlengang befand,

α' = wenn sich Glasplättchen und Glimmerplatte im Strahlengang befanden,

α'' = wenn sich die Glimmerplatte allein im Strahlengang befand,

$\Phi = \sin\varphi(\sin 2\alpha - \sin 2\alpha_0)$ die Phasendifferenz der doppelbrechenden Glasplatte,

$\Phi' = \sin\varphi(\sin 2\alpha' - \sin 2\alpha)$ die mit dem Kompensator ermittelte scheinbare Phasendifferenz der Glimmerplatte, wenn sich das Glasplättchen gleichzeitig im Strahlengang befand,

$\Phi'' = \sin\varphi(\sin 2\alpha'' - \sin 2\alpha_0)$ die wahre Phasendifferenz der Glimmerplatte.

Wie man sieht, liegt selbst bei diesem stärker doppelbrechenden Glasplättchen die Differenz $|\Phi'' = \Phi'|$ an der Schwelle der Meßgenauigkeit.

§ 17. Konstanz der Temperatur

Die den Tabellen (§ 18) beigefügte Durchschnittstemperatur ist der Mittelwert aus den bei den Einzelmessungen ermittelten Temperaturen, die sich im ungünstigsten Falle um etwa 1—2° unterscheiden (vgl. § 10); diese Abweichungen waren aber für die Messungsresultate unwesentlich, da der Temperaturkoeffizient der magnetischen Doppelbrechung sehr klein ist.[1])

§ 18. Resultate der Beobachtungen

Es kamen folgende Gemische zur Untersuchung:

1. Nitrobenzol–Benzoesaures Äthyl . Tab. 5, Fig. 5;
2. Nitrobenzol–Benzoesaures Benzyl „ 6, „ 6;
3. Nitrobenzol–Bromoform . . . . „ 7, „ 7;
4. Nitrobenzol–Cumol . . . . . „ 8, „ 8;
5. Nitrobenzol–Safrol . . . . . „ 9, „ 9;
6. Nitrotoluol–Benzoesaures Äthyl . „ 10, „ 10;

---

1) A. Cotton u. H. Mouton, Ann. chim. phys. 20. S. 235. 1910; G. Szivessy, Ann. d. Phys. 68. S. 127. 1922.

7. Nitrotoluol–Bromoform . . . Tab. 11, Fig. 11;
8. Nitrotoluol–Cumol . . . . „ 12, „ 12;
9. Nitrotoluol–Safrol . . . . „ 13, „ 13;
10. Chlornaphthalin–Anisol . . . . . „ 14, „ 14;
11. Chlornaphthalin–Bromoform . . „ 15, „ 15;
12. Chlornaphthalin–Cumol . . . . . „ 16, „ 16;
13. Chlornaphthalin–Safrol . . . . . „ 17, „ 17.

In den Tabellen bedeutet

t = die Durchschnittstemperatur in Celsiusskale, bei welcher die Messungen der magnetischen Doppelbrechung ausgeführt wurden (§ 10);

$V_1 : V$ = das Volumverhältnis des die größere Cotton-Moutonsche Konstante aufweisenden Mischungsbestandteiles zu dem wahren Gesamtvolumen der Mischung;

n = den Brechungsindex bei der Temperatur t;

α = das Halbschattenazimut der Kompensatorplatte *vor* Erregung des Magnetfeldes;

α' = das Halbschattenazimut der Kompensatorplatte *nach* Erregung des Magnetfeldes;

Φ = die Phasendifferenz zwischen außerordentlicher und ordentlicher Welle;

Δ = die Differenz zwischen den nach Formel (6) beobachteten und den nach Formel (7) berechneten Werten.

Die verschiedenen Werte, welche Φ bei ein und derselben Flüssigkeit in den verschiedenen Tabellen zeigt, rühren von den verschiedenen Flüssigkeitstemperaturen bei den entsprechenden Meßreihen her; die größeren Unterschiede, die bei den auf Nitrobenzol und Nitrotoluol bezüglichen Werten von Φ in den Tabellen 5 und 10 einerseits und den übrigen Tabellen andererseits bestehen, sind den verschiedenen Werten von β in den betreffenden Messungsreihen zuzuschreiben.

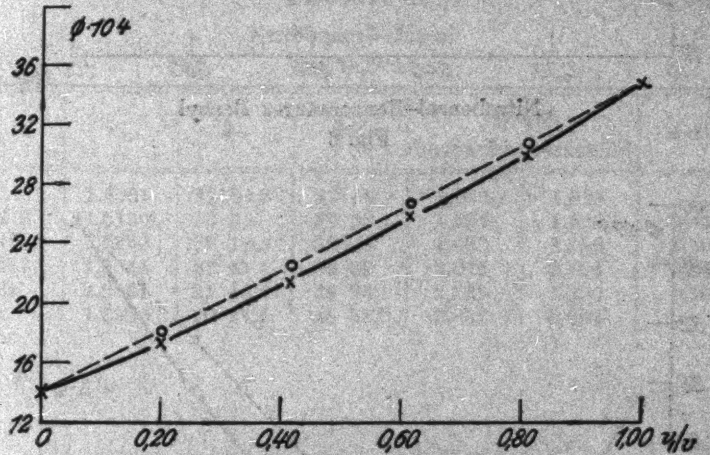
In den graphischen Darstellungen (Figg. 5—17) entsprechen die Ringe den theoretisch berechneten, die Kreuze den beobachteten Werten.

Tabelle 5

Nitrobenzol–Benzoesaures Äthyl

$t = 17°$ C

$v_1 : v$	n_D	2α	$2\alpha'$	$\Phi \cdot 10^3$ beobacht.	$\Phi \cdot 10^3$ berechnet	$\Delta \cdot 10^3$
0	1,5077	20° 17,5′	28° 51′	1,407	1,407	
0,20	1,5154	20 7,5	30 58	1,754	1,807	0,053
0,416	1,5254	20 25	33 46	2,145	2,248	0,103
0,613	1,5326	21 7,5	37 37	2,590	2,649	0,059
0,809	1,5445	20 17,5	39 31	2,999	3,066	0,067
1	1,5546	19 33,5	42 8,5	3,483	3,483	



Nitrobenzol–Benzoesaures Äthyl

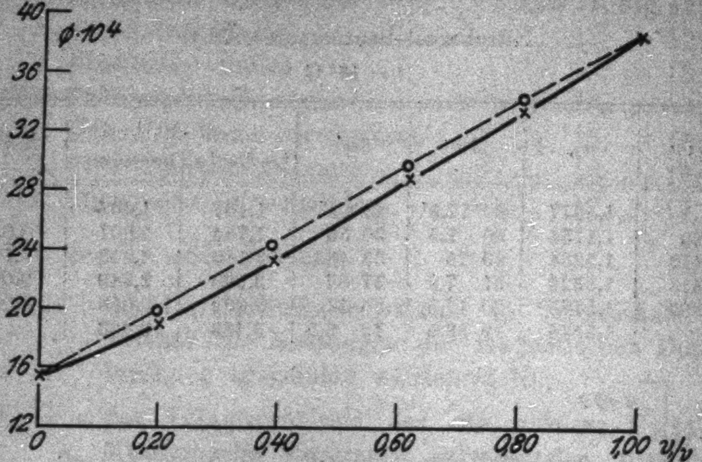
Fig. 5

Tabelle 6

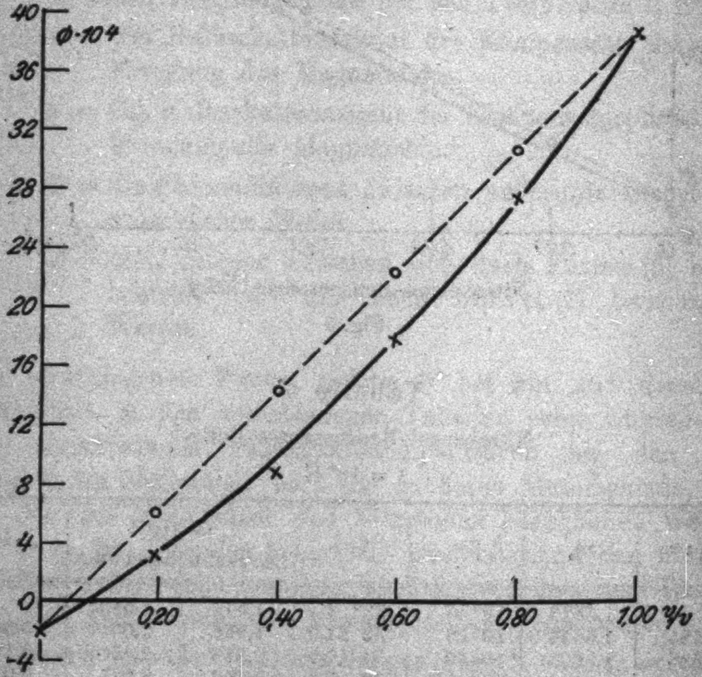
Nitrobenzol–Benzoesaures Benzyl

$t = 18°$ C

$v_1 : v$	n_D	2α	$2\alpha'$	$\Phi \cdot 10^3$ beobacht.	$\Phi \cdot 10^3$ berechnet	$\Delta \cdot 10^3$
0	1,5673	19° 35′	29° 2′	1,549	1,549	
0,195	1,5646	20 26	32 27,5	1,936	2,004	0,068
0,386	1,5625	19 49	34 17,5	2,316	2,450	0,134
0,613	1,5586	19 41	38 7,5	2,896	2,975	0,079
0,804	1,5547	21 4,5	42 53,5	3,326	3,426	0,100
1	1,5529	18 9	43 18	3,864	3,864	



Nitrobenzol–Benzoesaures Benzyl
Fig. 6



Nitrobenzol–Bromoform
Fig. 7

Tabelle 7

Nitrobenzol–Bromoform

$t = 19,2^\circ$ C

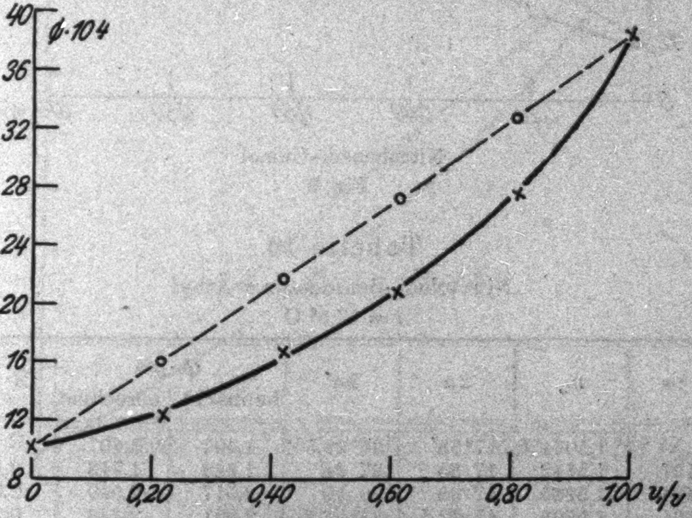
$v_1 : v$	n_D	2α	$2\alpha'$	$\Phi \cdot 10^3$ beobacht.	$\Phi \cdot 10^3$ berechnet	$\Delta \cdot 10^3$
0	1,5901	19° 43′	18° 35,5′	−0,192	−0,192	
0,194	1,5802	19 31	21 32,5	+0,319	+0,607	0,288
0,398	1,5724	19 59	25 17,5	0,887	1,439	0,552
0,595	1,5644	20 26	31 23	1,770	2,230	0,460
0,802	1,5572	20 12	37 25	2,718	3,053	0,335
1	1,5520	29 24,5	45 59,5	3,839	3,839	

Tabelle 8

Nitrobenzol–Cumol

$t = 19,5^\circ$ C

$v_1 : v$	n_D	2α	$2\alpha'$	$\Phi \cdot 10^6$ beobacht.	$\Phi \cdot 10^6$ berechnet	$\Delta \cdot 10^3$
0	1,5061	21° 30,5′	27° 45′	1,025	1,025	
0,218	1,5160	20 33	27 53	1,207	1,623	0,416
0,42	1,5256	22 12,5	32 43	1,683	2,186	0,503
0,612	1,5344	22 41	35 52	2,075	2,726	0,651
0,81	1,5431	21 48,5	39 26	2,732	3,290	0,558
1	1,5520	20 24,5	45 59,5	3,839	3,839	



Nitrobenzol–Safrol

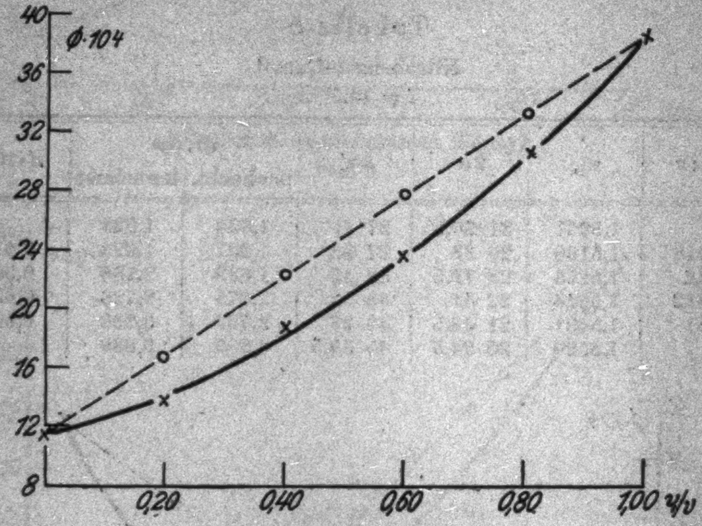
Fig. 8

Tabelle 9

Nitrobenzol–Safrol

$t = 19{,}2^\circ$ C

$v_1 : v$	n_D	2α	$2\alpha'$	$\Phi \cdot 10^3$ beobacht.	$\Phi \cdot 10^3$ berechnet	$\Delta \cdot 10^3$
0	1,5377	20° 1′	26° 55′	1,145	1,145	
0,196	1,5406	19 55	28 5	1,348	1,671	0,323
0,40	1,5435	20 13,5	31 51	1,886	2,217	0,331
0,60	1,5459	19 39	34 18,5	2,356	2,755	0,399
0,804	1,5488	19 34,5	38 54,5	3,037	3,304	0,267
1	1,5520	20 24,5	45 59,5	3,839	3,839	



Nitrobenzol–Cumol

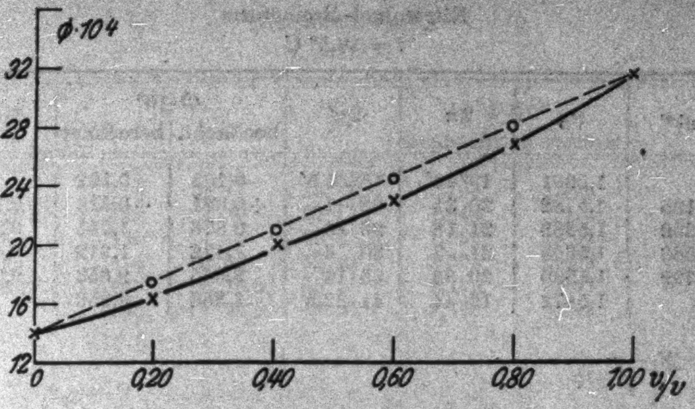
Fig. 9

Tabelle 10

Nitrotoluol–Benzoesaures Äthyl

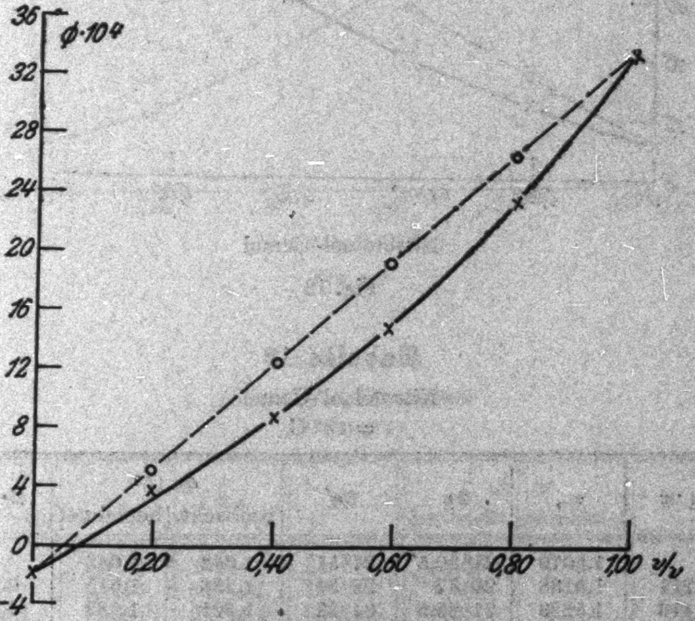
$t = 17{,}5^\circ$ C

$v_1 : v$	n_D	2α	$2\alpha'$	$\Phi \cdot 10^3$ beobacht.	$\Phi \cdot 10^3$ berechnet	$\Delta \cdot 10^3$
0	1,5064	17° 58′	26° 22,5′	1,407	1,407	
0,197	1,5142	17 35	27 24	1,638	1,743	0,105
0,404	1,5225	17 38	29 50	2,017	2,099	0,082
0,601	1,5308	17 52,5	31 52,5	2,291	2,443	0,152
0,808	1,5391	18 5,5	34 40	2,675	2,798	0,123
1	1,5474	18 29,5	38 30,5	3,153	3,153	



Nitrotoluol–Benzoesaures Äthyl

Fig. 10



Nitrotoluol–Bromoform

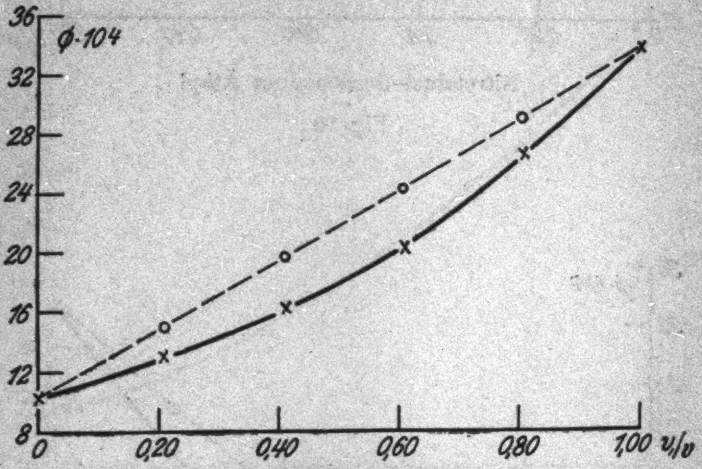
Fig. 11

Tabelle 11

Nitrotoluol–Bromoform

$t = 19{,}5°$ C

$v_1 : v$	n_D	2α	$2\alpha'$	$\Phi \cdot 10^3$ beobacht.	$\Phi \cdot 10^3$ berechnet	$\Delta \cdot 10^3$
0	1,5901	19° 43′	18° 35,5′	−0,192	−0,192	
0,195	1,5782	20 31	22 47	+0,381	+0,515	0,134
0,399	1,5688	21 18	26 36	0,876	1,246	0,370
0,588	1,5605	21 2	30 4	1,472	1,912	0,440
0,799	1,5580	20 36	35 19	2,345	2,653	0,308
1	1,5472	19 44	41 22,5	3,350	3,350	



Nitrotoluol–Cumol

Fig. 12

Tabelle 12

Nitrotoluol–Cumol

$t = 18°$ C

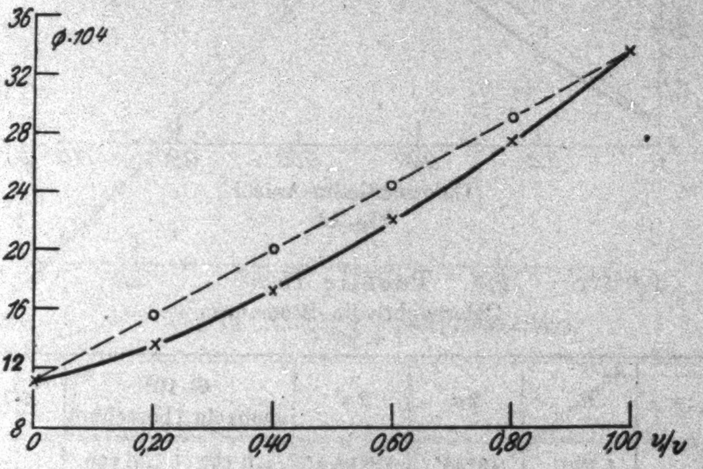
$v_1 : v$	n_D	2α	$2\alpha'$	$\Phi \cdot 10^3$ beobacht.	$\Phi \cdot 10^3$ berechnet	$\Delta \cdot 10^3$
0	1,5079	21° 30,5′	27° 51′	1,042	1,042	
0,211	1,5138	20 37	28 30	1,296	1,515	0,219
0,416	1,5223	21 25,5	31 27	1,621	1,982	0,361
0,612	1,5308	21 50,5	34 26,5	2,006	2,436	0,430
0,808	1,5381	20 48,5	37 46,5	2,666	2,893	0,227
1	1,5484	21 21,5	43 27	3,352	3,352	

Tabelle 13

Nitrotoluol–Safrol

$t = 22^\circ$ C

$v_1 : v$	n_D	2α	$2\alpha'$	$\Phi \cdot 10^3$ beobacht.	$\Phi \cdot 10^3$ berechnet	$\Delta \cdot 10^3$
0	1,5372	19° 2′	25° 40′	1,108	1,108	
0,198	1,5378	19 0	27 5	1,344	1,546	0,202
0,402	1,5399	19 0	29 17,5	1,696	2,002	0,306
0,595	1,5414	18 50	32 23,5	2,205	2,432	0,227
0,802	1,5440	18 50,5	35 58	2,739	2,897	0,158
1	1,5455	19 22,5	40 52	3,342	3,342	



Nitrotoluol-Safrol

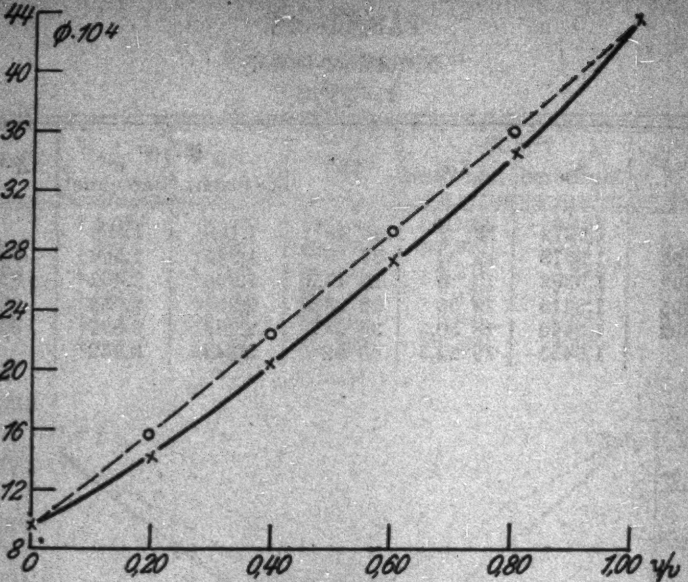
Fig. 13

Tabelle 14

Chlornaphthalin–Anisol

$t = 20,2^\circ$ C

$v_1 : v$	n_D	2α	$2\alpha'$	$\Phi \cdot 10^3$ beobacht.	$\Phi \cdot 10^3$ berechnet	$\Delta \cdot 10^3$
0	1,5165	19° 14′	24° 56′	0,955	0,955	
0,199	1,5395	21 0,5	29 38	1,409	1,586	0,177
0,402	1,5631	21 4,5	33 55,5	2,057	2,254	0,197
0,599	1,5868	20 38	37 55,5	2,732	2,926	0,194
0,801	1,6089	20 35	43 15	3,463	3,635	0,172
1	1,6326	19 49	49 29,5	4,365	4,365	



Chlornapthalin–Anisol
Fig. 14

Tabelle 15
Chlornaphthalin–Bromoform
$t = 20°$ C

$v_1 : v$	n_D	2α	$2\alpha'$	$\Phi \cdot 10^3$ beobacht.	$\Phi \cdot 10^3$ berechnet	$\Delta \cdot 10^3$
0	1,5901	19° 43′	18° 35,5′	−0,192	−0,192	
0,193	1,5981	20 21	23 54,5	+0,596	+0,665	0,069
0,398	1,6068	20 44	30 0	1,512	1,587	0,075
0,593	1,6152	21 9	36 27,5	2,419	2,475	0,056
0,808	1,6241	19 18	41 18	3,402	3,444	0,042
1	1,6326	19 49	49 29,5	4,365	4,365	

Tabelle 16
Chlornaphthalin–Cumol
$t = 20,6°$ C

$v_1 : v$	n_D	2α	$2\alpha'$	$\Phi \cdot 10^3$ beobacht.	$\Phi \cdot 10^3$ berechnet	$\Delta \cdot 10^3$
0	1,5061	21° 17′	27° 19′	0,994	0,994	
0,202	1,5331	19 53	30 10	1,682	1,643	0,039
0,407	1,5597	21 33	36 27,5	2,351	2,308	0,043
0,601	1,5826	22 22	41 55,5	2,981	2,961	0,020
0,804	1,6087	22 1	46 53	3,680	3,661	0,019
1	1,6326	19 49	49 29,5	4,365	4,365	

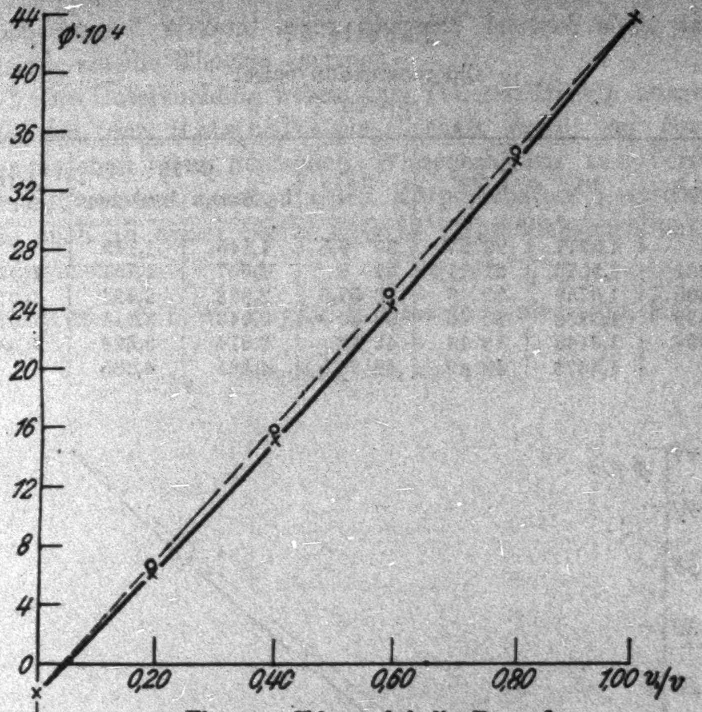


Fig. 15. Chlornaphthalin–Bromoform

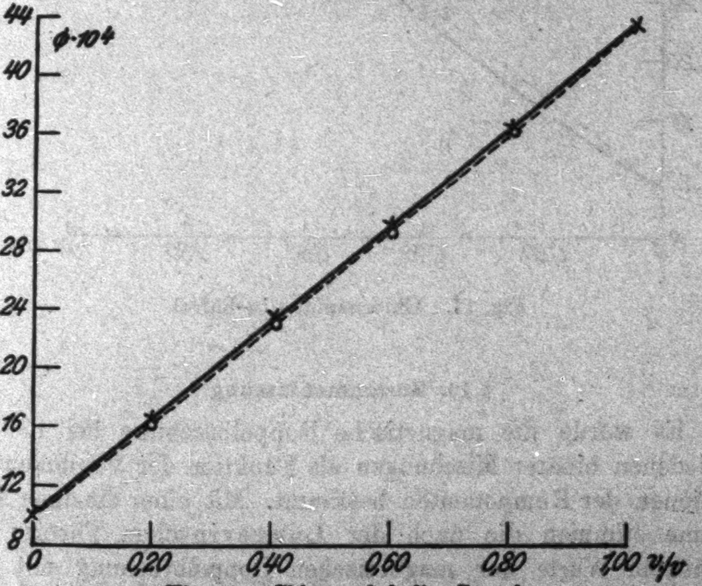


Fig. 16. Chlornaphthalin–Cumol

Tabelle 17

Chlornaphthalin–Safrol

$t = 20^0$ C

$v_1 : v$	n_D	2α	$2\alpha'$	$\Phi \cdot 10^3$ beobacht.	$\Phi \cdot 10^3$ berechnet	$\Delta \cdot 10^3$
0	1,5377	22° 27′	30° 9,5′	1,145	1,145	
0,201	1,5572	21 11,5	31 6	1,607	1,755	0,148
0,405	1,5759	22 9	36 57,5	2,323	2,393	0,070
0,599	1,5938	20 45	39 40	2,943	3,014	0,071
0,804	1,6143	19 14	42 42	3,614	3,696	0,082
1	1,6326	19 49	49 29,5	4,365	4,365	

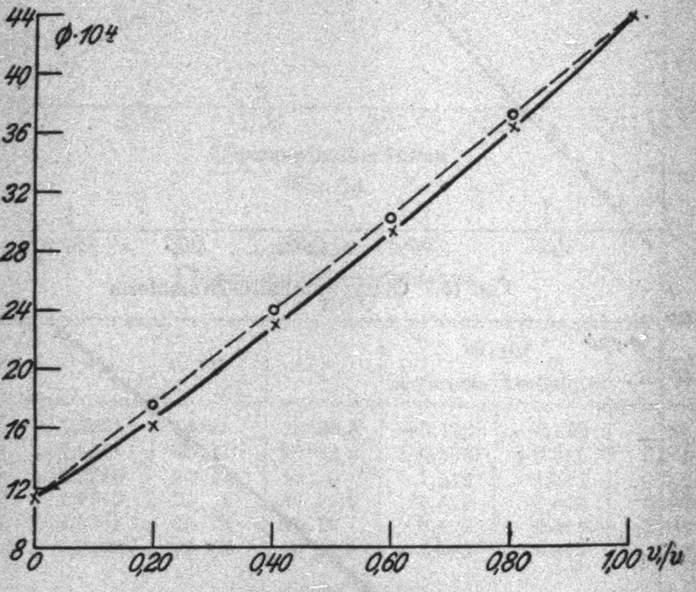


Fig. 17. Chlornaphthalin–Safrol

§ 19. Zusammenfassung

Es wurde die magnetische Doppelbrechung bei 13 verschiedenen binären Mischungen als Funktion der Volumkonzentrationen der Komponenten bestimmt. Mit einer einzigen Ausnahme stimmen die nach der Langevinschen Theorie berechneten Werte der magnetischen Doppelbrechung mit den

beobachteten Werten nicht überein; letztere sind vielmehr kleiner als die Theorie verlangt.

Die Untersuchung wurde zum Teil mit Mitteln ausgeführt, die von der Helmholtz-Gesellschaft sowie von der Notgemeinschaft der deutschen Wissenschaften zur Verfügung gestellt worden waren; beiden Körperschaften gestatten wir, uns auch an dieser Stelle unseren verbindlichsten Dank auszusprechen.

Münster i. W., Physik. Institut der Universität, Mai 1928.

(Eingegangen 5. Mai 1928)

---

4. *Die Fortpflanzung elektrischer Wellen in Kabeln mit zwei Isolationsschichten;*
von N. H. Frank

(Hierzu Tafel XII)

Die Lösung der Maxwellschen Gleichungen für das Problem der Ausbreitung elektrischer Wellen entlang eines einzelnen isolierten Drahtes wurde zuerst von A. Sommerfeld[1]) gegeben. Diese grundlegende Arbeit enthält eine umfassende Diskussion der Abhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit und der Dämpfung der Wellen von den Materialkonstanten und dem Drahtquerschnitt. Für gut leitende Drähte von nicht zu kleinem Durchmesser erhält man eine Phasengeschwindigkeit, die praktisch übereinstimmt mit der Lichtgeschwindigkeit im umgebenden Isolationsmaterial, nämlich $v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}$, wo $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum und ε die Dielektrizitätskonstante (D.K.) des Isolators ist. Dabei ist vorausgesetzt, daß sich das Dielektrikum bis ins Unendliche erstreckt. Im einfachsten Falle eines einzelne Drahtes in Luft wird daher die Fortpflanzungsgeschwindigkeit gleich der Lichtgeschwindigkeit. Im praktisch wichtigen Falle, daß der Draht konzentrisch in eine zylindrische Isolationsschicht von der Dicke d eingebettet ist, die ihrerseits von einer unendlichen Luftschicht umgeben ist, liegt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit zwischen c und $c/\sqrt{\varepsilon}$ und hängt von der Dicke der Isolationsschicht ab. Dieses Problem wurde eingehend von F. Harms[2]) behandelt.

In diesen beiden Fällen wird vorausgesetzt, daß keine anderen Leiter im Felde existieren, so daß der ganze Rückstrom vom Dielektrikum getragen wird. Wir haben daher in der vorliegenden Arbeit den praktisch ebenso wichtigen Fall theoretisch behandelt und experimentell geprüft, daß die Iso-

---

1) A. Sommerfeld, Wied. Ann. 67. S. 223. 1899.
2) F. Harms, Ann. d. Phys. 23. S. 44. 1907.

lationsschicht von einem Leiter umgeben ist. Theoretisch können wir diese leitende Schutzhülle als bis ins Unendliche erstreckt denken; praktisch braucht es nur eine nicht allzu dünne Schicht zu sein.

Theoretischer Teil

Um die Betrachtung gleich von Anfang an einem praktisch wichtigen Falle anzupassen, wollen wir überdies annehmen, daß die Isolation aus zwei übereinanderliegenden konzentrischen Schichten mit verschiedener Dielektrizitätskonstanten besteht. Unser Kabel führt somit in der Mitte einen unendlich langen geraden Draht (Medium 4) vom Radius A. Dieser ist konzentrisch eingehüllt von einer inneren Isolationsschicht (Medium 3), die sich bis zum Radius B erstreckt. An diese schließt sich konzentrisch bis zum Radius C die äußere Isolationsschicht (Medium 2) an, die ihrerseits von der metallischen Hülle (Medium 1) eingeschlossen wird. Das elektrische Verhalten jedes der Medien i ($i = 1, 2, 3, 4$) wird durch die drei Materialkonstanten ε_i = Dielektrizitätskonstante, μ_i = magnetische Permeabilität und σ_i = Leitfähigkeit charakterisiert.

Zur Berechnung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit in einem solchen Kabel können wir uns der gleichen Methode bedienen, wie sie **Sommerfeld** entwickelt hat. Bedeutet E die elektrische und H die magnetische Feldstärke, so gelten für sie in jedem einzelnen Medium die **Maxwellschen** Gleichungen

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\varepsilon}{c}\dfrac{\partial E}{\partial t} + \dfrac{4\pi\sigma}{c} E = \operatorname{rot} H \\ \dfrac{\mu}{c}\dfrac{\partial H}{\partial t} = -\operatorname{rot} E. \end{cases}$$

Verwendet man Zylinderkoordinaten z, r, φ, wobei man die z-Richtung mit der Drahtachse zusammenfallen läßt, so nehmen diese Gleichungen die Form an[1])

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\varepsilon}{c}\dfrac{\partial E_z}{\partial t} + \dfrac{4\pi\sigma}{c} E_z = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r H_\varphi) \\ \dfrac{\varepsilon}{c}\dfrac{\partial E_r}{\partial t} + \dfrac{4\pi\sigma}{c} E_r = -\dfrac{\partial H_\varphi}{\partial z} \\ \dfrac{\mu}{c}\dfrac{\partial H_\varphi}{\partial t} = \dfrac{\partial E_z}{\partial r} - \dfrac{\partial E_r}{\partial z}. \end{cases}$$

1) A. **Sommerfeld**, a. a. O. S. 233.

Führt man nun eine skalare Funktion[1]) Π ein, definiert durch

$$H_\varphi = -\frac{\varepsilon}{c}\,\frac{\partial^2 \Pi}{\partial r\,\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c}\,\frac{\partial \Pi}{\partial r},$$

so muß Π der Differentialgleichung genügen[2])

$$(3) \qquad \triangle \Pi = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\,\frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} + 4\pi\mu\sigma\,\frac{\partial \Pi}{\partial t},$$

wobei jetzt σ in elektromagnetischen Einheiten ausgedrückt ist.

Zur Lösung von (3) setzen wir für Π eine Wellenfunktion an, die sich in der z-Richtung fortpflanzt

$$(4) \qquad \Pi = u\,e^{2\pi i\left(\frac{t}{\tau} + \frac{z}{\lambda}\right)} = u\,e^{\frac{2\pi i}{\tau}\left(t + \frac{z}{v}\right)}.$$

Dabei ist die Amplitude u nur noch als Funktion von r zu betrachten, $\tau = \frac{1}{\nu}$ ist die Periode, ν die Frequenz, λ_i die Wellenlänge und v_i die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle im Medium i. Der Ansatz (4) erfüllt die Differentialgleichung (3), sofern u der Bedingung genügt, daß

$$(5) \qquad \frac{d^2 u}{d r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{d u}{d r} + (k^2 - \varkappa^2) u = 0,$$

worin wir abkürzend gesetzt haben

$$(6) \qquad \varkappa = \frac{2\pi}{\tau v}$$

$$(7) \qquad k^2 = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 - 4\pi\sigma\mu\left(\frac{2\pi}{\tau}\right) i.$$

Das Problem reduziert sich somit auf die Lösung der vier Differentialgleichungen (5). Die Lösungen müssen den Randbedingungen genügen, daß an jeder der drei Trennungsflächen die tangentiellen Komponenten von E und H stetig ineinander übergehen. Aus diesen Bedingungen folgt speziell[3]), daß die Phasengeschwindigkeit v_i in allen vier Medien notwendigerweise dieselbe sein muß. Der Wert von $\varkappa$ ist daher in allen Medien derselbe und wir können in Zukunft dessen Index weglassen.

Indem wir die Lösung von (5) für das Medium i mit u_i bezeichnen, erhalten wir daher die vier Differentialgleichungen

1) H. Hertz, Ges. Werke 2. Abhandl. 9. S. 165ff. 1888.

2) A. Sommerfeld, a. a. O. S. 239.

3) A. Sommerfeld, a. a. O. S. 242.

$$
(8)\qquad
\begin{cases}
r > C & \dfrac{d^2 u_1}{d r^2} + \dfrac{1}{r}\,\dfrac{d u_1}{d r} + (k_1^{\,2} - \varkappa^2) u = 0 \\[2mm]
C > r > B & \dfrac{d^2 u_2}{d r^2} + \dfrac{1}{r}\,\dfrac{d u_2}{d r} + (k_2^{\,2} - \varkappa^2) u = 0 \\[2mm]
B > r > A & \dfrac{d^2 u_3}{d r^2} + \dfrac{1}{r}\,\dfrac{d u_3}{d r} + (k_3^{\,2} - \varkappa^2) u = 0 \\[2mm]
A > r & \dfrac{d^2 u_4}{d r^2} + \dfrac{1}{r}\,\dfrac{d u_4}{d r} + (k_4^{\,2} - \varkappa^2) u = 0
\end{cases}
$$

mit den sechs Randbedingungen

$$
(9)\qquad
\begin{cases}
r = C \begin{cases} (k_1^{\,2} - \varkappa^2) u_1 = (k_2^{\,2} - \varkappa^2) u_2 & [E_{z_1} = E_{z_2}] \\ \dfrac{k_1^{\,2}}{\mu_1}\,\dfrac{d u_1}{d r} = \dfrac{k_2^{\,2}}{\mu_2}\,\dfrac{d u_2}{d r} & [H_{\varphi_1} = H_{\varphi_2}] \end{cases} \\[4mm]
r = B \begin{cases} (k_2^{\,2} - \varkappa^2) u_2 = (k_3^{\,2} - \varkappa^2) u_3 \\ \dfrac{k_2^{\,2}}{\mu_2}\,\dfrac{d u_2}{d r} = \dfrac{k_3^{\,2}}{\mu_3}\,\dfrac{d u_3}{d r} \end{cases} \\[4mm]
r = A \begin{cases} (k_3^{\,2} - \varkappa^2) u_3 = (k_4^{\,2} - \varkappa^2) u_4 \\ \dfrac{k_3^{\,2}}{\mu_3}\,\dfrac{d u_3}{d r} = \dfrac{k_4^{\,2}}{\mu_4}\,\dfrac{d u_4}{d r} \end{cases}
\end{cases}
$$

Die allgemeine Lösung der Gleichungen (8) führt[1]) auf Besselfunktionen J und K von erster und zweiter Art und nullter Ordnung. Mit Hilfe von Integrationskonstanten A_i und B_i lassen sich die Lösungen schreiben

$$
(10)\qquad u_i = A_i\, K\left(r\sqrt{k_i^{\,2} - \varkappa^2}\right) + B_i\, J\left(r\sqrt{k_i^{\,2} - \varkappa^2}\right) \qquad (i = 1, 2, 3, 4)
$$

$K(x)$ ist für alle x-Werte endlich, ausgenommen für $x = 0$, während $J(x)$ für alle endlichen Werte des Arguments endlich bleibt. Es ist manchmal praktisch, eine Funktion $Y(x)$ einzuführen, definiert als

$$
Y(x) = J(x) \ln \frac{2i}{\gamma} - K(x),
$$

wo γ die Eulersche Konstante ist. Da $Y(x)$ eine lineare Kombination von J und K ist, kann man die Lösungen (10) ebensowohl durch J und Y ausdrücken, vorausgesetzt, daß wir uns auf endliche Werte von x beschränken; denn für $x = \infty$ wird $Y(x)$ unendlich, während $K(x)$ endlich bleibt.

Für kleine Argumentwerte x merken wir uns die folgenden Annäherungen:

---

1) A. Sommerfeld, a. a. O. S. 249.

$$(11)\begin{cases} J(x) = 1, & Y(x) = \ln x, \quad K(x) = \ln \frac{2i}{\gamma x}, \\ \frac{d}{dx} J(x) = J'(x) = -\frac{x}{2}, & Y'(x) = \frac{1}{x}, \quad K'(x) = -\frac{1}{x}. \end{cases}$$

Für reelle Argumente sind $J(x)$, $J'(x)$, $Y(x)$ und $Y'(x)$ reell, nicht aber $K(x)$. Für rein imaginäre Argumente sind $J(x)$ und $K(x)$ reell, $J'(x)$ und $K'(x)$ rein imaginär. Wenn das Argument reell ist, werden wir uns daher vorteilhafter der Funktionen Y, wenn es rein imaginär ist, der Funktionen K bedienen.

Die Integrationskonstanten A_i und B_i müssen wir auf jeden Fall so bestimmen, daß die Amplitude u überall endlich bleibt. Da im äußeren Leiter das Argument unendlich wird, und da $J(\infty) = \infty$, so muß notwendigerweise $B_1 = 0$ gesetzt werden. Im inneren Leiter verschwindet für $r = 0$ das Argument x. Es muß hier daher der Koeffizient von $K(x)$ identisch verschwinden, daher $A_4 = 0$.

Setzen wir endlich

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= C^2 (k_1{}^2 - \varkappa^2) \\ \beta_1{}^2 &= C^2 (k_2{}^2 - \varkappa^2) \\ \beta_2{}^2 &= B^2 (k_2{}^2 - \varkappa^2) \\ \gamma_1{}^2 &= B^2 (k_3{}^2 - \varkappa^2) \\ \gamma_2{}^2 &= A^2 (k_3{}^2 - \varkappa^2) \\ \delta^2 &= A^2 (k_4{}^2 - \varkappa^2), \end{aligned}$$

so nehmen die Randbedingungen (9) die Form an

$$(12)\begin{cases} \alpha^2 A_1 K(\alpha) = \beta_1{}^2 [A_2 K(\beta_1) + B_2 J(\beta_1)] \\ k_1{}^2 \alpha A_1 K'(\alpha) = k_2{}^2 \beta_1 [A_2 K'(\beta_1) + B_2 J'(\beta_1)] \\ \beta_2^2 [A_2 K(\beta_2) + B_2 J(\beta_2)] = \gamma_1{}^2 [A_3 K(\gamma_1) + B_3 J(\gamma_1)] \\ k_2{}^2 \beta_2 [A_2 K'(\beta_2) + B_2 J'(\beta_2)] = k_3{}^2 \gamma_1 [A_3 K'(\gamma_1) + B_3 J'(\gamma_1)] \\ \gamma_2{}^2 [A_3 K(\gamma_2) + B_3 J(\gamma_2)] = \delta^2 B_4 J(\delta) \\ k_3{}^2 \gamma_2 [A_3 K'(\gamma_2) + B_3 J'(\gamma_2)] = k_4{}^2 \delta B_4 J'(\delta). \end{cases}$$

Dies stellt ein System von sechs linearen, homogenen Gleichungen für die sechs Integrationskonstanten A_1, A_2, B_2, A_3, B_3, B_4 dar. Damit eine nicht identisch verschwindende Lösung existiert, muß die Determinante des Systems verschwinden. Dies liefert eine Bedingungsgleichung für den Wert von $\varkappa$, und somit für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v. Durch eine

längere aber einfache Rechnung findet man für diese Bedingung

$$(13)\quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\beta_2 K(\beta_2)[\beta_1 k_1^2 K'(\alpha) J(\beta_1) - \alpha k_2^2 K(\alpha) J'(\beta_1)] + \beta_2 J(\beta_2)[\alpha k_2^2 K(\alpha) K'(\beta_1) - \beta_1 k_1^2 K'(\alpha) K(\beta_1)]}{k_2^2 K'(\beta_2)[\beta_1 k_1^2 K'(\alpha) J(\beta_1) - \alpha k_2^2 K(\alpha) J'(\beta_1)] + k_2^2 J'(\beta_2)[\alpha k_2^2 K(\alpha) K'(\beta_1) - \beta_1 k_1^2 K'(\alpha) K(\beta_1)]} \\ & = \frac{\gamma_1 K(\gamma_1)[\delta k_3^2 J'(\gamma_2) J(\delta) - \gamma_2 k_4^2 J(\gamma_2) J'(\delta)] + \gamma_1 J(\gamma_1)[\gamma_2 k_4^2 K(\gamma_2) J'(\delta)] - \delta k_3^2 K'(\gamma_2) J(\delta)]}{k_3^2 K'(\gamma_1)[\delta k_3^2 J'(\gamma_2) J(\delta) - \gamma_2 k_4^2 J(\gamma_2) J'(\delta)] + k_3^2 J'(\gamma_1)[\gamma_2 k_4^2 K(\gamma_2) J'(\delta) - \delta k_3^2 K'(\gamma_2) J(\delta)]} \end{aligned} \right.$$

Es ist natürlich nicht möglich, diese höchst komplizierte transzendente Gleichung explizite nach $\varkappa$ aufzulösen. Die Lösung ist nur möglich in einfacheren Fällen, speziell wenn wir die Medien als ideale Dielektrika ($\sigma = 0$, $\mu = 1$) oder ideale Leiter ($\varepsilon = 0$, $\sigma = \infty$) betrachten.

Setzen wir zunächst die beiden Medien 1 und 4 als ideale Leiter voraus, so werden k_1 und k_4 imaginär unendlich und die Gleichung (13) reduziert sich auf

$$(14)\quad \frac{\beta_2}{k_2^2}\left\{\frac{J(\beta_1) K(\beta_2) - K(\beta_1) J(\beta_2)}{J(\beta_1) K'(\beta_2) - K(\beta_1) J'(\beta_2)}\right\} = \frac{\gamma_1}{k_3^2}\left\{\frac{J(\gamma_1) K(\gamma_2) - K(\gamma_1) J(\gamma_2)}{J'(\gamma_1) K(\gamma_2) - K'(\gamma_1) J(\gamma_2)}\right\}.$$

Betrachten wir überdies auch die Dielektrika als ideale, so haben wir für die weitere Rechnung zwei Fälle zu unterscheiden, nämlich $\varepsilon_3 > \varepsilon_2$ und $\varepsilon_2 > \varepsilon_3$.

1. Fall: $\varepsilon_3 > \varepsilon_1$.

Dann ist $k_2^2 > \varkappa^2 > k_3^2$. β_1 und β_2 werden rein imaginär und γ_1 und γ_2 sind reell. Wir schreiben daher Gleichung (14) so, daß alle Funktionen ihren Argumenten entsprechend reelle Werte haben:

$$(15)\quad \frac{\beta_2}{k_2^2}\left\{\frac{J(\beta_1) K(\beta_2) - K(\beta_1) J(\beta_2)}{J(\beta_1) K'(\beta_2) - K(\beta_1) J'(\beta_2)}\right\} = \frac{\gamma_1}{k_3^2}\left\{\frac{J(\gamma_1) Y(\gamma_2) - Y(\gamma_1) J(\gamma_2)}{J'(\gamma_1) Y(\gamma_2) - Y'(\gamma_1) J(\gamma_2)}\right\}.$$

Um diese Gleichung zu lösen, bemerken wir, daß für solche Wellen, deren Wellenlänge groß ist im Vergleiche zu dem äußeren Radius C, die Argumente β_1, β_2, γ_1 und γ_2 sehr kleine Größen sein müssen. Wir können daher mit großer Genauigkeit Bessels Funktionen und deren Ableitungen durch die in (11) gegebenen Näherungen ersetzen. Gleichung (15) wird dann

$$\frac{\ln \frac{C}{B}}{k_2^2\left(-\frac{1}{\beta_2^2} + \frac{1}{2}\ln\frac{2i}{\gamma\beta_1}\right)} = \frac{\ln\frac{A}{B}}{k_3^2\left(-\frac{1}{2}\ln\gamma_2 - \frac{1}{\gamma_1^2}\right)}$$

Vernachlässigen wir weiter die Logarithmen im Nenner, was infolge der Kleinheit der β und γ erlaubt ist, und erinnern wir uns, daß

$$\frac{k_2^2}{k_3^2} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} \quad \text{und} \quad -\frac{\gamma_1^2}{\beta_2^2} = \frac{k_3^2 - \varkappa^2}{k_2^2 - \varkappa^2},$$

so erhalten wir die Lösung

$$\varkappa^2 = \frac{k_2^2\left(1 + \dfrac{\ln\frac{B}{A}}{\ln\frac{C}{B}}\right)}{\left(1 + \dfrac{\varepsilon_2 \ln\frac{B}{A}}{\varepsilon_3 \ln\frac{C}{B}}\right)}.$$

Infolge der Definition von $\varkappa^2$ und k_2^2 erhalten wir somit als Endresultat

$$v^2 = \frac{c^2}{\varepsilon_2\,\varepsilon_3}\left\{\frac{\varepsilon_3 \ln\frac{C}{B} + \varepsilon_2 \ln\frac{B}{A}}{\ln\frac{C}{B} + \ln\frac{B}{A}}\right\}. \tag{16}$$

2. Fall: $\varepsilon_2 > \varepsilon_3$.

Hier wird $k_3^2 > \varkappa^2 > k_2^2$. β_1 und β_2 sind nun reell, γ_1 und γ_2 rein imaginär. Gleichung (14) wird daher geschrieben

$$\frac{\beta_2}{k_2^2}\left\{\frac{J(\beta_1)\,Y(\beta_2) - Y(\beta_1)\,J(\beta_2)}{J(\beta_1)\,Y'(\beta_2) - Y(\beta_1)\,J'(\beta_2)}\right\} = \frac{\gamma_1}{k_3^2}\left\{\frac{J(\gamma_1)\,K(\gamma_2) - K(\gamma_1)\,J(\gamma_2)}{J'(\gamma_1)\,K(\gamma_2) - K'(\gamma_1)\,J(\gamma_2)}\right\}. \tag{17}$$

Indem man wieder die Kleinheit der Argumente berücksichtigt, geht das über in

$$\frac{\ln\frac{B}{C}}{k_2^2\left(\frac{1}{\beta_2^2} + \frac{1}{2}\ln\beta_1\right)} = \frac{\ln\frac{B}{A}}{k_3^2\left(-\frac{1}{2}\ln\frac{2i}{\gamma\,\gamma_2} + \frac{1}{\gamma_1^2}\right)}.$$

Bei Vernachlässigung der gleichen Glieder wie bevor, erhält man

$$\varkappa^2 = \frac{k_2^2\left(1 + \dfrac{\ln\frac{B}{A}}{\ln\frac{C}{B}}\right)}{\left(1 + \dfrac{\varepsilon_2 \ln\frac{B}{A}}{\varepsilon_3 \ln\frac{C}{B}}\right)},$$

so daß wiederum

(18) $$v^2 = \frac{c^2}{\varepsilon_2 \varepsilon_3} \left\{ \frac{\varepsilon_3 \ln \frac{C}{B} + \varepsilon_2 \ln \frac{B}{A}}{\ln \frac{C}{B} + \ln \frac{B}{A}} \right\}.$$

Dieses Resultat stimmt überein mit demjenigen (16) des ersten Falles. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit berechnet sich daher nach Formel (16), unabhängig, welche Dielektrizitätskonstante die größere ist.

Gleichung (16) gibt die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer elektrischen Welle in einem metallisch geschützten Kabel mit zwei Isolationsschichten. ε_3 ist die D.K. des inneren, ε_2 die des äußeren Isolators. A ist der Radius des inneren Drahtes, B und C die äußeren Radien des inneren bzw. äußeren Isolators. Die Formel gilt unter der Voraussetzung, daß die Leiter als nahezu ideal und die Isolatoren als reine Dielektrika betrachtet werden dürfen, und daß die Wellenlänge der Welle lang ist im Vergleiche zur Dicke des Kabels. Wie man sieht, ist unter diesen Voraussetzungen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit unabhängig von der Frequenz der Welle. Da die metallische Umhüllung als idealer Leiter betrachtet wird, braucht er sich nicht ins Unendliche zu erstrecken, wie für die theoretische Betrachtung der Einfachheit halber angenommen wurde, sondern kann aus einer sogar recht dünnen Schicht bestehen.

Besteht die Isolation nur aus einer einzigen homogenen Schicht, d. h. ist $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$, so geht die Formel über in $v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}$. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit entlang eines in ein Dielektrikum eingebetteten Drahtes ändert sich somit nicht, wenn der Isolator, statt bis ins Unendliche zu reichen, in beliebigem Abstande von einer metallischen, konzentrischen Hülle begrenzt wird.

Experimenteller Teil

Die experimentelle Prüfung der vorstehenden theoretischen Resultate wurde mit Hilfe einer Methode durchgeführt, die meines Wissens neu ist. Sie beruht auf der Möglichkeit, außerordentlich kleine Zeitintervalle mit Hilfe elektrischer Figuren zu messen.

Die Lichtenbergschen Figuren, die immer im Gase (Luft) entstehen, wenn ein elektromagnetischer Stromstoß von ge-

nügender Amplitude und Gradient am Ende eines Leiters reflektiert wird, wurden zuerst von P. O. Pedersen[1]) benutzt zur Messung kleiner Zeitintervalle. Seine ursprüngliche Methode, die vielen Unbestimmtheiten ausgesetzt ist, wurde von Heymans und Frank[2]) so abgeändert, daß sie nicht nur einfach gehandhabt werden kann, sondern auch zu leicht und genau reproduzierbaren Resultaten führt. Das Schaltungsschema ist in Fig. 1 gegeben.

S ist eine elektrostatische Maschine, *R* sind Widerstände, jeder ungefähr 20000 Ohm, *C* ist ein Kondensator mit einer Kapazität von ungefähr 0,003 Mikrofarad und *G* ist eine Fun-

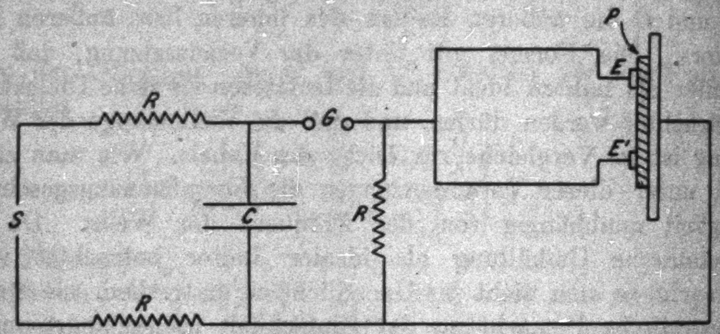


Fig. 1

kenstrecke. *E* und *E'* sind Kupferelektroden und *P* ist eine photographische Platte. Der Kondensator *C* wird langsam geladen, bis die Funkenstrecke *G* überschlägt. Dadurch wird ein Stromstoß erzeugt, der sich auf die beiden Leitungsdrähte gleichmäßig verteilt. In *E* und *E'* werden diese beiden Stromimpulse reflektiert und dabei bilden sich die Lichtenbergschen Figuren. Die Eigenschaften dieser Figuren lassen sich auf der gewöhnlichen photographischen Platte *P*, auf der die Elektroden in einem Dunkelraum aufliegen, nach dem Entwickeln sehr leicht studieren. Der Widerstand *R* ist so groß gewählt, daß die reflektierten Stromstöße so stark gedämpft werden, daß kein weiterer Stromstoß in *E* und *E'* eine Figur erzeugen kann. Die beiden um *E* und *E'* entstandenen Figuren

1) P. O. Pedersen, Ann. d. Phys. 69. S. 205. 1922.
2) P. Heymans and N. H. Frank, Phys. Rev. 25. S. 865. 1925.

treffen sich in einer sehr scharfen Trennungslinie. Sind die Längen l_1 und l_2 der beiden Stromwege gleich, so daß sich die Figuren genau gleichzeitig ausbilden, so liegt die Trennungslinie genau in der Mitte zwischen den beiden Elektroden, wie die Aufnahme Fig. 2, Taf. XII zeigt.

Wird nun in dem einen Stromzweige auf irgendeine Weise die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Stromstoßes verkleinert, so wird sich die entsprechende Lichtenbergfigur etwas später ausbilden, und die Trennungslinie verschiebt sich parallel in die Nähe dieser Elektrode. Dieser Effekt kann einfach kompensiert werden durch Verlängerung des Drahtes in dem andern Aste. Die Verlängerung, die nötig ist, um die Trennungslinie in die Mitte zwischen den Elektroden zurückzubringen, ist direkt ein Maß für die Geschwindigkeitsänderung im andern Ast, und man berechnet daraus leicht die neue Fortpflanzungsgeschwindigkeit.

Der Stromstoß, welcher die Figuren erzeugt, ist ein aperiodischer Vorgang, und es ist daher fraglich, ob solche Versuche geeignet sind, unsere im ersten Teil abgeleitete Formel für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit periodischer Vorgänge in Kabeln zu prüfen. Wir fanden jedoch, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Frequenz der Welle unabhängig ist, solange die Wellenlänge groß ist im Vergleich zum Kabeldurchmesser. Wir können uns daher den aperiodischen Stromstoß in ein Spektrum periodischer Schwingungen zerlegt denken, wie das mathematisch durch ein Fourierintegral geschieht. Aus einer Betrachung der Konstanten des Stromkreises folgern wir, daß es vernünftig ist anzunehmen, daß praktisch die gesamte Energie des Stromstoßes auf den langwelligen Teil des Spektrums fällt, in ein Gebiet, wo die Wellenlängen sehr groß sind, verglichen mit der Dicke des Kabels. Unsere Formel (16) sollte daher auch für solche aperiodischen Stromstöße gelten.

Daß dies tatsächlich der Fall ist, haben wir durch folgendes Experiment gezeigt: Der eine Stromzweig von der Länge l_1 wurde in ein einziges Dielektrikum eingebettet und gezeigt, daß die Methode fähig ist, die theoretischen Resultate von A. Sommerfeld zu bestätigen. Als Dielektrikum wurde Äthylalkohol, destilliertes Wasser und Methylalkohol

benutzt. Ist l_2 die Länge des andern Stromkreises, für welchen die Trennungslinie der beiden Figuren in die Mitte zwischen den Elektroden zurückgebracht wird, so sollte

$$\varepsilon = \left(\frac{l_2}{l_1} + 1\right)^2$$

den richtigen Wert der Dielektrizitätskonstanten ergeben. Daß dies tatsächlich der Fall ist, und daß die Methode somit brauchbar ist, zeigt die nachstehende Tabelle. Die nach obiger Formel berechneten D.K. stimmen innerhalb der Fehlergrenze unserer Methode von etwa 1 Proz. mit den Werten überein, die wir mit Hilfe einer Wellenlängenbestimmung einer periodischen Welle von etwa 3 m Wellenlänge in Luft für die betreffenden Dielektrika gefunden haben.

Substanz	l_1 in cm	Funkenlänge in mm	Temp. in °C	Neue Methode	Klass. Methode
Dest. Wasser	50	4,5	20	73,4	73,5
„ „	127	4,5	20	73,2	73,5
Äthylalkohol	50	4,5	20	26,6	26,5
„	50	3,0	20	26,6	26,5
„	127	4,5	20	26,2	26,5
„	127	3,0	20	26,3	26,5
Methylalkohol	50	4,5	20	31,4	31,2

Nach diesen Vorversuchen haben wir unsere Formel (16) durch folgende drei Versuchreihen geprüft:

1. Als innerer Leiter wurde Kupferdraht von 0,326 cm Durchmesser benutzt. Dieser Draht war durch eine konzentrische Schicht von Kautschuk isoliert. Wir benutzten fünf verschiedene Schichtdicken, entsprechend den Totaldurchmessern der isolierten Kabel von 0,794, 0,952, 1,1, 1,27 und 1,43 cm. Diese Kabel wurden koaxial in einen Kupferzylinder eingespannt, mit einem innern Radius von 2,06 cm. Die Koaxialität wurde erreicht mittels dünner Ebonitringe zwischen dem Kupferzylinder und dem Kabel. Das äußere Dielektrikum war in dieser ersten Versuchreihe Luft. Die Länge des Kabels betrug 2 Meter.

2. Die zweite Versuchsreihe war von der ersten nur insofern verschieden, daß der äußere Kupferzylinder einen größeren inneren Radius von 2,54 cm hatte.

3. In der dritten Reihe wurde das gleiche äußere Kupfer-

rohr wie in der ersten Reihe benutzt. Die Länge des Kabels war nur 1 Meter. Dagegen war das ganze Kabel in Äthylalkohol eingetaucht, so daß das äußere Dielektrikum durch diese Flüssigkeit gebildet wird.

Die Dielektrizitätskonstante des benutzten Kautschuks wurde durch eine der gebräuchlichen Methoden bestimmt. Leider ergab sie sich nicht in allen Fällen gleich, sondern schwankte zwischen 4,10 und 4,32. Für die Berechnung wurde der Mittelwert 4,2 einer großen Reihe von Messungen an verschiedenen Probestücken benutzt.

Die Resultate der drei Versuchsreihen geben wir in den folgenden drei Tabellen.

Tabelle 1

A cm	B cm	C cm	ε_2	ε_3	$\frac{v}{c}$ ber. nach (16)	$\frac{v}{c}$ beob.
0,163	0,397	1,03	1,00	4,2	0,80	0,82
0,163	0,476	1,03	1,00	4,2	0,75	0,77
0,163	0,555	1,03	1,00	4,2	0,71	0,71
0,163	0,635	1,03	1,00	4,2	0,66	0,67
0,163	0,715	1,03	1,00	4,2	0,63	0,65

Tabelle 2

A cm	B cm	C cm	ε_2	ε_3	$\frac{v}{c}$ ber. nach (16)	$\frac{v}{c}$ beob.
0,163	0,397	1,27	1,00	4,2	0,92	0,90
0,163	0,476	1,27	1,00	4,2	0,88	0,87
0,163	0,555	1,27	1,00	4,2	0,85	0,84
0,163	0,635	1,27	1,00	4,2	0,81	0,81
0,163	0,715	1,27	1,00	4,2	0,79	0,78

Tabelle 3

A cm	B cm	C cm	ε_2	ε_3	$\frac{v}{c}$ ber. nach (16)	$\frac{v}{c}$ beob.
0,163	0,397	1,03	26,5	4,2	0,37	0,37
0,163	0,476	1,03	26,5	4,2	0,40	0,40
0,163	0,555	1,03	26,5	4,2	0,42	0,41
0,163	0,635	1,03	26,5	4,2	0,43	0,44
0,163	0,715	1,03	26,5	4,2	0,45	0,46

Die beobachteten Werte bestätigen die theoretische Formel mit einer Genauigkeit von durchschnittlich 2 Proz. Die wichtigste Fehlerquelle ist in der Veränderlichkeit der D.K. des Kautschuks zu suchen. Die Veränderlichkeit dieses Wertes war etwa 4 Proz. und da er in die Formel als $\sqrt{2}$ eingeht, muß das eine Schwankung von 2 Proz. für v/c hervorrufen. Eine andere Fehlerquelle liegt in der möglichen Abweichung der Versuchsanordnung von der axialen Symmetrie des Kabels. Obwohl die Zentrierung mit größter Sorgfalt ausgeführt wurde, wäre es nicht ausgeschlossen, daß sie nicht überall mit der wünschenswerten Genauigkeit erreicht werden konnte. Welchen Einfluß kleine Abweichungen von der Koaxialität auf das Endresultat haben können, läßt sich allerdings schwer abschätzen, da die Lösung der Differentialgleichungen in diesem Falle praktisch unmöglich scheint.

Zusammenfassung

Es wird die Fortpflanzungsgeschwindigkeit elektrischer Wellen in metallisch geschützten Kabeln mit zwei Isolationsschichten aus der Maxwellschen Theorie berechnet. Es wird eine neue Methode gegeben, mit Hilfe der Lichtenbergschen Figuren die Fortpflanzungsgeschwindigkeit elektrischer Störungen entlang Drähten, und damit indirekt Dielektrizitätskonstanten, zu messen. Die Messungen bestätigen innerhalb der Fehlergrenze die theoretische Formel.

Mass. Institute of Technology Physics Department Cambridge, Mass. U. S. A.

(Eingegangen 24. April 1928)

5. *Die Kathodophosphoreszenz von Erbium in Calciumoxyd;*
von Sven Fagerberg

(Hierzu Tafel XIII)

Der Zweck der vorliegenden Arbeit war, zunächst zu untersuchen, ob die Emmissionsbanden der Phosphoreszenzspektren der seltenen Erden in schmalere Linien aufgelöst werden können, sowie sodann die Wellenlängen dieser Linien oder Banden mit Hilfe eines Spektralapparats mit verhältnismäßig großer Dispersion möglichst genau zu bestimmen. Die Lösung dieser beiden Aufgaben ist ja die erste Bedingung dafür, daß der späteren Erforschung des Mechanismus der Phosphoreszenzemission Erfolg beschieden sein kann.

Diesbezügliche Vorversuche wurden schon im Frühlung 1926 begonnen, aber erst im Sommer und Herbst 1927 erhielt ich nach Beschaffung genügend lichtstarker Spektralapparate mit hinreichendem Auflösungsvermögen die ersten anwendbaren Resultate.

Die Phosphoreszenzspektren der seltenen Erden sind in zahlreichen Untersuchungen behandelt worden. Insbesondere Urbain[1]) hat dieses Gebiet systematisch bearbeitet; da es sich ihm jedoch nur darum handelte, die Erden durch ihre Phosphoreszenzspektren zu identifizieren, besaß eine genauere Bestimmung der Wellenlängen für ihn geringeres Interesse. Erst in allerletzter Zeit wurden genauere Wellenlängenbestimmungen von Tomaschek[2]) in Angriff genommen; er studierte mit Hilfe eines größeren Spektrographen die Photophosporeszenz einiger Samariumphosphore. Die Phosphoreszenz von Erbium in CaO ist nur von Urbain genauer studiert worden. Er fand einige 20 Linien und Banden.

Bei der vorliegenden Untersuchung erfolgte die Exzitation der Phosphoreszenz durch Kathodenstrahlen, die in einer Siegbahnschen Glühkathodenröntgenröhre von geringfügig

1) G. Urbain, Ann. chim. phys. 18. S. 222. 1909.

2) R. Tomaschek, Ann. d. Phys. 84. S. 329. 1927; 84. S. 1047. 1927.

abgeändertem Typus hergestellt wurden. Die Röhre bestand also aus einem durchbohrten Messingwürfel mit je einem Konus zur Befestigung des Kathoden- und Antikathodenschliffes (vgl. Fig. 1, ferner Siegbahn).[1]) An zwei benachbarten Seitenflächen des Würfels wurden kreisrunde Löcher (A_1 und A_2) mit 20 mm Durchmesser gebohrt, in die Quarzfenster mit Pizein luftdicht eingekittet wurden. Durch das

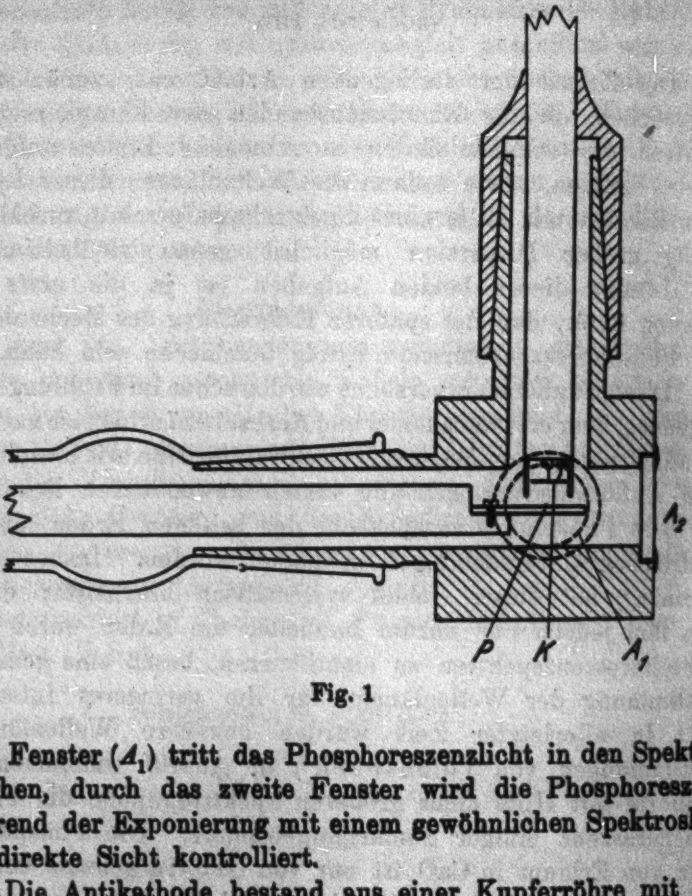


Fig. 1

eine Fenster (A_1) tritt das Phosphoreszenzlicht in den Spektrographen, durch das zweite Fenster wird die Phosphoreszenz während der Exponierung mit einem gewöhnlichen Spektroskop für direkte Sicht kontrolliert.

Die Antikathode bestand aus einer Kupferröhre mit der gebräuchlichen Wasserkühlung. Am Ende dieser Kupferröhre wurde eine rechteckige Wolframplatte (P) befestigt, auf welche die phosphoreszierende Substanz ausgebreitet wurde. Diese wurde also von dem Elektronenstrom von der Glühkathode (K)

1) M. Siegbahn, The Spectroscopy of X-Rays, Oxford 1925.

getroffen. Letztere bestand aus einer Platinspirale, die mit einem Belag von Bariumoxyd bedeckt war. Diese Tieftemperaturkathode arbeitete sehr zufriedenstellend und war außerdem auch insofern vorteilhaft, als sie nur sehr schwaches rotes Licht emittierte, das keinerlei Einfluß auf die Spektralphotographien ausübte. Betreffs sonstiger Angaben bezüglich der Konstruktion von Kathode und Röhre, sowie der Anordnung von Kühlung usw. verweise ich auf Siegbahn.[1]) Die Röhre wurde mit einer Gaedeschen Molekularpumpe (von Leybolds Nachfolger) evakuiert, vor der eine Ölpumpe angeschlossen war. Als Hochspannungsquelle diente ein Gleichstromgenerator von 5000 Volt, der bis zu 200 mA liefern konnte.

Während der Aufnahmen wurde die Röhrenspannung bei 5000 Volt konstant gehalten, wobei die Elektronenstromstärke in der Röhre nur einige Zehntel mA betrug. Die Kühlung der Wolframplatte erwies sich dabei als hinreichend.

Der benutzte Erbiumphosphor wurde aus gereinigtem CaO und $Er_2(SO_4)_3$ hergestellt. Das Erbiumsulfat war ein von Auer v. Welsbach hergestelltes Präparat, was für seine Reinheit bürgt. Eine geringe Menge Erbiumsulfat wurde in destilliertem Wasser gelöst, zu dieser Lösung wurde Calciumoxyd gesetzt in einer Menge entsprechend 99 Proz. CaO auf 1 Proz. Er_2O_3. Der wäßrige Brei wurde umgerührt, alle Klümpchen sorgfältig zerdrückt, hierauf das Wasser abgedunstet und der Rückstand vor dem Gasgebläse etwa 15 Minuten lang kräftig ausgeglüht.

Wenn eine geringe Menge dieses Präparats in dünner Schicht auf der Wolframantikathode ausgebreitet und einem Kathodenstrahlenbombardement ausgesetzt wird, erhält man eine lichtgrüne Phosphoreszenz von mäßiger Stärke. Im Spektroskop beobachtet man einige mehr oder weniger diffuse Linien und Banden in Gelb und Grün.

Wenn man jedoch die Stromstärke durch die Röhre durch Verstärkung des Glühstroms erhöht, gerät das Präparat in starkes Glühen und beginnt Gase abzugeben. Die Entladung geht daher in Gasentladung unter Lichtemission über. (Besonders deutlich sieht man die charakteristischen Bandengruppen von Stickstoff). Während dieser Entladungsphase fällt die Temperatur des Präparats auf die Antikathode, die

1) M. Siegbahn, a. a. O.

Gase werden abgesaugt und die Röhre wirkt wieder als Glühkathodenröhre. Allmählich gerät das Präparat wieder ins Glühen und der ganze Verlauf wiederholt sich neuerdings von neuem. (Es sei bemerkt, daß in die Hochspannungsleitung ein Hochspannungswiderstand eingeschaltet war, der die Stromstärke durch die Röhre unter allen Bedingungen auf etwa 100 mA begrenzte). Nachdem sich dieses Spiel mehrere Minuten wiederholt hat, hört die Gasabgabe des Präparats auf, die Verhältnisse werde stabil und der Phosphor kommt in intensive Weißglut. In dieser Weise erhält man leicht Temperaturen in der Nähe des Schmelzpunkts von Calciumoxyd.

Wenn man das Präparat in dieser Weise eine Zeitlang ausglüht, dann erkalten läßt und es nachdem einem schwachen Kathodenstrahlenbombardement (einige Zehntel mA) aussetzt, findet man, daß nicht nur die Schärfe der Phosphoreszenzlinien bedeutend verbessert, sondern auch die Intensität erhöht worden ist. In einigen Banden, die vor dem Ausglühen vollkommen strukturlos erschienen, kann man schon im gewöhnlichen Spektroskop eine feine Struktur feststellen. Bei der im folgenden behandelten Untersuchung an den photographisch registrierten Spektren wurde der Phosphor vor jeder Exponierung derart im Hochvakuum ausgeglüht.

Der phosphoreszierende Brennfleck wurde mit Hilfe einer Kondensorlinse auf den Spalt des Spektralapparats projiziert.

Anfänglich wurde mit einem Gitterspektrographen gearbeitet, der aus einem 1 m Konkavgitter bestand, das an der Peripherie einer Kreisscheibe von 1 m Durchmesser montiert war. An derselben Peripherie wurde auch der Spalt derart angebracht, daß das einfallende Strahlenbündel einen Winkel von etwa 45° mit der Gitterfläche bildete. Das Spektrum war also auf derselben Peripherie fokusiert und wurde auf einem längs der Kante der Kreisscheibe befestigten Filmstreifen photographiert. Diese Versuchsanordnung war sehr zufriedenstellend, mußte jedoch verlassen werden, da es nicht möglich war, panchromatische Filme von genügender Empfindlichkeit für die schwachen Phosphoreszenzspektren zu erhalten. Fig. 2, Taf. XIII ist eine Wiedergabe eines mit diesem Spektrographen aufgenommenen Phosphoreszenzspektrums (Bezugsspektrum Fe-Bogen).

Nach Beschaffung eines größeren Quarzspektrographen

(Hilger *E* 1) wurden die Versuche wieder aufgenommen. Mit diesem Apparat erhält man, besonders im Violett, bedeutend größere Dispersion als mit dem obigen Gitterspektrographen und daher weitergehendere Auflösung der Phosphoreszenzbanden. Das hohe Auflösungsvermögen des Spektralapparats ist gerade bei diesen Phosphoreszenzspektren sehr von Vorteil, da die auftretenden Gruppen von Emissionslinien im allgemeinen einen verhältnismäßig starken kontinuierlichen Hintergrund haben, in dem bei geringerem Auflösungsvermögen alle schwachen Linien vollständig verschwinden.

Mit diesem Spektrographen konnte der Spektralbereich 6700 bis 3300 ÅE. auf *einer* 25 cm langen Platte photographiert werden. Dabei verwendete ich „Ilford Special-Rapid-Panchromatic"-Platten, die für meine Zwecke genügend empfindlich waren. Bei Untersuchung des Wellenlängenbereichs 3300—2400 ÅE. (mit einer anderen Einstellung des Prismas) benutzte ich „Wellington Anti-Screen"-Platten. Zur Erlangung eines Bezugsspektrums diente ein Fe-Bogen als Lichtquelle. Mit Hilfe eines Hartmanndiaphragmas mit 3 Öffnungen wurden auf jeder Platte 2 Fe-Spektren, eines vor und eines nach der Phosphoreszenzexponierung, aufgenommen. Die Belichtungsdauer bei Aufnahme des Phosphoreszenzspektrums betrug 15 bis 20 Stunden. In Fig. 3, Taf. XIII ist eine Aufnahme mit diesem Quarzspektrographen wiedergegeben.

Insbesondere zwei Umstände bei diesen Aufnahmen können systematische Fehler bei Vermessung der Platten verursachen, nämlich einerseits eine Verschiebung der Mitte der Phosphoreszenzlinien (die Messungen werden ja an den Mitten der Linien ausgeführt) aus dem Grunde, daß es unmöglich ist, bei den Phosporeszenzaufnahmen mit derselben Spaltbreite wie bei Aufnahme des Bezugsspektrums zu arbeiten, andererseits dadurch bedingte Veränderungen, daß der Brechungsindex des Prismas während der langdauernden Belichtungen mit der Zimmertemperatur variiert.

Wegen der Intensitätsverhältnisse ist es notwendig, bei den Phosphoreszenzaufnahmen mit einer solchen Spaltbreite zu arbeiten, daß die Breite des Spaltbildes auf der Platte (für rein monochromatisches Licht) von derselben Größenordnung ist wie die wirkliche Breite der Phosphoreszenzlinien

die sich ja über ein gewisses Wellenlängengebiet (2 bis 3 ÅE.) erstrecken. Andererseits kann man natürlich ein so linienreiches Spektrum wie das des Fe-Bogens nicht mit derselben Spaltbreite aufnehmen. Da nun der Spalt des Quarzspektrographen umsymmetrisch ist, wird die Mitte einer mit großer Spaltbreite aufgenommenen Linie nicht an derselben Stelle liegen wie die Mitte dieser Linie bei Aufnahme mit einer geringeren Spaltbreite. Wenn die Breite der Spaltbilder in diesen beiden Fällen d_1 bzw. d_2 ist, beträgt die Verschiebung der Linienmitten $\frac{d_1 - d_2}{2}$. Die Lage der Phosphoreszenzlinien muß also mit diesem Betrag korrigiert werden. Wenn man hingegen die Kanten einer Bande mißt, muß die eine Kante mit $d_2/2$ in einer gewissen Richtung korrigiert werden und die andere (der beweglichen Spaltschneide entsprechende Kante) mit $d_1 - \frac{d_2}{2}$ in entgegengesetzter Richtung.

Zwecks Bestimmung der Werte d_1 und d_2 wurde folgendermaßen verfahren. Ein Fe-Spektrum wurde mit sehr großer Spaltbreite aufgenommen und die Einstellung auf der Spalttrommel abgelesen. Die Linienbreite wurde an mehreren, verhältnismäßig alleinliegenden starken Linien über den ganzen Spektralbereich gemessen; sie war innerhalb der Fehlergrenzen konstant. Nach Ablesung der Einstellung der Spalttrommel bei geschlossenem Spalt konnte nun die Spalttrommelskala in Linienbreiten auf den Platten evaluiert werden. Daraus ließ sich nun mit Kenntnis der Spalteinstellungen bei den Aufnahmen des Phosphoreszenz- bzw. Bezugsspektrums und bei geschlossenem Spalt die Korrektion $\frac{d_1 - d_2}{2}$ mit genügender Genauigkeit berechnen. Diese Korrektion betrug z. B. bei einer gewissen Platte 0,026 mm, was in ÅE. ausgedrückt entspricht:

1,25 ÅE.	bei	6500 ÅE.
0,61 „	„	5000 „
0,33 „	„	4000 „
0,16 „	„	3250 „

Die Verschiebung des Spektrums auf Grund von Temperaturveränderungen verursacht gewisse Schwierigkeiten, da die Spektrallinien nicht so scharf werden, als sie sein würden,

wenn man die Temperatur während einer Aufnahme vollkommen konstant halten könnte. Bei unserem Phosphoreszenzspektrum sind jedoch die Linien so breit, daß die Ergebnisse durch die Verschiebungen auf Grund der Temperaturvariationen nicht nennenswert verschlechtert wurden. Immerhin ist es notwendig, bei Vermessung der Platten für diese Verschiebung zu korrigieren.

Die Lage der Phosphoreszenzlinien entspricht offenbar einer Durchschnittstemperatur, die im allgemeinen von der Temperatur des Prismas bei Aufnahme des Bezugsspektrums verschieden ist. Um diese Temperaturverschiebung näher zu studieren, wurden (mit Hilfe des Hartmann-Diaphragmas) zwei Fe-Spektren nebeneinander aufgenommen, und zwar das eine bei normaler Zimmertemperatur, das andere nach Senkung der Zimmertemperatur um etwa 7°. Die Linienverschiebungen wurden gemessen und ihre Abhängigkeit von der Wellenlänge in ein Diagramm eingetragen. Wenn man annimmt, daß die Verschiebung für jede Wellenlänge eine lineare Funktion der Temperaturdifferenz ist, — eine Annahme, die in diesem Falle gewiß berechtigt ist, da es sich um kleine Temperaturdifferenzen und geringfügige Verschiebungen handelt, kann man mit Hilfe des obenerwähnten Diagramms eine Schar ähnlicher Kurven für beliebige Temperaturdifferenzen im betreffenden 7°-Intervall zeichnen. Man braucht also nur die durch die Temperaturvariation verursachte Verschiebung einer einzigen Wellenlänge auf einer gewissen Platte zu kennen, um die entsprechende Korrektionskurve für diese Platte zeichnen zu können.

Diese Verschiebung einer Phosphoreszenzlinie wurde nun folgenderweise bestimmt. Es wurde ein Phosphoreszenzspektrum mit kurzer Belichtungsdauer (ungefähr 45 Min.) aufgenommen. Bei dieser Belichtungsdauer war die stärkste Linie genügend exponiert um gut meßbar zu sein. Bei dieser kurzen Belichtungsdauer ist die durch Temperaturvariationen verursachte Verschiebung sehr klein; die wirkliche Lage der stärksten Linie im Verhältnis zum Eisenspektrum kann daher als Mittelwert aus ihren Lagen im Verhältnis zu den unmittelbar vor bzw. nach der Phosphoreszenzaufnahme photographierten Eisenspektren berechnet werden. Wenn man nun die wirkliche Lage der Linie und ihre Lage auf einer dauerbelichteten

Platte kennt, kann man die durch die Temperaturveränderungen verursachte Verschiebung berechnen und eine Korrektionskurve für diese Platte in der oben angeführten Weise berechnen. Die Korrektionen betrugen z. B. bei Platte P · Ca + Er2

1,17 ÅE.	bei	6000	ÅE.
0,66 „	„	5000	„
0,32 „	„	4000	„
0,14 „	„	3200	„

In der folgenden Tab. 1 sind die erhaltenen Meßergebnisse angeführt. Die erste Kolumne enthält die gemessenen, für Spaltbreiteveränderung und Temperaturvariation korrigierten Wellenlängenwerte. Unter J ist die geschätzte Intensität in der Intensitätsskala 0 bis 10 angeführt. Der in ÅE. ausgedrückte Fehler der Bestimmungen ist mit ε bezeichnet; die beiläufige Linienbreite in ÅE. wird in den Fällen, in denen sie leicht meßbar war, unter d angeführt. Die nächste Kolumne enthält verschiedene Charakteristiken (δ = diffus, σ = scharf). Das Zeichen * bedeutet, daß die Linie im Komparator nur sehr schwierig zu beobachten war, so daß der Fehler in λ möglicherweise größer ist als der unter ε angegebene Betrag. In der nächsten Kolumne sind die auf das Vakuum reduzierten Wellenzahlen $\nu = \frac{1}{\lambda_{\text{Vak.}}} \cdot 10^8$ angeführt. Die letzte Kolumne enthält die von Urbain erhaltenen Wellenlängen, in Mikromillimeter angegeben.

Bei Schätzung des Fehlers ε wurde folgenderweise verfahren. Jede Linie wurde fünfmal gemessen. ε ist der mit 2 dividierte Unterschied zwischen dem kleinsten und dem größten Wert. Dabei muß man jedoch vorsichtig sein, da es bei einer so geringen Anzahl von Messungen sehr leicht eintreffen kann, daß die Fehleramplitude durch Zufall einen extrem kleinen Wert hat. Mit einiger Übung kann man sich jedoch schon unmittelbar aus dem Aussehen der Linien eine gewisse Auffassung darüber bilden, welche Genauigkeit tatsächlich erreicht werden kann, und kann sich bei Schätzung des Fehlers danach richten.

Die Messungen der Linienbreiten d sind natürlich nur approximativ. Es wird damit nur beabsichtigt eine Vorstellung vom Aussehen der Linien zu geben.

Tabelle 1

λ ÅE.	J	± ε ÅE.	d ÅE.	Anmerkungen	ν	Urbain λ μμ
6759,8	0	2,4		δ *	14789,2	
6727,8	0	2,4		δ *	14859,6	
6690,7	0	2,4		δ *	14942,0	
6671,7	0	2,4		*	14984,6	
6654,6	2	1,2		breit } kaum	15023,1	
6639,1	2	1,2		breit } getrennt	15058,2	
6619,4	2	1,2		} durch kont. Bande	15103,0	
6608,0	1	0,5		verbunden	15129,0	
6597,1	0	0,5			15153,9	
6549,1	2	0,7		breit	15265,1	
6535,0	0	1,0			15298,0	
6521,9	1	1,0			15328,8	
6482,2	0	1,2		δ	15422,6	
6251,4	1	0,5			15992,0	
6236,8	0	2,0		*	16029,5	
6191,5	1	0,5			16146,6	
5749,3— —5706,6	0	2,0 2,0		} Bande	17388,7— —17518,6	
5689,4	0	2,0		δ	17571,8	
5661,8	0	2,0		δ	17657,3	
5639,4	2	2,0	9,0		17727,6	} 563—559,5
5624,5	3	1,0	5,0		17774,3	Mittelstark. δ
5606,0	5	0,6	8,0		17833,2	Max. bei 560,3
5592,4	4	0,6	4,0		17876,5	
5560,5	1	1,0		δ	17979,0	
5553,8	0	1,0		δ *	18000,6	
5546,6	2	0,2		σ	18023,9	}
5538,9	5	0,2	3,0	σ	18049,2	
5531,0	3	0,3	2,6	σ	18075,0	
5521,6	0	0,4		*	18105,6	
5515,3	5	0,2	3,1	σ	18126,4	555—549,5
5508,9	3	0,3	2,0	σ	18147,4	Schwach
5503,6	5	0,2	2,3	σ	18164,8	
5498,4	3	0,4			18182,1	
5492,8	0	1,0		*	18200,5	
5486,2	0	1,0		*	18222,5	
5477,9	5	0,2	2,4	σ	18250,2	
5466,7— —5445,3	0	3,0 3,0		} * Bande	18287,6— —18359,5	
5424,0	0	2,0		δδ	18431,4	
5394,1	0	2,0		δδ	18533,8	
5370,4— —5345,4	0	2,0 2,0		} Bande	18615,4— —18702,4	
5338,5	5	0,2	2,7	σ	18726,8	}
5319,6	3	0,3	2,7	σ	18793,2	535,5—527
5303,9	3	0,3	2,7	σ	18848,8	Mittelstark.
5292,7	1	0,3		σ	18888,8	Maxima bei
5283,7	4	0,2	2,7	σ	18920,7	533 und 528
5276,2	4	0,2	2,7	σ	18947,7	

Tabelle 1 (Fortsetzung)

λ ÅE.	J	±ε ÅE.	d ÅE.	Anmerkungen	ν	Urbain λ μμ
5254,9——5239,8	1	0,5 0,8		Bande. Scharfe Grenze auf der langwelligen Seite	19024,6——19079,5	
5224,2	1	0,8		σ	19136,8	
5215,7	1	0,8		σ	19167,7	
5209,1	0	0,8		σ	19191,8	
5193,8	1	0,4		σ	19250,2	
4864,8	0	2,0		* Durch schwache Bande verbund.	20550,1	
4843,8	0	2,0		*	20639,3	
4821,7——4807,6	0	2,0 2,0		Bande	20733,9——20794,6	
4789,0	1	0,3		σ	20875,2	478,5 Schwach
4770,3	4	0,2	2,6	σ	20957,3	476 Mittelstark
4759,7	4	0,2	2,3	σ	21003,9	
4744,2	3	0,2	2,9	σ	21072,6	473 Schwach
4735,2	5	0,2	2,4	Kont. Schwärzung auf der langwell. Seite, 2,2 Å breit	21112,8	
4710,7	4	0,3	2,7	Kont. Schwärzung auf der langwell. Seite, 3,2 Å breit	21222,2	469 Mittelstark. Verwaschen. Mit der folgend. Bande verbund.
4686,9	1	0,3	7,9		21330,0	
4671,4	1	0,6		Maxima in kont. Bande	21400,9	467 Mittelstark. Verwaschen
4664,8	2	0,6			21431,4	
4658,6	1	0,6			21459,5	
4646,3	2	0,5	7,0		21516,7	
4632,4	1	0,4		Maxima in schmaler Bande	21581,3	462 Schwach
4628,5	2	0,4			21599,8	
4618,5	2	0,4	5,2		21646,1	
4603,4	1	0,4		Durch kont. Bande verbunden	21717,0	459 Stark
4596,9	3	0,4	4,5		21747,7	
4591,9	0	0,4		*	21771,6	
4585,6	0	0,3			21801,5	
4576,1	4	0,3	9,3		21846,4	
4539,1	5	0,2	3,0		22024,9	455 Stark
4531,3	5	0,2	3,0		22062,4	
4522,5——4506,1	3	0,5 0,5		Bande	22105,4——22186,1	452 Mittelstark
4489,3	1	0,5	6,7	δ	22268,9	
4471,4	0	0,5	5,0	δ	22358,0	
4455,6——4444,7	3	0,4 0,4		Bande	22437,3——22492,6	446 Ziemlich stark
4359,7	1	0,2	3,0	σ	22930,8	
4352,2	1	0,2	3,0	σ	22970,2	
4344,2——4329,1	0	0,7 0,7		Bande	23012,6——23092,8	
4137,8	1	0,8	9,7	δ	24160,8	
4124,5	0	0,8		δ	24238,7	

Tabelle 1 (Fortsetzung)

λ ÅE.	J	± s ÅE.	d ÅE.	Anmerkungen	ν	Urbain λ μμ
4117,5	0	0,8		δ	24279,5	
4090,0	0	0,3			24442,9	
4085,5	3	0,2	3,0		24470,2	409,5 Mittelstark
4079,0	0	0,3		*	24508,9	
4075,0	10	0,2	2,5		24532,8	408,5 Sehr stark
4066,7	2	0,2	3,1		24583,2	} 406 Schwach
4062,6	0	0,2			24607,6	
4057,3	3	0,2	1,8		24640,1	
4051,1	1	0,2	2,9		24677,9	
4046,0	2	0,2			24708,6	} 404,5 Schwach
4043,7	2	0,2			24723,1	
4039,2	2	0,2	1,6		24750,3	
4034,9	8	0,2	2,0		24777,1	404 Stark
4030,2	0	0,2			24806,0	
4021,7	1	0,4	2,5		24858,3	
4016,8	1	0,4	2,7		24888,7	
4012,9	1	0,4	2,2		24912,8	
3671,9	0	0,7	8,0	δδ	27226,1	
3660,1	0	1,0	8,0	* δδ	27313,9	
3645,1	0	0,7	8,0	δδ	27426,0	
3630,7	0	0,7	8,0	δδ	27534,9	
3615,8	0	0,7	8,0	δδ	27648,4	
3602,0	1	0,4	4,2	δ	27754,4	
3598,0	1	0,2			27785,0	
3576,3	1	0,2		σ	27954,0	
3551,6	1	0,3	4,7	δ	28148,5	
3402,8	0	0,4	2,3	* δ	29379,4	
3394,9	1	0,1	1,1	σ	29447,4	
3382,7	1	0,1	1,5	σ	29553,2	
3374,7	1	0,1	1,4	σ	29623,3	
3371,1	2	0,1	1,1	σ	29655,5	
3366,7	0	0,2		σ	29693,8	
3364,1	0	0,2			29717,3	
3340,7	0	0,5		* δ	29924,8	
3336,9	1	0,2	1,3	σ	29959,3	
3243,4–	2	0,3		} Bande	30822,8–	
–3239,0		0,3			–30865,1	
3236,3	1	0,4		δ	30890,4	
3231,6	1	0,4		δ	30935,5	
3225,6–	} 4	0,2		Kante } Bande	30992,6–	
–3222,2–		0,5		Minimum	–31025,9–	
–3219,3		0,2		Kante	–31053,2	
3206,7	1	0,3	2,2	δ	31176,0	
3199,2	4	0,1	1,2	σ	31249,1	
3195,3	4	0,1	1,2	σ	31286,4	
3192,2	2	0,1	1,3		31317,6	
3188,2	1	0,2	1,3		31356,5	
3181,6	4	0,1	1,3		31421,3	
3167,3	1	0,3		σ	31563,1	
3164,6	0	0,3		σ	31590,4	

Über den allgemeinen Charakter des Phosphoreszenzspektrums von Erbium kann folgendes angeführt werden. Das Spektrum besteht aus mehreren charakteristischen Liniengruppen, die über das ganze Wellenlängengebiet von 6800—3100 ÅE. mit ziemlich großen Zwischenräumen verteilt sind. Außerdem liegen gewisse, mehr oder weniger scharf begrenzte Banden vor. Es ist wenig wahrscheinlich, daß sich dieses Spektrum in Oszillationsserien zerlegen läßt, wie sie Vegard bei der Phosphoreszenz von festem Stickstoff gefunden hat. Es läßt sich vielleicht eher sagen, daß unser Spektrum Multiplettencharakter besitzt.

Es ist schließlich noch zu erwähnen, daß auch das benutzte Calciumoxyd auf Phosphoreszenz untersucht wurde. Es gibt jedoch nur eine sehr breite und diffuse kontinuierliche Bande zwischen 4100 und 3600 ÅE., die natürlich auch auf den oben behandelten Phosphoreszenzaufnahmen auftritt.

Es sei mir hier gestattet, meinem hochverehrten Lehrer, dem Präfekten des hiesigen Instituts, Hrn. Prof. Dr. Manne Siegbahn, meinen besten Dank auszusprechen für die Anregung zu dieser Arbeit sowie für die vorzügliche Apparatur, die er mir zur Verfügung stellte, und das Interesse, mit dem er meine Arbeit immer förderte.

Das bei dieser Arbeit verwendete Erbiumpräparat entstammte einer Sammlung von Erdpräparaten, welche Hr. Hofrat Freiherr Auer von Welsbach die Liebenswürdigkeit gehabt hat, Hrn. Prof. Siegbahn für spektroskopische Zwecke zur Verfügung zu stellen.

Upsala, Physikalisches Institut der Universität, Mai 1928.

(Eingegangen 18. Mai 1928)

6. *Über die kleinsten Elektrizitätsträger in Gasen; von Heinrich Schilling*

Vor einiger Zeit erschien in diesen Annalen in Anlehnung an meine gleichnamige Arbeit[1]) eine Veröffentlichung von Hrn. L. B. Loeb[2]), zu der im Interesse der Sache etwas bemerkt werden muß. Hr. Loeb geht, wie seine Äußerungen zeigen, bei seiner Beurteilung meines genannten Beitrages von Gesichtspunkten aus, die sehr verschieden sind von den in meiner Arbeit maßgebend gewesenen, und er kann dabei auf eine sehr große Zahl eigener Veröffentlichungen in verschiedenen Zeitschriften Bezug nehmen. Es möchte hierdurch meine eigene erste Arbeit auf diesem Gebiete in einem falschen Lichte erscheinen, zumal es der weitaus größten Leserzahl der Annalen unmöglich sein wird, alle Arbeiten von Hrn. Loeb im einzelnen zu prüfen. Es muß daher gesagt werden — was beim Lesen meiner Arbeit, die allerdings etwas umfangreich ist, auch erkennbar sein dürfte —, daß für mich allein nur der Gesichtspunkt maßgebend war, durch möglichst reine Versuche einer Lösung der noch immer offenen Fragen der Trägergrößen in reinen Gasen und auch der Wirkung von Fernkräften zwischen Trägern und neutralen Gasmolekülen näher zu kommen. Da hierzu das Äußerste angestrebt wurde, was in bezug auf Reinheit der Versuchsbedingungen mit heutigen Mitteln überhaupt möglich schien, zugleich auch die Meßmethoden einer vergleichenden Nachprüfung und einer dabei als nötig erkannten Auswahl unterzogen wurden, so dürfte meine Arbeit jedenfalls einen bestimmten Fortschritt bedeuten, dessen Wesentliches in entsprechend bestimmter Weise hinzustellen war. Außerdem war, eben weil die Arbeit gründlich gemeint war, auch der Vergleich mit den Ergebnissen anderer Arbeiten unerläßlich. Ich gab jedoch lediglich einen Überblick, auch von Hrn. Loebs Veröffent-

1) H. Schilling, Ann. d. Phys. 83. S. 23. 1927.
2) L. B. Loeb, Ann. d. Phys. 84. S. 689. 1927.

lichungen, in historischer Reihenfolge mit besonderer Rücksicht auf die Ergebnisse meiner Beobachtungen. „Angriffe", die meinem Standpunkte vollkommen fern liegen, haben nicht stattgefunden; ebensowenig ist etwas „verfochten" worden. Vielleicht hätte ich es mehr bedauern sollen, daß meine Ergebnisse bestimmter, eindeutiger, durch mehr Kontrollen und Hilfsmessungen verbürgt und daher auch strenger deutbar sind, als die des Hrn. Loeb; dies ist allerdings versäumt worden.

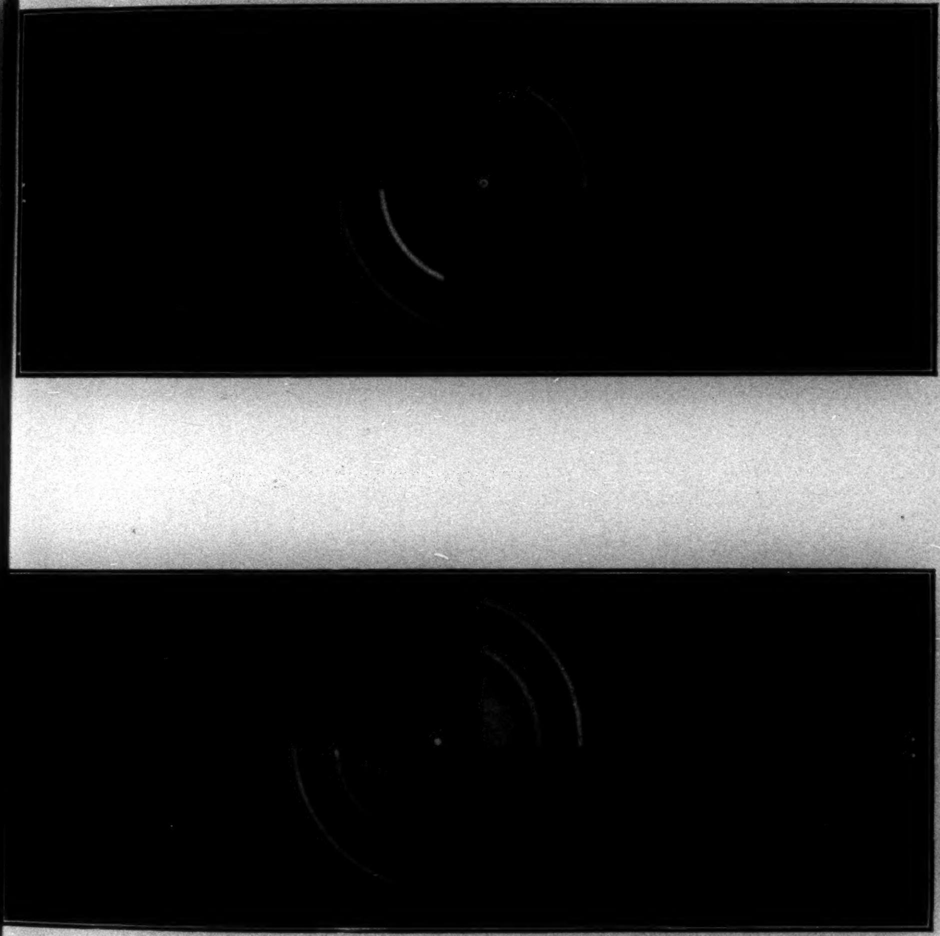
Bemerkenswert ist, daß Hr. Loeb jetzt in der Frage nach dem Absolutwert der Wanderungsgeschwindigkeit der kleinsten Elektrizitätsträger (eine Frage, die nach seinen bisherigen Arbeiten trotz ihrer großen Anzahl, oder wohl besser gerade wegen ihrer großen Anzahl, völlig verwirrt erschien) selbst eine Klärung zu bringen sucht. Er hält nun an dem früher von ihm gefundenen Absolutwert von 2,18 cm sec^{-1}/Volt cm^{-1} für die Wanderungsgeschwindigkeit der negativen Träger[1]) fest, und alle anderen in späteren Arbeiten von ihm angegebenen niedrigeren Werte[2]) sollen nun nur Relativwerte sein. Es wäre sehr vorteilhaft gewesen, wenn Hr. Loeb sich von vornherein mit dieser Bestimmtheit ausgedrückt hätte, obgleich dann aus seinen Veröffentlichungen Zweifeln gegenüber immer noch nicht zu sehen gewesen wäre, warum jener Wert den Vorzug verdient.

Hr. Loeb glaubt im besonderen, daß die von mir gefundenen größten Beweglichkeiten von 2,45 bzw. 2,0 cm-sec^{-1}/Volt cm^{-1} für die negativen bzw. positiven Träger nicht die Folge von mir erreichter größerer Gasreinheit sind, sondern hält es für wahrscheinlicher, daß das von mir benutzte hohe Hilfsfeld von 20—100 Volt diese Werte nur vortäuschte. Ich muß diese Deutung auf das Entschiedenste zurückweisen. Ein solcher Mangel in der Apparatanordnung war bei mir völlig ausgeschlossen, wovon jeder aufmerksame Leser meiner Arbeit, auf Grund der im besonderen Hinblick auf diese Frage angestellten Beobachtungen (vgl. Abschn. 11, S. 31 a. a. O.) sich leicht selbst überzeugen kann.

Heidelberg, im Mai 1928.

1) L. B. Loeb, Journ. Frankl. Inst. S. 537. Okt. 1923.
2) L. B. Loeb, Proc. Nat. Acad. Sc. 10. S. 351. 1924; 12. S. 35. 1926.

(Eingegangen am 11. Mai 1928)



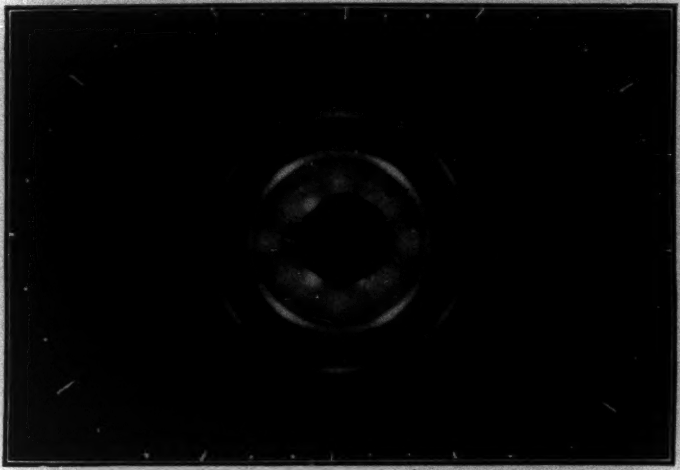
a

b

Debye-Scherrerdiagramme von bindemittelfreiem Bromsilber (a) und von Schichten photographischer Trockenplatten (b) mit Mo-Strahlung (30 mA, 55 kV, Zirkonfilter) auf zylindrischem Film (Radius 52,1 mm). Positive in natürlicher Größe.

Fig. 1

H. H. Meyer



a →

b ↑

Streifendiagramme von photographischen Schichten mit Mo-Strahlung (30 mA, 50 kV, Zirkonfilter) auf ebenem Film (Abstand Präparat–Film = 44,6 mm). Schichtennormale in beiden Fällen ⊥ Röntgenstrahl, bei a horizontal, bei b vertikal (s. Pfeile). Positive in natürlicher Größe.

Fig. 4

H. H. Meyer

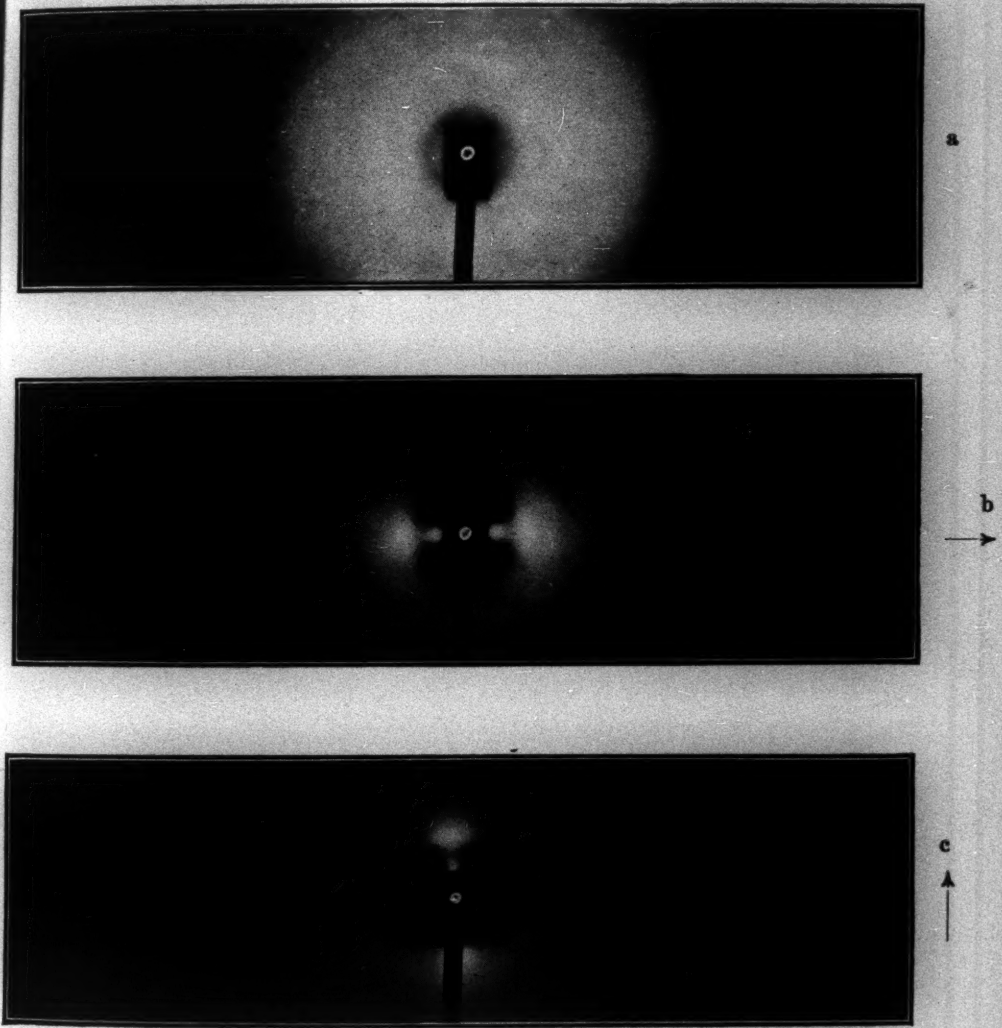


Diagramme von trockenen Gelatineschichten mit Cu-Strahlung (20 mA, 25 kV, Nickelfilter) auf zylindrischem Film (Radius 57 mm). Schichtennormale bei a || Röntgenstrahl, bei b und c ⊥ Röntgenstrahl, bei b horizontal, bei c vertikal (s. Pfeile). Positive in natürlicher Größe.

Fig. 10

H. H. Meyer

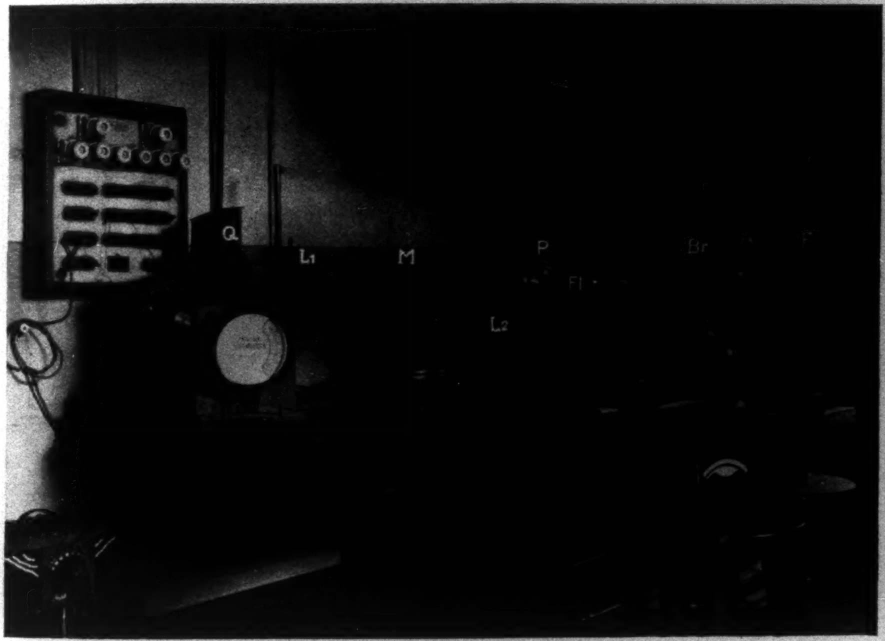


Fig. 2

G. Szivessy u. M. Richartz

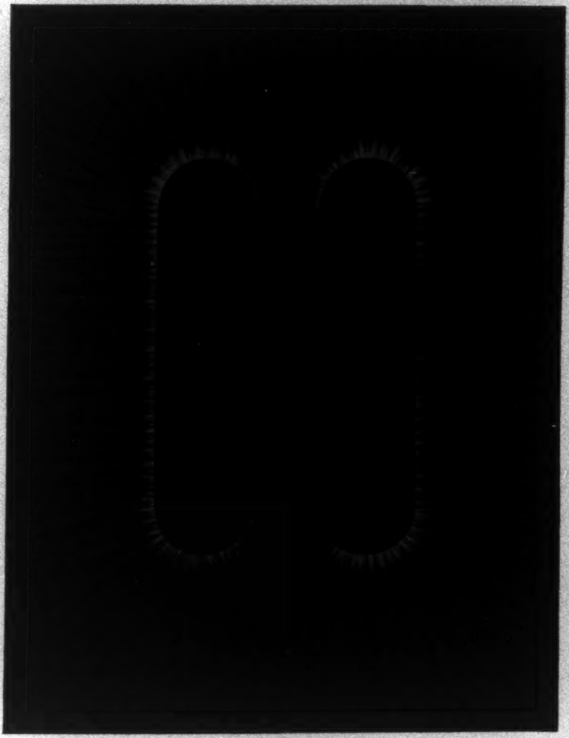


Fig. 2

N. H. Frank

Fig. 2

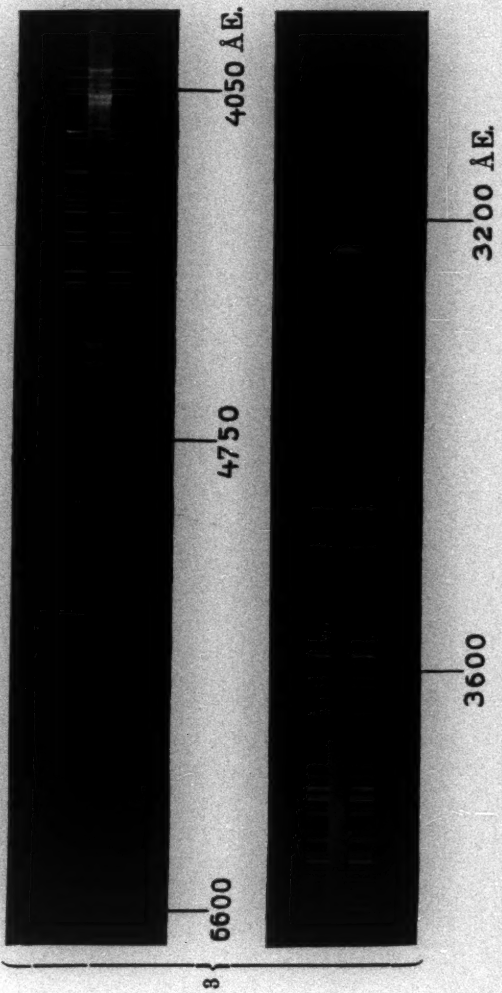


Fig. 3

S. Fagerberg

1928 № 12
ANNALEN DER PHYSIK
VIERTE FOLGE. BAND 86

1. *Über das Intensitätsverhältnis der Hauptseriendubletts der Alkalimetalle;*

von Hans Jakob

(Gekürzte Breslauer Dissertation)
(Hierzu Tafel XIV und XV)

§ 1. Einleitung

Nach *klassischen* Vorstellungen ist die *Gesamthelligkeit*[1]) einer Spektrallinie bei unendlich dünner Emissionsschicht proportional der Zahl $\mathfrak{N}$ der emittierenden und absorbierenden Zentren (Dispersionselektronen). Dabei wird Proportionalität zwischen Emissions- und Absorptionsvermögen, also z. B. Temperaturstrahlung, vorausgesetzt. Unter diesen Voraussetzungen ist das *Helligkeitsverhältnis zweier eng benachbarter Komponenten* eines *Dubletts*

(1) $$\frac{J_2}{J_1} = \frac{\mathfrak{N}_2}{\mathfrak{N}_1}.$$

Andererseits ist nach der Bohrschen *Quantentheorie* die Intensität J einer Spektrallinie von der Frequenz ν gegeben durch den Ansatz

(2) $$J = N_m \cdot a_{m \to n} \cdot h\nu.$$

Dabei ist N_m die Anzahl der Atome im m-ten Zustande, $a_{m \to n}$ die Übergangswahrscheinlichkeit (Ü.W.) eines Atoms vom m-ten nach dem n-ten Zustande. Im statistischen Gleichgewicht, z. B. also bei Temperaturanregung von der Temperatur T, ist

(3) $$N_m = G_m \cdot e^{-\frac{h\nu}{kT}}$$

(G_m = Quantengewicht des m-ten Zustandes). Hiernach drückt sich das *Intensitätsverhältnis* (I.V.) der *Komponenten* eines *Dubletts* durch die Formel

$$\frac{J_2}{J_1} = \frac{G_{m_2}}{G_{m_1}} \cdot \frac{e^{-\frac{h\nu_2}{kT}}}{e^{-\frac{h\nu_1}{k \cdot T}}} \cdot \frac{a_{m_2 \to n}}{a_{m_1 \to n}} \cdot \frac{h\nu_2}{h\nu_1}$$

1) Vgl. R. Ladenburg u. F. Reiche, Ann. d. Phys. **42**. S. 181. 1913; s. a. Compt. rend. **157**. S. 279. 1913.

aus. Sind die Dublettkomponenten eng benachbart, so geht diese Gleichung über in

$$\frac{J_2}{J_1} = \frac{G_{m_2}}{G_{m_1}} \cdot \frac{a_{m_2 \to n}}{a_{m_1 \to n}} . \tag{4}$$

Gemäß der von Ladenburg[1]) gegebenen Beziehung zwischen der Ü.W. und der Zahl $\mathfrak{N}_{m \to n}$ der Dispersionselektronen, die dem Übergange $m \to n$ zugeordnet sind,

$$\mathfrak{N}_{n \to m} = N_n \cdot \frac{G_m}{G_n} a_{m \to n} \cdot \frac{m c^3}{8 \pi e^2 \nu^2}$$

ist die Gleichung (4) mit der Gleichung (1) identisch.

Man kann also zur Feststellung des I.V. von Spektrallinien auch jede Untersuchungsmethode benutzen, die das Verhältnis der Zahlen der Dispersionselektronen zu messen gestattet.

Für die Messung der Zahl $\mathfrak{N}$ kommen drei Methoden in Frage, nämlich

a) Messungen der *anomalen Dispersion* in der Nachbarschaft der Spektrallinie,

b) Messungen der *magnetischen Drehung der Polarisationsebene*,

c) *Absorptionsmessungen.*

An den *D*-Linien des Na-Dampfes lagen zu Beginn dieser Arbeit bereits zahlreiche Messungen des I.V. bzw. des Verhältnisses $\mathfrak{N}_2/\mathfrak{N}_1$ nach allen drei Methoden vor.

Aus *Dispersionsmessungen* fand Roschdestwenski[2]) für das I.V. von $D_2 : D_1$ Werte zwischen 1,95 und 2,09.

Aus Messungen der *magnetischen Drehung der Polarisationsebene* an den *D*-Linien erhielten H. Senftleben[3]) an Flammen und R. Minkowski[4]) im Dampfrohr für $\mathfrak{N}_2/\mathfrak{N}_1$ innerhalb einer Fehlergrenze von etwa 6 Proz. den Wert 2,0.

Ebenso ergaben photographisch-photometrische *Absorptionsmessungen* von Füchtbauer und Schell[5]) den Wert 2,03. Die Abweichung von 1,5 Proz. gegen 2,0 liegt innerhalb der Meßfehler.

An direkten Messungen von J_2/J_1, also *Emissions*messungen,

---

1) R. Ladenburg, Ztschr. f. Phys. 4. S. 451. 1921.

2) D. Roschdestwenski, Ann. d. Phys. 39. S. 307. 1915.

3) H. Senftleben, Ann. d. Phys. 47. S. 949. 1915.

4) R. Minkowski, Ann. d. Phys. 66. S. 206. 1921.

5) Chr. Füchtbauer u. K. Schell, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 15. S. 974. 1913.

lagen am ersten Na-Gliede außer den von G. L. Gouy[1]) mit Spektralphotometer angestellten nur noch solche von Ladenburg[2]) vor, die nach photographisch-photometrischer Methode ausgeführt sind. Beide Autoren erhielten bei sehr schwach gefärbten Flammen innerhalb der Meßfehler den Wert 2,0, der mit zunehmender Flammenfärbung bis auf ungefähr $\sqrt{2} = 1,41$ herabsinkt.

Messungen von $\mathfrak{N}_2/\mathfrak{N}_1$ an *höheren Hauptserien* (H.S.)-*Gliedern* wurden nach der Methode der *anomalen Dispersion* von Bevan[3]) und Roschdestwenski[4]), nach der *Absorptionsmethode* von Füchtbauer und Mitarbeitern[5])[6]) ausgeführt. Bevan erhielt für das 2. Rb-Glied ($1s - 3p$) den Wert 3,0; die Ergebnisse von Roschdestwenski an K, Rb und Cs sind in der Tabelle zusammengestellt.

Serienb.	K	Rb	Cs
$1s - 2p$	1,98	2,02	2,05
$1s - 3p$	2,05	2,58	4,07
$1s - 4p$		2,90	7,4
$1s - 5p$			9,1

Diese Zahlen zeigen bei Rb und Cs ein systematisches Anwachsen des I.V. mit der Gliednummer, bei K dagegen nicht. Für K wird das Ergebnis gefestigt durch neue Messungen von Prokofiev[7]), der als Mittelwert aus zahlreichen Untersuchungen den Betrag 2,04 erhielt.

Auf Grund der genannten Absorptionsmessungen an Cs und Rb, bei denen sich mit der Gliednummer systematisch ansteigende Werte von J_2/J_1 zeigten, vermuteten Füchtbauer und Bartels (a. a. O.) folgendes Seriengesetz:

„Für entsprechende Dubletts aller Alkalihauptserien stehen die Intensitäten der langwelligen und der kurzwelligen Linie

1) G. L. Gouy, Ann. chim. phys. (5) 18. S. 5. 1879.

2) R. Ladenburg, Ztschr. f. Phys. 4. S. 469. 1921.

3) P. V. Bevan, Proc. Roy. Soc. 85. S. 66. 1911.

4) D. Roschdestwenski, Transact. opt. Inst. Petrograd 2. Nr. 13. S. 1–14. 1921.

5) Chr. Füchtbauer und W. Hofmann, Ann. d. Phys. 43. S. 96. 1913.

6) Chr. Füchtbauer und H. Bartels, Ztschr. f Phys. 4. S. 337. 1921.

7) A. Prokofiev, Phil. Mag. 7. S. 1010. 1927.

im nämlichen Verhältnis, und zwar ist dieses Verhältnis für das Paar $1s - mp$ gleich $1:m$."

Neue Versuche von Füchtbauer und Meier[1]) ergaben für das 3. Cs-Glied einen Wert von $\approx 4{,}0$.

Wegen der voneinander abweichenden Ergebnisse der im vorangehenden genannten Beobachter wurde mir die Aufgabe gestellt, das I.V. höherer Glieder der H.S. der Alkalielemente durch *Emissions*messungen nach der photographisch-photometrischen Methode zu ermitteln; direkte Emissionsmessungen an höheren H.S.-Gliedern waren zu Beginn meiner Untersuchungen nicht vorhanden.[2])

Während des Verlaufes meiner Arbeit erschienen die umfangreichen bekannten Untersuchungen der Utrechter Schule über die Intensitätsverhältnisse der Serienlinien und ihre Gesetzmäßigkeiten; speziell stellten Burger und Dorgelo[3]) in Verallgemeinerung der Ergebnisse von Dorgelo[4]), Bartels[5]) u. a. eine Reihe von Intensitätsregeln auf. Ihre Intensitätsregel III fordert, daß bei *unterteiltem Anfangs-* und *einfachem Endniveau* das I.V. der Komponenten eines Multipletts durch das Verhältnis der Quantengewichte der *Ausgangsniveaus* gegeben sei, also bei der H.S. der Alkalien den von der Laufzahl unabhängigen Wert 2 : 1 habe.[6])

Eine gewisse Bestätigung dieser Regel liefern die genannten Versuche am 1. H.S.-Gliede des Na. Messungen an höheren Gliedern führten jedoch zu untereinander nicht übereinstimmenden Ergebnissen. Dorgelo (a. a. O.) fand am 2. Cs-Gliede den Wert 1,8; Frerichs[7]) am 2. K-Gliede 2,0; Oudt[8])

1) Chr. Füchtbauer u. Meier, Phys. Ztschr. 27. S. 853. 1926.

2) Abgesehen von einer Versuchsreihe von Gouy (a. a. O.), auf Grund deren er für das I.V. der Komponenten des 2. Rb.–H.S.-Dubletts den Wert 2,9 extrapolierte.

3) H. C. Burger und H. B. Dorgelo, Ztschr. f. Phys. 23. S. 258. 1924.

4) H. B. Dorgelo, Diss. Utrecht, 1921.

5) H. Bartels, Ztschr. f. Phys. 26. S. 756. 1925.

6) Aus den Messungen der Aufspaltung im Zeemaneffekt innerhalb der Hauptserien der Alkalien (Back, Diss. Tübingen, 1921) geht hervor, daß das Gewichtsverhältnis der p-Niveaus sich mit der Hauptquantenzahl nicht ändert.

7) R. Frerichs, Ztschr. f. Phys. 31. S. 305. 1925.

8) F. W. Oudt, Ztschr. f. Phys. 33. S. 656. 1925.

am 2. und 3. Rb-Gliede durchweg 2,0; am 2. Cs-Gliede im elektrischen Lichtbogen den nämlichen Wert, in der Knallgasflamme dagegen Werte zwischen 2:1 und 5:1. Erste eigene Versuche[1]) führten am 2. H.S.-Gliede von K, Rb, Cs zu einer Bestätigung der Regel III, spätere genauere Versuche lieferten jedoch wesentlich andere Ergebnisse,[2]) von denen hiernach ausführlich die Rede sein wird.[3])

Auf Grund von Gleichung (4) bedeutet der Inhalt der Regel III Unabhängigkeit des Verhältnisses der Ü.W. $\frac{a_{m_2 \to n}}{a_{m_1 \to n}}$ von der *Hauptquantenzahl* und darüber hinaus Unabhängigkeit der Ü.W. der einzelnen Komponenten von der sie bestimmenden *inneren* Quantenzahl. Beide Resultate sind auch theoretisch begründet worden.[4])

Die oben besprochenen Ergebnisse der Dispersions- und Absorptionsversuche an den höheren H.S.-Gliedern stehen also im krassen Widerspruch zu den Aussagen der Regeln III, aber die angeführten Emissionsmessungen erlaubten noch keine Entscheidung. Die vorliegende Arbeit soll weiteres Material zur Klärung der Frage beibringen.

§ 2. Gleichzeitige Messung des Intensitätsverhältnisses und der Linienabsorption

Bei den Messungen des I.V. von H.S.-Gliedern in *Emission* liegt eine prinzipielle Schwierigkeit vor, die auch allgemein erkannt und betont worden ist: Infolge der Absorption der Strahlung der untersuchten Linien durch die unangeregten Dampfatome in der Lichtquelle selbst, die für die beiden Komponenten entsprechend ihrem verschiedenen Emissionsvermögen verschieden ist, wird das I.V. verzerrt und zwar verkleinert im Verhältnis zu seinem wahren Werte $(I.V.)_\infty$ bei „unendlich geringer" Zentrenzahl. Nur für dieses $(I.V.)_\infty$ haben aber die von Ladenburg und Reiche (a. a. O.) aufgestellte Gesetzmäßigkeit und der Quantenansatz Gültigkeit. Als Lichtquelle

1) H. Jakob, Naturwissenschaften 13. S. 906. 1925.

2) Vgl. H. Kohn u. H. Jakob, Phys. Ztschr. 27. S. 819. 1926.

3) Daselbst werden auch die Versuche von A. Filippov (Ztschr. f. Phys. 26. S. 477. 1926; 42. S. 495. 1927) diskutiert, die während des Verlaufs meiner Untersuchungen erschienen.

4) A. Sommerfeld u. W. Heisenberg, Ztschr. f. Phys. 11. S. 131. 1921; W. Heisenberg, Ztschr. f. Phys. 31. S. 617. 1926.

kann daher nur eine solche in Betracht kommen, die durch eine äußerst geringe Dampfdichte und Schichtdicke der Forderung „unendlich geringer“ Zentrenzahl möglichst nahe kommt. Ob diese Bedingung wirklich erfüllt ist, läßt sich, wie sich im Laufe der Untersuchungen zeigte, nicht ohne weiteres sagen. Auch bei den Versuchen von Filippov (a. a. O.) ist noch kein eigentlicher Beweis hierfür erbracht. Es mußte deshalb ein besonderes Kriterium hierfür gefunden werden. Dieses bietet sich durch *Messung der Linienabsorption* (L.A) nach der zuerst von Gouy (a. a. O.) durchgeführten Methode.

Nach Ladenburg und Reiche (a. a. O.) versteht man unter L.A. die Gesamtabsorption, die das Licht einer Spektrallinie erfährt, das von einem dem absorbierenden Strahler völlig gleichen Strahler ausgeht, also in unserem Falle die Absorption der untersuchten Flamme für das Licht der Linien, die von einer der ersten Flamme völlig gleichen Lichtquelle emittiert werden. Man bestimmt die L.A. durch Messung des Helligkeits*zuwachses* der untersuchten Spektrallinien bei Verdoppelung der leuchtenden Dampfschicht. Denn die Helligkeit $\bar{I}$ bei doppelter Dampfschicht ist gegeben durch die Gleichung

$$\bar{I} = I + I(1 - A_L)$$

oder

$$\frac{\bar{I}}{I} = k = 2 - A_L .$$

Die Größe $\bar{I}/I$ wird mit k bezeichnet. Gouy (a. a. O.) hat diese Größe bereits vor etwa 50 Jahren in einer grundlegenden Arbeit: „Recherches photometriques sur les flammes colorées“ an einer Reihe von Alkalien und Erdalkalien in Abhängigkeit von der Linienhelligkeit I durch subjektive Photometrie gemessen. Dabei hat er in fast allen untersuchten Fällen einen sehr ähnlichen Verlauf für k als Funktion von I erhalten, so daß dem Resultat wohl eine gewisse Allgemeingültigkeit zugeschrieben werden kann. Der k-Wert fällt von einem dem Werte 2,0 angenäherten Betrage (bei „unendlich dünnen“ Flammen) mit wachsender Zentrenzahl (also zunehmender Helligkeit) ziemlich schnell ab und nähert sich rasch einem unteren Grenzwert von ungefähr $\sqrt{2}$ (1,41); das entspricht einer L.A. von etwa 59 Proz. Der Funktionsverlauf $k = f(I)$ ist beispielsweise bei der D_1-Linie derart, daß die Helligkeit im

Verhältnis 1 : 25 zunimmt, während der k-Wert von 2,0 auf 1,41 abfällt. Die Zentrenzahl ändert sich in dem betrachteten Intervall der k-Werte etwa wie 1 : 75. Aus der $k = f(I)$-Kurve hat Gouy unter Voraussetzung der Vertauschbarkeit von Dampfdichte und Schichtdicke eine Kurve zwischen der Helligkeit I und der Zentrenzahl $\mathfrak{N}$ abgeleitet. Unter der genannten Voraussetzung ist:

$$\frac{I_{2l}}{I_l} = k = \frac{I_{2d}}{I_d}$$

(l = Schichtdicke, d = Dampfdichte).

$$I_{2d} = I_d \cdot k_d \,.$$

Setzt man nun nach Gouy bei $k = 1{,}9$ willkürlich $I = 1$ und $d = 1$, so folgt

$$\begin{aligned} I_{d=2} &= I_{d=1} \cdot k_{d=1} = 1{,}9 \\ I_{d=4} &= I_{d=2} \cdot k_{d=2} = 1{,}9 \cdot k_{d=2} \\ &= 1{,}9 \cdot k_{I=1,9} \,. \end{aligned}$$

Den Wert von k bei $I = 1{,}9$ kann man aus der Kurve, die k als Funktion von I darstellt, entnehmen und so I für $d = 4$ auswerten. Man erhält in dieser Weise aus der gemessenen Beziehung zwischen k und I die Werte von d als Funktion von I, und, da d proportional $\mathfrak{N}$ ist, I (Relativwerte) als Funktion von $\mathfrak{N}$. Aus den beiden Funktionen

$$k = f(I) \quad \text{und} \quad I = g(\mathfrak{N})$$

kann man nun einen Zusammenhang zwischen k und $\mathfrak{N}$, also eine Funktion $k = \varphi(\mathfrak{N})$ herstellen. So ist es prinzipiell möglich, aus je zwei gemessenen k-Werten das Verhältnis der Teilchenzahlen, die zu diesen k-Werten gehören, graphisch zu ermitteln.

Ladenburg und Reiche haben versucht, die von Gouy experimentell gefundene Abhängigkeit der L.A. von der Helligkeit bzw. der Zentrenzahl theoretisch abzuleiten. Die L.A. in Abhängigkeit von der Teilchenzahl [$k = \varphi(\mathfrak{N})$] wurde ausgerechnet erstens für den Fall, daß die Frequenzabhängigkeit des Emissions- und Absorptionsvermögens der klassischen (Drude-Voigtschen) Dispersionstheorie entspricht; zweitens für den Fall, daß die genannte Abhängigkeit durch die Rayleighsche Funktion, die der Bewegung der Dampfmoleküle Rechnung trägt, gegeben ist.[1]) Für kleine Dampfdichten und

1) Vgl. R. Ladenburg u. F. Reiche, Sitzber. d. Schles. Ges. f. vaterl. Kultur, Sitzg. v. 24. Febr. 1914; s. a. Compt. rend. 158. S. 1788. 1914.

somit geringe Helligkeiten schließen sich die beobachteten Werte der der Rayleighschen Funktion folgenden, für große Helligkeiten aber der aus der Dispersionstheorie berechneten Kurve gut an. Bei der Berechnung der Helligkeit I der Spektrallinie in Abhängigkeit von der Zentrenzahl $\mathfrak{N}$ [$I = g(\mathfrak{N})$] wurde die Gesamtabsorption, die ein kontinuierliches Spektrum innerhalb des Bereiches der Spektrallinie erfährt, ebenfalls unter Voraussetzung von Rayleighscher oder Dispersionsverteilung in der Linie, gewonnen, außerdem wurde, wie dies z. B. im Falle der Temperaturstrahlung gilt, Proportionalität zwischen Emissions- und Absorptionsvermögen angenommen. Hierbei ergaben sich Gesetzmäßigkeiten, die ebenfalls den Gouyschen Ergebnissen entsprechen: nämlich daß bei *geringer* Zentrenzahl die Helligkeit I der Zentrenzahl $\mathfrak{N}$ *proportional* ist, bei *großer* Zentrenzahl dagegen *proportional der Wurzel* aus der Zentrenzahl und der Dämpfung ν'. In ihrem zweiten Teile wurde diese Gesetzmäßigkeit durch Messungen von H. Senftleben (a. a. O.) bestätigt, der *gleichzeitig* die Flammenhelligkeit und die Zahl der Emissionszentren an Na-Flammen bestimmte. Aus dem Wurzelgesetz folgt, daß im Grenzfalle hoher Zentrenzahlen — wenigstens im Falle der Dispersionsverteilung — das allmählich immer mehr absinkende I.V. der Dublettkomponenten gleich der *Wurzel* aus dem *wahren Wert* wird. Vorausgesetzt wird hierbei, daß die Dämpfung für beide Komponenten gleich ist. Bei den D-Linien in der Bunsenflamme hat sich das Gesetz bestätigt.

Auf Grund der diskutierten Zusammenhänge kann man also bei gleichzeitiger Messung des I.V. und der L.A. an beiden Komponenten eines Dubletts erstens Aufschluß darüber erhalten, ob hohe, mittlere oder kleine Zentrenzahlen vorliegen. Eventuell erlaubt die $k = \varphi(\mathfrak{N})$-Kurve, mit Hilfe der gemessenen k-Werte direkt das Verhältnis der Teilchenzahlen und damit das wahre Intensitätsverhältnis $(\text{I.V.})_w$ zu bestimmen. Infolge des flachen Verlaufes der genannten Kurve ist aber diese Bestimmung sehr ungenau, und nur bei mittleren k-Werten verspricht sie einigen Erfolg.

§ 3. Die Flamme und ihre Eigenschaften

Wie eben gezeigt wurde, ist es wesentlich, die Dichte des leuchtenden Dampfes so gering wie irgend möglich zu machen.

Es mußte daher eine Lichtquelle gewählt werden, die dieser Forderung nachkommt und zudem eine Regulierung der Zentrenzahl in gewissen Grenzen erlaubt. Der elektrische Lichtbogen und andere elektrisch erregte Lichtquellen fielen von vornherein weg. Die Flamme, deren Emission im wesentlichen auf Temperaturstrahlung beruhen dürfte, hat bei geringer Teilchenzahl den Nachteil geringer Helligkeit. Will man diesen vermeiden, so muß man die Temperatur möglichst hoch wählen. Aus diesem Grunde wurde die Wasserstoff–Sauerstoff–Knallgasflamme verwandt. Die zweite Forderung nach geringer Schichtdicke konnte durch Konstruktion eines Spezialbrenners erfüllt werden. 3 Messingröhrchen, die gegeneinander justierbar sein müssen, bilden den Brenner. Die Konstruktion ist aus Fig. 1, Taf. XIV zu ersehen. Die beiden äußeren Röhrchen führen das brennbare Gas (Wasserstoff), das mittlere Röhrchen den Sauerstoff[1]) zu. Die mit diesem Brenner erhaltene Flamme hat in Querdurchsicht eine Schichtdicke von etwa 10 mm. Die Flammenform kann durch Gestalt und Stellung der Düsen reguliert werden.

Zur Färbung der Flamme wurde ihr eine wäßrige Lösung eines Salzes des zu untersuchenden Metalls, mittels Regenerzerstäubers[2]) fein zersprüht, zugeführt. Durch Änderung der Konzentration der Salzlösung ließ sich die Stärke der Flammenfärbung in weiten Grenzen verändern. Eine Skizze der Anordnung, die zur Flammenfärbung diente, zeigt Fig. 2.

Die Temperaturkonstanz der Flamme, die eine der Vorbedingungen für die Konstanz der Helligkeit bildet, wurde nach der Methode der Linienumkehr[3]) bestimmt. Jedoch wurden diese Untersuchungen an den stets auftretenden *D*-Linien vorgenommen und nicht an den zweiten H.S.-Gliedern von Cs, Rb und K selbst, da Umkehrmessungen an diesen Gliedern infolge der geringen Empfindlichkeit des Auges in dem Spektralbereiche, dem diese Dubletts angehören, äußerst schwierig sind.

Als „umkehrende“ Lichtquelle wurde der positive Kohle-

1) Die benötigten Gase wurden von der Firma Griesheim-Elektron bezogen, die den Wasserstoff zu einem Sonderpreis lieferte, wofür ihr an dieser Stelle besonders gedankt sei.

2) H. Freundlich, Kapillarchemie, 2. Aufl. S. 1069.

3) H. Kohn, Ann. d. Phys. 44. S. 749. 1914.

krater benutzt; seine Helligkeit wurde mittels Nicolscher Prismen geschwächt und durch Umkehrmessungen an den *D*-Linien der Flamme eines Mékerbrenners bekannter Temperatur[1]) geeicht. Für die verwendete Knallgasflamme ergab sich so eine Umkehrtemperatur von etwa 2600° absolut. Doch

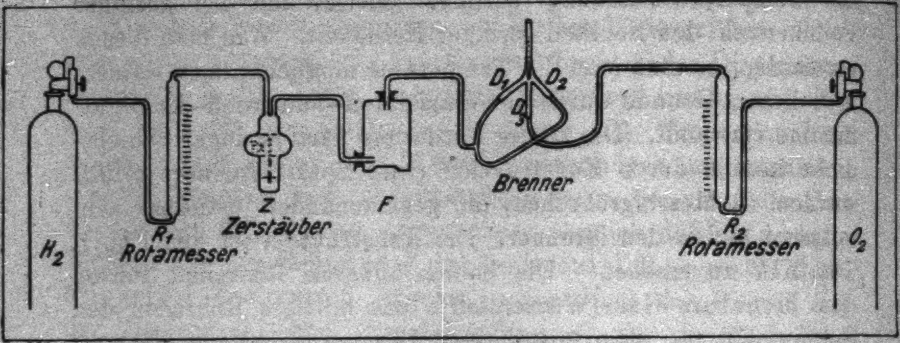


Fig. 2

kommt dieser Bestimmung eine Genauigkeit von höchstens ± 50° zu. Die während der Aufnahme gemessenen Einzelwerte der Umkehrtemperatur schwanken um ± 1 Proz. Dem würde eine Änderung der Zahl der angeregten Atome in der Flamme von etwa 10 Proz. entsprechen. Doch ist diese Änderung sicher noch geringer, da ein Teil der Schwankungen jedenfalls auch auf kleine Änderungen der Kraterhelligkeit zu schieben ist.

§ 4. Die photographisch-photometrische Methode

Als Untersuchungsmethode wurde die photographisch-photometrische gewählt. Eine bestimmte ausgeblendete Zone der Flamme, und zwar stets die gleiche, wurde auf dem Spalt des Spektrographen abgebildet und die Spaltbreite so groß gewählt, daß von der Intensitätsverteilung innerhalb der Linien selbst nichts zu merken war. Es wurde eine der jetzt üblichen Methoden angewandt, die das zur Herstellung von Intensitäts-Schwärzungskurven erforderliche zeitraubende Photographieren

1) Zugrunde gelegt wurde der von H. Kohn (a. a. O.) für die Flamme des Mékerbrenners bestimmte Wert von etwa 2073° absolut. Indessen ist es nicht sicher, ob der Wert heute noch Gültigkeit hat, da sich inzwischen die Zusammensetzung des Leuchtgases geändert hat.

von Intensitätsmarken umgeht, nämlich die Methode des Absorptionskeiles in ähnlicher Ausführung, wie es von T. R. Merton[1]) angegeben wird. Der Absorptionskeil wurde so vor dem Spektrographenspalte angebracht, daß die brechende Kante der Spaltebene parallel und zwar senkrecht zum Spalt lag. Die verschiedenen Punkte des Spaltes sind daher verschiedenen Dicken und somit auch verschiedener Durchlässigkeit des Keiles zugeordnet. Die Intensität an einem bestimmten Punkte einer jeden Spektrallinie auf der photographischen Platte wird also bestimmt durch die Durchlässigkeit des Keiles am entsprechenden Keilpunkt. Bezeichnet I^0 die Intensität der eintretenden und I die der durchgelassenen Strahlung an einem Punkte im Abstande l vom Anfangspunkte des Keiles, so gilt die Beziehung

$$I = I^0 \cdot e^{-\gamma l}. \tag{5}$$

Für den Vergleich der Intensitäten $I_2{}^0$ und $I_1{}^0$ zweier Linien hat man auf der photographischen Platte in den beiden kontinuierlich abgeschwächten Linien die Stellen l_2 bzw. l_1 gleicher Schwärzung aufzusuchen. Dann gilt für das gesuchte I.V. der beiden Linien

$$\frac{I_2{}^0}{I_1{}^0} = e^{\gamma(l_2 - l_1)}, \tag{6}$$

wobei im folgenden der Einfachheit halber die oberen Indizes bei $I_2{}^0$ und $I_1{}^0$ weggelassen werden sollen. Vorausgesetzt ist hierbei, daß γ innerhalb des Wellenlängenbereiches der beiden Linien, hier also innerhalb des Bereiches der eng benachbarten Dublettkomponenten, nicht variiert. Der Auswertung der Aufnahmen hat eine Eichung des Keiles, d. h. die Bestimmung des Gradienten γ, vorauszugehen. Zu diesem Zwecke druckt man auf ein und dieselbe Platte eine Reihe von Intensitätsmarken mittels einer konstant brennenden Lichtquelle. (Ich benutzte dazu eine Hg-Lampe[2]) oder einen Nernstfaden). Zur Herstellung der Marken wurde ein rotierender Sektor nach

---

1) T. R. Merton, Phil. Trans. 216. S. 459. 1921.

2) Im vorliegenden Falle wurde eine luftgekühlte Quarzlampe von Heraeus benutzt. Sie mußte etwa eine Stunde vor der beabsichtigten Aufnahme entzündet werden, damit sie mit konstanter Helligkeit brannte.

Lummer-Brodhun verwandt.[1]) Unter die Intensitätsmarken wurde mit gleicher Belichtungszeit entweder das Linienspektrum der Hg-Lampe oder das kontinuierliche Spektrum des Nernstfadens durch den Keil hindurchphotographiert (Fig. 3, Taf. XIV). Hierbei kam es sehr genau darauf an, daß der Spektrographenspalt in seiner ganzen Höhe (etwa 10 mm) gleichmäßig mit Licht belegt war.

Die durch den Keil erhaltene Aufnahme photometriert man (an bestimmter Wellenlänge) in konstanten Abständen in Richtung wachsender Keildicken von einer beliebigen Nullstelle an und entnimmt der aus den Intensitätsmarken erhaltenen Schwärzungskurve, die zu der Schwärzung S an jeder Keilstelle l zugehörige Intensität I.

Trägt man jetzt die Logarithmen der Intensitäten als Funktion von l auf, so erhält man in der Tat eine gerade Linie, wie es die oben angegebene Gleichung (5) in logarithmischer Form

$$\log I = \text{const.} - \gamma\, l \cdot \log e \tag{5a}$$

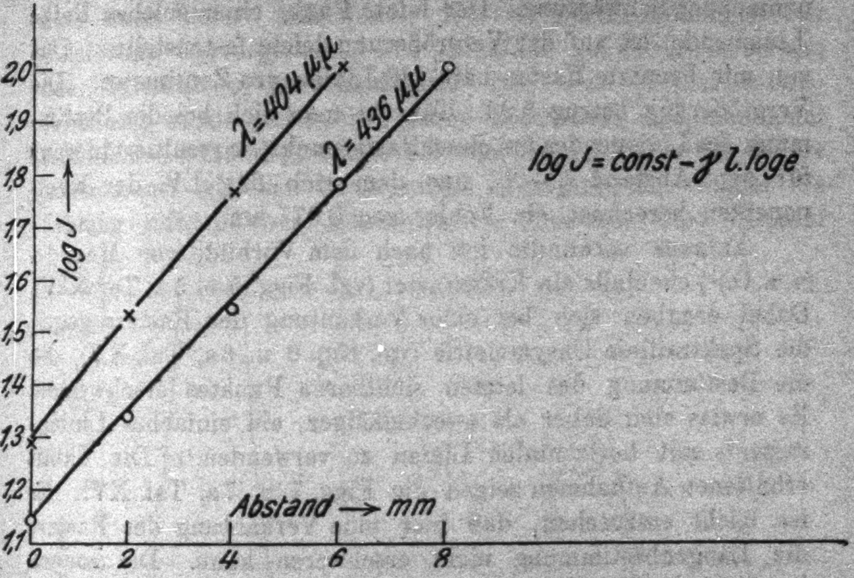
verlangt. Die eingezeichneten Geraden (Fig. 4) sind nach der Methode der „kleinsten Quadrate" berechnet. Wie man sieht, schließen sich die Meßpunkte diesen Geraden sehr gut an. Die Schwächung des in der Arbeit benutzten Uviolkeiles betrug z. B. bei $\lambda = 436\ \mu\mu$ 1 : 11,7 auf 10 mm. Da der Gradient beträchtlich mit der Wellenlänge variiert, so war die Eichung an allen Wellenlängen, an denen Linien untersucht werden sollten, vorzunehmen. Auf die Werte des Gradienten war es ohne Einfluß, ob man zur Eichung ein Linien- oder ein kontinuierliches Spektrum verwandte. Die Genauigkeit, mit welcher der Gradient bestimmt ist, beträgt wenigstens ± 1 Proz.

Die Ausmessung aller Aufnahmen geschah an einem Hartmannschen Mikrophotometer, das mir Hr. Prof. Dr. Ladenburg für die gesamten Messungen zur Verfügung stellte, wofür ich ihm auch an dieser Stelle meinen besten Dank aussprechen möchte.

---

1) Die Verwendung des rotierenden Sektors für die Herstellung der Intensitätsmarken ist nach Messungen von A. E. Weber (Ann d. Phys. 45. S. 801. 1914) und F. Goos (Ztschr. f. Phys. 31. S. 232. 1925) als berechtigt anzusehen.

Um mikrophotometrische Messungen zu erübrigen, entwickelte Merton[1]) eine Methode, die im Verlaufe dieser Arbeit weiter ausgebaut wurde.[2]) Das Prinzip dieser Methode ist folgendes: Wegen der Absorption des vor dem Spalte stehenden Keiles zeigen die Aufnahmen gemäß der wachsenden Keildicke einen



Kurven zur Auswertung des Keilgradienten für λ = 436 u. 404 μμ.
Fig. 4

kontinuierlichen Schwärzungsabfall, dessen Verlauf durch die in Gleichung (5) angegebene *e*-Funktion bestimmt ist. Bei passender Belichtung geht schließlich die Schwärzung in die Schleierschwärzung über; d. h. die Erscheinung, z. B. die Spektrallinie, „hört auf". Wie wir bei der Entwicklung der Meßmethode gesehen haben, kommt es darauf an, bei den zu vergleichenden Linien Punktepaare gleicher Schwärzung festzustellen. Ein solches Punktepaar bilden z. B. auch die Endpunkte der beiden Komponenten auf der Platte. Diese Endpunkte sind also festzulegen. Das geschieht auf folgende Weise: Von der Aufnahme wird durch Kontaktkopie ein Diapositiv hergestellt, welches

1) T. R. Merton und J. W. Nicholson, Phil. Trans. ser. A. 217. S. 237. 1921.

2) Aus später zu erörternden Gründen ist diese Methode allerdings nur mit großer Vorsicht anzuwenden (siehe § 5).

durch ein Kreuzraster auf Bromsilberpapier vergrößert photographiert wird. Dadurch erhält man jetzt ein vergrößertes Bild der ursprünglichen Aufnahme, jedoch nicht mehr kontinuierlich zusammenhängende Linien, sondern Pünktchenreihen, entsprechend den Öffnungen des Rasters mit allmählich abnehmender Schwärzung. Der letzte Punkt einer solchen Reihe (Linienende) ist auf der Vergrößerung leicht festzustellen. Das von mir benutzte Raster hatte 40 Linien pro Zentimeter. Die Vergrößerung betrug 3,24. Täuscht man sich bei der Bestimmung des Linienendes um einen Rasterpunkt, so resultiert hieraus für den Abstand $l_2 - l_1$, aus dem sich das I.V. der Komponenten berechnet, ein Fehler von 0,077 mm.

Anfangs verwandte ich nach dem Vorbilde von Merton (a. a. O.)[1]) ebenfalls ein Kreuzraster (vgl. Figg. 5 u. 5a, Taf. XIV). Dabei ergaben sich bei einer Verkantung des Rasters gegen die Spektrallinie Unsymmetrie (vgl. Fig. 6 u. 6a, Taf. XV), die die Bestimmung des letzten sichtbaren Punktes erschwerten. Es erwies sich daher als zweckmäßiger, ein einfaches Linienraster[2]) mit horizontalen Linien zu verwenden.[1]) Die damit erhaltenen Aufnahmen zeigen die Figg. 7 u. 7a, Taf. XV. Es ist leicht einzusehen, daß hier eine Verkantung des Rasters die Längenbestimmung nicht erschweren kann. Die soeben beschriebene Methode kann also das Mikrophotometer in gewissem Grade ersetzen.

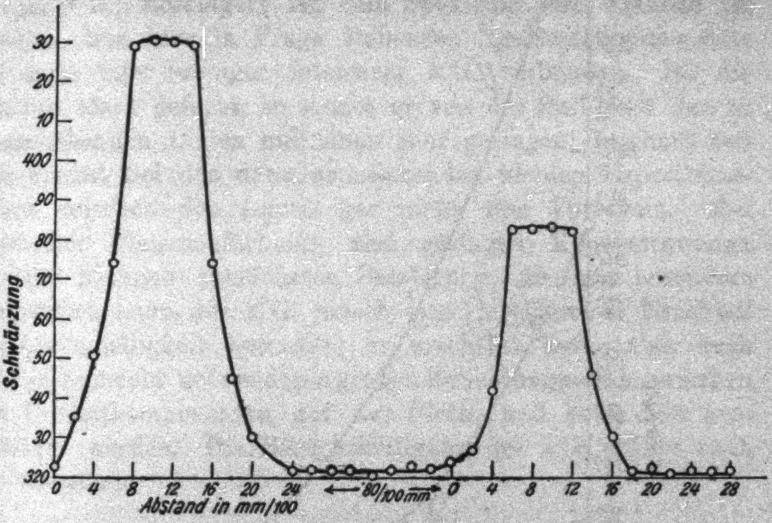
§ 5. Die Aufnahme und ihre Auswertung

Die bei der Aufnahme benutzte Flammenzone zeigte in ihrem ganzen Bereiche keine merklichen Helligkeitsunterschiede. Vor Beginn der Aufnahme wurde die Dichte der in die Flamme einzuführenden Salzlösung mittels Pyknometers bestimmt und daraus die Konzentration berechnet. Nach Schluß der Aufnahme, deren Belichtungszeit zwischen $^1/_2$ Minute und 7 Stunden variierte, wurden die Platten (Hauff-Extra-Rapid) etwa 3 Minuten in einer 24 prozentigen Metol-Hydrochinonlösung entwickelt.

1) Anmerkung bei der Drucklegung: Merton hat in neueren Arbeiten (Proc. Roy. Soc. 113 S. 697. 1927) ebenfalls ein Linienraster für die Reproduktionen verwendet.

2) Die beiden Raster wurden mir von der Firma Efha-Rasterwerk in München kostenlos überlassen, wofür ich der Firma meinen besten Dank aussprechen möchte.

Nach beendeter Aufnahme wurde die Konzentration der Salzlösung abermals bestimmt. Hierbei wurden bisweilen höhere Dichten als vor der Aufnahme festgestellt. Diese Erscheinung kann möglicherweise auf Verunreinigung durch den Wasserstoff zurückgeführt werden. Mitunter wurden diese höheren Dichten aber auch durch tatsächliche Konzentrationserhöhungen der Salzlösung hervorgerufen, was jedenfalls auf die Arbeitsweise des Zerstäubers zurückzuführen ist. Die Konzentrationserhöhung wurde gleichzeitig daran konstatiert, daß manchmal Aufnahmen wesentlich stärkere Schwärzungen zeigten als andere unter sonst gleichen Bedingungen erhaltene, für welche die Lösung mit gleicher Konzentration angesetzt war. Hierauf

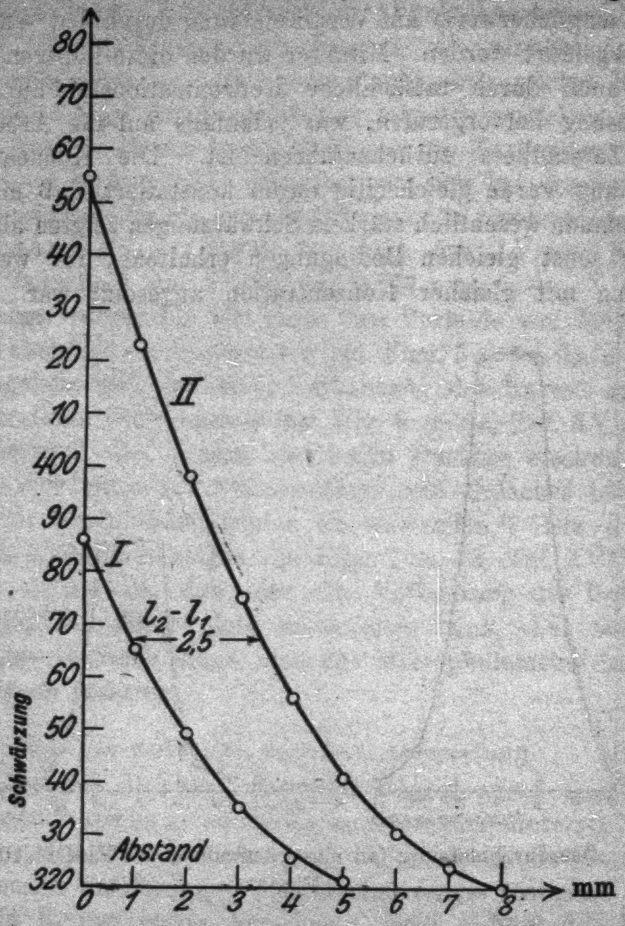


Querdurchmessung (an einer Aufnahme des Rb-Dubletts).
Fig. 8

sind vielleicht verschiedene Diskrepanzen bei den ersten Versuchen, von denen später die Rede sein wird und bei denen die Kontrolle der Dichten noch nicht vorgenommen wurde, zurückzuführen. Bei den späteren Versuchen wurde, um ganz sicher zu gehen, bei sehr langen Aufnahmen die Konstanz der Dichte auch gelegentlich während der Aufnahme kontrolliert und, falls eine wesentliche Änderung festgestellt wurde, frisch angesetzte Lösung eingefüllt.

Vor der eigentlichen Auswertung der Aufnahmen wurde

eine *Querdurchmessung* einiger Linien am Mikrophotometer vorgenommen. Fig. 8 zeigt das Ergebnis für das Rb-Dublett bei 0,1 mm Spaltbreite. Man sieht, daß der Schwärzungswert



Schwärzung längs der Komponenten eines Dubletts als Funktion des Abstandes von einer von mir beliebig gewählten Nullmarke (Aufnahme des K-Dubletts).

Fig. 9

über 0,06 mm einheitlich ist, während er an den Rändern etwas absinkt. Die beiden Komponenten eines zu untersuchenden Dubletts wurden nunmehr in Längsrichtung, d. h. in Richtung fallender Schwärzungen in gleichen Abständen photometriert und die erhaltenen Schwärzungswerte als Funktion des Ab-

standes von der Nullmarke aus aufgetragen. Dabei ergaben sich, wie durch Fig. 9 veranschaulicht wird, zwei parallele Kurven, deren Verlauf durch die e-Funktion des Intensitätsabfalles längs der Linien bestimmt ist. Punkte mit gleichen Ordinaten entsprechen gleicher Schwärzung. Ihr Abstand ist das gesuchte $l_2 - l_1$. Diese Größe läßt sich infolge der vielen Meßpunkte längs einer Linie, die die Lage der Kurve sehr genau festlegen, sicher bestimmen. Der Abstand dürfte auf mindestens $\pm {}^1/_{10}$ Abstandseinheit in der Fig. (d. h. 0,1 mm auf der Aufnahme) genau sein.

Die soeben beschriebene Art der Auswertung setzt Aufnahmen voraus, bei denen den Linien kein kontinuierlicher Grund (k. G.) überlagert ist. Im Spektrum der Flamme ist aber in dem hier in Frage stehenden Spektralbereiche stets ein mehr oder weniger intensiver k.G. vorhanden. Ist die Flamme stark gefärbt, so macht er von der Helligkeit der zu untersuchenden Linien nur einen sehr geringen Bruchteil aus und kommt bei den dann ausreichenden kleinen Expositionszeiten zwischen den Linien gar nicht zum Vorschein. Bei schwacher Flammenfärbung, also geringen Konzentrationen der der Flamme zugeführten Salzlösung, die hier besonders interessiert, kann der k. G. jedoch einen erheblichen Bruchteil der Linienhelligkeit betragen; er erscheint dafür aber auch bei den nunmehr notwendigen großen Belichtungszeiten zwischen den Dublettkomponenten auf der Platte und kann hier ausgemessen werden. Die Berücksichtigung des k.G. erfolgt nach der Gleichung

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{I_2' - I_k}{I_1' - I_k} = \frac{\frac{I_2'}{I_1'} - \varrho_1}{1 - \varrho_1} \tag{7}$$

Hier beziehen sich die gestrichenen Größen auf die gemessenen, die ungestrichenen Größen auf die wirklichen Intensitäten der Komponenten. Ferner ist $\varrho_1 = \frac{I_k}{I_1'}$, wo I_k die Intensität des k.G. bedeutet.

Diese Formel läßt also das „wirkliche“ Intensitätsverhältnis I_2/I_1 aus Größen berechnen, die durch Messung auf der Platte zu finden sind. Bei einer Aufnahme, auf der ein k.G. zu sehen ist, hat man also außer den beiden Komponenten (I_2', I_1') auch den k. G. (I_k) von demselben Anfangspunkte aus und in

denselben Stufen (l_k) auszuphotometrieren. Man erhält demnach drei Kurven (II, I und K, vgl. z. B. Fig. 11) zur Auswertung des I.V. Aus den Abständen $l_2' - l_1'$ und $l_1' - l_k$ lassen sich mit Hilfe der Gleichungen

$$\frac{I_2'}{I_1'} = e^{\gamma (l_2' - l_1')} \qquad (8)$$

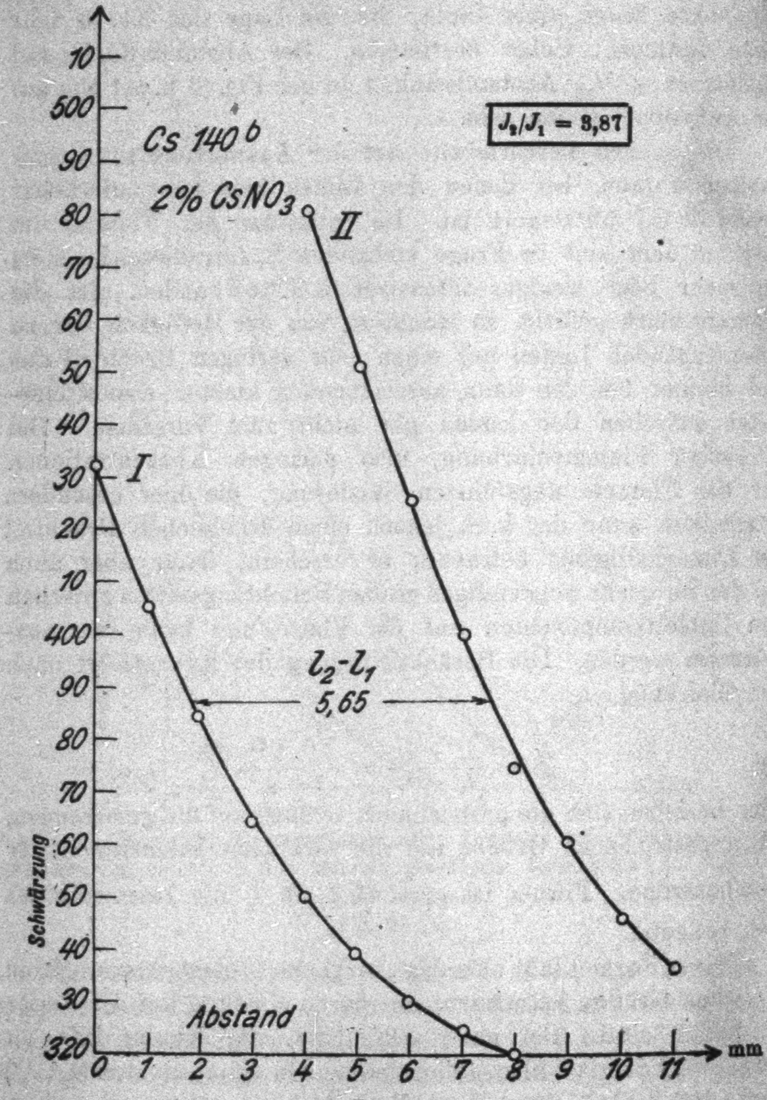


Fig. 10

(9) $$\frac{I_1'}{I_k} = e^{\gamma(l_1' - l_k)} = \frac{1}{\varrho_1}$$

zunächst die Größen I_2'/I_1' und ϱ_1 bestimmen, woraus ohne weiteres durch Einsetzen in Formel (7) das wirkliche I.V. I_2/I_1 folgt.

Als Beispiel sollen die Aufnahmen Cs 140 b (Fig. 10, Konzentration 2 Proz., Expositionszeit 7 Min.) und Cs 138 b

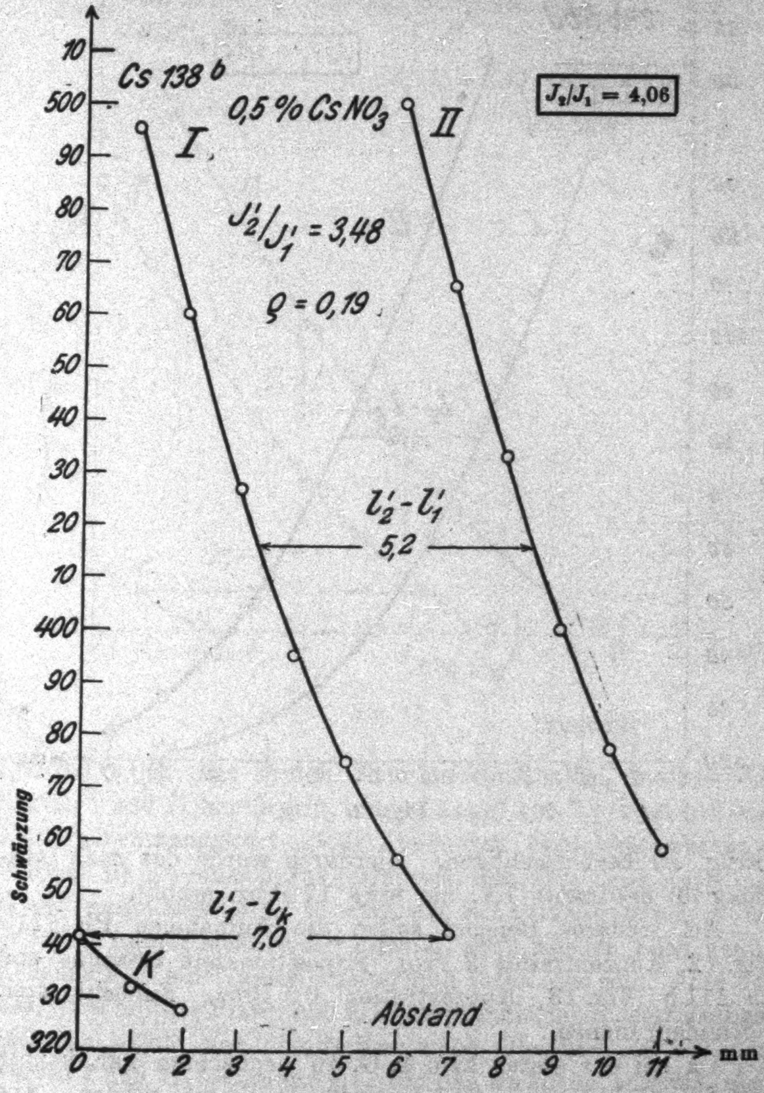


Fig. 11

(Fig. 11, Konzentration 0,5 Proz., Expositionszeit 20 Min.) dienen. Bei der erstgenannten Aufnahme war kein k.G. auf der Platte zu sehen. Die Auswertung des I.V. konnte daher nach Gleichung (6) geschehen. Auf der anderen dagegen war ein k.G., dessen Intensität 19 Proz. der schwachen Komponente

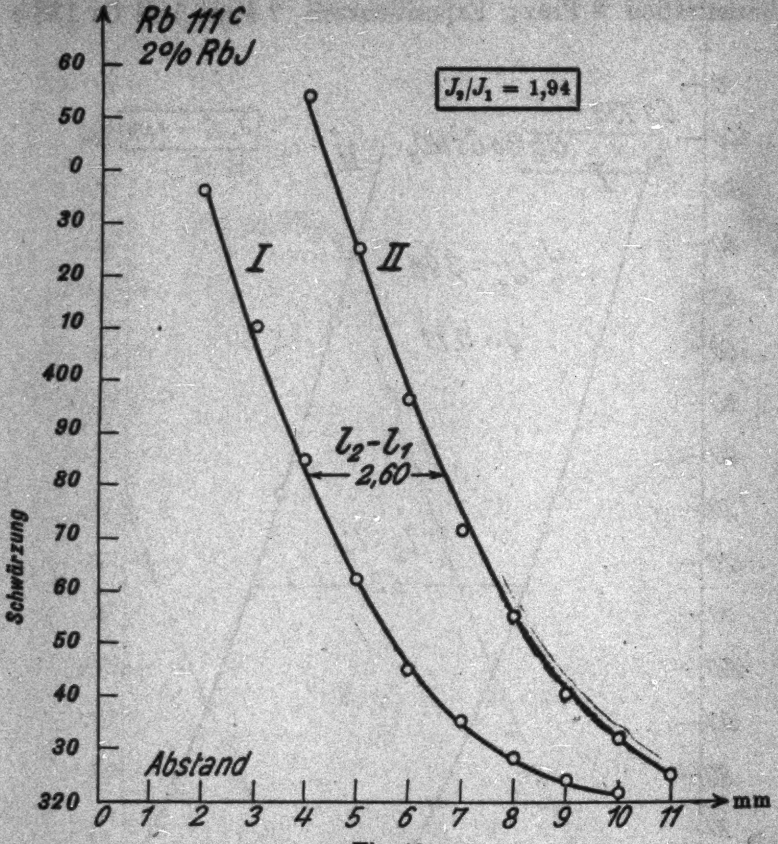


Fig. 12

betrug, zu berücksichtigen. Hierdurch wurde das nach Gleichung (6) bestimmte I.V. um etwa 17 Proz. erhöht.

Als weiteres Beispiel sollen die Aufnahmen Rb 111 c (Fig. 12, Konzentration 2 Proz., Expositionszeit 1 Stunde) und Rb 111 b (Fig. 13, Konzentration 0,5 Proz., Expositionszeit 2 Stunden) dienen.

Da bei der ersten kein k. G. zu beobachten war, konnte das I.V. direkt nach Gleichung (6) bestimmt werden. Aus

der zweiten Aufnahme geht besonders deutlich hervor, wie vorsichtig man bei der Berücksichtigung des k. G. vorgehen muß. Der bei dieser Aufnahme auf der Platte kaum sichtbare k. G. erhöht das durch die Messung der Komponenten unmittelbar erhaltene Verhältnis (I_2'/I_1') um etwa 13 Proz., nämlich von

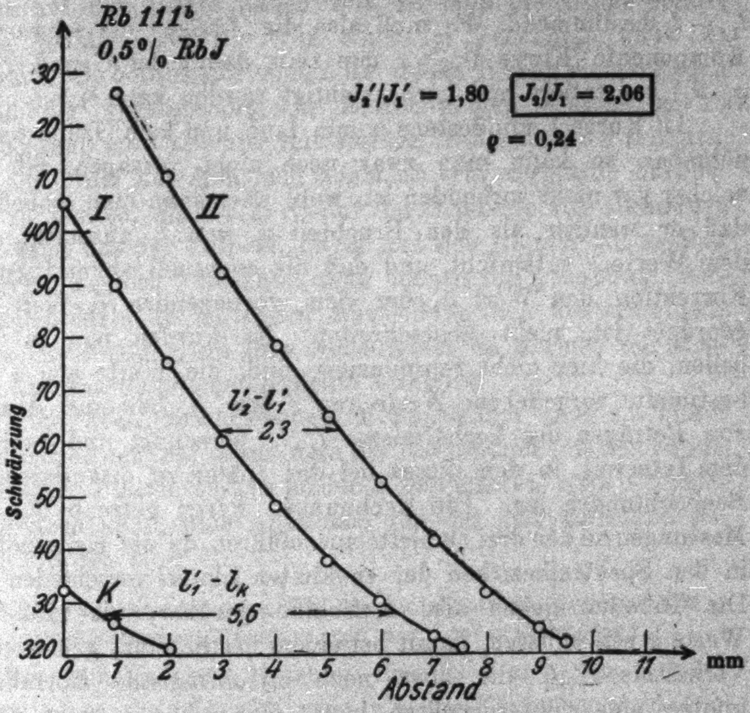


Fig. 13

1,80 auf 2,06. Die beiden Komponenten haben, wie aus den Kurven I und II hervorgeht, eine „Länge" von 7,5 bzw. 9,5 mm. (Der Schwärzungswert „320" bedeutet Schleierschwärzung.) Würden sie bei einer etwas geringeren Belichtungszeit um 2 mm kürzer ausgefallen sein, so wäre das Schwärzungsgebiet, in das sie fallen, immer noch relativ günstig; auch würden noch genug Meßpunkte zu einer guten Auswertung vorhanden sein. Aber der k. G. wäre auf der Platte nun überhaupt nicht mehr festzustellen, und man würde das unmittelbar nach Gleichung (6) aus den Kurven I und II bestimmte I.V. für das wirkliche ansehen, also ein mit etwa 13 Proz. Fehler behaftetes Resultat erhalten.

Zur allgemeinen Abschätzung des Fehlers stellen wir folgende Betrachtung an: Aus Formel (7) geht hervor, daß für eine bestimmte Abweichung δ (in Prozenten) des *direkt* gemessenen Wertes I_2'/I_1' vom *wirklichen* Werte I_2/I_1 die Größe $\varrho_1 = \frac{I_1'}{I_k}$ maßgebend ist. ϱ_1 seinerseits ist für den Abstand $x = l_1' - l_k$ bestimmend. Es muß also die „Länge" der schwachen Komponente (Kurve I) $\geqq x$ mm sein, damit der Grund ($I_k = \varrho_1 \cdot J_1$) konstatiert und berücksichtigt werden kann.[1])

Ist Kurve I mindestens x mm lang und kein Grund wahrnehmbar, so kann man zwar noch nicht aussagen, daß ein solcher gar nicht vorhanden ist, wohl aber kann man schließen, daß er weniger als den Bruchteil ϱ_1 von I_1 ausmacht, der dem Werte x entspricht, und daß die eventuell anzubringende Korrektion den Wert δ, der dem vorliegenden ϱ_1-Wert zugeordnet ist, nicht überschreitet. Es wurden nun in Tabellen, die hier nicht reproduziert sind, die Werte von x für bestimmte vorgegebene Werte von δ bzw. ϱ_1 bei einer Anzahl von Beträgen des Verhältnisses I_2'/I_1' berechnet und zwar in dem Intervall, in dem dieses bei den später zu diskutierenden Beobachtungen lag. Die Rechnungen waren getrennt für die Messungen an den drei Dubletts auszuführen, da der Keilgradient in den Spektralbezirken der erwähnten Linien verschieden ist. Die Tabellen geben also Aufschluß darüber, wie groß die Werte x sein müssen, damit bei einem bestimmten, gemessenen Verhältnis I_2'/I_1' die etwa noch anzubringende Korrektion infolge eines unterdrückten k. G. die Größe δ nicht überschreitet. An Hand der erwähnten Tabellen konnte man sich ein Urteil darüber bilden, wie stark man zu belichten hat, damit ein etwa vorhandener k. G. herauskommt und mit Sicherheit auszumessen ist. Ist aber auf einer Aufnahme kein k. G. zu sehen, so hat man sich zunächst davon zu überzeugen, wie weit die schwache Komponente I_1 reicht und kann dann mittels der Tabellen angeben, unter welcher oberen Grenze die Erhöhung durch den k. G., der nicht mit auf die Platte gekommen ist, mit Sicherheit bleibt. Bei starker Flammenfärbung und nicht zu weitem Spalte, wo der k. G. jedenfalls nur einen ganz unwesentlichen Bruchteil von I_1 ausmacht,

1) x ist natürlich um so kürzer, je größer der Keilgradient ist.

erübrigt sich diese Betrachtung. Hier würde man die Fehlergrenze durch sie unbedingt zu hoch stecken.

Infolge des k. G. ist auch die von Merton angegebene und von mir beschriebene „Rastermethode" mit sehr großer Vorsicht anzuwenden. Da man hier ja gerade die *Enden* der Linien auf der Platte haben will, so muß die Länge relativ gering gehalten werden. Um einen im Verhältnis nicht zu starken k. G. herauszubringen oder seinen Betrag einigermaßen gemäß der vorangegangenen Betrachtungen abschätzen zu können, muß man also hier mit starken Keilgradienten arbeiten. Für alle Fälle hat man sich zunächst sehr sorgfältig darüber klar zu werden, ob ein k. G. auf der Originalplatte vorhanden und, wenn das der Fall ist, ob er auf den Kopien gut meßbar wiedergegeben ist. Beachtet man jedoch die genannten Vorsichtsmaßregeln, so ist gegen Anwendung der Rastermethode nichts einzuwenden, da ihre Genauigkeit im übrigen der Messung am Mikrophotometer nichts nachgibt.

Diese eben beschriebenen Meßmethoden sind in dieser Form nur anwendbar, wenn man die Empfindlichkeit der photographischen Platten an den beiden Komponenten jedes Dubletts gleichsetzen kann, eine Annahme, von der hier Gebrauch gemacht worden ist.[1])

§ 6. Versuchsanordnung für die gleichzeitige Messung des Intensitätsverhältnisses und der Linienabsorption

Die gleichzeitige Messung des I.V. und der Linienabsorption mußte, da sich zwei gleiche Flammen nicht herstellen ließen, nach der von Gouy (a. a. O.) angegebenen Methode der Spiegelung vorgenommen werden. Die Versuchsanordnung wurde so getroffen, daß die Linien der ungespiegelten Flamme, also der *einfachen* Schicht und die der durch Spiegelung *verdoppelten* Schicht *gleichzeitig* auf der photographischen Platte aufgenommen werden konnten. Zu diesem Zwecke (Fig. 14) wurde die Flamme zwischen 2 Blenden (B_1, B_2) eingeschlossen, von denen die dem Spektrographen zugekehrte (B_1) mittels der Linse (L) auf dem Spektrographenspalte abgebildet wurde. Der ausgeblendete Flammenteil mußte so groß

1) Vgl. hierüber G. Leimbach, Ztschr. f. wiss. Photogr. 7. S. 18. 1909.

gewählt werden, daß bei guter „Füllung" des Spektrographen der Spalt in seiner ganzen Höhe völlig gleichmäßig mit Licht belegt war. Die Höhe der Vorderblende betrug 18 mm, ihre Breite etwa 4 mm. Die Linse *L* bildete sie etwas verkleinert auf dem Spalte ab. Die hintere Blende mußte so groß sein,

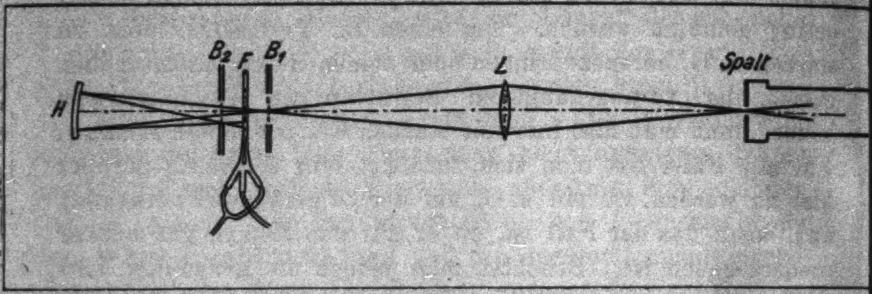


Fig. 14

daß ihr durch den verwendeten Hohlspiegel *H* erzeugtes Bild die Dimension der Vorderblende hatte. Diese Größe wurde, ebenso wie der erforderliche Abstand der beiden Blenden voneinander (42 mm), durch maßstäbliche Zeichnung gefunden. Die hintere Blende wurde nun zunächst durch den Hohlspiegel in die Vorderblende abgebildet. Das bedeutet aber, wie man sich zeichnerisch leicht überzeugen kann, daß alles Licht, welches von der Flamme *F* auf die hintere Blende fiel, von dem Hohlspiegel durch die Flamme hindurch zurückgeworfen und die ganze Vorderblende gleichmäßig mit diesem Licht ausgefüllt wurde. Dadurch ist auch der Spektrographenspalt, abgesehen von dem Verluste infolge des Reflexionsvermögens des Spiegels, von dem Licht der doppelten Flammenschicht erfüllt. (Über die Berücksichtigung des Reflexionsvermögens wird später noch gesprochen werden.) Es war aber gefordert, daß die Strahlung der einfachen und die der durch Spiegelung vergrößerten Schicht *zugleich* aufgenommen werden sollte. Das wurde folgendermaßen erzielt: Der Hohlspiegel wurde gegen die Achse des Strahlenganges ein klein wenig geneigt, so daß das Bild der Hinterblende die Vorderblende nur zur Hälfte bedeckte. Infolgedessen lag auf dem Spektrographenspalte zur Hälfte die Strahlung der einfachen und zur anderen Hälfte die der durch Spiegelung vergrößerten Schicht. Die

Grenze zwischen den beiden Hälften war bei sorgfältiger Justierung auf dem Spalte als scharfe Kante zu sehen. Als Meßmethode für die *k*-Werte und das I.V. wurde die gleiche angewandt, wie oben beschrieben, nämlich die Methode des Absorptionskeils.

Bei der oben geschilderten Anordnung zeigt eine Linie auf der Aufnahme (s. z. B. Fig. 15a und 16a, Taf. XV) nun nicht mehr einen kontinuierlichen Schwärzungsabfall über die ganze Länge, vielmehr springt jenseits der Grenzkante, d. h. also an dem Orte, wo die Strahlung der doppelten Schicht beginnt, die Schwärzung plötzlich auf einen höheren Wert. Die Ausmessung der Aufnahmen und ihre Eintragung in Kurvenpapier geschieht auf die bereits in § 5 beschriebene Art.

Zur näheren Erläuterung betrachte man Fig. 17; die Kurven stellen das Ergebnis einer Aufnahme bei Färbung der Flamme mit einer 2 proz. RbJ-Lösung dar.

Kurven I und II zeigen den Schwärzungsabfall in den Teilen der Komponenten, die der Strahlung der einfachen Schicht entsprechen; sie sind also erhalten durch Photometrierung der oberen Hälfte der Komponenten. Bei Keilpunkt 5, d. h. 5 mm vom Anfangspunkte der Messung entfernt, brechen die Kurven plötzlich ab, um bei Keilpunkt 6 mit größeren Ordinaten, d. h. also größerer Schwärzung wieder zu beginnen. Diese Kurventeile ($\overline{\text{I}}$ und $\overline{\text{II}}$) entsprechen den Teilen der Komponenten, die von der Strahlung der doppelten Schicht herrühren. Kurve *K* wurde durch Ausmessen des k. G. zwischen den Kurven I und II erhalten.

Durch geeignete Wahl des Ausgangspunktes der Messungen (Nullpunktes) wurde vermieden, daß der letzte Meßpunkt auf der ungespiegelten Komponente zu nahe an die Grenzkante herankam, weil man dadurch leicht eine für diesen Punkt zu hohe Schwärzung maß, was bei der Auswertung der Kurven zu Fehlern führte.

Ist kein k. G. vorhanden, so geschieht die Auswertung der erhaltenen Kurven (vgl. oben) nach der Formel:

(10a) $$\frac{I_2}{I_1} = e^{\gamma(l_2 - l_1)} \quad \text{(einfache Schicht)}$$

(10b) $$\frac{\overline{I}_2}{\overline{I}_1} = e^{\gamma(\overline{l}_2 - \overline{l}_1)} \quad \text{(doppelte Schicht).}$$

Die *k*-Werte sind bei Verdoppelung der Schicht durch *Spiegelung* noch nicht unmittelbar durch das Verhältnis $\bar{I}/I$ gegeben, sondern es geht in die Berechnung noch das Re-

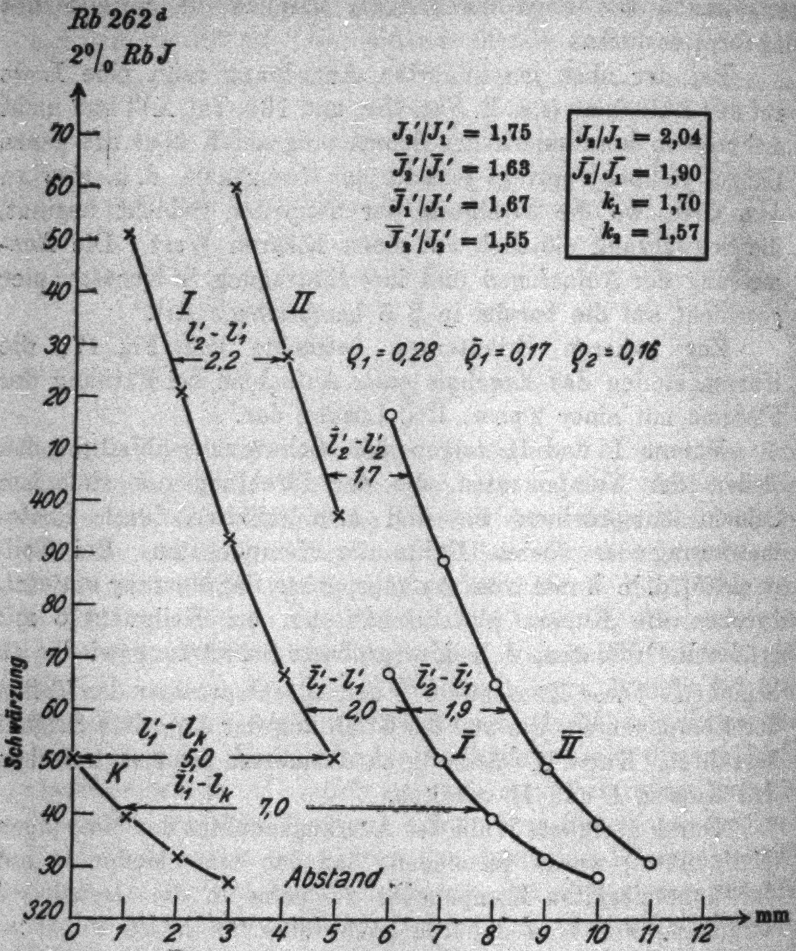


Fig. 17

flexionsvermögen (*R*) des Hohlspiegels ein. Sie führt zu den Formeln

(11) $$k_1 = \frac{\bar{I}_1}{I_1} \cdot \frac{1}{R} - \frac{1-R}{R}; \qquad k_2 = \frac{\bar{I}_2}{I_2} \cdot \frac{1}{R} - \frac{1-R}{R}.$$

Ist auf der Aufnahme k. G. zu berücksichtigen, so hat man folgende Formelreihe zur Auswertung zu benutzen:

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{\frac{I_2'}{I_1'} - \varrho_1}{1 - \varrho_1} \quad \text{(I)} \qquad \frac{\bar{I}_2}{\bar{I}_1} = \frac{\frac{\bar{I}_2'}{\bar{I}_1'} - \bar{\varrho}_1 (1 + R)}{1 - \bar{\varrho}_1 (1 + R)} \quad \text{(II)}$$

$$\frac{\bar{I}_1}{I_1} = \frac{\frac{\bar{I}_1'}{I_1'} - \varrho_1 (1 + R)}{1 - \varrho_1} \quad \text{(III)} \qquad \frac{\bar{I}_2}{I_2} = \frac{\frac{\bar{I}_2'}{I_2'} - \varrho_2 (1 + R)}{1 - \varrho_2} \quad \text{(IV)}$$

$$k_1 = \frac{\bar{I}_1}{I_1} \cdot \frac{1}{R} - \frac{1 - R}{R} \quad \text{(V)}$$

$$k_2 = \frac{\bar{I}_2}{I_2} \cdot \frac{1}{R} - \frac{1 - R}{R}. \quad \text{(VI)}$$

In diesen Formeln bedeuten die Verhältnisse, die aus den gestrichenen *I*-Werten gebildet sind, Intensitätsverhältnisse, bei denen der k. G. noch nicht berücksichtigt ist. Der Querstrich charakterisiert die durch Spiegelung erhaltenen Intensitäten; die Größen ϱ_1, ϱ_2 und $\bar{\varrho}_1$ bedeuten bzw.

$$\frac{I_1'}{I_k}, \quad \frac{I_2'}{I_k} \quad \text{und} \quad \frac{\bar{I}_1'}{I_k}.$$

Da in allen Formeln außer in (I) das Reflexionsvermögen (R) des Hohlspiegels vorkommt, hatte der Auswertung der Kurven eine Messung von R vorauszugehen. Diese Messung geschah mit einer leuchtenden Leuchtgasflamme, die in dem Brenner der Knallgasflamme entzündet wurde, in der Weise, daß den beiden äußeren Brennerdüsen an Stelle des Wasserstoffs Leuchtgas zugeführt wurde. Sauerstoff wurde nur so viel zugegeben, daß die Flamme aufrecht brannte. Hierdurch wurde erreicht, daß das obere Drittel der Flamme hell leuchtete. Dieser Flammenteil wurde nun in genau der gleichen Weise wie die Knallgasflamme durch den Keil hindurch photographiert, so daß man also auf der Aufnahme (Fig. 15b, 16b) ein kontinuierliches Spektrum erhielt, dessen oberer Teil vom Lichte der einfachen, dessen unterer von dem der durch Spiegelung vergrößerten Flammenschicht herrührte. Dieses kontinuierliche Spektrum wurde nun genau so wie die Linienaufnahmen am Orte der hier in Frage kommenden Wellenlängen ausgemessen, und man erhielt dann ein Kurvenbild, wie es die Figg. 18 u. 19 zeigen. Auf diesen Aufnahmen ist die Kurve K der einfachen, $\bar{K}$ der doppelten Flammenschicht zuzuordnen. Durch Auswertung des I.V. $\bar{K}/K$ mittels Formel (6) findet man

direkt *R*. Hierbei ist allerdings angenommen, daß die Helligkeit der leuchtenden Flamme durch die Spiegelung *verdoppelt* wurde. Das würde aber bedeuten, daß die Flamme das ge-

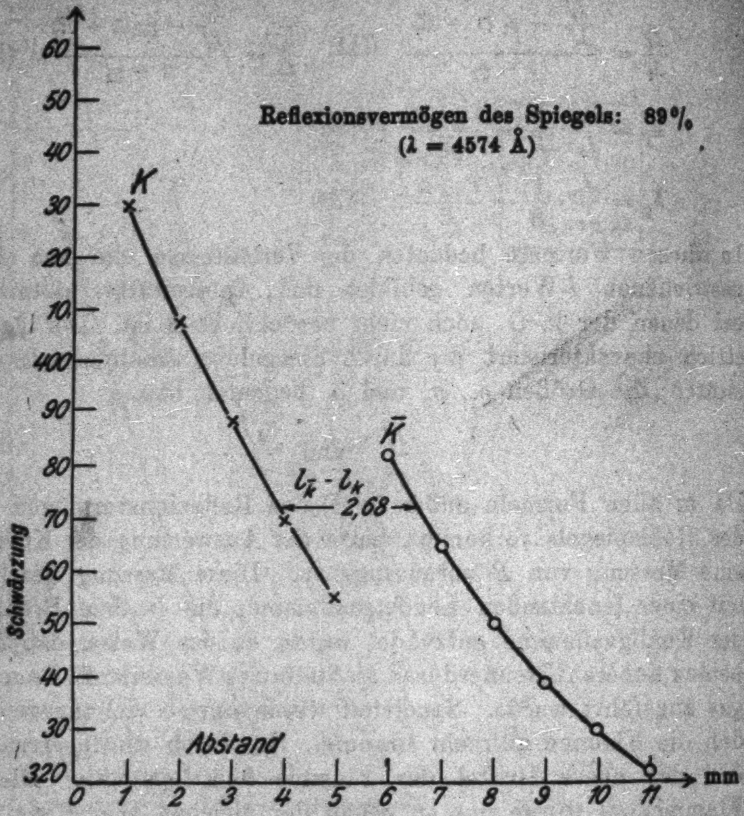


Fig. 18

spiegelte Licht, das sie durchsetzt, weder merklich zerstreut noch absorbiert, eine Annahme, die sowohl durch eigene Messung[1]) wie auch durch frühere Beobachtungen von H. Senft-

1) Wir stellten eine okulare Messung der Flammenabsorption mittels eines König-Martens-Photometers an. Die leuchtende Flamme ist ziemlich lichtschwach, und daher war am Ort der Cs- und Rb-Linien, wo auch das Auge schon sehr unempfindlich ist, die Meßgenauigkeit sehr gering (± 5 Proz.). Es konnte keine Lichtschwächung durch die leuchtende Flamme wahrgenommen werden, die diese Grenze überschritt.

leben und E. Benedikt[1]) gestützt wird. Die Reflexionsmessungen waren zugleich ein Kriterium für die ordnungsgemäße Justierung der Blenden. Bei den später zu diskutierenden Aufnahmen wurde auf fast jeder Platte eine Aufnahme zur Prüfung des Reflexionsvermögens gemacht.

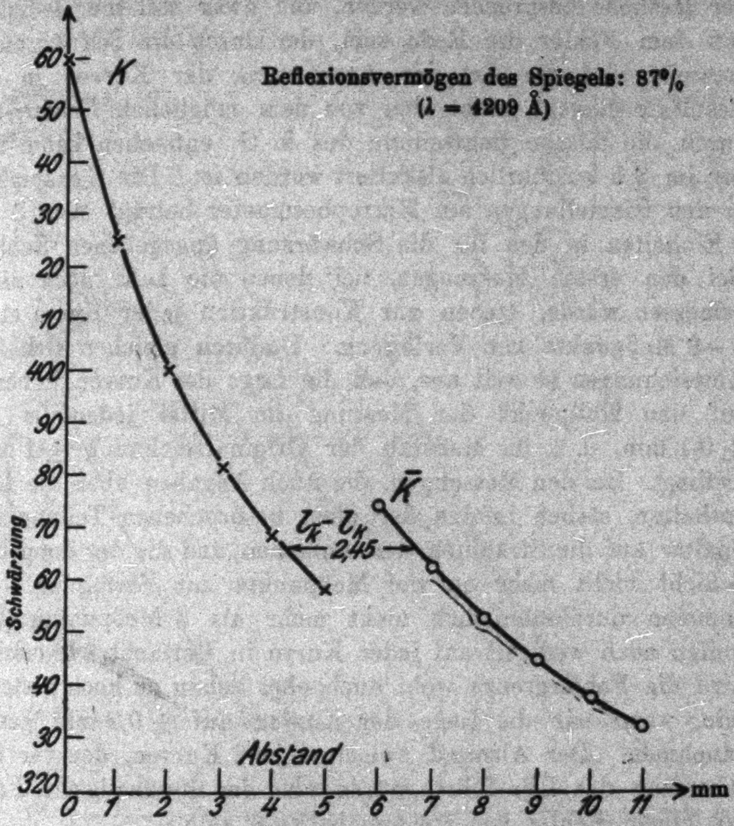


Fig. 19

tierenden Aufnahmen wurde auf fast jeder Platte eine Aufnahme zur Prüfung des Reflexionsvermögens gemacht. Der Mittelwert von R lag für $\lambda = 4216/02$ Å (Rb-Dublett) bei 87 ± 3 Proz., für $\lambda = 4555/93$ Å (Cs-Dublett) bei 89 ± 3 Proz.

1) Diese Beobachtungen sind nicht publiziert. Herr Dr. H. Senftleben war so freundlich, mir mitzuteilen, daß sich an leuchtenden Leuchtgasflammen keine Absorption hat messen lassen, ganz im Gegensatz zu den von den beiden genannten Autoren (Ann. d. Phys. 60. S. 297. 1919) an der Flamme der Hefnerlampe gemachten Beobachtungen, wo sich beträchtliche Absorption zeigte (bei $\lambda = 500\,\mu\mu$ z. B. 21,8 Proz.).

Diese Mittelwerte stimmen gut mit den in der Literatur[1]) angegebenen überein.

Vor der Diskussion der Resultate soll die Fehlergrenze der Methode besprochen werden, und zwar soll hier lediglich von dem Fehler die Rede sein, der durch die Schwärzungsmessung und die Art der Auswertung der Kurven in die Resultate eingeht, nicht aber von dem möglichen Fehler, der durch die falsche Beurteilung des k. G. entstehen kann, und der im § 5 ausführlich diskutiert worden ist. Die Genauigkeit in den Einstellungen am Mikrophotometer beträgt etwa 3 bis 4 Einheiten in den für die Schwärzung angegebenen Zahlen. Bei den ersten Messungen, bei denen die L.A. noch nicht gemessen wurde, stehen zur Konstruktion jeder Kurve etwa 6—8 Meßpunkte zur Verfügung. Dadurch gleichen sich die Abweichungen so weit aus, daß die Lage der Kurven in bezug auf den Nullpunkt der Messung im Mittel jedenfalls auf $\pm$ 0,1 mm, d. h. im Maßstab der Originalzeichnung $\pm$ 1 mm, festliegt. Bei den Messungen, die auch Angaben über die L.A. enthalten, stehen infolge der oben besprochenen Teilung des Spaltes auf die Strahlung der einfachen und die der doppelten Schicht nicht mehr so viel Meßpunkte zur Verfügung. Es kommen durchschnittlich nicht mehr als 3 Meßpunkte (bisweilen auch weniger) auf jeder Kurve in Betracht. Immerhin wird die Fehlergrenze wohl auch eher schon zu hoch gesteckt sein, wenn wir die Lage der Kurven auf $\pm$ 0,2 mm genau annehmen. Der Abstand zwischen je 2 Kurven, der zur Bestimmung des I.V. führt, würde also im ungünstigsten Falle mit einem Fehler von 0,4 mm behaftet sein.

In dem Beispiel Aufn. Cs 272 b (Fig. 20) bedeutet die Änderung des Abstandes der Kurven I und II um $\pm$ 2 mm eine Änderung des I_2'/I_1'-Wertes um $\pm 4^1/_2$ Proz. Bei den verschiedenen ϱ-Werten dieser Aufnahme führt eine Änderung im Abstande der Kurven um $\pm$ 2 mm zu einer Fehlergrenze von $\pm$ 3 Proz. Diese beiden Fehler können sich im ungünstigsten Falle addieren. Der größte mögliche Fehler beträgt also $\pm$ 8 Proz., ein Fehler, der aber in Wirklichkeit wohl nie vorliegen wird. Was die Genauigkeit der Aus-

1) Vgl. die Angaben in dem Tabellenwerk von Landolt-Börnstein S. 902ff.

wertung der k-Werte (Formel III—VI) anbelangt, so spielt bei ihnen die Korrektion durch den k. G., wie man sich an Fig. 20 überzeugen kann, nur eine untergeordnete Rolle. Die

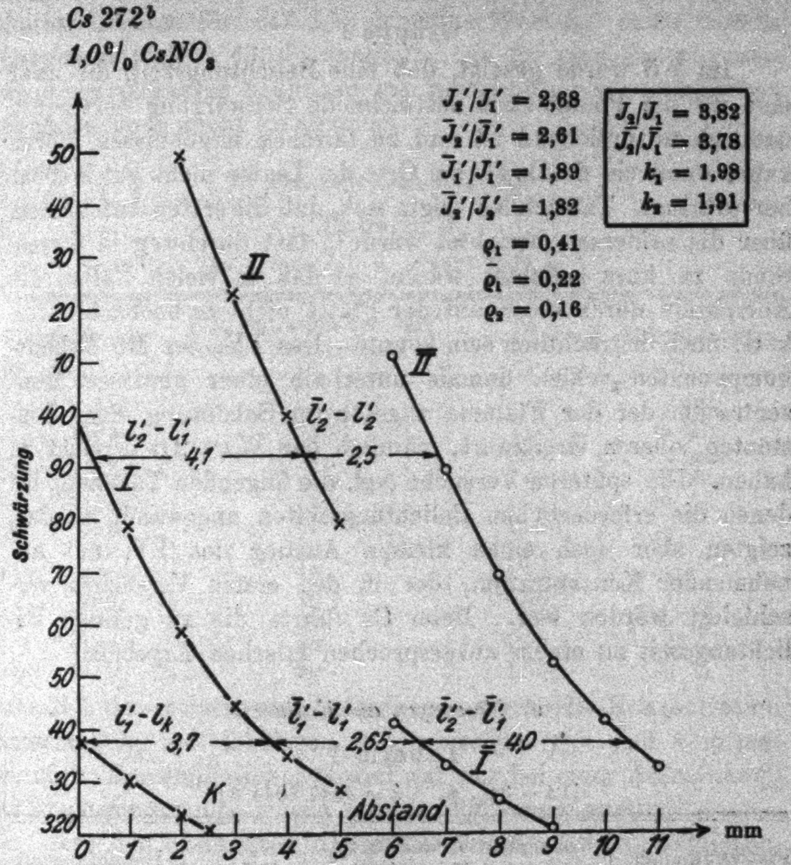


Fig. 20

Intensitätsverhältnisse $\bar{I}_1/I_1$, $\bar{I}_2/I_2$ sind also ebenso wie $\bar{I}_1'/I_1'$ und $\bar{I}_2'/I_2'$ auf etwa $\pm$ 3 Proz. genau ermittelt. Aber nun geht in die k-Werte noch der Betrag des Reflexionsvermögens ein, der auf etwa 5 Proz. genau sein dürfte. Der Betrag von 8 Proz. muß also auch bei den k-Werten als Fehlergrenze angesehen werden.

§ 7. Resultate

Die Resultate der Arbeit sollen in 2 Gruppen besprochen werden. Die erste enthält die Ergebnisse der Messungen, die

ohne Berücksichtigung der Absorption vorgenommen wurden. In der zweiten sind die Ergebnisse der gleichzeitigen Messungen des I.V. und der L.A. enthalten.

Gruppe I

Im § 5 wurde gezeigt, daß eine Belichtungszeit, die zwar eine für die Photometrie ausreichende Schwärzung hervorruft, dennoch unzureichend ist und zu falschen Ergebnissen führen kann, wenn sie den k. G. am Orte der Linien nicht gut meßbar hervorbringt. Tatsächlich zeigte sich, daß die ersten Aufnahmen, über die seinerzeit berichtet wurde[1]), fast durchweg in diesem Sinne zu kurz belichtet waren, so daß in vielen Fällen die Korrektion durch einen auf der Platte nicht zu beobachtenden k. G. noch beträchtlich sein konnte. Das I.V. der Rb-Dublettkomponenten schien damals unterhalb einer gewissen Konzentration der der Flamme zugeführten Salzlösung einen konstanten oberen Grenzwert, nämlich den Wert 2,0 erreicht zu haben. Die späteren Versuche (vgl. die folgenden Tabellen), bei denen die erforderlichen Belichtungszeiten angewandt wurden, zeigten aber noch einen kleinen Anstieg des I.V. mit abnehmender Konzentration, der in den ersten Versuchen verschleiert worden war. Beim Cs führte die zu geringe Belichtungszeit zu einem ausgesprochen falschen Ergebnis.

a) *Messungen am Kalium*

Tabelle 1

[$1s - 3p_1, p_2$ $\lambda = 4047/4044$ Å]

Plattennummer	Konzentration der verwendet. Salzlösung in %	$\frac{I_2}{I_1}$	Belichtungzeit
K 122b	1/2	1,98	4 Stdn.
121	2	1,99	1 1/2 Stde.
120	4	2,02	1 1/2 „
122c	4	1,99	3/4 „
122d	10	1,80	1/4 „

Auf den in der Tab. 1 angegebenen Aufnahmen war nirgends ein k. G. festzustellen. An den in Spalte III mitgeteilten Werten von I_2/I_1 waren also keine Korrektionen bezüglich des k. G. anzubringen. Allerdings muß man gemäß dem in § 5 Gesagten

1) H. Jakob, Naturwissenschaften 13. S. 906. 1925.

bei den Aufnahmen mit $^1/_2$- und 2 proz. Lösung noch eine Erhöhung um etwa 15 Proz. zulassen. Man kann demnach auch noch nicht mit Sicherheit sagen, ob der bei Färbung mit 4 proz. Lösung für das I.V. erreichte Wert 2,0 einen oberen Grenzwert (vgl. S. 453ff.) darstellt. Die für eine Prüfung notwendigen stärkeren Schwärzungen waren bisher aus technischen Gründen noch nicht zu erzielen.

b) *Messungen am Rubidium*

Tabelle 2

[$1s - 3p_1, p_2$ $\lambda = 4216/4202$ Å]

Plattennummer	Konzentration der verwendet. Salzlösung in %	$\frac{I_2}{I_1}$	Belichtungszeit
Rb 111 b*	$^1/_2$	2,06	2 Stdn.
110 b	2	1,97	15 Min.
111 c	2	1,94	1 Stde.
111 d	4	1,92	10 Min.
112 c	4	1,95	20 „
23 b	6	1,84	8 „
23 c	8	1,80	6 „
22 b	10	1,70	5 „
22 c	10	1,76	5 „
112 e	10	1,76	10 „
114 a	20	1,82	4 „
114 b	20	1,76	2 „

Bei den vorstehenden Messungen wurde die Konzentration zwischen $^1/_2$ und 20 Proz., d. h. zwischen $^1/_{40}$- und 1-normal variiert. Kontinuierlicher Grund war nur bei einer Aufnahme (*) zu konstatieren und wurde dort in Rechnung gesetzt.

Aus den Resultaten dieser Tabelle könnte man schließen, daß das I.V. schon etwa bei 4 proz. Lösung einen *oberen Grenzwert* vom Betrage 2,0 erreicht. Ferner folgt aus den gemessenen Schwärzungen, bzw. der Länge der Linien auf der Platte (vgl. S. 470), daß bei diesen Aufnahmen (von 4 Proz. abwärts) die mögliche Erhöhung des I.V. infolge eines (unterdrückten) k.G. im allgemeinen kleiner als 15 Proz., bei einigen Werten sogar kleiner als 10 Proz. ist. Indessen weist der Vergleich dieser Versuche mit den späteren darauf hin, daß die geringe Zentrenzahl, bei der das I.V. konstant bleibt, in Wirklichkeit hier doch noch nicht vorlag. Der Grund hierfür ist vielleicht in einem unregelmäßigen Arbeiten des Zerstäubers zu suchen,

welches zur Folge hat, daß Änderungen in der Konzentration der Lösung nicht immer von entsprechender Änderung der Teilchenzahl in der Flamme begleitet sind. Versuche mit einem von Beckmann[1]) konstruierten Zerstäuber sind im Breslauer Institute im Gange.

Aus demselben Grunde läßt sich auch aus diesen Versuchen noch nicht angeben, ob ein *unterer Grenzwert* erreicht wurde.

c) *Messungen am Cäsium*

Tabelle 3

[$1s - 3p_1, p_2$ $\lambda = 4593/4555$ Å]

Plattennummer	Konzentration der verwendet. Salzlösung in %	$\frac{I_2}{I_1}$	Belichtungszeit
Cs 106 *	1	4,16	30 Min.
105 *	1	4,12	30 "
138b*	1/2	4,06	20 "
139b	1	4,04	15 "
141b*	1	4,10	15 "
134c	1/2	4,04	10 "
141c*	2	4,05	7 "
140b	2	3,87	7 "
136d	4	3,63	2 "
137a	4	3,64	2 "
141d	10	3,31	1 "
140c	20	3,12	1/2 "

Die Einordnung erfolgte hier wieder im Sinne wachsender Lösungskonzentrationen. Doch sind einige Umstellungen vorgenommen worden bei Aufnahmen, bei denen aus der Belichtungszeit und der mit ihr erzielten Schwärzung zu schließen war, daß die Dampfdichte ebenso groß oder vielleicht größer war als bei anderen Aufnahmen mit stärkerer Konzentration. Es war bei der Mehrzahl der Aufnahmen mit geringer Dampfdichte ein k.G. zu messen; die diesbezügliche Korrektion ist in den mitgeteilten I_2/I_1-Werten bereits angebracht. Bei 2 proz. Lösung wird hier ein Grenzwert des I.V. vom Betrage $\approx 4{,}0$ erreicht, der sich bei weiterer Herabsetzung der Konzentration nicht mehr ändert; der Mittelwert aus den Ergebnissen der Aufnahmen von 2 Proz. abwärts ist 4,05. Ein deutliches Ab-

1) E. Beckmann u. H. Lindner, Ztschr. f. physikal. Chem. 82. S. 650. 1913.

sinken des I_2/I_1-Wertes beginnt erst oberhalb einer Konzentration von 4 Proz.; bei hochprozentigen Lösungen wird der Wert 3,12 erreicht. Dieser Wert ist jedoch, wie spätere Aufnahmen zeigen, noch keineswegs ein *unterer* Grenzwert.

Als die ersten Resultate meiner Versuche vorlagen, erschien eine Arbeit von Filippov[1]), der ebenfalls das zweite H.S.-Glied des Cs in Emission, und zwar in der Bunsenflamme, gemessen hat. Er erhielt bei Variation der Dichte der zur Flammenfärbung benutzten Salzlösung (6- bis $^1/_4$-normal) systematisch mit abnehmender Konzentration wachsende Werte für I_2/I_1 im Intervall zwischen 3,4 und 3,8. Auf Grund seiner Versuche vermutet er, daß bei unendlich dünner Schicht der Wert 4,0 erreicht wird. Mit diesem Werte würde sowohl der von mir bei schwacher Flammenfärbung gemessene wie auch der von Roschdestwenski (a. a. O.) aus Dispersionsmessungen ermittelte Betrag (4,07) übereinstimmen. Indessen ist weder bei den oben besprochenen Versuchen am 2. Cs-H.S.-Gliede, noch weniger aber bei den entsprechenden am 2. Rb- und 2. K-Gliede ein eigentlicher Beweis dafür erbracht, daß bei den höchsten, bisher erhaltenen Werten des I.-V. die Zentrenzahl in der Tat so gering ist, daß sie als „unendlich klein" bezeichnet werden kann. Erst in diesem Fall kann streng geschlossen werden, daß der erhaltene Höchstwert den Grenzwert bildet, der das wahre Intensitätsverhältnis $(I.V.)_\infty$ angibt.

Gruppe II

Bei den ersten zur Messung der L.A. angestellten Versuchen wurde zunächst ohne Rücksicht auf das Reflexionsvermögen des Hohlspiegels festgestellt, ob sich das I.V. bei Vergrößerung der Schichtdicke änderte, oder ob es konstant blieb; man konnte also auf Grund dieser Versuche bereits gewisse Schlüsse ziehen, ob man bei den schwachen Konzentrationen das wahre I.V. erreicht hatte oder nicht. Das Ergebnis dieser Versuchsreihe war folgendes:

Beim Cs ergab sich, daß für die schwächsten Lösungskonzentrationen ($^1/_2$ Proz. und 1 Proz.), bei denen das I.V. der Dublettkomponenten den Wert von $\approx 4{,}0$ erreicht, die Vergrößerung der Schichtdicke durch Spiegelung keine Änderung

1) A. Filippov, Ztschr. f. Phys. **26**. S. 477. 1926.

dieses Betrages bewirkt. Bei der stärksten, bei diesen Versuchen angewandten Konzentration wurde dagegen das I.V. durch Spiegelung auf den Wert 2,66 herabgedrückt.

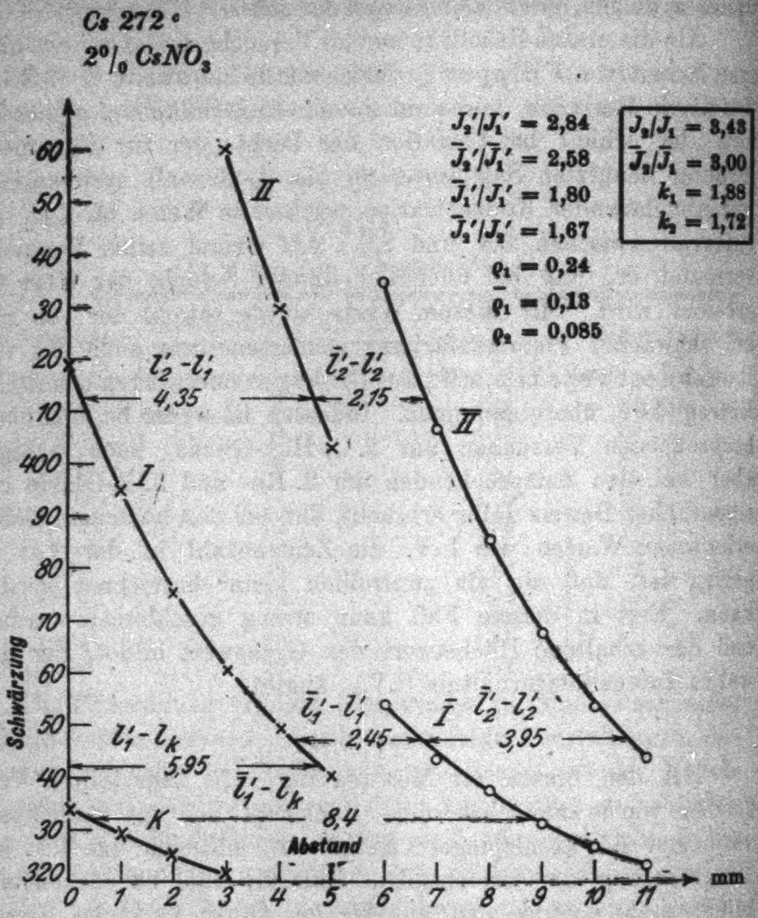


Fig. 21

Beim Rb verursachte die Spiegelung auch bei der geringsten der verwendeten Lösungskonzentrationen ein Absinken des I.V., woraus also zu schließen ist, daß der im vorigen Abschnitt angeführte Höchstwert jedenfalls noch nicht den Grenzwert für unendlich kleine Zentrenzahl darstellt.

Wir kommen nunmehr zu den Ergebnissen der endgültigen Messungen, bei denen gleichzeitig mit dem Intensitätsverhältnis

auch der Betrag der Linienabsorption (k-Wert) an den beiden Komponenten unter Berücksichtigung des Reflexionsvermögens des Spiegels ausgewertet wurde.

Cs 272 c [korrigierte Kurve]
2 % $CsNO_3$

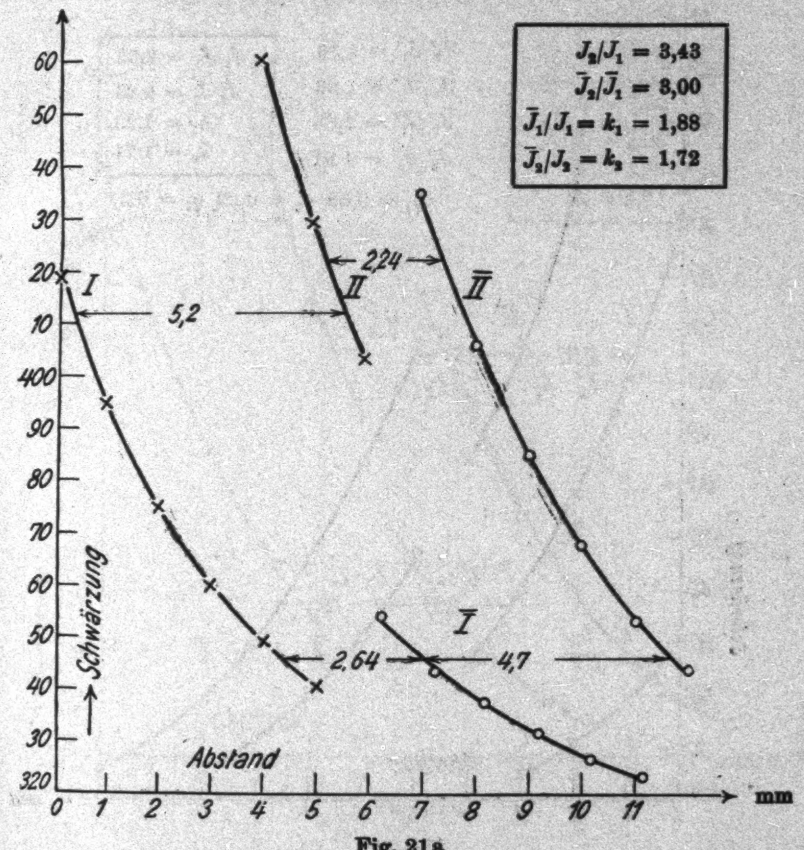


Fig. 21a

Die Art der methodischen Darstellung der für diese Auswertung verwendeten Aufnahmen wurde bereits S. 473 an Hand der Fig. 17 besprochen.

Die Figg. 21 und 22 bzw. 21a und 22a zeigen nun derartige Aufnahmen für das Cs- und Rb-Dublett. Und zwar sind die Kurven in Figg. 21 und 22 direkt durch Eintragung der gemessenen Schwärzungen erhalten, während in Figg. 21a

und 22a die Korrektion für den kontinuierlichen Grund und das Reflexionsvermögen bereits angebracht ist.

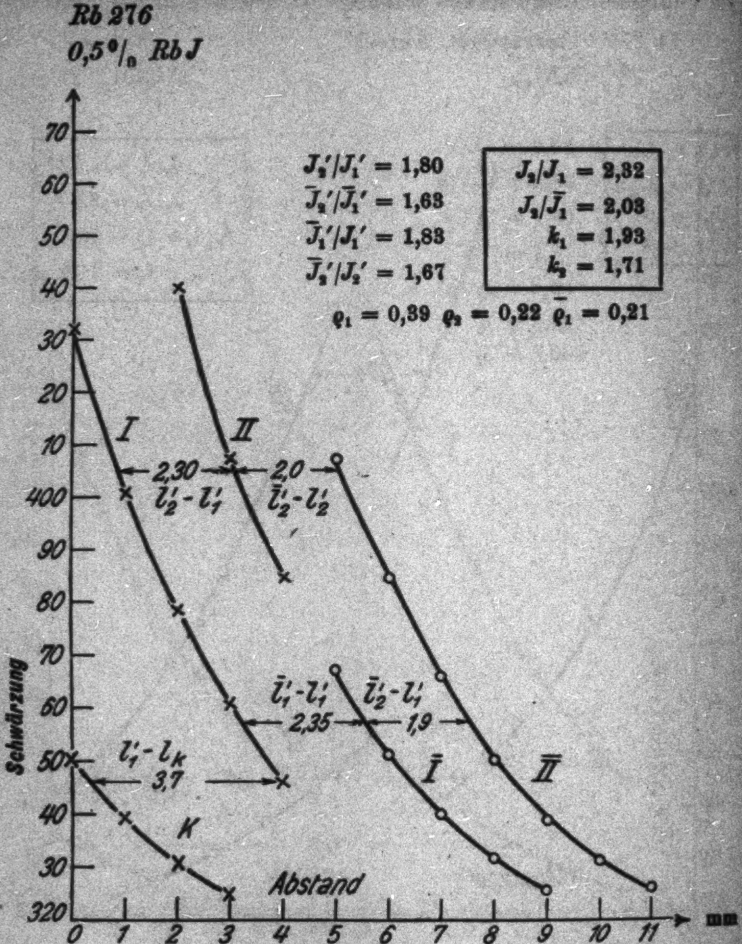


Fig. 22

Aus den Kurven läßt sich zunächst ohne weiteres ablesen, daß das I.V. der Komponenten nicht 2 : 1 sein kann; denn es müßte in diesem Fall nach den eingangs besprochenen Zusammenhängen auch das Verhältnis der Zentrenzahlen $\mathfrak{N}_2 : \mathfrak{N}_1 = 2$ sein, und — Gültigkeit des für das *D*-Licht bewiesenen Beerschen Gesetzes vorausgesetzt — müßte Verdoppelung der Schichtdicke bewirken, daß die Intensität der *schwachen* Komponente bei

doppelter Schicht gleich der der *starken* bei *einfacher* Schicht ist.

Auf unserem Kurvenbild müßte also die Kurve II in der Verlängerung der Kurve Ī verlaufen. Beim Cs ist das durchaus nicht der Fall, aber auch beim Rb besteht ein merklicher

Rb 276

0,5 % RbJ [korrig. Kurve]

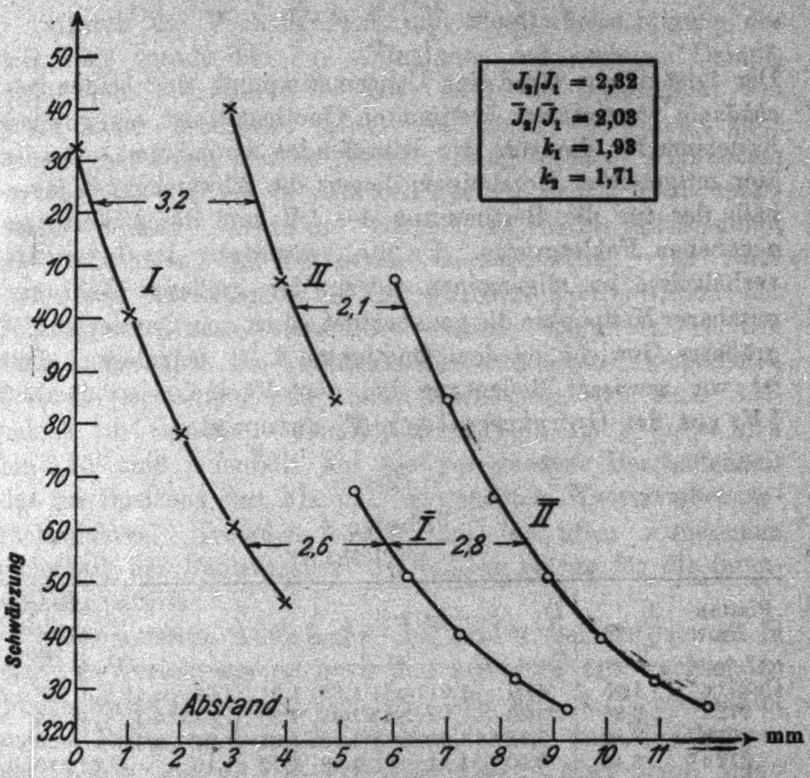


Fig. 22a

Unterschied in dem Abstande der Kurven I und II und dem der Kurven I und Ī bzw. II und II̅.

Die Ergebnisse der Berechnungen am 2. Cs- und 2. Rb-H.S.-Dublett sind in den Tabellen 4 und 5 zusammengestellt.

Die Tabellen enthalten in der ersten Spalte die Aufnahmenummer, in der zweiten und dritten die Intensitätsverhältnisse bei einfacher und doppelter Schicht, in der vierten das Verhältnis der beiden Intensitätsverhältnisse zueinander,

in der fünften und sechsten die k-Werte für die beiden Dublettkomponenten, in der siebenten das Verhältnis der k-Werte zueinander. Schließlich ist in den beiden letzten Reihen der Prozentgehalt der zugeführten Salzlösung und die Belichtungszeit angegeben. Die Quotienten in Spalte 4 und 7 müßten, streng genommen, einander gleich sein. Denn es ist

$$\frac{V}{\bar{V}} = \frac{I_2}{I_1} \cdot \frac{\bar{I}_1}{\bar{I}_2} = \frac{k_1}{k_2}.$$

Der tatsächliche Grad der Übereinstimmung der beiden, *unabhängig* voneinander bestimmten Quotienten ist ein gewisses Kriterium für die Güte der betreffenden Aufnahmen. Bei den hier mitgeteilten Ergebnissen liegen die Abweichungen innerhalb der für die Bestimmung des I.V. und der k-Werte angegebenen Fehlergrenze. Da die Auswertung der Intensitätsverhältnisse im allgemeinen wegen der größeren Zahl ausnutzbarer Meßpunkte die genauere ist, so ist dem Quotienten $V/\bar{V}$ größeres Gewicht als dem Quotienten k_1/k_2 beizulegen. Dies ist von gewisser Bedeutung bei dem Versuch, das „wahre“ I.V. aus der Gouykurve $k = \varphi(\mathfrak{N})$ auszuwerten.

a) *Cäsium*

Tabelle 4

[$\lambda = 4593/4555$ Å]

Platten-Nr.	$\frac{I_2}{I_1} = V$	$\frac{\bar{I}_2}{\bar{I}_1} = \bar{V}$	$V/\bar{V}$	k_1	k_2	k_1/k_2	%	Belicht.-Zeit Min.
Cs 271 a*	4,05	4,07	1,01 (≈1)	1,95	1,91	1,02 (≈1)	1/2	25
272 a*	3,86	3,80	1,02 (≈1)	1,95	1,90	1,025 (≈1)	1/2	25
272 b*	3,82	3,78	1,01 (≈1)	1,98	1,91	1,04 (≈1)	1	20
272 c*	3,48	3,00	1,14	1,88	1,72	1,10	2	10
268 c	3,16	2,77	1,15	1,86	1,66	1,12	4	5
270 c	2,94	2,67	1,10	1,84	1,66	1,11	4	5
268 d	3,01	2,76	1,09	1,81	1,64	1,10	6	3
269 d	2,94	2,70	1,08	1,77	1,62	1,09	8	2
274 c	2,80	2,60	1,08	1,70	1,57	1,08	10	1
269 c	2,74	2,55	1,07	1,70	1,57	1,08	10	1

Aus den ersten drei Aufnahmen der Tab. 4, die die Cs-Aufnahmen enthält, ist ersichtlich, daß ein oberer Grenzwert für das I.V. erreicht wurde, die Zentrenzahl also „unendlich klein“ ist. Dafür sprechen nunmehr außer der Konstanz von I_2/I_1 (innerhalb der Fehlergrenze) und dem Umstand, daß die

Spiegelung den Wert des I.V. nicht erniedrigt, auch die hohen Beträge für k_1 und k_2; sie erreichen annähernd den Grenzwert 2 und stimmen untereinander innerhalb der Fehlergrenze überein. Der Mittelwert des Verhältnisses ist

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{\overline{I_2}}{\overline{I_1}} = 3{,}90\,(\approx 4{,}0).$$

Durch das Vorhandensein und die Berücksichtigung des k.G., der gerade bei den Aufnahmen mit geringer Dampfdichte relativ hohe Werte hat, wird die Genauigkeit von $(\mathrm{I.V.})_w$ stark beeinflußt. Daher hat z. B. Filippov[1]) ganz davon abgesehen, bei so kleinen Dampfdichten Aufnahmen zu machen, wie sie in der vorliegenden Arbeit noch untersucht wurden. Trotzdem scheint es nicht unberechtigt, die Aufnahmen zur Diskussion heranzuziehen. Bei einer Reihe von Aufnahmen, die mit gleicher Konzentration der zugeführten Lösung ausgeführt wurden, zeigte der relative Betrag des k. G. im Verhältnis zur schwachen Komponente, d. h. die Größe ϱ_1, sehr starke Variationen von einer Aufnahme zur anderen. Diese Unterschiede in ϱ_1 ($\varrho_1 = 0{,}19$ bis 0,65) sind jedenfalls auf die verschiedene Beschaffenheit des zur Speisung der Flamme verwendeten Wasserstoffes zurückzuführen. Trotzdem ergab sich bei allen Aufnahmen (innerhalb der Fehlergrenze) der gleiche Betrag für die Intensitätsverhältnisse.

Die weiteren Aufnahmen der Tab. 4 nehmen sowohl in den I.V.-Werten wie auch in den k-Werten mit wachsenden Konzentrationen systematisch ab. Wo kein k.G. beobachtet und in Rechnung gezogen werden konnte, sind Erhöhungen der Werte um 10—15 Proz. denkbar. Aber auch dann würden alle diese Werte beträchtlich unter dem Werte 4,0 liegen. Der niedrigste erreichte Wert für $\overline{I_2}/\overline{I_1}$ ist 2,55; ihm entspricht ein k_2-Wert vom Betrage 1,57, d. h. eine L.A. von 43 Proz. Neue Messungen von Filippov[2]) am 2. Cs-Hauptserienglied in einem Geisslerrohr ergeben für hohe Dampfdichten sogar Werte für $I_2/I_1 < 1$, was auf starke Selbst*umkehr* zurückgeführt werden konnte.

---

1) A. Filippov, a. a. O.

2) A. Filippov, Ztschr. f. Phys. 42. S. 495. 1927.

b) *Rubidium*

Tabelle 5

[λ = 4216/02 Å]

Platten-Nr.	$\frac{I_2}{I_1} = V$	$\frac{\overline{I}_2}{\overline{I}_1} = \overline{V}$	$V/\overline{V}$	k_1	k_2	k_1/k_2	%	Belichtungszeit
Rb 276*	2,32	2,08	1,14	1,93	1,71	1,18	½	8 Stunden
262 c*	2,21	1,98	1,11	1,81	1,66	1,09	1	1 Stunde
263 d*	2,15	1,96	1,10	1,81	1,64	1,10	1	1½ „
263 a*	2,16	2,00	1,08	1,80	1,64	1,10	2	¾ „
262 d*	2,04	1,90	1,07	1,70	1,57	1,08	2	35 Minuten
264 a*	1,99	1,83	1,09	1,71	1,57	1,09	4	25 „
260 a*	1,99	1,80	1,10	1,70	1,52	1,12	4	35 „
261 b	1,89	1,77	1,07	1,66	1,55	1,07	8	10 „
264 c	1,80	1,68	1,07	1,60	1,49	1,07	8	10 „
261 c	1,71	1,58	1,08	1,62	1,49	1,09	10	10 „
265 b	1,75	1,67	1,05	1,63	1,54	1,06	10	5 „
275 b	1,71	1,58	1,08	1,58	1,45	1,09	10	5 „

Die Werte der in Tab. 5 angegebenen I.V. nehmen mit wachsender Lösungskonzentration systematisch ab. Selbst bei der niedrigsten Konzentration ist deutlich zu sehen, daß hier (vgl. die Diskussion der Tab. 2 auf S. 481) im Gegensatz zum Cs ein *oberer Grenzwert* noch nicht erreicht ist.

Bei der stärksten Konzentration wird der I.V.-Wert 1,58 und der k_2-Wert 1,45 erreicht. Innerhalb der Fehlergrenze ist das der Grenzwert, der nach den Gouyschen Messungen[1]) und der Theorie zu erwarten wäre. Ob man es wirklich mit einem *unteren Grenzwert* von I_2/I_1 und k zu tun hat, ließ sich nicht prüfen, da eine weitere Steigerung der Lösungskonzentration nicht durchführbar war.

§ 8. Zusammenfassende Diskussion der Resultate aus § 7

a) Die in den Tabellen mitgeteilten und diskutierten Meßergebnisse für das I.V. und die L.A. lassen schließen, daß der höchste bisher beobachtete Betrag (2,33) für das I.V. der Komponenten des zweiten Hauptseriendubletts des Rb noch keinen oberen Grenzwert darstellt. Das $(I.V.)_\infty$ ist also vermutlich noch größer als 2,33. Am entsprechenden Glied des Cs[2]) dagegen scheint in einem dem Werte 4,0 angenäherten Betrage ein *oberer Grenzwert* und somit das $(I.V.)_\infty$ erreicht zu

1) G. L. Gouy, a. a. O.

2) Dieser Wert wird bestätigt durch Messungen von C. F. Hagenow u. A. Ll. Hughes in der Bunsenflamme (Phys. Rev. 30 [2]. S. 284. 1927).

sein, was sowohl aus den Messungen der L.A. wie aus dem Vergleiche der I.V.-Werte bei einfacher und verdoppelter Dampfschicht erschlossen wird. Die vorläufig erreichte, noch sehr geringe Meßgenauigkeit (± 6 Proz.) erlaubt noch keine *exakte* Angabe des Wertes von $(\mathrm{I.V.})_w$. Doch kann mit Sicherheit ausgesagt werden, daß dieser Wert den nach der Burger-Dorgeloschen Intensitätsregel III zu erwartenden Betrag 2,0 weit überschreitet.

Am zweiten Kaliumgliede konnten bisher Messungen der L.A. noch nicht vorgenommen werden. Daher steht ein endgültiger Beweis, ob der in § 7 S. 480 mitgeteilte Höchstwert von ungefähr 2,0 dem $(\mathrm{I.V.})_w$ entspricht, noch aus.[1])

Die oben (S. 453ff.) angegebenen allgemeinen Beziehungen zwischen I und $\mathfrak{R}$ bzw. k und $\mathfrak{R}$ lassen ebenfalls gewisse Extrapolationen auf den Wert des $(\mathrm{I.V.})_w$ zu. Beim Rb ergibt sich durch Quadrieren (vgl. S. 490) des kleinsten gemessenen I.V.-Wertes vom Betrage 1,58, dem der Wert $k_2 = 1{,}45$ entsprach, der Betrag 2,5. Da k_2 nicht mehr wesentlich von der unteren Grenze $1{,}41 = \sqrt{2}$ entfernt ist, so dürfte dieser Wert 2,5 (unter Voraussetzung der Gültigkeit der auf die Dispersionstheorie gegründeten Beziehung zwischen I und $\mathfrak{R}$) das *wahre Intensitätsverhältnis* mit großer Annäherung darstellen. Roschdestwenski[2]) erhielt durch Messung der anomalen Dispersion an dem betrachteten Rb-Dublett den Wert 2,57; Gouy[3]) extrapolierte aus seinen Helligkeitsmessungen für das „wahre" I.V. den Wert 2,9.

Der für das zweite Cs-Glied aus dem kleinsten gemessenen Werte für I.V. durch Quadrieren erhaltene Betrag 6,5 dürfte dagegen den Wert für $(\mathrm{I.V.})_w$ überschreiten, da k_2 hier erst den Betrag 1,57 errreicht hat.

b) Bei einem Versuche, das $(\mathrm{I.V})_w$ bzw. das Verhältnis $\mathfrak{R}_2/\mathfrak{R}_1$ aus der Gouyschen Kurve $k = \varphi(\mathfrak{R})$ mit Hilfe der gemessenen k-Werte zu ermitteln, kann man entweder mit den direkt gemessenen Größen k_1, k_2 in die genannte Kurve eingehen, oder man kann, was eventuell genauer ist, den k_2-Wert

---

1) Vgl. aber die auf S. 451 zitierte Arbeit von A. Prokofiev und die oben (S. 490) zitierte Arbeit von C. F. Hagenow u. A. Ll. Hughes.

2) D. Roschdestwenski, a. a. O. 1921.

3) G. L. Gouy, a. a. O.

aus k_1 mit Hilfe der in den Tabellen 4 und 5 angegebenen Beträge von $V/\bar{V}$ berechnen und die so erhaltenen Wertpaare k_1, k_2 zur Ausrechnung benutzen. Bei den k-Werten, die nahe der oberen oder unteren Grenze liegen, hat diese Ermittlung des $(\mathrm{I.V.})_w$-Wertes bei der oben angegebenen, vorläufig noch relativ geringen Meßgenauigkeit der L.A. keinen Sinn; denn hier ist mit einer geringen Änderung im k-Werte eine so große Änderung des $\mathfrak{R}$-Wertes verbunden, daß man jedes beliebige Verhältnis $\mathfrak{R}_2/\mathfrak{R}_1$ herausbekommen kann. Die Berechnungen wurden also nur für die mittleren k-Werte (etwa $k = 1{,}80$ bis 1,55) ausgeführt.

Für das zweite Rb-Glied erhält man in dieser Weise Werte zwischen 1,9 und 2,6; für Cs dagegen erhält man Zahlen, die zwar durchweg über 2,0 liegen, aber wesentlich kleiner sind als die direkt gemessenen $(\mathrm{I.V.})_w$. Da jedoch eine relativ kleine, noch innerhalb der Fehlergrenze liegende Änderung von k diese Abweichung bereits nahezu ausgleicht, kann noch nicht entschieden werden, ob die Diskrepanz an der Ungenauigkeit unserer k-Messungen liegt, oder ob die Gouysche Kurve bzw. die bei ihrer Berechnung angenommene Intensitätsverteilung innerhalb der Linie hier keine Gültigkeit hat.

c) Aus den beobachteten Abweichungen von der Burger-Dorgeloschen Intensitätsregel III folgt somit, daß beim zweiten Hauptserienglied von Rb und Cs wenigstens in der Knallgasflamme die Übergangswahrscheinlichkeiten für die beiden Komponenten *ungleich* sind; d. h. also, daß $a_{3p_2 \to 1s} \neq a_{3p_1 \to 1s}$ ist.

Hierbei ist allerdings angenommen, daß „natürliche Anregung" vorliegt, eine Annahme, die durch besondere Versuche zu prüfen ist.[1]) Es wäre aber noch verfrüht, Folgerungen hieraus zu ziehen, solange nicht weiteres Versuchsmaterial vorliegt. Arbeiten hierüber sind im Breslauer Institut in Angriff genommen.

§ 9. Zusammenfassung und Schluß

Nach der von Merton angegebenen photographisch-photometrischen Methode wurde an möglichst heißen Flammen das Intensitätsverhältnis der Komponenten des zweiten Haupt-

1) Inzwischen bestätigt durch Versuche von H. Kohn, Phys. Ztschr. 29. S. 49. 1928.

seriendubletts von Kalium, Rubidium und Cäsium in Abhängigkeit von der Dampfdichte gemessen. Dazu wurde eine Knallgasflamme von möglichst geringer Schichtdicke verwendet.

Für *K* wurden dabei Werte zwischen 1,80 und 2,02 gefunden.

Die von Merton angegebene „Rastermethode" wurde verbessert und ihre Anwendbarkeit geprüft und diskutiert.

Am zweiten Hauptseriengliede des Rubidium und Cäsium wurde außerdem nach einer Methode von Gouy die Linienabsorption gemessen, um das Intensitätsverhältnis der Komponenten bei unendlich kleiner Zentrenzahl („wahres" Intensitätsverhältnis) festzustellen. Dabei ergab sich als Resultat:

Das „wahre" Intensitätsverhältnis der Komponenten des zweiten Cäsiumhauptseriengliedes hat in der Knallgasflamme angenähert den Betrag 4,0.

Beim Rubidium hat sich der Wert für das „wahre" Intensitätsverhältnis der Komponenten des zweiten Hauptseriengliedes noch nicht erreichen lassen. Er ist aber sicher größer als 2,3. Diese Ergebnisse sind in deutlichem Gegensatz zu der sogen. Intensitätsregel III der Utrechter Schule, nach der das I.V. der genannten Linien den Wert 2,0 haben sollte.

Die vorliegende Arbeit wurde im physikalischen Institut der Universität Breslau in den Jahren 1924 bis 1926 auf Anregung von Hrn. Prof. Dr. R. Ladenburg ausgeführt. Für das Interesse, das er dem Fortgange der Untersuchungen stets entgegenbrachte, spreche ich ihm an dieser Stelle meinen wärmsten Dank aus.

Ganz besonders verpflichtet bin ich Fräulein Dr. H. Kohn, die nach dem Weggange von Hrn. Prof. Dr. Ladenburg aus Breslau die Leitung der Arbeit übernahm. Insbesondere verdanke ich ihr die Anregung zu der gleichzeitigen Messung von Linienabsorption und Intensitätsverhältnis.

Hrn. Prof. Dr. E. Waetzmann danke ich für wohlwollende Förderung meiner Studien.

Der Helmholtzgesellschaft danke ich für die Bereitstellung der Mittel zur Beschaffung eines Teiles der benötigten Optik.

Breslau, Physik. Inst. der Universität, April 1928.

(Eingegangen 26. April 1928)

2. *Zur Theorie der Temperatur- und Dichteabhängigkeit des Brechungsexponenten*

Messungen derselben an Flüssigkeiten nach einer interferometrischen Methode;

von Gerhard Peters

(Gekürzte Frankfurter Dissertation)

A. Theoretischer Teil

Aufgabe der vorliegenden Arbeit war die theoretische und experimentelle Behandlung der Abhängigkeit des Brechungsindex von *Temperatur* und *Dichte*. Da die reine Temperaturfunktion des Brechungskoeffizienten jedoch vollständig vor der überlagernden Wirkung der Dichte in den Hintergrund tritt, und erst die Abhängigkeit der Dichte selbst von der Temperatur auch eine *scheinbar* stärkere Temperaturabhängigkeit des Index hervorruft, so ist in erster Linie seine *Dichteabhängigkeit* zu untersuchen und zwar im folgenden lediglich bei gegegebener Wellenlänge.

Ganz allgemein drängt sich die Feststellung auf, daß Körper größerer Dichte meist auch den größeren Brechungsindex aufweisen. Nur alle Doppelbindungen aufweisenden Stoffe sind, wie aus jedem Diagramm ersichtlich, bei prinzipiellen Betrachtungen gewisser Regelmäßigkeiten, wie sie im Verlauf der Abhandlung vorgenommen werden, auszuscheiden. (Als der Regel folgend ist der später im experimentellen Teil benutzte Wert für Cyanwasserstoff zu beachten, der mit $n = 1{,}2675$ wohl der kleinste bei Flüssigkeiten vorkommende ist.)

1. Die Formeln von Newton, Dale und Gladstone, Lorentz und Lorenz

Schon früh ist damit begonnen worden, über diese Feststellung eines allgemeinen Dichteeinflusses hinaus auch den Zusammenhang zwischen dem Brechungsindex und der sowohl

mittels Temperatur- wie auch Druckeinwirkung variablen Dichte einer gegebenen Substanz aufzuklären.

Als erster stellte Newton auf Grund der ihm vorliegenden Versuchsergebnisse und Theorien die Formel $\frac{n^2-1}{d} = \text{const.}$ auf, die später (1805) Laplace nochmals aus den Prinzipien der Newtonschen Emanationstheorie ableitete, und die darauf zu den ersten diesbezüglichen Berechnungen von Arago und Biot, sowie von Dulong zur Erklärung ihrer Beobachtungen herangezogen wurde. Laplace benützte die im Wesen der Emanationstheorie begründete Möglichkeit, zwischen den Licht- und Körperteilchen, die beide als dem Gesetz der Schwere unterworfen gedacht waren, eine theoretische Verknüpfung zu finden.

Die überraschende Verwendungsfähigkeit der so abgeleiteten Formel machte sie zu einer der letzten und festesten Stützen im Kampf gegen die sich allmählich durchsetzende Undulationstheorie.

Auf der anderen Seite jedoch wurden die ihr anhaftenden Ungenauigkeiten als für die Unbrauchbarkeit der ihr zugrunde liegenden Hypothese beweiskräftig angeführt. So liest man beispielsweise bei Jamin im Hinblick auf diese Verhältnisse über die Abhängigkeit des Brechungsexponenten von der Dichte: „La théorie de l'émission prévoit ces variations, de plus elle établit que le pouvoir réfringent doit rester constant, quelque soit le changement que la densité éprouve. D'un autre côté, la théorie des ondulations bien qu'elle admette la nécessité des variations de l'indice, n'en détermine aucunement la loi.“ Jedoch glaubt er, diese Stütze der Newtonschen Theorie, die er selbst als „un des derniers arguments“ bezeichnet, mit seinen Untersuchungen an Wasser gebrochen zu haben, deren Ergebnis er im folgenden zusammenfaßt: „Il y a donc réellement une grande analogie entre les lois de variation de l'indice et de la densité, seulement le maximum des valeurs observées dans les deux cas se présente à des températures très-inégales; c'est justement ce qui montre l'indépendence des deux phénomènes.“

Trotz der auch seitens anderer Forscher erfolgenden Ablehnung versuchte noch einmal Schrauf (1862), sie zu retten

und den Prinzipien der Undulationstheorie anzupassen, indem er ausgehend von der Cauchyschen Dispersionsformel

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} \cdot \cdot,$$

sie erneut ableitete. Schon vor ihm hatte Beer (1853) den Ausdruck versuchsweise durch den einfacheren $\frac{n-1}{d}$ = const ersetzt, da ihre gegenseitigen Abweichungen „innerhalb der Fehlergrenze liegen und beide Auslegungen daher gleichberechtigt sind".

Meistens wird die Aufstellung dieser Formel den beiden englischen Physikern Dale und Gladstone zugeschrieben und nach ihnen benannt, die sie erneut auf Grund ihrer eigenen vielseitigen Messungen rein empirisch, ohne Kenntnis der Beerschen Priorität aufstellten. Das diesbezügliche Ergebnis ihrer Untersuchungen fassen sie wie folgt zusammen: „The amount of sensitiveness ist not directly proportional to the change of density produced by alteration of temperature, yet there is some relationship between the two phenomena... In the case of every of these liquids the refractive index of any ray alters less rapidly than the volume: but it was found, that the refraktion index minus unity, multiplied by the volume, gives nearly a constant... The ratio between the density and the mean refraction, $n-1$, is almost constant."

Ihre Formel lautet daher ebenfalls $(n-1)\,v = \frac{n-1}{d}$ = const. Dieser Ausdruck befriedigt im allgemeinen die an ihn gestellten Ansprüche mehr als der von Newton stammende; jedoch macht er mangels jeder theoretischen Unterlage keinen Anspruch auf wissenschaftlichen Wert.

Eine dritte, augenblicklich sowohl wegen ihrer größeren Anpassung an das Experiment, wie auch wegen ihrer besseren *theoretischen* Fundierung allgemein bevorzugte Formel

$$\frac{n^2-1}{n^2+2} \cdot \frac{1}{d} = \text{const}$$

wurde im Laufe der Zeit von einer Reihe namhafter Physiker von den verschiedensten Grundlagen aus abgeleitet.

Im Rahmen *elektrostatischer* Untersuchungen über das Verhalten dielektrischer Medien im elektrischen Felde wurde

sie von Clausius (1876) in der Form $g = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}$ abgeleitet, nachdem schon bedeutend früher (1847) Mosotti die Grundlagen für die von Clausius benutzten Anschauungen entwickelt hatte, indem er die von Poisson für die mathematische Behandlung des Magnetismus gewählte Hypothese der Molekularmagnete auch bei seinen elektrostatischen Betrachtungen verwandte. g bedeutet den von den Molekeln pro Volumeinheit tatsächlich eingenommenen Raum.

Aus diesem Ausdruck leitet Exner (1885) phänomenologisch obige Formel ab, indem er davon ausgeht, daß bei einer Dichteänderung etwa durch Kompression bis zum doppelten Werte von d auch die Raumerfüllung auf das doppelte gestiegen sein muß, daß also beide Größen einander proportional gehen müssen, gemäß der Gleichung

$$\frac{\varepsilon - 1}{(\varepsilon + 2)\, d} = \text{const} \quad \text{oder} \quad \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2}\, \frac{1}{d} = \text{const}.$$

Zu demselben Resultate gelangten unabhängig voneinander (1880) H. A. Lorentz in Leyden und L. Lorenz in Kopenhagen, beide auf verschiedene Weise von der Grundlage *lichttheoretischer* Annahmen aus.

Als Grundvoraussetzung wird bei Clausius, Lorentz und Lorenz gleichmäßig die Unterscheidung zwischen einem den ganzen Raum isotrop erfüllenden, vollkommen *nichtleitenden Medium* und darin gebetteten *leitenden Körperchen* gemacht, bei Clausius als dielektrisches Medium und leitende Teilchen schlechthin bezeichnet, bei Lorentz und Lorenz als Äther und Molekeln angenommen. Diese Teilchen bzw. Molekeln, werden von Lorenz von vornherein als *kugelförmig* in der Rechnung behandelt, von Lorentz und Clausius jedoch erst nach der Überlegung, daß auch für den Fall irgendwelcher richtungsbevorzugter Formen die gleiche Wahrscheinlichkeit aller vorkommenden Lagen dasselbe Resultat bedinge.

Die Eigenschaften des nichtleitenden Mediums werden denen des leeren Raumes gleich angenommen.

Lorentz und Lorenz führen noch die immer berechtigte Vereinfachung ein, daß der Molekülabstand im Vergleich zur Wellenlänge zu vernachlässigen sein möge.

Nicht unwichtig für die Parallelität der mathematischen Entwicklung ist auch die Einführung einer der *äußeren Kraft proportionalen Polarisation* innerhalb der leitenden Teilchen, die bei Clausius die gesamte Behandlung des Problems beherrscht und bei Lorenz ebenfalls in analogen Überlegungen in den Vordergrund tritt. Auch die in dem Lehrbuch von Abraham-Föppl ausgeführte mathematische Behandlung einer homogen polarisierten Kugel, liefert letzten Endes unter der Voraussetzung der *Proportionalität* zwischen wirkender *Kraft* und *Polarisation* ebenfalls die Beziehung

$$\frac{P}{E_0 r^3} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \text{const.}$$

Es erscheint verwunderlich, daß diese anscheinend so gut fundierte Formel dennoch den experimentellen Befunden nicht genügend nahe kommt und in manchen Fällen sogar recht abweichende Werte zeitigt. Angesichts der vielen, zu gleichem Ergebnisse führenden Untersuchungen können die Ursachen dieser Abweichungen wohl nur in einer Ungenauigkeit einer der allen gemeinsamen Voraussetzungen gesucht werden. Es sind hier nur zwei Punkte, an denen eine Kritik ansetzen kann, die Aussicht auf Erfolg verspricht: einmal die Annahme über die ausgezeichnete *Gestalt* der Molekeln und zweitens die der Konstanz ihres *Volumens*. Jedoch nur die erste Annahme ist des öfteren einer Kritik unterzogen worden.

2. Die Wienersche Modifikation der Lorenz-Lorentzformel

Als erster leitete Exner (1885) aus den Mängeln der Clausius-Mosottischen Formel, die er zur Berechnung der Atomvolumina benutzte, die Vermutung ab, daß die Voraussetzung der Kugelgestalt eine nicht immer berechtigte Verallgemeinerung bedeutete und auf die tatsächlichen Verhältnisse nicht zutreffe, daß im Gegenteil für die Aufstellung einer befriedigenden Gleichung die verschiedene, von der Kugelform oft recht abweichende Gestalt der integrierenden Teilchen berücksichtigt werden müsse. Nach seiner Aussage wird der Einfluß der Form so lange kein wesentlicher sein, als dieselbe nicht zu sehr von der Kugelgestalt abweicht. „Hätte man es also z. B. mit Würfeln, Oktaedern, Tetraedern und dergleichen zu tun, so würde der Einfluß noch kaum oder gar nicht be-

merkbar sein; anders aber, wenn in der Grundform eine Dimension vorherrscht, wie z. B. bei nadelförmigen Prismen und dergleichen. Hier müßte der Fehler ein sehr bedeutender sein; denn die Größe der Induktion richtet sich nach der größeren Dimension des Körperchens, und ein solches Prisma, in die Richtung der Kraftlinien gebracht, würde fast so wirken wie eine Vollkugel, deren Durchmesser gleich der Längsausdehnung des Prismas ist."

Allgemein gibt also die so berechnete Raumerfüllung immer eine obere Grenze wieder, denn sie bedeutet eigentlich infolge der Annahme der Kugelform die Summe aller der Elementarkugeln, welche die Partikelchen einhüllen würden.

Die gleichen Bedenken, jedoch hinsichtlich der Lorenz-Lorentzformel, äußerte vor wenigen Jahren Wiener (1910) und machte sie zum Gegenstand einer auf diesem Gebiet grundlegenden Arbeit, mit dem Ergebnisse, daß er die Formel durch Einführung einer Variablen im Nenner elastischer gestaltete $\left(\frac{n^2-1}{n^2+u}\,\frac{1}{d} = \text{const}\right)$. Es läßt sich sowohl theoretisch wie experimentell zeigen, daß die Größe u mit der Form der eingelagerten Teilchen variiert und um so mehr von 2 nach größeren Werten hin abweicht, als diese Form von der Kugelgestalt sich entfernt.

Die *Bedeutung* der Größe u ist demnach die, daß sie einen Schluß auf die Form der Molekeln zu ziehen gestattet.

8. Beziehungen zur Thermodynamik

Von besonderem Interesse sind die Momente, die eine Hineinbeziehung thermodynamischer Anschauungen in die vorliegenden Betrachtungen mit sich bringt.

Nach Clausius-Mosotti bedeutet $g = \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\,\frac{M}{d}$ den pro Molvolumen von den Molekülen oder, besser gesagt, ihrer auch als „gebundener Äther" bezeichneten Wirkungssphäre eingenommenen Raum.

Andrerseits gelangt man, von molekulartheoretischen Vorstellungen ausgehend, zu der aus der van der Waalsschen Zustandsgleichung bekannten Größe b als dem 4fachen dieses sogenannten Kernvolumens, woraus sich sofort die Beziehung ergibt:

$$b_k : \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\,\frac{M}{d} = 4\,.$$

Traube hat diese Beziehung zahlenmäßig überprüft und ist an Hand der vorliegenden Messungen zu dem bekannten Ergebnis gekommen, daß in der Tat eine große Zahl von Stoffen dieser Forderung genügt. Die errechneten Werte schwanken zwischen 3,2 und 4,8. Eine bemerkenswerte *Ausnahme* machen auch hier wieder die *Benzol*verbindungen, deren Werte weit unter den normalen liegen. Des weiteren weist er auf die Tatsache hin, daß dieses Verhältnis sich auf 5,62 bis 5,7 erhöht, sobald man den Gaszustand betrachtet, was durchaus mit der schon von Clausius ausgesprochenen Annahme in Einklang steht, daß das im Gaszustande gemessene b_g das $4 \cdot \sqrt{2}$ fache des Kernvolumens betrage.

Die Abweichungen von dem theoretisch geforderten Werte 4 bzw. $4 \cdot \sqrt{2}$ liegen einerseits jedenfalls darin begründet, daß sich die Stoffe nur angenähert nach den Gesetzen des Idealfalles richten. Andrerseits aber ist in den Traubeschen Rechnungen ein grundsätzlicher Fehler enthalten.

Am leichtesten kommt man zu einer übersichtlichen Erfassung der Verhältnisse, wenn man nach dem Vorgang von van Laar alle Stoffe nach der Größe ihrer Abweichungen vom Idealfall in verschiedene Gruppen zusammenfaßt. Dem Idealfall am nächsten stehen ihrem Verhalten nach *Helium* und *Wasserstoff*, es folgt dann etwa eine kleine Gruppe, die in *Argon* und *Sauerstoff* ihre Hauptvertreter hat; in eine dritte Klasse faßt man die große Masse der *„gewöhnlichen Stoffe"*, und in der letzten finden schließlich alle diejenigen Aufnahme, deren Verhalten sich von den Idealgesetzen am weitesten entfernt.

Ferner ist zur Nachprüfung obiger Beziehung die in den einzelnen Gruppen sehr unterschiedliche Abhängigkeit der Größe b von der Temperatur zu berücksichtigen, die als zweifellos feststehend schon von van der Waals anerkannt worden ist, während ihre ebenso wahrscheinliche Abhängigkeit vom Volumen für unsere Betrachtungen, die konstantes Volumen voraussetzen, keine Rolle spielt. I. I. van Laar stellt nun die zu den einzelnen obengenannten Stoffgruppen gehörigen Durchschnittswerte für Kernvolumen k, van der Waalssche Konstante b, und Gesamtvolumen v in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur in folgenden Verhältnissen fest, und zwar jeweils für die kritische Temperatur und den absoluten Nullpunkt.

Tabelle 1

	Ideal	He, H	Arg, O_2	Gew. Stoffe	Grenzst.
$\frac{b_k}{b_0}$	1	1,2	1,5	1,8	2,0
$\frac{v_k}{v_0}$	3	3,2	3,5	3,8	4,0
$k_0 = \frac{k}{v_0}$	0,25	—	0,4	0,54	0,65
$k_k = \frac{k}{v_k}$	$\frac{1}{12}$	—	—	$\frac{1}{7,1}$	$\frac{1}{6,2}$
$\frac{v_k}{b_k}$	2	—	2,33	2,11	2,0

Konstantes Molekularvolumen vorausgesetzt, errechnet sich daraus außerdem:

Tabelle 2

	Ideal	He, H	Arg, O_2	Gew. Stoffe	Grenzst.
$\frac{b_k}{m_k}$	4	—	3,75	3,33	3,08
$\frac{b_0}{m_0}$	4	—	2,50	1,85	1,54

In einem Diagramm veranschaulicht erhalten wir aus diesen Werten ein Bild, wie es Fig. 1 bietet.

Zieht man diese Ergebnisse zur Diskussion unserer Gleichung heran, so kommt man einer Übereinstimmung von Experiment und Theorie nicht unbeträchtlich näher. Damit dürfen auch die folgenden Betrachtungen Beachtung finden.

Die Traube sche Gleichung läßt sich in

$$\frac{n^2-1}{n^2+2}\,v = \frac{b}{x}$$

umformen, worin v und b die molaren Werte wiedergeben sollen und x die Stelle des idealen Wertes 4 eintretende jeweilige Verhältniszahl bedeuten soll.

Aus dieser Formel lassen sich nun leicht nach Einsetzung der zu den betreffenden Temperaturen gehörenden Werte von b, v, und x die Durchschnittsgrößen der Brechungs-

indizes am *kritischen Punkt*, am *absoluten Nullpunkt* und für *Siede- und Schmelzpunkt* unter Benutzung der van Laarschen Angaben und mittels der von R. Lorenz gegebenen empiri-

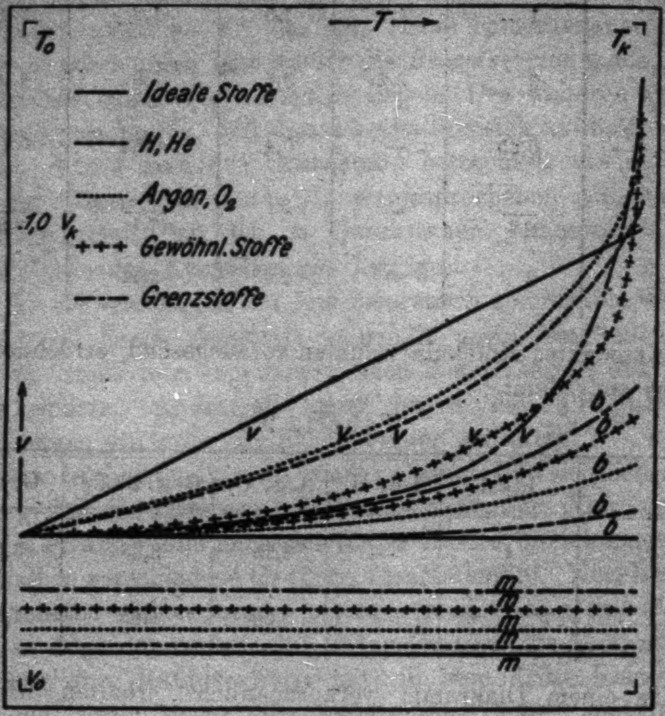


Fig. 1

schen Skala der übereinstimmenden Zustände berechnen. (Tab. 3.)

Es hat den Anschein, als ob die hier angestellten einfachen Berechnungen sich den tatsächlichen Verhältnissen besser anschlössen, als die von Traube und später von Herz genannten Durchschnittswerte, zumal wenn man noch beachtet, daß die von van Laar für die Volumverhältnisse gewöhnlicher Stoffe angegebenen Daten zu hoch gegriffen sind und eher die für Sauerstoff und Argon gefundenen Werte als *gewöhnlich* zu nennen sind. Der Herzschen Schmelzpunktszahl ist entgegenzuhalten, daß die Indizes fester Körper auch am Schmelzpunkt selten unter 1,5 heruntergehen.

Tabelle 8

	Ideal	He, H	Arg, O	Gew. St.	Grenzstoffe
$\frac{n_k^2-1}{n_k^2+2}$	$\frac{b_k}{3\,b_k\cdot 4}$	—	$\frac{b_k}{2{,}33\,b_k\cdot 3{,}75}$	$\frac{b_k}{2{,}11\,b_k\cdot 3{,}33}$	$\frac{b_k}{2\,b_k\cdot 3{,}08}$
$\frac{n_k^2-1}{n_k^2+2}$	$\frac{1}{12}$	—	$\frac{1}{8{,}738}$	$\frac{1}{7{,}026}$	$\frac{1}{6{,}16}$
n_k^2	1,273	—	1,388	1,498	1,582
n_k	1,128	—	1,178	1,224	1,259
$\frac{n_0^2-1}{n_0^2+2}$	$\frac{1}{4}$	—	$\frac{1}{2{,}5}$	$\frac{1}{1{,}85}$	$\frac{1}{1{,}54}$
n_0^2	2,0	—	3,0	4,58	6,564
n_0	1,414	—	1,732	2,128	2,561
$\frac{n_s^2-1}{n_s^2+2}$	$\frac{7{,}5}{65}$	$\frac{9}{52}$	$\frac{12}{55}$	$\frac{16{,}2}{43}$	$\frac{20}{40}$
n_s^2	1,39	1,63	1,82	2,81	4,00
n_s	1,18	1,276	1,35	1,677	2,00
$\frac{n_e^2-1}{n_e^2+2}$	$\frac{7{,}5}{55}$	—	—	$\frac{16{,}2}{36{,}5}$	$\frac{20}{35}$
n_e^2	1,58	—	—	3,47	5,00
n_e	1,25	—	—	1,86	2,23

Für die hier angewandte Klassifizierung spricht auch die von Herz veröffentlichte Mitteilung, daß die Dielektrizitätskonstanten ($\varepsilon_k = n_k^2$) der von ihm berechneten Flüssigkeiten zwischen 1,27 und 1,70 schwanken, soweit sie nicht *Dipol*charakter haben.

II. Reiner Einfluß der Temperatur

Pulfrich hat nachgewiesen, daß amorpher Quarz bei einer Temperaturerhöhung zwar seine Dichte kaum verändert, wohl aber eine beträchtliche Verringerung des *n* aufweist. Pulfrich hat darauf den reinen Einfluß der Temperatur nach einer von ihm gegebenen Theorie berechnet, derzufolge der gesamte Einfluß auf den Index sich additiv zusammensetzt aus dem *reinen* Dichteeinfluß und dem *reinen* Temperatureinfluß.

Von den zahlreichen Versuchen, den Temperatureinfluß zu sondern, sei hier nur der von Ketteler erwähnt, der (1888)

aus seiner Lichttheorie die Beziehung $(n^2 - 1)(v - \beta) = M$ ableitete, worin v das Volumen der Masseneinheit, β das von den Molekeln der Masseneinheit tatsächlich erfüllte Volumen und M die Molekularrefraktion bedeutet. Durch Kombination dieser Gleichung mit dem phänomenologisch gefundenen Ausdruck der Temperaturfunktion des Index $M_1 = C(1 + \alpha e^{-kT})$ erhält er dann

$$(n^2 - 1)(v - \beta) = C(1 + \alpha e^{-kT}).$$

Nimmt man nun mit Clausius an, daß $\beta = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}$, so kommt man nach geringer Umrechnung schließlich zu dem Ausdruck

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} v = \frac{1}{3} C(1 + \alpha e^{-kT}),$$

der unter Umständen geeignet wäre, die geringe Temperaturabhängigkeit der Lorenz-Lorentzschen Konstanten wiederzugeben.

B. Experimenteller Teil

Für die zu der vorliegenden Arbeit erforderlichen Messungen der Temperaturabhängigkeit des Brechungsexponenten einer gegebenen Substanz kam nur eine interferometrische Methode in Frage, die nach dem folgenden Prinzip ausgearbeitet wurde.

In den einen Lichtweg eines Interferometers nach Michelsonscher Anordnung wurde eine die zu messende Flüssigkeit fassende Zelle gebracht, deren Konstruktion eine langsame, gleichmäßige und kontrollierbare Änderung der Flüssigkeitstemperatur gestattete (s. w. u.). Da der Brechungsindex für die Längeneinheit bei bestimmter Temperatur definiert ist, erhält man als die einer bestimmten Streifenzahl z bei einer Wellenlänge λ entsprechende *Änderung* des *Index* $dn = \frac{z L}{\lambda}$, wo L die Länge der durchstrahlten Schicht bedeutet.

Nach den in unterschiedlichen Vorversuchen gemachten Erfahrungen konnte für obige Anforderungen nur eine Flüssigkeitszelle aus einheitlichem Material unter Vermeidung von Kittstellen Verwendung finden. Nach verschiedenen Fehlschlägen genügte dem endlich der in Fig. 2 wiedergegebene Glasapparat. Er bestand aus einer Art beiderseitig offenem

Dewarzylinder, dessen Innen- und Außenmantel ungefähr $^3/_4$ Liter einschlossen und bei *T* zur Verbindung der innersten Zelle mit außen durchstoßen waren. *V* ist durch *E* und *A* mit Flüssigkeit zu füllen. Durch Einsetzen zweier eingeschliffener Rohrstücke, die an beiden Seiten durch plane und parallel gesetzte Glasplatten abgeschlossen sind, entsteht die *Zelle Z* für die zu messende Flüssigkeit. Die beiden Rohrstücke selbst sind evakuierbar, um auch nach diesen Richtungen hin die Zelle zu isolieren. Besondere Schwierigkeiten machten die Schliffflächen bei *I* und *II*, die weitgehend planparallel liegen mußten, um die Messungen nicht unmöglich zu machen. Das für diesen Apparat verwandte Glas war besonders hart und im Ausdehnungskoeffizienten dem Jenaer Glas nahe, um die durch Wärmeausdehnung entstehenden Fehler unter die Messungsfehlergrenze zu bringen. Die Wärmeausdehnung wurde an einem Glasrohre gleichen Materials bestimmt als $s = 8{,}9 \cdot 10^{-6}$.

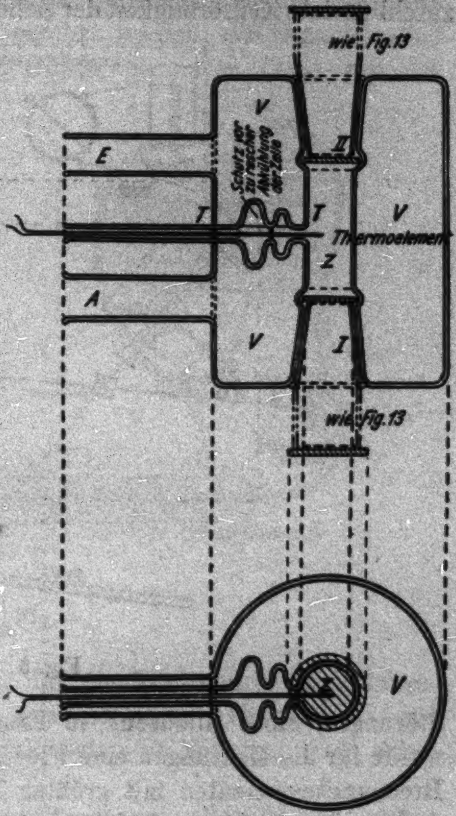


Fig. 2

Die Anordnung der Gesamtapparatur geht aus Fig. 3 hervor. Die Spiegel besaßen eine in jeder Richtung wirksame Feinverstellung, die vom Fernrohre aus mit beweglichen Wellen betätigt werden konnte. Die durchlässige Versilberung der Prismen, deren Gleichmäßigkeit von größter Bedeutung war, wurde mit gutem Erfolg durch Kathodenzustäubung erzielt. Die Temperatur der Zelle wurde mittels eines an ein Spiegel-

galvanometer angeschlossenen Thermoelements mit Fernrohr und Skala kontrolliert. Die Lichtquelle war eine Hg-Bogenlampe.

Um endlich die bei aller Sorgfalt nicht ganz auszuschließende Keilförmigkeit der Zelle und die dadurch bedingten

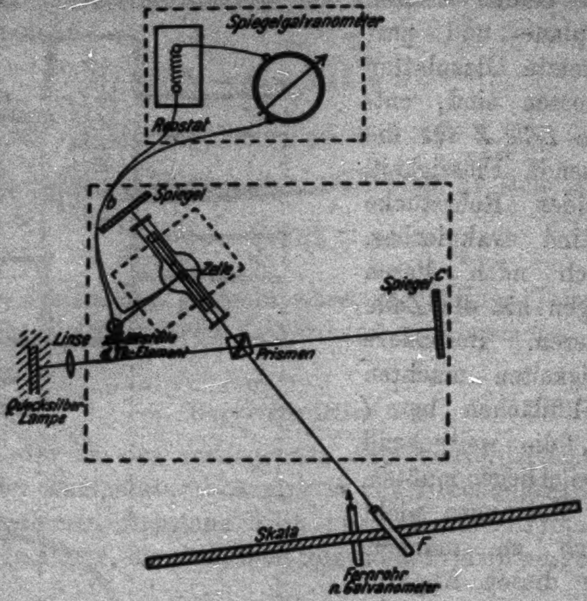


Fig. 3

Störungen nicht allzusehr in Erscheinung treten zu lassen, wurde für die Messungen eine Flüssigkeit von möglichst kleinem Brechungsexponenten mit größter Temperaturabhängigkeit gesucht; eine solche fand sich in der *Blausäure*.

Messungen an flüssigem Cyanwasserstoff

Es wurde eine große Zahl von Messungen im Gebiete von 1,5—22° vorgenommen. Aus den vielen, an Zuverlässigkeit sehr unterschiedlichen Messungsergebnissen wurden nur die nach dem Gewichte des Experiments sichersten und unanfechtbaren herausgegriffen.

Die Temperaturänderung in der Zelle konnte nach Belieben in jeder Richtung und Geschwindigkeit mit der in Fig. 4 dargestellten einfachen Anordnung geleitet werden, dergestalt,

daß die aus dem Kühlmantel bzw. Wärmemantel des Meßgefäßes austretende Flüssigkeit (Petroleum) den nachgeheberten Frischzulauf automatisch der im Meßgefäß bestehenden Temperatur anglich und so die Änderung eine stetige wurde.

Infolge der verschiedensten Störungen konnte nur etwa jede 10. Meßreihe zu Ende geführt werden; die Brauchbarkeit der Messungen hing aber gerade in erster Linie von der

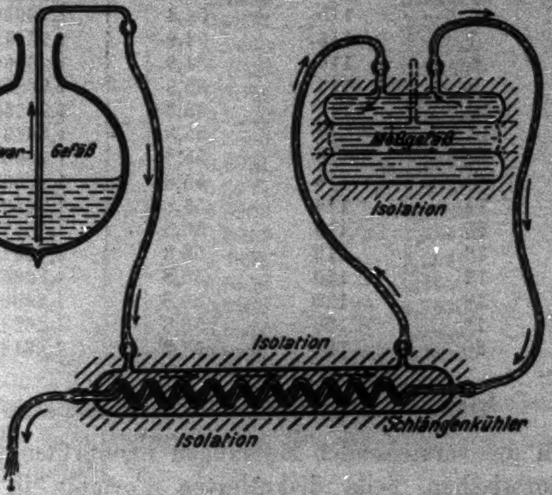


Fig. 4

Dauer der Ablesungen ab, die die Elimination der vorhandenen Fehlermöglichkeiten gewährleistete. Die längste und daher sicherste Ablesung dauerte 30 Minuten und ergab 350 Streifen.

Nachdem aus zahlreichen Messungen alle z-Werte in dem beobachteten Temperaturintervall sichergestellt waren (die genaue Auswertung der gefundenen Kurven erfolgte nach graphischer Methode, deren Behandlung hier zu weit führen würde), hatte man die Grundlage für die Berechnung der dn/dt nach der Gleichung $dn = z\frac{5461}{57{,}70}$. Wenn von $n_D^{10} = 1{,}2675$[1]) ausgegangen wird, ergeben sich bei Verwendung der oben ausgerechneten dn folgende Werte für den Brechungsexponenten.

---

1) Nach K. H. Meyer u. H. Hopf, Ber. d. Chem. Ges. 54. S. 1718. 1921.

Tabelle 4

T	z	dn	n
0	113	53,5	1,27292
1	113	53,5	1,27238
2	113	53,5	1,27185
3	114	53,9	1,27131
4	114	53,9	1,27077
5	115	54,4	1,27023
6	115	54,4	1,26969
7	116	54,9	1,26915
8	116	54,9	1,26860
9	117	55,3	1,26805
10	117	55,3	1,26750
11	117	55,3	1,26694
12	118	55,8	1,26639
13	118	55,8	1,26583
14	118	55,8	1,26527
15	119	56,3	1,26472
16	119	56,3	1,26415
17	120	56,8	1,26359
18	120	56,8	1,26302
19	120	56,8	1,26245
20	121	57,2	1,26189

Dichte der Blausäure. Kritische Daten

Um die vorstehenden Messungen nachprüfen und mit den im theoretischen Teile diskutierten Formeln in Verbindung bringen zu können, wurde das spez. Gewicht der Blausäure und seine Temperaturabhängigkeit erstmalig genau gemessen. Zu dieser Bestimmung wurde ein Pyknometer (50 ccm) mit Vakuumwärmeschutz und auf Zehntel Grade ablesbarem Thermometer benutzt. Die hiermit ermittelten Werte sind aus Tab. 5 ersichtlich. Aus den Zahlen dieser Tabelle ergibt sich, daß die im vorigen Abschnitt erhaltenen Messungsergebnisse sich innerhalb der durch das Experiment gezogenen Grenzen mit den aus der Theorie zu erwartenden decken. (Errechnet nach $\frac{n-1}{d}$ = const.)

Die früher angezogenen Abweichungen des experimentellen Befundes von den verschiedenen Refraktionsformeln können hiernach allerdings noch nicht diskutiert werden, da diese Abweichungen innerhalb unserer Messungen liegen.

In Verfolg der im theoretischen Teile angestellten Betrachtungen über das Verhalten des Brechungsindex am kriti-

Tabelle 5

Temperatur	Dichte	*n*
0	0,7156	1,27268
1	0,7142	1,27216
2	0,7128	1,27161
3	0,7116	1,27115
4	0,7102	1,27062
5	0,7088	1,27009
6	0,7076	1,26963
7	0,7060	1,26903
8	0,7048	1,26857
9	0,7034	1,26804
10	0,7020	1,26750
11	0,7005	1,26693
12	0,6991	1,26638
13	0,6977	1,26585
14	0,6962	1,26528
15	0,6947	1,26472
16	0,6932	1,26415
17	0,6918	1,26361
18	0,6902	1,26300
19	0,6888	1,26247
20	0,6874	1,26193

schen Punkte seien noch die im Rahmen dieser Arbeit seiner Zeit erstmalig ermittelten Werte für die kritischen Daten der Blausäure mitgeteilt.

In wiederholten Messungen wurde als kritische Temperatur

$$t_k = 181{,}5^0$$

ermittelt und als kritischer Druck

$$p_k = 50 \text{ Atm.}$$

Das kritische Volumen endlich konnte nur ganz roh mit derselben Apparatur als den theoretischen Erwartungen entsprechend ($v_k = 1{,}7\, v_s$) festgestellt werden.

Schlußwort

Es konnte sich bei den vorstehend beschriebenen Messungen, entgegen der ursprünglichen Absicht, nur um eine prinzipielle Durchprüfung der ausgearbeiteten Meßmethode handeln. Erst die Verfeinerung der gezeigten Apparatur kann zu Resultaten von theoretischem Wert und damit zu Gegenüberhaltungen der berechneten und gefundenen *n*-Werte führen, sowie zu einer vergleichenden Bewertung der drei Refraktions-

formeln. Bei weiterem Ausbau dürften die in der gezeigten Methode gelegenen Möglichkeiten größter Meßgenauigkeit wohl geeignet sein, Klärung in die Theorie des Brechungsexponenten zu bringen.

Die Entwicklung dieser, leider notgedrungen vorzeitig abgebrochenen Arbeit darf ich in erster Linie dem stets regen Interesse von Hrn. Geh. Reg. Rat Prof. Dr. **Wachsmuth** zuschreiben, dessen immer freundliche Unterstützung bei allen Schwierigkeiten wesentlich zur Fertigstellung der Arbeit beigetragen hat. Nicht minderen Dank schulde ich den Herren Prof. Dr. **Gerlach** und Prof. Dr. **Madelung** als jederzeit hilfsbereiten Beratern.

(Abgeschlossen 1. Januar 1925)

(Eingegangen 22. Mai 1928)

3. *Zur Frage der Intensität von Spektrallinien;*
von A. Kupper

I. Einleitung

Als Fortschritt gegenüber der korrespondenzmäßigen Abschätzung der Intensität von Spektrallinien versprach die neue Mikromechanik von Heisenberg und Schrödinger eine eindeutige Antwort auf die Frage nach dem Intensitätsabfall innerhalb ein und derselben Serie, wie auch nach dem Intensitätsverhältnis verschiedener Serien untereinander.

Pauli[1]) hat bereits die Gesamtintensitäten der Lyman- und Balmerserie für das ungestörte Wasserstoffatom berechnet. Im folgenden sind diese Rechnungen unter Benutzung räumlicher Polarkoordinaten fortgesetzt, z. T. insofern allgemeiner, als gemeinsame Formeln für solche Gruppen von Serien angegeben werden, welche man für gleiche radiale Quantenzahlen des Endzustandes erhält.

Durch Wahl einer bestimmten unteren Hauptquantenzahl ergeben sich aus diesen Formeln die Intensitäten der „Teilserien", deren algebraische Summe die Gesamtintensitäten der Lyman-, Balmer-, Paschen- und Brackettserien darstellt. Von den „Über-Brackettserien" sind damit in unseren Formeln je 7 Teilserien enthalten, nämlich all die, deren radiale Quantenzahl des Endzustandes nicht größer ist, als bei der Brackettserie.

Zwei weitere, damit noch nicht umfaßte Teilserien wurden speziell (d. h. für bestimmte untere Hauptquantenzahlen) berechnet, da sie zum Vergleich mit Messungen erwünscht waren, die allgemeine Rechnung aber hier unüberwindlich langwierig geworden wäre.

Die eigentlich zunächst liegenden Messungen an Wasserstoff selbst schieden für einen Vergleich mit Ergebnissen der Wellenmechanik aus, wegen offenbar gänzlich unzureichender

---

1) Vgl. E. Schrödinger, Ann. d. Phys. 80. S. 489. Zusatz. 1926.

Erfüllung der in der Schrödingerschen Theorie vorausgesetzten „unendlich hohen Anregung“. Daher wurde versucht die uns bekannten Messungen an den Serienspektren der Alkalien in unsere berechneten Intensitäten einzuordnen.

Hierbei zeigt sich ein grundsätzlicher Unterschied in der Übertragbarkeit von Absorptions- und Emissionsmessungen: Die erstgenannten ordnen sich, was den Intensitätsabfall betrifft, durchaus im zu erwartenden Sinn in die theoretischen Ergebnisse ein. Bei Durchlaufen der Alkalireihe von Li bis Cs auftretende und rasch anwachsende Abweichungen entsprechen nur der abnehmenden Wasserstoffähnlichkeit. Ganz anders bei den Emissionsmessungen: Hier fehlt jede Parallelität zwischen Experiment und Theorie. Der Intensitätsabfall ist durchweg sehr viel steiler als in der Rechnung und die Intensitätsverhältnisse werden teilweise sogar dem Sinne nach falsch erhalten.

Die Ergebnisse in bezug auf den Intensitätsabfall sprechen für eine völlige Verschiedenheit zwischen der tatsächlichen Anregung in Flammen und dem, was man unter „Temperaturanregung“ versteht. Ob die großen Diskrepanzen der Intensitätsverhältnisse ebenfalls auf Konto der Anregung zu setzen sind, kann an Hand des verfügbaren Materials nicht entfernt entschieden werden.

Als die hauptsächlichsten Rechnungen dieser Arbeit schon abgeschlossen waren, kam mir eine Veröffentlichung von M. Y. Sugiura[1]) in die Hände, in der sich die Gesamtintensität der Paschenserie bereits fand. In einer neueren Arbeit[2]) geht der genannte Verfasser über unsere Ergebnisse wesentlich hinaus, indem er den Einfluß des Zentralfeldes berücksichtigt.

II. Die Intensität in der Wellenmechanik

1. Ansatz

Die Eigenfunktionen der Schrödingerschen Wellengleichung

$$\Delta\psi + \frac{8\pi^2 \cdot m}{h^2} \cdot \left(E + \frac{e^2}{r}\right) \cdot \psi = 0 \tag{1}$$

1) M. Y. Sugiura, Journal de physique, Serie VI, 8. S. 113. 1927.

2) M. Y. Sugiura, Ztschr. f. Physik 44. S. 190. 1927.

des ungestörten Wasserstoffatoms lauten[1]) unnormiert in sphärischen Polarkoordinaten r, φ, ϑ

$$\psi_{n,l,m}(r,\varphi,\vartheta) = \chi(r)\cdot e^{\pm i m \varphi}\cdot P_l^m(\cos\vartheta), \tag{2}$$

sind also ein reines Produkt dreier nur je eine Variable enthaltender Funktionen als Folge des Separationsansatzes zur Lösung der Wellengleichung. P_l^m bedeutet die „m-te zugeordnete Kugelfunktion l-ter Ordnung", also

$$P_l^m(\cos\vartheta) = \sin^m\vartheta\cdot\frac{d^m}{d(\cos\vartheta)^m}[P_l(\cos\vartheta)] \tag{3}$$

und mit der Abkürzung

$$\frac{h^2}{4\cdot\pi^2\cdot m\cdot e^2} = a_0 \tag{4}$$

ist

$$\chi(r) = \left(\frac{2r}{a_0\cdot n}\right)^l\cdot e^{\frac{-r}{a_0\cdot n}}\cdot L_{l+n}^{2l+1}\left(\frac{2r}{a_0\cdot n}\right) \tag{5}$$

unter L_{l+n}^{2l+1} die $(2l+1)$-te Ableitung des $(l+n)$-ten Laguerreschen Polynoms verstanden.

In einer früheren Arbeit[2]) zeigte nun Schrödinger, daß sich die Heisenbergschen Matrizenelemente, die zur Lagekoordinate q gehören (zunächst ebenfalls unnormiert) durch das Integral

$$a_{gg'} = \int_\tau q\cdot\psi_g\cdot\psi_{g'}\cdot d\tau \tag{6}$$

darstellen lassen, g bzw. g', steht hier für den Inbegriff der drei Quantenzahlen n, l, m bzw. n', l', m' und $d\tau$ bedeutet nichts anderes als das Volumelement, ausgedrückt in den jeweiligen Koordinaten, hier also $r^2\cdot\sin\vartheta\cdot dr\cdot d\varphi\cdot d\vartheta$.

Nun aber ist nach Heisenberg, für q eine kartesische Koordinate vorausgesetzt, das Quadrat der „Amplitude" $a_{gg'}$ ein Maß für die Übergangswahrscheinlichkeit aus dem g-ten in den g'-ten Zustand. Um Intensitäten von Linien ganz verschiedener Frequenz vergleichen zu können, müssen wir das Amplitudenquadrat noch mit der 4. Potenz der Frequenz multiplizieren. Und da wir es mit dem ungestörten feldfreien

1) E. Schrödinger, Ann. d. Phys. 80. S. 479. 1926.
2) E. Schrödinger, Ann. d. Phys. 79. S. 734. 1926.

Wasserstoffatom zu tun haben, dürfen wir uns auf die Berechnung einer Komponente beschränken.

2. Die Integrale der Amplituden

Wir führen nun die Integration von (6) in Polarkoordinaten durch, wobei uns das Nichtverschwinden dieser Integrale, also auch der Intensitäten, die bekannten Auswahlregeln liefert. Für q setzen wir am bequemsten $z = r \cdot \cos \vartheta$ ein. Es ergibt sich ein reines Produkt von drei einfachen Integralen über dr, $d\varphi$, $d\vartheta$, welche die Quantenzahlen n, l, m, n', l' und m' als Parameter enthalten. Die beiden letzteren lauten unnormiert in bekannter Weise:

$$(7) \qquad a_\varphi = \int_0^{2\pi} e^{i(m-m')\cdot\varphi} \cdot d\varphi = \begin{cases} 0 \\ 2\pi \end{cases} \qquad m - m' \begin{Bmatrix} \neq \\ = \end{Bmatrix} 0.$$

$$(8) \qquad \begin{cases} a_\vartheta = \int_{-1}^{+1} P_l^m(\cos\vartheta) \cdot P_{l'}^m(\cos\vartheta) \cdot \cos\vartheta \cdot d(\cos\vartheta) \\ \quad = \begin{cases} 0 \\ \dfrac{2(l+m)!}{(l-m-1)!\,(4l'-1)} \end{cases} \qquad |l-l'| \begin{Bmatrix} \neq \\ = \end{Bmatrix} 1. \end{cases}$$

Der Normierungsnenner von a_φ ist

$$\sqrt{\int_0^{2\pi} d\varphi} = \sqrt{2\pi},$$

während sich der von a_ϑ aus zwei Faktoren der Gestalt

$$(9) \qquad \sqrt{\int_{-1}^{+1} [P_l^m(\cos\vartheta)]^2 \cdot d(\cos\vartheta)} = \sqrt{\frac{2(l+m)!}{(2l+1)\cdot(l-m)!}}$$

zusammensetzt. Und zwar ist der erste identisch mit dem Ausdruck (9), entsprechend der Eigenfunktion ψ_g. Im zweiten haben wir nur g durch g', also l durch $l' = l \pm 1$ zu ersetzen.

Um uns das Mitschleppen des doppelten Vorzeichens zu ersparen, das in dem weiter unten zu besprechenden Integral über dr lästig fiele, einigen wir uns auf

$$(10) \qquad l' = l - 1.$$

Damit dürfen wir nur nicht übersehen, daß mit dieser Festsetzung die Wahl von n bzw. n' zur Bezeichnung der größeren oder kleineren Hauptquantenzahlen nicht mehr frei ist. So werden beispielsweise die drei innerhalb der Balmerserie möglichen Übergänge

$$2S - nP \qquad 2P - nD \qquad 2P - nS$$

dargestellt durch

$$n_1,\ 2_0 \qquad n_2,\ 2_1 \qquad 2_1,\ n_0{}',$$

wo sich die Indizes 1, 2, 1 an der jeweils voranstehenden Hauptquantenzahl n auf die früher mit k bezeichnete Azimutalquantenzahl -1, also auf unser l beziehen. Man sieht, daß für all die Übergänge, bei denen die dem höheren Hauptquantenniveau zugeordnete Nebenquantenzahl die kleinere (l') ist, n' an Stelle von n zur größeren Hauptquantenzahl in unseren Formeln wird.

Damit aber lautet unser Normierungsnenner von a_ϑ:

$$N_\vartheta = \sqrt{\frac{2(l+m)!\ 2(l+m-1)!}{(2l+1)\cdot(l-m)!\cdot(2l-1)\cdot(l-m-1)!}}\,. \tag{11}$$

Der Faktor der Amplitude, welcher von φ und ϑ herrührt vereinfacht sich nach Anbringung der Normierung zu

$$a'_{\varphi,\vartheta} = \frac{a_\varphi \cdot a_\vartheta}{N_\varphi \cdot N_\vartheta} = \sqrt{\frac{l^2 - m^2}{4l^2 - 1}}\,. \tag{12}$$

Weniger einfach gestaltet sich die Ausführung des letzten Integrals, r als Integrationsvariable enthaltend:

$$\left\{\begin{aligned} a_r &= \int_0^\infty r \cdot \chi_n(r) \cdot \chi_{n'}(r) \cdot r^2 \cdot dr \\ &= \int_0^\infty r^3 \cdot \left(\frac{2r}{a_0 \cdot n}\right)^l \cdot \left(\frac{2r}{a_0 \cdot n'}\right)^{l-1} \cdot e^{-\frac{r}{a_0}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n'}\right)} \\ &\qquad \cdot \underset{l+n}{\overset{2l+1}{L}}\left(\frac{2r}{a_0\cdot n}\right) \cdot \underset{l+n'-1}{\overset{2l-1}{L}}\left(\frac{2r}{a_0 \cdot n'}\right) \cdot dr\,. \end{aligned}\right. \tag{13}$$

Schrödinger hat im Anhang zu seiner „3. Mitteilung“ einen Weg zur Auswertung dieses Integrals angegeben. Schreiben wir mit Abkürzungen, die durch Vergleich des folgenden Ausdrucks mit (13) sofort ersichtlich sind, unser Integral neu an

$$
(14)\begin{cases} a_\nu = \alpha^l \cdot \beta^{l-1} \cdot \int\limits_0^\infty r^{2l+2} \cdot e^{-\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot r} \cdot \overset{2l+1}{\underset{l+n}{L}}(\alpha r) \cdot \overset{2l-1}{\underset{l+n'-1}{L}}(\beta r) \cdot d r \\ \quad = \alpha^l \cdot \beta^{l-1} \cdot \int\limits_0^\infty r^p \quad \cdot e^{-\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot r} \cdot \overset{u}{\underset{u+v}{L}}(\alpha r) \cdot \overset{u'}{\underset{u'+v'}{L}}(\beta r) \cdot d r, \end{cases}
$$

so führt die Substitution

$$
(15) \qquad \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot x = y
$$

mit den Abkürzungen

$$
(16) \qquad \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{1}{\sigma}, \qquad \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} = \gamma
$$

auf

$$
(17)\begin{cases} a_\nu = \alpha^l \cdot \beta^{l-1} \cdot \sigma^{p+1} \cdot \int\limits_0^\infty y^p \cdot e^{-y} \cdot \overset{u}{\underset{u+v}{L}}[(1+\gamma)\cdot y] \\ \qquad \cdot \overset{u'}{\underset{u'+v'}{L}}[(1-\gamma)\cdot y] \cdot d y. \end{cases}
$$

Hier brauchen wir nur das rechts stehende Integral nach $\gamma \cdot y$ in seine abbrechende Taylorsche Reihe zu entwickeln, um es auf Integrale desselben Typus aber gleichen Arguments der zwei Laguerrepolynome zurückzuführen. An Stelle des einen Integrals ist eine endliche Summe von einfacheren getreten:

$$
(18)\begin{cases} a_\nu = \alpha^l \cdot \beta^{l-1} \cdot \sigma^{p+1} \cdot \sum\limits_0^v{}_\lambda \sum\limits_0^{v'}{}_{\lambda'} \frac{y^{\lambda+\lambda'}}{\lambda!\,\lambda'!} \cdot (-1)^\lambda \\ \qquad \cdot \int\limits_0^\infty y^{p+\lambda+\lambda'} \cdot e^{-y} \cdot \overset{u+\lambda}{\underset{u+v}{L}}(y) \cdot \overset{u'+\lambda'}{\underset{u'+v'}{L}}(y) \cdot d y. \end{cases}
$$

Diese vereinfachten Integrale aber lassen sich als Entwicklungskoeffizienten einer unendlichen Reihe darstellen. Hierzu hat man[1]) durch $(u+\lambda)$-maliges Differenzieren einer „erzeugenden Funktion“

$$
(19) \qquad \frac{e^{-\frac{t\cdot y}{1-t}}}{1-t} = \text{Potenzreihe von } t
$$

nach y deren Reihenkoeffizienten im wesentlichen (d. h. bis auf

1) Vgl. E. Schrödinger, III, Anhang. Ann. d. Phys. 80. S. 485. 1926.

Fakultäten im Nenner) auf die Gestalt unserer $L_{u+v}^{u+\lambda}$ zu bringen. Führt man genau dasselbe für $L_{u'+v'}^{u'+\lambda'}$ mittels der weiteren Variablen t' aus, so kann man durch Multiplikation der beiden Potenzreihen mit sich selbst und dem Faktor $y^{\rho+\lambda+\lambda'}$ den gewünschten Integranden zusammenbauen. Gliedweise Integration über dy liefert schließlich Reihenkoeffizienten vom Bau unseres Integrals. Den Wert eines einzelnen ergibt uns dann Koeffizientenvergleich.

So wird a_r (unnormiert) zu der dreifachen endlichen Summe:

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} a_r = {} & \frac{a_0^4 \cdot 2^{2l-1} \cdot n^{l+3} \cdot n'^{l+4}}{(n+n')^{2l+8}} \cdot (l+n)!\,(l-1+n')! \\ & \cdot \sum_{0}^{n-l-1} \sum_{0}^{n'-l} {}_{\lambda'} \frac{(-1)^{\lambda'} \cdot (n'-n)^{\lambda+\lambda'}}{\lambda!\,\lambda'!\,(n+n')^{\lambda+\lambda'}} \cdot (2l+2+\lambda+\lambda')! \\ & \cdot \sum_{0}^{c} {}_{\tau} (-1)^{\tau} \binom{1+\lambda'}{n-l-1-\lambda-\tau} \binom{8+\lambda'}{n'-l-\lambda'-\tau} \binom{-(2l+8+\lambda+\lambda')}{\tau}. \end{aligned}\right.$$

Die obere Grenze c der letzten Summe bedeutet den jeweils kleineren der zwei Zahlwerte

$$n - l - 1 - \lambda \quad \text{bzw.} \quad n' - l - \lambda'.$$

Analog erhält man den dazu gehörigen Normierungsnenner, dessen Integrale von vornherein gleiches Argument besitzen:

$$(21)\qquad N_r = \sqrt{\frac{a_0^6}{Z^6} \cdot n^4 \cdot n'^4 \cdot \frac{(l+n)!^3 \cdot (l-1+n')!^3}{(n-l-1)!\,(n'-l)!}},$$

wegen dieser Vereinfachung gegenüber a_r sofort geschlossen angebbar.

3. Summation von a_r

Da es nicht gelang, die Summation des Ausdrucks (20) an Hand bekannter[1]) oder aus solchen ableitbarer Summenrelationen für Produkte von Binomialkoeffizienten geschlossen auszuführen, wurde sie zunächst für spezielle Serien (also spezielle n' und l bzw. n und l) durch Ausrechnung bewerkstelligt.

Nun ist aber die Gliederzahl unserer Summe, wie sofort ersichtlich, nur von der Größe der Differenz $n' - l$ bzw. $n - l - 1$

---

1) Vgl. etwa I. G. Hagen, Synopsis d. Höh. Math. I. Berlin 1891.

abhängig, je nachdem, ob n' oder n die untere fest zu denkende Hauptquantenzahl darstellt. Daraus ergibt sich folgende Verallgemeinerung:

Lassen wir n *und* n' formal in den Formeln stehen und wählen eine bestimmte (der radialen Quantenzahl entsprechende) Differenz

(22) $n' - l = D$ bzw. $n - l - n - l - 1 = D'$

gleich einer der Zahlen 0, 1, 2 . ., so umfaßt unsere für ein bestimmtes D (bzw. D') berechnete Formel alle beliebig hohen Teilserien, für welche gilt

$$l = n' - D \quad \text{bzw.} \quad l = n - D' - 1.$$

Die Berechnung einer solchen Seriengruppe verläuft im übrigen formal völlig gleich der einer speziellen Serie dieser Teilgruppe. Doch wird sie insofern wesentlich umständlicher, als keine Zusammenfassung der als Koeffizienten der Glieder in der laufenden Hauptquantenzahl n (bzw. n') auftretenden Polynome in n' (bzw. n) zu reinen Zahlen möglich ist. Das macht schon für $D = 2$ bzw. $D' = 1$ die Rechnung derart unübersichtlich, daß fast zeilenweise Kontrolle an Hand einer beliebigen speziellen Serie daraus kaum zu entbehren ist. Alle enthaltenen speziellen Serien liefert dann aber Einsetzen fester Zahlen für die untere Hauptquantenzahl.

Die Nebenquantenzahl tritt in den Formeln nirgends auf, da sie auf Grund unserer Definition der Seriengruppen gemäß (22) durch n' (bzw. n) und eine feste Zahl ausgedrückt wurde.

Leider läßt sich der zweite Fall $n' > n$, also die 2-te in (20) enthaltene Summe über τ nicht auf den 1-ten Fall zurückführen; denn schon allein in den auftretenden Binomialkoeffizienten besteht eine wesentliche Unsymmetrie in n und n', die von der Festsetzung (Gl. 10) herrührt. Etwa aber n und n' nicht zu vertauschen und das Doppelvorzeichen in $l' = l \pm 1$ zur Fallunterscheidung zu wählen, ändert nur die Schreibweise von (22). Die notwendige, durch die Auswahlregel bedingte Unsymmetrie ist auch aus dem Integral (13) unmittelbar ersichtlich. So müssen beide Fälle getrennt berechnet werden.

Dies wurde bis $D = 3$ und $D' = 2$ getrieben. Zwei weitere Teilserien (für die $D = 4$ und $D' = 3$) wurden zur Anwendung auf Messungen speziell (für $n' = 5$ bzw. $n = 5$) be-

rechnet, da hier die allgemeine Durchführung ungeheuer mühselig geworden wäre.

Immerhin kann a_r (Gl. 20) für eine große Zahl von Spezialfällen im folgenden als bekannt angesehen werden.

4. Elimination von *m*.

Unsere normierten Amplitudenquadrate selbst[1])

$$a^2_{r,\varphi,\vartheta} = \left[(a_{\varphi,\vartheta})_{\text{norm}} \cdot \frac{a_r}{N_r}\right]^2 \tag{23}$$

enthalten nun aber noch 4 Quantenzahlen n, n', l und m. Die letzte läßt sich, da nur in $a_{\varphi\vartheta}$ auftretend, leicht entfernen.

Betrachten wir eine bestimmte Teilserie, die bei Festlegung einer unteren Hauptquantenzahl durch $l = \text{const}$ definiert ist, so ist m aller Werte von $(-l+1)$ bis $(l-1)$ fähig. m tritt aber nur in $a_{\varphi\vartheta}$ auf (vgl. Gl. 12). Folglich haben wir nur die Summation

$$\sum_{-l+1}^{l-1} {}_m\, a^2_{\varphi\vartheta} = \frac{1}{4l^2-1} \cdot \sum_{-l+1}^{l-1} {}_m (l^2 - m^2) \tag{24}$$

auszuführen. Während man für höhere Potenzen wohl auf Bildung einer „vollständigen Differenz" analog einer Integration angewiesen wäre, summiert sich m^2 besonders einfach, wenn man sich erinnert, daß

$$\binom{m}{2} + \binom{m+1}{2} = m^2 \tag{25}$$

und

$$\sum_0^{\mu} {}_m \binom{m}{k} = \binom{\mu+1}{k+1}.$$

Also gibt

$$\sum_{-l+1}^{l-1} {}_m\, m^2 = 2 \cdot \sum_0^{l-1} {}_m\, m^2 = 2\left[\binom{l}{3} + \binom{l+1}{3}\right] = \frac{l}{3}\cdot(l-1)(2l-1) \tag{26}$$

und

$$\sum_{-l+1}^{l-1} {}_m \frac{l^2 - m^2}{4l^2 - 1}$$

faßt sich zusammen zu

1) Vgl. Gl. (12), (20), (21).

$$(27)\qquad \frac{1}{4l^2-1}\cdot(2l-1)\cdot l^2-\frac{l}{8}\cdot(l-1)(2l-1)=\frac{l}{8}\cdot$$

Mit dieser Elimination von m vereinfacht sich das Amplitudenquadrat zu

$$(28)\qquad a^2(n,n',l)=l\cdot\left(\frac{a_r}{N_r}\right)^2\cdot$$

5. Formeln der Amplitudenquadrate.

Im folgenden sind die auf dem beschriebenen Weg berechneten Amplitudenquadrate zusammengestellt. An ihnen fällt zunächst auf, daß sie sich für große m asymptotisch wie const/n^3 verhalten, entsprechend der aus dem Korrespondenzprinzip abgeleiteten Formel, die freilich als Näherung aufzufassen ist, für welche beide Hauptquantenzahlen groß sind. Für kleine n ist der Abfall weniger steil. Der an sich geringe Unterschied ist aus den (doppelt logarithmischen) Auftragungen der Figuren ersichtlich. Dort wurde durch den jeweils untersten Meßpunkt (größtes n) der weiter unten zu besprechenden Alkaliintensitäten die n^{-3} entsprechende Gerade eingetragen.

Das genannte asymptotische Verhalten gab eine willkommene Kontrolle der Summenrechnung: Nach Zusammenfassung aller Klammerausdrücke fallen die sämtlichen Glieder der höchsten Potenzen weg, durch welche der Grad der Amplitudenquadrate den (-3)-ten für $n\to\infty$ übersteigen würde.

Ein für alle Serien konstanter Faktor wurde in Übereinstimmung mit Pauli[1]) weggelassen.

A. *Allgemeine Formeln der Seriengruppen $n'-l=D$.*

$(n>n')$

$$(29)\quad \underline{D=0}\quad \frac{2^{4n'+3}\,n'^{2n'+5}\,n^{2n'+4}(n+n')!\,(n-n')^{2n-2n'-4}}{(2n'-1)!\,(n-n'-1)!\,(n+n')^{2n+2n'+4}}$$

$$(30)\quad \underline{D=1}\quad \frac{2^{4n'+1}(n'-1)\,n'^{2n'+4}\,n^{2n'+2}(n+n'-1)!\,(n-n')^{2n-2n'-2}}{(2n'-2)!\,(n-n')!\,(n+n')^{2n+2n'+2}}$$

$$(31)\quad \underline{D=2}\quad \frac{2^{4n'-4}(n'-2)\,n'^{2n'+2}\,n^{2n'}(n+n'-2)!\,(n-n')^{2n-2n'-2}}{(2n'-3)!\,(n-n'+1)!\,(n+n')^{2n+2n'+2}}\cdot\left[(1+2n')n^2+n'^2(3-2n')\right]^2.$$

$$(32)\quad \underline{D=2}\quad \frac{2^{4n'-6}(n'-3)\,n'^{2n'}\,n^{2n'-2}(n+n'-3)!\,(n-n')^{2n-2n'-2}}{3(2n'-4)!\,(n-n'+2)!\,(n+n')^{2n+2n'+2}}$$
$$\cdot\left[(2+3n'+2n'^2)n^4+2n'^2(2+3n'-2n'^2)n^2+n'^4(10-9n'+2n'^2)\right]^2.$$

1) Vgl. Fußnote 1, S. 511.

B. *Allgemeine Formeln der Seriengruppen* $n - l - 1 = D'$.

$(n' > n)$

$$(33)\quad \underline{D' = 0}\quad \frac{2^{4n+1}(n-1)\,n^{2n+2}\,n'^{2n+4}\,(n'+n-2)!\,(n'-n)^{2n'-2n-2}}{(2n-1)!\,(n'-n+1)!\,(n'+n)^{2n'+2n+2}}$$

$$(34)\quad \underline{D' = 1}\quad \frac{2^{4n-1}(n-2)\,n^{2n}\,n'^{2n+2}\,(n'+n-3)!\,(n'-n)^{2n'-2n-2}}{(2n-2)!\,(n'-n+2)!\,(n'+n)^{2n'+2n+2}} \cdot [(3+n)\,n'^2 - n^2(n-1)]^2 .$$

$$(35)\quad \underline{D' = 2}\quad \frac{2^{4n-6}(n-3)\,n^{2n-2}\,n'^{2n}\,(n'+n-4)!\,(n'-n)^{2n'-2n-2}}{(2n-3)!\,(n'-n+3)!\,(n'+n)^{2n'+2n+2}}$$
$$\cdot[(30+13n+2n^2)\,n'^4 + n^2(12-6n-4n^2)\,n'^2 + n^4(6-7n+2n^2)]^2$$

C. *Spezielle Serien*

Da hier keine Unterscheidung zwischen n und n' mehr erforderlich ist, sind die Striche an der oberen Hauptquantenzahl fortgelassen.

Lymanserie.

$$(36)\quad \underline{1S - nP}\quad (n_1, 1_0)\quad \frac{2^7\,n^7\,(n-1)^{2n-5}}{(n+1)^{2n+5}} .$$

Balmerserie.

$$(37)\quad \underline{2S - nP}\quad (n_1, 2_0)\quad \frac{2^{16}\,n^7\,(n^2-1)(n-2)^{2n-6}}{(n+2)^{2n+6}}$$

$$(38)\quad \underline{2P - nD}\quad (n_2, 2_1)\quad \frac{2^{19}\,n^9\,(n^2-1)(n-2)^{2n-7}}{3\,(n+2)^{2n+7}}$$

$$(39)\quad \underline{2P - nS}\quad (n_0, 2_1)\quad \frac{2^{14}\,n^9\,(n-2)^{2n-6}}{3\,(n+2)^{2n+6}}$$

Paschenserie.

$$(40)\quad \underline{3S - nP}\quad (n_1, 3_0)\quad \frac{2^7\,3^7\,n^7\,(n^2-1)(n-3)^{2n-8}(7n^2-27)^2}{(n+3)^{2n+8}}$$

$$(41)\quad \underline{3P - nD}\quad (n_2, 3_1)\quad \frac{2^{11}\,3^9\,n^9\,(n^2-1)(n^2-4)(n-3)^{2n-8}}{(n+3)^{2n+8}}$$

$$(42)\quad \underline{3D - nF}\quad (\bar{n}_3, 3_2)\quad \frac{2^{13}\,3^{10}\,n^{11}\,(n^2-1)(n^2-4)(n-3)^{2n-9}}{5\,(n+3)^{2n+9}}$$

$$(43)\quad \underline{3P - nS}\quad (n_0, 3_1)\quad \frac{2^{10}\,3^7\,n^9\,(n-3)^{2n-8}(n^2-3)^2}{(n+3)^{2n+8}}$$

$$(44)\quad \underline{3D - nP}\quad (n_1, 3_2)\quad \frac{2^{11}\,3^7\,n^{11}\,(n^2-1)(n-3)^{2n-8}}{5\,(n+3)^{2n+8}}$$

Brackettserie.

(45) $\underline{4\,S - n\,P}$ $(n_1, 4_0)$ $\dfrac{2^{25}\,n^7\,(n^2-1)(n-4)^{2n-10}\,(23\,n^4-288\,n^2+768)^2}{3^2\,(n+4)^{2n+10}}$

(46) $\underline{4\,P - n\,D}$ $(n_2, 4_1)$ $\dfrac{2^{30}\,n^9\,(n^2-1)(n^2-4)(n-4)^{2n-10}\,(9\,n^2-80)^2}{3\cdot 5\cdot (n+4)^{2n+10}}$

(47) $\underline{4\,D - n\,F}$ $(n_3, 4_2)$ $\dfrac{2^{37}\,n^{11}\,(n^2-1)(n^2-4)(n^2-9)(n-4)^{2n+10}}{3\cdot 5\cdot (n+4)^{2n+10}}$

(48) $\underline{4\,F - n\,F}$ $(n_4, 4_3)$ $\dfrac{2^{41}\,n^{13}\,(n^2-1)(n^2-4)(n^2-9)(n-4)^{2n-11}}{3^2\cdot 5\cdot 7\cdot (n+4)^{2n+11}}$

(49) $\underline{4\,P - n\,S}$ $(n_0, 4_1)$ $\dfrac{2^{21}\,n^9\,(n-4)^{2n-10}\,(57\,n^4-38\,n^2+80)^2}{3\cdot (n+4)^{2n+10}}$

(50) $\underline{4\,D - n\,P}$ $(n_1, 4_2)$ $\dfrac{2^{28}\,n^{11}\,(n^2-1)(n-4)^{2n-10}\,(7\,n^2-48)^2}{3^3\cdot 5\cdot (n+4)^{2n+10}}$

(51) $\underline{4\,F - n\,D}$ $(n_2, 4_3)$ $\dfrac{2^{33}\,n^{13}\,(n^2-1)(n^2-4)(n-4)^{2n-10}}{3\cdot 5\cdot 7\cdot (n+4^{2n+10}}$

5. Serie.

(52) $\underline{5\,S - n\,P}$ $(n_1, 5_0)$

$$\frac{2^9\cdot 5^5\cdot n^7\cdot (n^2-1)(n-5)^{2n-12}\cdot (814\cdot n^6-36\,525\cdot n^4+641\,000\cdot n^2-3\,953\,125)^2}{(n+5)^{2n+12}}$$

(53) $\underline{5\,P - n\,D}$ $(n_2, 5_1)$

$$\frac{2^{11}\cdot 5^9\cdot n^9\cdot (n^2-1)(n^2-4)(n-5)^{2n-12}\cdot (67\cdot n^4-1650\cdot n^2+9375)^2}{3^3\cdot (n+5)^{2n+12}}$$

(54) $\underline{5\,D - n\,F}$ $(n_3, 5_2)$

$$\frac{2^{13}\cdot 5^{11}\cdot n^{11}\cdot (n^2-1)(n^2-4)(n^2-9)(n-5)^{2n-12}\cdot (11\cdot n^2-175)^2}{3\cdot 7\cdot (n+5)^{2n+12}}$$

(55) $\underline{5\,F - n\,F'}$ $(n_4, 5_3)$

$$\frac{2^{16}\cdot 5^{13}\cdot n^{13}\cdot (n^2-1)(n^2-4)(n^2-9)(n^2-16)(n-5)^{2n-13}}{3^2\cdot 7\cdot (n+5)^{2n+12}}$$

(56) $\underline{5\,F' - n\,F''}$ $(n_5, 5_4)$

$$\frac{2^{16}\cdot 5^{14}\cdot n^{15}\cdot (n^2-1)(n^2-4)(n^2-9)(n^2-16)(n-5)^{2n-13}}{3^4\cdot 7\cdot (n+5)^{2n+13}}$$

(57) $\underline{5\,P - n\,S}$ $(n_0, 5_1)$.

$$\frac{2^9\cdot 5^6\cdot n^9\cdot (n-5)^{2n-12}\cdot (298\cdot n^6-7125\cdot n^4+53\,825\cdot n^2-88\,750)^2}{3\cdot (n+5)^{2n+12}}$$

(58) $\underline{5\,D - n\,P}$ $(n_1, 5_2)$

$$\frac{2^{11}\cdot 5^9\cdot n^{11}\cdot (n^2-1)(n-5)^{2n-12}\cdot (29\cdot n^4-590\cdot n^2+2625)^2}{3^2\cdot 7\cdot (n+5)^{2n+12}}$$

(59) $\underline{5F - nD}$ $(n_3, 5_3)$

$$\frac{2^{16} \cdot 5^{9} \cdot n^{13} \cdot (n^2 - 1)(n^2 - 4)(n - 5)^{2n-12} \cdot (2n^2 - 25)^2}{3 \cdot 7 \cdot (n + 5)^{2n+12}}$$

(60) $\underline{5F' - nF}$ $(n_3, 5_4)$ $\dfrac{2^{16} \cdot 5^{11} \cdot n^{15} \cdot (n^2 - 1)(n^2 - 4)(n^2 - 9)(n - 5)^{2n-12}}{3^4 \cdot 7 \cdot (n + 5)^{2n+12}}$

III. Vergleich mit den Serienspektren der Alkalien

1. Ausscheiden von Messungen an Wasserstoff

Wasserstoff zeigt gegenüber kleinen Änderungen der Versuchsbedingungen eine enorme Empfindlichkeit seiner Linienintensitäten, die es überhaupt vereitelt, experimentell einfache Abhängigkeiten der Intensitäten von Quantenzahl und Serie festzustellen. Eine ausführliche Darstellung dieser Verhältnisse findet man in einer Arbeit von G. Herzberg[1]), die auch ein reichhaltiges Literaturverzeichnis enthält.

2. Anwendbarkeit auf Alkalien

Als nächst geeignet kommen die Serienspektren der Alkalien in Frage. Bei deren Einreihung in unsere für Wasserstoff berechneten Serien haben wir allerdings mit prinzipiellen Abweichungen zu rechnen. Zunächst ist zu beachten, daß bei den Alkalien wegen des Pauliverbotes gewisse Übergänge ausfallen (die beim Wasserstoff erlaubt und von unserer Rechnung mit erfaßt sind), so daß der Summensatz von Thomas-Reiche[2]) und Kuhn[3]) von unseren für die Alkalien berechneten Intensitäten nicht erfüllt ist. Auch die Zusatzfelder der übrigen Elektronen sind von unserer Rechnung außer acht gelassen. Beide Fehlerquellen sind bei Li am geringsten und werden über Na, K, Rb bei Cs am bedeutendsten. Dieser Gang findet sich auch bei den wenigen verfügbaren Messungen realisiert.

Im übrigen ist die Einordnung der Alkaliserienspektren bereits völlig eindeutig, wenn wir gleiche obere und untere

---

1) G. Herzberg, Ann. d. Phys. 85. S. 565. 1927.
2) W. Thomas-Reiche, Ztschr. f. Phys. 34. S. 510. 1925.
3) W. Kuhn, Ztschr. f. Phys. 33. S. 408. 1925.

Hauptquantenzahl und gleiche Nebenquantenzahl vergleichen; denn mit diesen drei Parametern ist die Mannigfaltigkeit unserer Serienformeln erschöpft. Eine Charakterisierung des einzelnen Elements darüber hinaus ist nicht möglich.

Trumpy vergleicht seine Messungen[1]) an Li und Na mit den (Paulischen) Gesamtintensitäten der Lyman- und Balmerserie. Dieser Vergleich ist natürlich unzulässig, da verschiedene (untere) Hauptquantenzahlen verglichen werden. Tatsächlich liefert unsere Einordnung das „bessere" Ergebnis: Vollkommenste Übereinstimmung bei Li, recht merkliche Differenzen bei Na, während Trumpy für beide Fälle ziemlich gleiche Abweichung erzielt.

Auch die Einreihung Li — gesamte Balmer-, Na — gesamte Paschenserie erscheint nicht sinnvoll, wenn hier auch der Unterschied des Intensitätsabfalles ganz geringfügig ist gegenüber unserer Vergleichsart: Auch die Nebenquantenzahl ist doch für das Alkalimetall aus der Termbezeichnung seiner Serie wohldefiniert!

Schließlich mag es konsequent erscheinen, die tatsächlichen, gemessenen Alkalifrequenzen zu berücksichtigen, statt die theoretischen für Wasserstoff zu benutzen. Hierzu hätten wir die gemessenen Intensitäten durch die 4. Potenz der Frequenz zu dividieren oder — bis auf einen konstanten Faktor dasselbe — mit der 4. Potenz der Wellenlänge zu multiplizieren. Diese „Frequenzkorrektur", welche summarisch die Wasserstoffunähnlichkeit berücksichtigen soll, ist in der Tat bei Li recht unwesentlich, vermag aber schon bei Na den Vergleich zu verbessern. Im folgenden sind aus Raumgründen die H-Intensitäten statt der Amplitudenquadrate aufgetragen.

3. Die Absorptionsmessungen

Nur drei Meßreihen standen zur Verfügung: Die zwei Messungen von Trumpy an den Hauptserien von Li und Na, sowie eine von Frl. Bleeker[2]) an der Hauptserie des K. Unsere Einordnung lautet:

---

1) B. Trumpy, Ztschr. f. Phys. 44. S. 575. 1927 u. 42. S. 327. 1927.

2) Briefliche Mitteilungen der vorläufigen Auswertung von Fräulein C. Bleeker.

Hauptserie von Li $(2S - nP)$ in die Serie $(n_1, 2_0)$
Na $(3S - nP)$ „ $(n_1, 3_0)$
K $(4S - nP)$ „ $(n_1, 4_0)$.

Sie führt zu einem befriedigenden Ergebnis: Bei *Li* ist die Übereinstimmung vollkommen; sogar die nicht große Abweichung (vgl. Fig. 1) der theoretischen Kurve von der asympto-

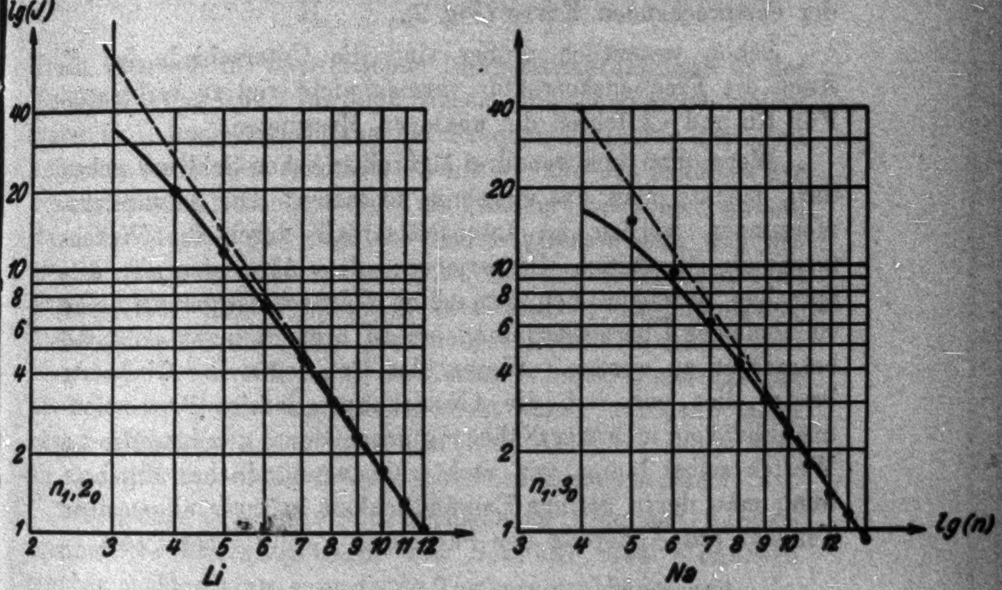


Fig. 1 Fig. 2
Zwei Abs.-Messungen von Trumpy i. Vgl. mit d. theor. H-Int.

tischen, des Korrespondenzprinzips wird treu wiedergegeben. Leider fehlt der erste Meßpunkt $(n = 3)$, der die schärfste Probe auf eventuelle Zufälligkeiten wäre.

Bei *Na* folgen die Meßpunkte nicht mehr so gut der theoretischen Kurve. Folglich wird hier — wir vergleichen ja nur Relativwerte — die Frage aktuell, wo man die Meßpunkte an die Kurve anzuschließen hat. Ein „Ausgleichen" im Sinne der kleinsten Quadrate ist nicht unbedenklich; auf diese Weise vermag man ja die abweichendsten Dinge in gegebene Kurven einzureihen, besonders, wenn der Bereich derart klein ist. Es entspräche auch nur dem „Streuen" durch „zufällige" Fehler und nicht sytematischen Abweichungen, die wir zu er-

warten haben. Übrigens ist die Streuung bei den Absorptionsmessungen sehr klein (was gegen Meßfehler systematischer Natur so wenig aussagt, als gegen prinzipielle Abweichungen). Wir entschließen uns zum Anschluß der Messungen für die größte Hauptquantenzahl. Denn alle systematischen Einflüsse müssen bei großen Hauptquantenzahlen an Bedeutung verlieren. Dann folgt aber auch die Meßreihe von Na recht gut der entsprechenden Kurve (Fig. 2).

Schon wesentlich größer sind die Unterschiede bei *K*. Auch die Frequenzkorrektur vermag nicht viel zu verbessern. Für Rb und Cs fehlen die analogen Messungen.

Wenn man aus den drei Meßreihen schon Schlüsse ziehen darf, möchte man das Ergebnis so fassen: Die Absorptionsmessungen werden im Intensitätsabfall durch die Wellenmechanik vorzüglich beschrieben; die Abweichungen entsprechen durchaus den gemachten Vernachlässigungen. Die vollkommene Übereinstimmung bei Li braucht nicht als Zufall betrachtet zu werden. Wegen der Relativität der Meßwerte besagt dies nur, daß die Abweichungen infolge Wasserstoffunähnlichkeit in erster Näherung proportional den betreffenden Werten selbst laufen, ein recht selbstverständliches Ergebnis, wenn man deren geringe Empfindlichkeit in ihrer allgemeinen Tendenz auf Änderung der Parameter n' und l betrachtet.

4. Die Emissionsmessungen

Wegen des eingangs erwähnten vollkommen negativen Ergebnisses sind die Details der Eingliederung hier unwesentlich. Sie wurden beibehalten. Da alle Linien Dubletts sind (mit dem Intensitätsverhältnis 2:1), wurden beide Komponenten getrennt verglichen. Deren Abweichung ist gering.

Durchweg ist der Intensitätsabfall außerordentlich viel steiler als in der Theorie (rund mit der 8. bis 9. Potenz statt der 3.!) und mit und ohne Frequenzkorrektur nicht recht systematisch in bezug auf Wasserstoffähnlichkeit.

Da es sich um die I. und II. Nebenserie je desselben Alkalimetalls handelt, haben wir uns ein Ergebnis in bezug auf das Intensitäts*verhältnis* der Serien zueinander erhofft. Die Einordnung geschah wie folgt:

Na	I.	Nebenserie	$(n_2, 3_1)$ [1])
	II.	„	$(n_0, 3_1)$
K	I.	„	$(n_2, 4_1)$ [1])
	II.	„	$(n_0, 4_1)$
Rb	I.	„	$(n_2, 5_1)$ [2])
	II.	„	$(n_0, 5_1)$
Cs	I.	„	$(n_2, 6_1)$ [2])
	II.	„	$(n_0, 6_1)$.

Doch während die theoretischen Intensitätsverhältnisse in der Größenordnung 30 : 1 bis 50 : 1 liegen, sind die experimentellen unter 2 : 1, nach Anbringung der Frequenzkorrektur zum Teil sogar im Vorzeichen verkehrt! Wenn wir nun das Ergebnis der vorhergehenden Nummer einmal als gesichert betrachten wollen, dann ergibt sich aus dem der Emissionsmessungen, daß der Begriff „Temperaturanregung“ ganz und gar unzureichend ist zur Beschreibung der Vorgänge in Flammen; der Intensitätsabfall geht etwa mit dem Quadrat des Abfalls in Absorption. Man mag sich vorstellen, daß die Zustände hoher Quantenzahlen als Folge des großen Gasdruckes nicht immer genügend lange bestehen bleiben, um zu einer Emission Anlaß zu geben, also an eine Störung durch die benachbarten Atome denken.

Vergleichsmessungen in „verschiedenen“ Flammen (Bunsenbrenner bis Knallgasgebläse) von Bleeker und Ornstein ergaben nicht die zu erwartende Temperaturabhängigkeit. In einer neueren Arbeit[3]) hat Bleeker gezeigt, daß diese Verwischung der zu erwartenden Abhängigkeit, wie auch die große Steilheit des Intensitätsabfalls wenigstens bei kleinen n auf Konto chemischer Vorgänge gesetzt werden kann. — Freilich ist die Verschiedenheit der untersuchten Flammen nicht groß. Offenbar spielen die Anregungseinflüsse hier die entscheidende Rolle und unsere zweite Frage nach dem Intensitätsverhältnis verschiedener Serien muß aus Mangel an weiteren experimentellen Unterlagen unbeantwortet bleiben. Für diese Fragen erscheint es angebracht, zunächst möglichst

---

1) Messung von C. Bleeker, Briefliche Mitteilungen; vgl. auch Ztschr. f. Phys. Chem. 120. S. 63. 1926.

2) Ztschr. f. Phys. 27. S. 199f. 1926.

3) Vgl. Fußnote 1), S. 527.

Absorptionsmessungen auszuführen, bis deren Verhältnisse befriedigend geklärt sind. Emissionsmessungen bedürfen zu einer ausreichenden Beschreibung bestimmt weiterer Parameter.

IV. Tafeln der Amplitudenquadrate

n	Lymanserie	Balmerserie			
	$(n_1, 1_0)$	$(n_1, 2_0)$	$(n_2, 2_1)$	$(n_0, 2_1)$	Summe
2	0,83	—	—	—	—
3	,133	4,7	22,7	0,44	27,8
4	,046	0,83	2,93	,074	3,8
5	,0220	,299	0,95	,0259	1,28
6	,0120	,146	,44	,0125	0,60
7	,0074	,083	,242	,0071	,33
8	,0049	,053	,149	,0044	,206
9	,0033	,036	,101	,0031	,140
10	,00242	,0248	,068	,00209	,095
11	,00181	,0189	,052	,00159	,073
12	,00139	,0139	,038	,00117	,053

Paschenserie

n	$(n_1, 3_0)$	$(n_2, 3_1)$	$(n_3, 3_2)$	$(n_0, 3_1)$	$(n_1, 3_2)$	Summe
4	15,0	57	157	2,97	1,70	234
5	2,54	8,8	16,5	0,47	0,283	28,5
6	0,93	3,0	4.8	,164	,076	9,0
7	,45	1,44	2,12	,078	,035	4,1
8	,259	0,82	1,13	,044	,0192	2,28
9	,166	,52	0,69	,0282	,0120	1,42
10	,112	,35	,45	,0187	,0079	0,94
11	,082	,246	,32	,0136	,0057	,67
12	,060	,179	,231	,0099	,0041	,48

Brackettserie

n	$(n_1, 4_0)$	$(n_2, 4_1)$	$(n_3, 4_2)$	$(n_4, 4_3)$	$(n_0, 4_1)$	$(n_1, 4_2)$	$(n_2, 4_3)$	Summe
5	36	125	291	630	105	9,1	4,4	1201
6	6,0	22,5	40	55	14,8	1,21	0,48	140
7	2,15	6,7	12,9	14,7	4,2	0,41	,137	41
8	1,03	3,2	5,8	5,9	1,77	,184	,061	18,0
9	0,60	1,81	3,2	2,95	0,93	,102	,032	9,6
10	,43	1,07	2,27	1,81	,56	,072	,0223	6,2
11	,258	0,83	1,39	1,16	,37	,045	,0134	4,1
12	,182	,55	0,91	0,80	,253	,0294	,0088	2,73

5-te Serie										
n	$(n_1, 5_0)$	$(n_2, 5_1)$	$(n_3, 5_2)$	$(n_4, 5_3)$	$(n_5, 5_4)$	$(n_0, 5_1)$	$(n_1, 5_2)$	$(n_2, 5_3)$	$(n_3, 5_4)$	Summe
6	67	203	520	1020	201	247	15,3	20,0	8,2	2300
7	20,7	36	75	122	139	35	3,9	2,37	0,81	434
8	10,9	12,3	24,9	36,4	33,0	4,5	1,24	0,70	0,216	124
9	5,8	6,0	11,5	15,8	14,9	2,32	0,57	0,306	0,088	57
10	3,63	3,36	7,4	8,3	6,2	1,29	0,31	0,159	0,044	30,7
11	2,43	2,15	4,0	5,1	3,7	0,89	0,196	0,100	0,0171	18,6

München, Institut für Theoretische Physik.

(Eingegangen 11. Mai 1928)

4. *Intensitätsverhältnis der Ortho- und Paraserien in Beziehung zur Atomstruktur des Heliums;*

von J. Stark

(Hierzu Tafel XVI)

Inhalt: 1. Einleitung. — 2. Fehlen der Ortholaufzahl 1*s*. — 3. Das Intensitätsverhältnis der Ortho- und der Paraserien. — 4. Ergebnisse und Folgerung.

1. Einleitung

Helium besitzt bekanntlich eine Reihe von Serien einfacher Linien, Paraserien, und eine Reihe von Serien zusammengesetzter Linien, Orthoserien. Ohne die Einwirkung eines äußeren elektrischen Feldes erscheinen in der zweiten Ordnung der zwei Seriensysteme die Hauptserie und die scharfe und die diffuse Nebenserie; die bekannten Formeln für diese sind:

	Paraserien 2. Ordnung	Orthoserien 2. Ordnung
Hauptserie	$2S - mP$	$2s - mp$
Scharfe Nebenserie . .	$2P - mS$	$2p - ms$
Diffuse Nebenserie . .	$2P - mD$	$2p - md$

Interessant ist der Vergleich der Werte der entsprechenden Laufzahlen in den zwei Seriensystemen an Hand der nachstehenden Tabelle gemäß den Tabellen von Paschen und Götze.

Laufzahlen	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$
ms	38 455	15 073	8013
mS	32 033	13 446	7370
mp	29 224	12 746	7094
mP	27 176	12 101	6818
md	—	12 209	6866
mD	—	12 205	6864

Gemäß einer vorläufigen Theorie[1]) der Atomstruktur und Lichtemission entsprechen die Laufzahlen der tieffrequenten Serien eines Elements den möglichen Gleichgewichtslagen eines Oberflächenelektrons seines Atoms, und zwar messen sie die Differenz der Energie E_∞ des abgetrennten oder relativ zu seinem Atomion im Unendlichen liegenden Elektrons und der Energie E_m des Elektrons in der Gleichgewichtslage (Gleichgewichtszustand) m; es ist nämlich:

$$E_\infty - E_m = h \cdot m(s, p, d) = h \cdot n_{\infty\, m}.$$

In dieser Formel bedeutet $m\,(s, p, d)$ die Laufzahl der Gleichgewichtslage m in der s-, p- oder d-Reihe, h die Planck-sche Konstante, $n_{\infty\, m}$ die Frequenz des Lichtwirbels, welcher bei der Schwankung des Oberflächenelektrons aus dem Unendlichen in den Gleichgewichtszustand m emittiert wird. $m\,(s, p, d)$ mißt also die energetische Stufe, um welche das Gleichgewicht m unter dem Zustand des abgetrennten Elektrons liegt.

Gemäß dieser theoretischen Auffassung und gemäß der obigen Tabelle gibt es zwei Systeme von Gleichgewichtslagen eines Oberflächenelektrons des Heliums, die sich Nummer für Nummer in den s, S-, p, P-, d, D-Reihen entsprechen, und zwar ist jede Ortholage energetisch tiefer als die entsprechende Paralage. Wie sich aus dieser Analogie folgern läßt, ist die räumliche Anordnung der Ortholagen durchaus ähnlich der räumlichen Anordnung der Paralagen, nur ist das Elektron in einer Ortholage dem positiven Atomkern etwas näher als in der entsprechenden benachbarten Paralage. Dieser energetische Unterschied kann dadurch bedingt sein, daß in den zwei entsprechenden Lagen eine das Gleichgewicht verhältlich schwach mitbestimmende Kraft und somit eine Elektroneigenschaft in den zwei Lagen entgegengesetzte Richtungen hat. Die zugrunde gelegte Atomtheorie sieht diese Eigenschaft des Elektrons in seinem magnetischen Moment und jene Kraft in der magneti-

---

1) J. Stark, Atomstruktur und Atombindung, Polytechnische Buchhandlung A. Seydel, Berlin 1928.

Diese Schrift habe ich den theoretischen Überlegungen in dieser und in der folgenden Mitteilung zugrunde gelegt; sie wird unter „Atomstruktur" zitiert.

schen Schubkraft[1]) auf das Elektron von seiten des Atomrestes. Infolge dieser Schubkraft ist der Abstand des Elektrons von seinem Atomkern für eine Paralage etwas größer als für die entsprechende Ortholage; in jener Lage ist also das magnetische Moment des Elektrons entgegengesetzt zu dem magnetischen Feld seines Atomions, in dieser gleichgerichtet zu ihm.

Gemäß dem Bild[2]) von der Struktur des He-Atoms sind dessen zwei Oberflächenelektronen in der Achse des Atomkernes auf den zwei Seiten von dessen Äquatorebene einander gegenübergestellt. Und zwar sind im energetisch tiefsten, also normalen Zustand des He-Atoms die magnetischen Momente der zwei Elektronen entgegengesetzt zueinander gerichtet, wie aus der Tatsache des Diamagnetismus des He-Gases zu folgern ist. Da das magnetische Feld des He-Atomions am Orte eines seiner Oberflächenelektronen in erster Linie von dem magnetischen Moment des zweiten Elektrons bestimmt und von seiten des Atomkernes nur modifiziert wird, so ist das magnetische Moment des He-Elektrons in seiner energetisch tiefsten Gleichgewichtslage entgegengesetzt zur Richtung des magnetischen Feldes seines Atomions; es ist also die energetisch tiefste Gleichgewichtslage des He-Elektrons eine Paralage. Demnach ist aus den erwähnten Tatsachen zu folgern, daß es wohl eine Paralage $1S$ unterhalb der oben in der Tabelle angeführten Paralage $2S$ gibt, aber nicht noch unterhalb $1S$ und unterhalb der Ortholage $2s$ auch noch eine Ortholage $1s$.

Tatsächlich hat Th. Lyman[3]) wohl eine Para-He-Serie erster Ordnung ($1S - mP$) beobachtet, aber keine Orthoserie erster Ordnung ($1s - mp$). Da es denkbar war, daß diese Serie unter den Versuchsbedingungen Lymans infolge Absorption unsichtbar blieb, habe ich unter geeigneten Bedingungen nach der Serie $1s - mp$ gesucht. Hierüber berichtet der Abschnitt 2.

Aus den angeführten Tatsachen und Überlegungen ergibt sich weiter, daß jede Paralage (Zustand) eines Elektrons weniger

1) „Atomstruktur" S. 58.
2) „Atomstruktur" S. 78.
3) Th. Lyman, Astrophys. Journ. 60. S. 1. 1924.

stabil ist als die entsprechende Ortholage, weil jene energetisch etwas höher ist als diese. Diese Folgerung läßt sich prüfen durch den Vergleich der Intensitäten entsprechender Para- und Ortholinien unter verschiedenen Versuchsbedingungen. Bei kleiner Schichtdicke (Absorption) des emittierenden Gases ist das Verhältnis der Intensitäten zweier Serienlinien angenähert gleich dem Verhältnis der Häufigkeiten der oberen Gleichgewichtslagen, von denen aus nach den tieferen Lagen die Schwankungen des emittierenden Elektrons für die zwei verglichenen Linien erfolgen. Wenn also die obige Folgerung der Wirklichkeit entspricht, so muß eine Ortholinie im Vergleich zu der entsprechenden Paralinie um so intensiver herauskommen, je ungünstiger die Versuchsbedingungen für die Lebensdauer der verglichenen Zustände sind. So ist die mittlere Lebensdauer einer höheren Gleichgewichtslage unter sonst gleichen Umständen um so kürzer, je größer die sekundliche Zahl der Zusammenstöße der Linienträger mit Gasmolekülen, also je größer der Gasdruck ist; es ist darum zu erwarten, daß das Verhältnis der Intensitäten von Paralinien zu den Intensitäten der entsprechenden Ortholinien mit wachsendem Gasdruck unter sonst gleichen Umständen abnimmt. Über diese Erscheinung berichtet Abschnitt 3.

2. Fehlen der Ortholaufzahl $1s$

Von Lyman ist die Paraserie $1S - mP$ aufgefunden worden. Gemäß Analogie ist das Vorkommen der Orthoserie $1s - mp$ zu erwarten, wenn die Ortholaufzahl (Gleichgewichtslage) $1s$ existiert. Diese Serie, insbesondere ihr erstes Glied $1s - 2p$ würde der Absorption unterliegen in normalem He-Gas. Aus diesem Grunde hätte sie sich in der erwähnten Untersuchung Lymans der Beobachtung entziehen können. Um die Absorption des Lichtes der Linie $1s - 2p$ auf seinem Wege im He-Gas auszuschalten, habe ich folgende Methode von grundsätzlicher Bedeutung angewendet. Die Frequenz der in Emission zu untersuchenden Linie wurde gegen die Frequenz n derselben Linie in der Absorption in dem durchlaufenen Gas dadurch geändert und somit der Absorption in diesem entzogen, daß den Trägern der Emission eine Geschwindigkeit v in der Sehachse erteilt, also die Emissions-

frequenz in dieser Achse gegen die Absorptionsfrequenz um den Betrag $n \frac{v}{c}$ geändert wurde. Diesen methodischen Grundgedanken wandte ich in folgender Ausführung an. Als Emissionsträger benutzte ich He-Kanalstrahlen und ließ diese in der Sehachse, also in der Spaltrohrachse, auf den Spalt zu laufen. Die Kanalstrahlenröhre war koaxial in ein unmittelbar vor dem Spektrographenspalt sitzendes 3,5 cm weites Rohr gekittet. Der Abstand Kathode–Spalt betrug 3,5 cm. Als Spektrograph diente ein Konkavgitter von 50 cm Radius, 27028 Strichen auf dem Zoll und $3{,}8 \times 4{,}6$ cm² geteilter Fläche. Es war innerhalb eines 15 cm weiten zylindrischen Rohres so aufgestellt, daß Spalt, Bildfläche und Gittermitte auf einem Kreise von 50 cm Durchmesser lagen. Der Spalt war 0,05 mm weit und 0,1 mm hoch; er lag zwischen der Kanalstrahlenröhre und dem Hohlraum des Spektrographen. Dieser war durch ein 40 cm langes, 4 cm weites Rohr mit einer dreistufigen Stahldiffusionspumpe verbunden. Während der spektralen Aufnahmen floß also He-Gas aus der Kanalstrahlenröhre, in der ein He-Druck von ungefähr 0,2 mm herrschte, in den Spektrographen und von da nach der Pumpe; der Druck in dem Spektrographenraum war kleiner als 0,002 mm. Für den Zweck der Reinigung der Kanalstrahlenröhre vor dem Betrieb mit Helium wurde sie durch eine Nebenschlußleitung unmittelbar mit der Pumpe verbunden.

Die gewählte Versuchsanordnung bot in optischer Hinsicht den Vorteil, daß die zur Wirkung kommende Lichtintensität groß war, weil die Kanalstrahlen unmittelbar vor dem Spalt, ja in dem Spalt selbst verliefen. Dieser Vorteil war indes mit dem Nachteil verknüpft, daß die Kanalstrahlen durch den Spalt in den Spektrographenraum traten und durch ihr Abklingleuchten eine Verschleierung der photographischen Platte bewirkten. Es war darum notwendig, das Abklingleuchten nach der Platte zu durch einen 5 mm hohen, 3 cm langen Streifen aus geschwärztem, dünnem Messingblech abzublenden.

Das Ergebnis der Aufnahmen[1]) unter diesen Bedingungen

---

1) Bei diesen Aufnahmen wurde ich in wertvoller Weise von Hrn. Prof. Dr. Reinkober unterstützt, wofür ich ihm auch an dieser Stelle verbindlich danke.

war folgendes. Es erschienen in der ersten und zweiten Ordnung ziemlich intensiv wohl die H-Linie 1216 *Å* und die Para-He-Linien $1S - 2P = 584$ *Å* und $1S - 3P = 537$ *Å*, aber keine weiteren Linien, welche intensiver als die angegebenen Paralinien und als He-Linien anzusprechen gewesen wären. Nun kommt sonst, wie in dem folgenden Abschnitt gezeigt wird, jede Ortholinie beträchtlich intensiver heraus als die entsprechende Paralinie. Darum ist es auf Grund des obigen Ergebnisses wenigstens wahrscheinlich, daß die Ortholaufzahl $1s$ nicht vorkommt.

Bei Existenz der Ortholaufzahl $1s$ wäre mit der Möglichkeit des Vorkommens einer He-Linie $1s - 1S$ in Emission und Absorption zu rechnen. Gemäß der Extrapolation von den bekannten Werten $2s - 2S$, $3s - 3S$, $4s - 4S$ auf den unbekannten Wert $1s - 1S$ müßte die Linie $1s - 1S$ unterhalb 2500 *Å* im Ultraviolett liegen. Unter zweckmäßig gewählten Versuchsbedingungen habe ich nach einer He-Linie $1s - 1S$ im Ultraviolett sowohl für den Fall der Emission der negativen Glimmschicht in He von 1—130 mm Druck wie für den Fall der Absorption in einer He-Schicht von 10 cm Länge und 10—130 mm Druck gesucht. Ich habe indes keine neue He-Linie gefunden, welche als $1s - 1S$ anzusprechen gewesen wäre.

3. Das Intensitätsverhältnis der Para- und der Orthoserien

Unter dem in der Einleitung entwickelten Gesichtspunkt erschien es mir wichtig, die Bedingungen zu ermitteln, von denen das Intensitätsverhältnis der Para- und der Orthoserien abhängt.

In der positiven Säule des Glimmstroms wird die Lichtemission durch den Stoß langsamer Kathodenstrahlen angeregt. Deren Geschwindigkeitsverteilung wird in erster Linie durch die Forderung bestimmt, daß ein erheblicher Bruchteil der Elektronen eine so große Geschwindigkeit (Ionisierungsspannung) besitzt, daß diese zur Ionisierung neutraler Gasmoleküle ausreicht. Auf Grund dieser Forderung ist die Geschwindigkeitsverteilung der Kathodenstrahlen in der positiven Säule in einem Druckbereich von 0,5—100 mm und für Stromquerschnitte von mehr als 3 mm Durchmesser wenigstens in erster Annäherung

konstant. Die Änderung des Intensitätsverhältnisses der He-Serien in der positiven Säule bei Änderung des Druckes zwischen 0,5 und 100 mm muß daher in erster Linie durch den Einfluß der Stöße der neutralen Gasmoleküle auf die Häufigkeit derjenigen oberen Gleichgewichtszustände der Emissionsträger bedingt sein, aus denen heraus die Emissionselektronen nach tieferen Gleichgewichtslagen schwanken.

In Figg. 1 und 2 auf Taf. XVI sind Beispiele von Spektrogrammen, welche ich an der positiven Säule in Helium aufnahm, in Form von Schwärzungsregistrierkurven (Photometer Goos und Koch) für ausgewählte Ortho- und Paralinien mitgeteilt. Bei beiden Aufnahmen betrug der Durchmesser der positiven Säule 5 mm, die Stromstärke 5—10 Milliampère; der Gasdruck für das Spektrogramm in Fig. 1 war ungefähr 0,5, für das in Fig. 2 100 mm. Wie der Vergleich der zwei Figuren erkennen läßt, nimmt das Intensitätsverhältnis der Ortholinie 3889 $= 2s - 3p$ und der Paralinie 3965 $= 2S - 4P$, ferner das Intensitätsverhältnis der Ortholinien 4472 $= 2p - 4d$ und 4026 $= 2p - 5d$ und der Paralinie 4388 $= 2P - 5D$ beim Steigen des Druckes von 0,5 (Fig. 1) auf 100 mm (Fig. 2) beträchtlich zu. Die gleiche Erscheinung lassen die erhaltenen Aufnahmen auch an Linien der scharfen Nebenserie feststellen. Es ist also folgender Satz experimentell erwiesen: *In der positiven Säule des Glimmstroms wird bei Steigen des Gasdruckes die Intensität der Paraserien des Heliums im Verhältnis zur Intensität der Orthoserien kleiner.*

Wie der Vergleich der Intensitäten der diffusen Orthonebenserienlinien 4472 $= 2p - 4d$ und 4026 $= 2p - 5d$ in der Fig. 1 mit ihren Werten in Fig. 2 erkennen läßt, nimmt das Intensitätsverhältnis der in der diffusen Nebenserie aufeinander folgenden Glieder mit steigendem Gasdruck in der positivem Säule ab. Die gleiche Erscheinung zeigen die erhaltenen Spektrogramme für alle übrigen Ortho- und Paraserien des Heliums. Es gilt also allgemein folgender Satz: *Der Abfall der Intensität längs einer He-Serie in der Emission der positiven Säule nimmt mit wachsendem Gasdruck zu.*

Dem beschriebenen Gang des Intensitätsverhältnisses entsprechender He-Serienlinien entspricht *der Gang der Farbe der Gesamtemission der positiven Säule* in Helium: *diese ist bei*

niedrigem Druck weißlichgrün infolge verhältlich großer Intensität der grünen Paralinien 5016 = 2 S — 3 P und 4922 = 2 P—4 D geht bei steigendem Druck erst in ein helles Gelb über infolge Zurücktretens der genannten Paralinien und ändert sich bei weiter steigendem Druck in Gelbrot infolge der Intensitätsabnahme der höheren Glieder der Orthoserien.

In den bisher beschriebenen Erscheinungen an der positiven Säule wird die Häufigkeit der Parazustände im Vergleich zu derjenigen der Orthozustände durch Zunahme der Zahl der Zusammenstöße der Emissionsträger mit Gasmolekülen infolge Zunahme des Gasdruckes verringert. Wenn die entwickelte theoretische Auffassung richtig ist, dann muß die Intensität der Paraserien im Vergleich zu derjenigen der Orthoserien für den Fall der Bewegung der Emissionsträger ebenfalls kleiner sein als für den Fall ihrer Ruhe. Diese zwei Fälle lassen sich in der Emission der Kanalstrahlen verwirklichen: verlaufen z. B. H-Kanalstrahlen in Helium, so liefern die von ihnen gestoßenen He-Atome eine ruhende Intensität, welche wie in der positiven Säule von den Zusammenstößen mit Gasmolekülen entsprechend dem Gasdruck beeinflußt wird; verlaufen dagegen He-Kanalstrahlen in Wasserstoff von angenähert gleichem Druck, dann emittieren sie bewegte Intensität, auf welche eine größere Zahl von Zusammenstößen infolge der vergrößerten Geschwindigkeit der Emissionsträger einwirkt. Es ist darum zu erwarten, daß *in der bewegten Emission des Heliums die Paralinien im Vergleich zu den Ortholinien weniger intensiv herauskommen als in der ruhenden Emission.* Dies ist tatsächlich der Fall. Die Spektrogramme, welche bei der Untersuchung der Axialität der Lichtemission erhalten wurden, lassen diese Erscheinungen deutlich erkennen. Ein Beispiel hierfür liefern die Spektrogramme in Figg. 13 und 14 auf Taf. XVI meiner Axialitätsschrift[1]); die bewegte Paralinie 4388 = $2P - 5D$ (Fig. 13) ist im Vergleich zur bewegten Ortholinie 4026 = $2p - 5d$ in derselben Figur viel schwächer als die ruhende Paralinie 4388 (Fig. 14) im Vergleich zur ruhenden Ortholinie 4026 in derselben Figur.

---

1) J. Stark, Die Axialität der Lichtemission und Atomstruktur, Polytechnische Buchhandlung A. Seydel, Berlin 1927.

Die bisher beschriebenen Intensitätsverhältnisse von Para- und Orthoserien wurden aus einem Einfluß der Kraftfelder (Zusammenstöße) von seiten neutraler Gasmoleküle auf die höheren Gleichgewichtszustände der Emissionsträger erklärt. Diese Auffassung läßt auch einen ähnlichen Einfluß der Kraftfelder von seiten der elektrischen Strahlenteilchen erwarten, durch deren Stoß auf neutrale He-Atome deren höhere Gleichgewichtszustände hergestellt werden. Unmittelbar nach der Hebung eines He-Elektrons in eine höhere Gleichgewichtslage durch den Stoß eines Strahlenteilchens befindet sich dieses noch eine gewisse Zeit in der Nähe des Emissionsträgers und kann darum durch sein elektrisches Feld dessen Zustand beeinflussen. Die Chance für die Umwandlung eines Parazustandes in einen Orthozustand ist darum um so größer, je länger die Zeitdauer der Einwirkung des elektrischen Feldes des Strahlenteilchens ist. Unter sonst gleichen Umständen ist diese Zeitdauer um so länger, je kleiner die Geschwindigkeit des Strahlenteilchens ist. Es ist demnach zu erwarten, daß das Intensitätsverhältnis der Para- und der Orthoserien des Heliums auch von der Geschwindigkeit der ihre Emission anregenden elektrischen Strahlen abhängt. Unter diesem Gesichtspunkt können folgende Beobachtungen beurteilt werden.

In einem Bereich von 1—20 mm Druck ist die Farbe der Gesamtemission des Heliums in der positiven Säule gelb, in der negativen Glimmschicht jedoch grün; wie auch die spektrale Untersuchung bestätigt, *ist also das Intensitätsverhältnis der Para- zu den Orthoserien bei kleiner Geschwindigkeit der anregenden Kathodenstrahlen (positive Säule) kleiner als bei größerer Geschwindigkeit (negative Glimmschicht).* Hierbei ist an den zwei verglichenen Orten der Emission der Gasdruck derselbe. Daß gleichwohl die Intensitätsverhältnisse verschieden sind, beweist, daß außer den Stößen der neutralen Gasmoleküle noch ein Einfluß vonseiten der stoßenden Strahlen wirksam ist. Bei hohem Gasdruck (größer als 100 mm) überwiegt der Einfluß der Stöße der neutralen Moleküle; *es nimmt dann nämlich auch die negative Glimmschicht in Helium eine gelbe Gesamtfarbe an wie die positive Säule bereits bei niedrigerem Drucke.*

Die Gesamtfarbe der Emission von He-Kanalstrahlen in

Helium ist rotgelb, diejenige der Kathodenstrahlen bei gleichem Druck und gleichem Kathodenfall in der negativen Glimmschicht grün. In Fig. 3 auf Taf. XVI ist ein He-Spektrogramm des dunklen Kathodenraums (Anregung überwiegend durch schnelle Kathodenstrahlen) mitgeteilt, in Fig. 4 ein Spektrogramm von He-Kanalstrahlen in He bei gleichem Druck (0,5 mm) und gleichem Kathodenfall (3000 Volt). Wie der Vergleich der zwei Spektrogramme erkennen läßt, *ist das Intensitätsverhältnis der Paraserien* ($4388 = 2P - 5D$, $3965 = 2S - 4P$) *zu den Orthoserien* ($4472 = 2p - 4d$, $4026 = 2p - 5d$, $3889 = 2s - 3p$) *im Falle der Anregung durch Kanalstrahlen sehr viel kleiner als im Falle der Anregung durch Kathodenstrahlen.* In diesem Falle war die Geschwindigkeit der anregenden Strahlen $3 \cdot 10^9$ cm·sec^{-1}, in jenem Falle kleiner als $2 \cdot 10^7$ cm·sec^{-1}.

4. Ergebnisse und Folgerung

Eine He-Linie, deren Frequenz von einer Laufzahl $1s$ abhängt, hat sich nicht nachweisen lassen.

Das Verhältnis der Intensität der Paraserien zu derjenigen der entsprechenden Orthoserien nimmt bei Anregung durch Kathodenstrahlen (positive Säule, negative Glimmschicht) mit steigendem Gasdruck ab; es ist bei gleichem Druck für rasche Kathodenstrahlen (Kathodendunkelraum) größer als für langsame Kathodenstrahlen (positive Säule) und für Kanalstrahlen.

Die Paraserien des Heliums entsprechen den Singuletserien der alkalischen Erden, die Orthoserien deren Tripletserien. Auf Grund der spektralen und strukturellen Ähnlichkeit[1]) des Heliums und der alkalischen Erden sind für das Intensitätsverhältnis der Singulet- und der Tripletserien der alkalischen Erden die gleichen Gesetzmäßigkeiten zu erwarten, wie sie hier für die Para- und Orthoserien des Heliums gefunden wurden. Diese Gesetzmäßigkeiten lassen sich einheitlich unter dem Gesichtspunkt deuten, daß ein Para- bzw. ein Singuletzustand des Emissionsträgers weniger stabil und darum weniger häufig ist als der entsprechende Ortho- bzw. Tripletzustand.

---

1) „Atomstruktur", S. 118.

Die vorstehende Untersuchung wurde im Physikalischen Institut der Universität Greifswald ausgeführt. Hr. Prof. Krüger hat sie mir ermöglicht durch Überlassung von Hilfsmitteln des von ihm geleiteten Instituts, die Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft durch finanzielle Unterstützung, Lindes Gesellschaft für Eismaschinen durch Lieferung von Helium; in dem von Hrn. Prof. Koch geleiteten Hamburger Institut wurden einige meiner Spektrogramme von Hrn. Dr. Kuhlmann mit dem Goos-Kochschen Photometer registriert. Für diese Förderung meiner Arbeit sage ich auch an dieser Stelle Dank.

Ullersricht bei Weiden, Obpf., März 1928.

(Eingegangen 16. Mai 1928)

5. *Ionisierung von Quecksilberatomen durch ihre Reaktion mit Heliumionen;*
von J. Stark

(Hierzu Tafel XVII)

1. Grundgedanke

Nach den bisherigen Erfahrungen wird ein Atom, das einem Gasmolekül angehört, dadurch ionisiert, daß eines seiner Elektronen soviel Energie von seiten eines auftreffenden Strahlenteilchens oder Lichtwirbels übernimmt, daß es dadurch in unendlichen Abstand von seinem Atomion gehoben wird und beide, Elektron und Atomion, unabhängig voneinander beweglich werden. Auf Grund folgender Überlegung ist noch eine weitere Art der Ionisierung eines Gasatoms möglich.

Gemäß der von mir vertretenen Auffassung[1]) befinden sich sowohl in einem neutralen Atom A wie in einem positiven Atomion B^+ die Hüllenelektronen in einer Gleichgewichtsanordnung. Kommen sich die zwei Körper A und B^+ genügend nahe, dann überlagern sich ihre elektromagnetischen Felder und es hat zwischen ihnen eine Reaktion statt. Diese kann drei Ergebnisse haben. Erstens mag weder an A noch an B^+ ein Elektron infolge der Reaktion eine neue Gleichgewichtslage annehmen; in diesem Falle treten die zwei Körper A und B^+ nach dem Zusammenstoß unverändert als neutrales Atom und positives Atomion wieder auseinander. Zweitens kann während der Reaktion ein Elektron des neutralen Atoms A seine Gleichgewichtslage an diesem verlassen und sich so zwischen dem eignen Atom und dem fremden Atomion anordnen, daß diese zwei Körper zu einem wechselseitigen Gleichgewicht in einem chemischen Molekül zusammengebunden werden, also ein stabiles positives Molekülion $(A-B)^+$ entsteht; bei dieser Reaktion fällt das aktive Elektron aus

1) J. Stark, Atomstruktur und Atombindung, Polytechnische Buchhandlung A. Seydel, Berlin 1928.

seiner Gleichgewichtslage an A unter Energieabgabe in die energetisch tiefere Gleichgewichtslage an $(A-B)^+$.

Drittens kann die Reaktion zwischen A und B^+ so verlaufen, daß das aktive Elektron aus der Gleichgewichtslage an A in eine energetisch tiefere Gleichgewichtslage allein an B^+ fällt, ohne sich gleichzeitig mit A und mit B^+ ins Gleichgewicht zu setzen. In diesem Falle geht aus der Reaktion das ursprünglich neutrale Atom A als positives Atomion A^+, das ursprünglich positive Atomion B^+ als neutrales Atom B hervor: das Atomion B^+ entreißt in der Reaktion dem Atom A ein Elektron, indem es dieses an sich energetisch tiefer fallen läßt.

Diese Ionisierung eines Atoms durch Reaktion mit einem Atomion hat folgende zwei Voraussetzungen. Erstens muß die Gleichgewichtslage des obersten Elektrons an dem Atom B energetisch tiefer sein als an dem Atom A; es muß mit anderen Worten die Ionenenergie des obersten Elektrons an dem Atom B größer sein als an dem Atom A. Zweitens muß die Gleichgewichtslage des obersten Elektrons an B derartig tief, seine chemische Verbindefähigkeit derartig gering sein, daß es sich nicht mehr mit dem positiven Atomion A^+ in ein einigermaßen stabiles Gleichgewicht setzen kann.

Die erste dieser Bedingungen läßt sich leicht erfüllen, da die Ionenenergien der Oberflächenelektronen der chemischen Elemente im allgemeinen verschieden voneinander sind. Am größten ist die Ionenenergie des He-Elektrons, sie beträgt 24,5 Volt; am kleinsten ist die Ionenenergie der Alkalien und alkalischen Erden, sie beträgt z. B. für das Hg-Atom 10,4 Volt. Es liegt darum nahe, die Erscheinung der Ionisierung von Atomen durch Reaktion mit Atomionen in einer Mischung von He-Gas mit Hg-Dampf aufzusuchen. Für diese Wahl von Reaktionsteilnehmern ist zudem zu erwarten, daß auch die zweite der obigen Bedingungen erfüllt wird, daß nämlich keine stabile Verbindung $(Hg-He)^+$ sich bildet, da ja das He-Atom mit anderen Atomen sehr selten oder überhaupt nicht eine chemische Verbindung eingeht.

2. Methode

Zur experimentellen Prüfung der vorstehenden Überlegung kann man in folgender Weise verfahren. Man stellt sich eine

Mischung von verhältlich zahlreichen He^+-Ionen und von wenigen Hg-Atomen her, indem man die Kathodenstrahlen der negativen Glimmschicht in einer Mischung von He-Gas von 1—150 mm Druck und von Hg-Dampf von ungefähr 0,001 mm Druck verlaufen läßt. Die sekundliche Zahl der Zusammenstöße der Kathodenstrahlen mit neutralen He-Atomen ist dann ungefähr 1000 mal größer als die Zahl der Zusammenstöße mit Hg-Atomen. Die spezifische Zahl der durch Stoßionisierung entstehenden He^+-Ionen ist infolgedessen mehr denn 1000 mal größer als die Zahl der durch Stoßionisierung entstehenden Hg^+-Ionen. Man gewinnt so eine verhältlich große Zahl von He^+-Ionen für die Reaktion mit Hg-Atomen. Wenn dann diese Reaktion in der oben beschriebenen Art einer Ionisierung neutraler Hg-Atome verläuft, so werden die in der negativen Glimmschicht vorhandenen Hg-Atome entsprechend ihrem verhältlich kleinen Teildruck zum größten Teile durch ihre Reaktion mit den verhältlich zahlreichen He^+-Ionen ionisiert. Es ist dann in der negativen Glimmschicht in der gekennzeichneten Mischung von He-Gas und Hg-Dampf die Zahl der Hg^+-Ionen größer als die Zahl der neutralen Hg-Atome. Unter diesen Umständen ist in der negativen Glimmschicht die Zahl der Zusammenstöße der Kathodenstrahlen mit Hg^+-Ionen größer als die Zahl ihrer Zusammenstöße mit neutralen Hg-Atomen, und insoweit bei diesen Zusammenstößen von den Kathodenstrahlen eine Lichtemission von seiten der gestoßenen Teilchen angeregt wird, muß unter diesen Umständen die Emission von Hg^+-Linien erheblich intensiver als die Emission von Hg-Linien herauskommen, wenn tatsächlich eine Ionisierung von Hg-Atomen durch ihre Reaktion mit He^+-Ionen statthat.

Zum Nachweis dieser Ionisierung kann also dienen der Vergleich des Intensitätsverhältnisses von Hg^+-Linien und Hg-Linien für den Fall der Mischung von Hg-Dampf mit He und für den Fall der Mischung von Hg-Dampf mit einem anderen Gas, z. B. mit Neon, dessen Atomionen nicht oder seltener durch Reaktion Hg-Atome ionisieren. In beiden Fällen ist die Emission an der negativen Glimmschicht in der Mischung bei angenähert denselben Werten des Gasdruckes und der Stromstärke zu beobachten.

Dem neutralen Hg-Atom, genauer dem System Hg^+—Atom-

ion—Elektron, sind bekanntlich Triplet- und Singuletserien im Sichtbaren und Ultraviolett eigentümlich. Das Hg^+-Ion, genauer das System Hg^{++}—Atomion—Elektron, wird optisch durch Dupletserien charakterisiert, so durch das Duplet $2847{,}8 = 2p_1 - 2s$ und $2224{,}8 = 2p_2 - 2s$ (scharfe Nebenserie). Für den angegebenen Vergleich der Intensitätsverhältnisse eignet sich die scharfe Triplet-Nebenserienlinie $2893{,}6 = 2p_2 - 4s$ des Hg-Atoms und die dicht bei ihr liegende scharfe Duplet-Nebenserienlinie $2847{,}8 = 2p - 2s$ des Hg^+-Atomions. Das Verhältnis der Intensität der Hg^+-Linie 2847,8 zu der Intensität der Hg-Linie 2893,6 ändert sich gemäß der obigen Überlegung angenähert proportional dem Verhältnis der Zahl der Hg^+-Ionen zu der Zahl der Hg-Atome in der negativen Glimmschicht. Es ist also der Wert dieses Verhältnisses für den Fall einer Mischung von Hg-Dampf und Helium zu vergleichen mit seinem Wert für den Fall einer Mischung von Hg-Dampf und Neon bei angenähert gleichen Teildrucken.

3. Beobachtungen

Als Kathode zur Herstellung der negativen Glimmschicht diente bei den nachstehenden Beobachtungen ein 2 mm dicker Draht aus Aluminium oder Messing. Dieser war in eine eng anliegende Röhre aus Quarzglas so weit geschoben, daß er aus ihr nur noch um 0,5 mm herausragte. Als Kathodenfläche diente also die kreisförmige Endfläche des Drahtes von 2 mm Durchmesser; sie wurde absichtlich so klein gewählt, damit auch bei niedrigem Gasdruck eine große Strahlen- und Ionendichte in der negativen Glimmschicht erhalten wurde.

Die Röhre mit der so gestalteten Kathode wurde so in bezug auf den Spektrographen aufgestellt, daß die Kathodenfläche parallel der Sehachse, die Figurenachse der negativen Glimmschicht also senkrecht zur Sehachse stand. Die negative Glimmschicht wurde mit einem Quarz—Flußspat-Achromat auf den Spalt eines kleinen Steinheilschen Quarzspektrographen abgebildet.

Die Beimischung von Hg-Dampf zu Helium oder Neon erfolgte dadurch, daß diese Gase in den Vorratsgefäßen mit der Hg-Oberfläche eines Manometers in Verbindung standen, sich also mit Hg-Dampf bei Zimmertemperatur sättigen konnten.

Der Hg-Dampfdruck betrug demnach höchstens 0,001 mm, war indes zumeist kleiner, nämlich dann, wenn der Gesamtdruck in der Röhre unter den Wert des Druckes im Vorratsgefäß erniedrigt wurde. Der Druck des Heliums und Neons wurde zwischen 0,5 und 150 mm variiert.

Zur Erzeugung des Glimmstroms diente ein Hochspannungsdynamo von 3500 Volt elektromotorischer Kraft. Die Stromstärke wurde mit Hilfe eines Widerstandes zwischen 5 und 60 Milliampere variiert.

In Fig. 1 auf Tafel XVII ist zunächst ein Registrierspektrogramm mitgeteilt, das an der positiven Säule einer Hg-Lampe von Heraeus erhalten wurde. Wie es erkennen läßt, ist in ihm die Hg^+-Linie 2847,8 außerordentlich viel schwächer als die Hg-Linie 2893,6. Demgemäß ist die Zahl der Hg^+-Ionen in der positiven Säule bei niedrigem Hg-Druck (kleiner als 1 mm) außerordentlich viel kleiner als die Zahl der Hg-Atome und ebenso die Zahl der Kathodenstrahlstöße, welche ein Hg-Atom einfach ionisieren und gleichzeitig zur Emission von Hg^+-Linien (2847,8) anregen, außerordentlich viel kleiner als die Zahl der Kathodenstrahlstöße, welche Hg-Atome lediglich zur Emission von Hg-Linien (2893,6) anregen.

In Fig. 2 auf Tafel XVII ist ein Spektrogramm mitgeteilt, das von der negativen Glimmschicht in Helium von ungefähr 5 mm Druck bei einer Stromstärke von 40 mA erhalten wurde. In ihm ist die Hg^+-Linie 2847,8 sehr viel intensiver als die Hg-Linie 2893,6.

Fig. 3 auf Tafel XVII zeigt ein Spektrogramm, das an der negativen Glimmschicht in Helium von 35 mm Druck bei 15 mA erhalten wurde. In ihm ist die Hg-Linie 2847,8 ebenfalls viel intensiver als die Hg-Linie 2893,6.

Das Spektrogramm in Fig. 4 auf Tafel XVII wurde mit derselben optischen Einstellung wie das Spektrogramm in Fig. 3 auf Taf. XVII an der negativen Glimmschicht in Neon von 15 mm Druck bei 15 mA erhalten. Auf ihm erscheint wohl die Hg-Linie 2893,6, aber die Hg^+-Linie 2747,8 ist in ihm nicht einmal angedeutet.

Zu der vorstehenden Veranschaulichung der neuen Erscheinung durch Spektrogramme sei noch folgendes bemerkt. Trotz Variation des Ne-Druckes und der Stromstärke in weiten

Grenzen habe ich an der negativen Glimmschicht in einer Mischung von Hg-Dampf und Neon die Hg^+-Linie 2847,8 nicht in merklicher Intensität neben der Hg-Linie 2893,6 erhalten. An der Mischung von Hg-Dampf und Helium kam sie bei niedrigem Druck im Vergleich zu dieser Linie um so weniger intensiv heraus, je kleiner die Stromstärke, also die Ionendichte in der negativen Glimmschicht war.

4. Ergebnis

Das unmittelbare experimentelle Ergebnis der vorliegenden Untersuchung ist, unabhängig von jeder theoretischen Überlegung, folgendes: *An einer Mischung von Helium und Quecksilberdampf kommt in der negativen Glimmschicht bei großer Stromdichte die Emission von Linien des Hg^+-Ions (Funkenlinien) im Vergleich zur Emission des neutralen Hg-Atoms (Bogenlinien) viel intensiver heraus als an einer Mischung von Hg-Dampf und Neon.* Ähnlich dürfte die Emission der positiven Atomionen (Funkenlinien) im Falle der übrigen alkalischen Erden und der Alkalien in der negativen Glimmschicht in einer Mischung des Dampfes dieser Elemente mit Helium verhältlich sehr intensiv sein.

Die vorstehende Untersuchung kam unter den gleichen Umständen wie diejenige in der vorhergehenden Mitteilung zustande und erfuhr von seiten derselben Persönlichkeiten und Stellen Förderung; ich sage hierfür auch an dieser Stelle Dank. Zu besonderem Dank bin ich Hrn. Prof. Dr. Reinkober verbunden; er hat mich nämlich bei einem Teil der in dieser Untersuchung gewonnenen Aufnahmen in wertvoller Weise unterstützt.

Ullersricht bei Weiden, Obpf., März 1928.

(Eingegangen 16. Mai 1928)

6. *Untersuchungen an Detektorkontakten;*
von F. W. Kallmeyer

Einleitung

Die nicht-Ohmsche Leitung der sogenannten Detektorkontakte beruht auf Vorgängen von noch unbekannter Natur in einer sehr dünnen Schicht an der Trennungsfläche zweier Leiter, die einen unvollkommenen Kontakt bilden. Ein derartiger Kontakt wird leicht nur mit gewissen Leitern, die als Detektorkristalle bekannt sind, erhalten; eine Verstärkung des Kontaktdrucks genügt gewöhnlich, um die normalleitende Berührung herbeizuführen. — Annahmen über die Beschaffenheit des unvollkommenen Kontakts sind der natürliche Ausgangspunkt zahlreicher Theorien über die Detektorwirkung gewesen. Durch Annahme einer die direkte Berührung der Leiter verhindernden dielektrischen Zwischenschicht vermag man den mechanischen und elektrischen Eigenschaften der unvollkommenen Kontakte am besten Rechnung zu tragen.[1])

Bei Beginn der Untersuchungen, deren Ergebnis hier vorliegt, war als Aufgabe die Erweiterung der Kenntnis vom elektrischen Verhalten der unvollkommenen Kontakte gestellt. Beobachtungen mit diesem Ziele wurden außer an Kristalldetektoren (Teil II) auch an den weniger bekannten Metalldetektoren (Teil IV) angestellt. Daneben wurden später Versuche zur Aufklärung der Natur der hypothetischen Zwischenschicht in Angriff genommen (Teil III). Als wertvolles und fast unentbehrliches Hilfsmittel bei allen Versuchen erwies sich ein Apparat zur Aufnahme der als Kennlinien bezeichneten Kurven der Stromspannungsabhängigkeit (Teil I).

---

1) Als Beleg hierfür mag die Arbeit von A. Székely, Wiener Akad. IIa. 127. S. 1. 1918, dienen, ohne daß damit der Ansicht der Verfasserin beigetreten sei, daß die polarisationsähnliche Erscheinungen aufweisende Zwischenschicht notwendig eine Wasserhaut ist.

I. Kennlinienschreiber

1. Prinzip des Kennlinienschreibers

Die Aufnahme von Kennlinien ist eine häufig wiederkehrende Aufgabe bei der Untersuchung von Detektorkontakten, so daß die dazu erforderliche Zeit möglichst verkürzt werden sollte. Eine Untersuchung der verschiedenen Möglichkeiten der selbsttätigen Kennlinienregistrierung führte dazu, die bekannte Methode der oszillographischen Aufnahme des Stromverlaufs für den Fall, daß eine Wechselspannung an dem zu untersuchenden Kontakt liegt, zu einem Verfahren der selbsttätigen Kennlinienaufzeichnung auszugestalten. Hierbei konnte auf eine frühere Konstruktion von Hausrath[1]) zurückgegriffen werden.

Die Wirkungsweise des neuen Kennlinienschreibers ist folgende: Einem zeichnenden Lichtstrahl werden zwei zueinander senkrechte Ablenkungen erteilt, die in jedem Augenblick dem Strom bzw. der Spannung proportional sind. Schon bei niederen Frequenzen kommt auf diese Weise eine Kennlinie in Form eines leuchtenden Linienzuges zustande. Die dem Strom im Kontakt proportionale Ablenkung wird durch den Spiegel einer Meßschleife, die zweite der Spannung am Kontakt proportionale durch den länglichen Spiegel eines Vibrationsgalvanometers erzeugt.

Da das Vibrationsgalvanometer mit einer in der Nähe der Frequenz der anzuzeigenden Wechselspannung liegenden Eigenfrequenz ausgeführt wird, kann es nicht wie eine Meßschleife die Oberwellen der Wechselspannung richtig wiedergeben, diese muß daher einen rein sin-förmigen Verlauf haben. Der zu den Versuchen benutzte 50-periodige Wechselstrom wurde zu diesem Zweck durch eine Drosselkette geschickt. Durch einen kapazitiven oder induktiven Vorschaltwiderstand zur Vibratorspule wird ihre Auslenkung gleichphasig mit der Wechselspannung gemacht. Bei richtig eingestellter Phase ergibt sich als Kennlinie eines gewöhnlichen Widerstandes eine Gerade, sonst eine Ellipse.

Bei Kennlinienaufnahmen würde der Strom im Detektorkreise nicht immer ausreichen, um einen genügenden Aus-

---

1) H. Hausrath, Phys. Ztschr. 10. S. 756. 1909.

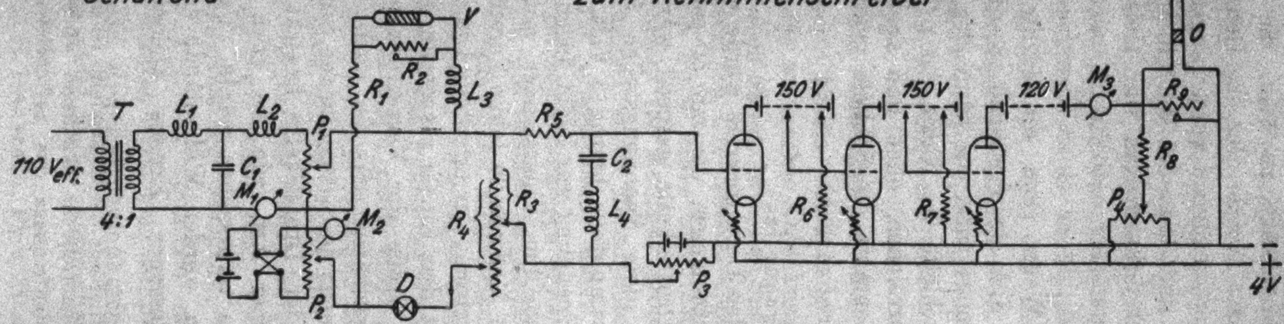
schlag der Meßschleife zu erzeugen. Um nicht auf die Untersuchung von Kontakten beschränkt zu sein, die eine stärkere Strombelastung vertragen, wurde der im Detektorkreis fließende Strom durch einen genügend verzerrungsfreien Widerstandsverstärker verstärkt und dann der Meßschleife zugeführt.[1] Der erforderliche Verstärkungsgrad war meist gering; aber auch da, wo der Verstärker entbehrlich erscheint, ist seine Anwendung vorteilhaft, da er einer Übersteuerung des Oszillographen vorbeugt. Wenn etwa die Hälfte des Emissionsstromes der Endröhre, d. h. der genügend geradlinige Teil der Charakteristik ausgesteuert wird, so kann der entsprechende Ausschlag der Meßschleife die Hälfte des größten überhaupt zulässigen Wertes erreichen, ohne daß auch bei Kurzschluß des untersuchten Kontakts die Schleife gefährdet wird.

2. Spannungsquellen

Die Wechselspannung für den Detektorkreis wurde einem Spannungsteiler von 40 Ohm entnommen, der mit 50-periodigem Wechselstrom über eine Drosselkette gespeist war (vgl. Schaltbild Fig. 1). Die größte dem Spannungsteiler P_1 zu entnehmende Wechselspannungsamplitude betrug 8 Volt. Der rein sin-förmige Verlauf dieser Spannung war leicht durch Aufnahme der Kennlinie eines 1000-Ohm-Widerstandes mit der aus Vibrationsgalvanometer und Meßschleife (ohne Verstärker) bestehenden Anordnung nachzuweisen. Der erhaltene Linienzug erwies sich bei der Prüfung mit dem Lineal als genau geradlinig. Schwieriger ist es, die Größe der Verzerrungen der Kurve des Detektorstromes abzuschätzen, die der nach Größe und Phasenwinkel von der Frequenz des entnommenen Stromes abhängige innere Widerstand der Drosselkette bewirkt. Es sind dies Verzerrungen ähnlicher Art, wie sie etwa eine Selbstinduktion im Detektorkreis verursachen würde. Um sie in zulässigen Grenzen zu halten, wurden Widerstände des an den Spannungsteiler angeschlossenen Kreises kleiner als

1) Eine Steigerung der Empfindlichkeit der Meßschleife ist deshalb ausgeschlossen, weil dadurch die Eigenfrequenz abnehmen würde, die ein bestimmtes Vielfaches der Grundfrequenz des aufzuzeichnenden periodischen Vorganges sein muß.

Schaltbild zum Kennlinienschreiber



D Detektorkontakt
V Vibrationsgalvanometer
O Meßschleife, 2,5 Ω
T Transformator 4:1
M_1 Amperemeter ~
M_2 Voltmeter =
M_3 Milliamperemeter

P_1 40 Ω, P_2 80 Ω, P_3 600 Ω, P_4 60 Ω } Spannungsteiler
L_1 0,1 H, 70 Ω
L_2 0,01 H, 40 Ω
L_3 1—10 H
L_4 1 H, 150 Ω
C_1 20 μF
C_2 6400 $\mu\mu F$

R_1 0,005—0,05 $M\Omega$
R_2 50—500 Ω
R_3 10—500 Ω
R_4 100—10000 Ω
R_5 16000 Ω
R_6, R_7 } 0,1—0,3 $M\Omega$
R_8 300 Ω
R_9 0—10 Ω

Fig. 1

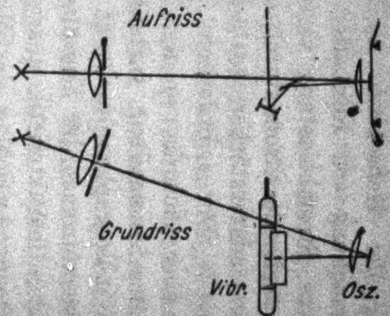


Fig. 1a. Optische Anordnung

100 Ohm vermieden. Durch Überlagerung mit der einem Spannungsteiler P_2 entnommenen Gleichspannung von 0 bis ± 8 Volt konnte der Arbeitsbereich der Wechselspannung beliebig nach positiven oder negativen Spannungen verschoben werden.

3. Vibrationsgalvanometer

Das Vibrationsgalvanometer war, abweichend von der Hausrathschen Konstruktion, um einen einfacheren Strahlengang zu erhalten (vgl. Fig. 1 a), als selbständige Einheit ausgeführt. Die körperlose Spule des Instruments, 30 mm lang mit 1,5 mm Abstand der Spulenseiten, bestand aus 18 Windungen von 0,04 mm Kupferdraht und war zwischen zwei zugleich als Stromzuführungen dienenden Bronzebändern ausgespannt, die unter der Wirkung einer Schraubenfeder standen. In die Spule war ein aus einem 0,2 mm dicken Deckglas herausgeschnittener Spiegel, 13 mm lang und 1,4 mm breit, eingesetzt. Trotz der niedrigen Eigenfrequenz des Vibrators von 35 Hertz war die Erschütterungsempfindlichkeit wegen des guten Massenausgleichs gering. Das Vibrationsgalvanometer zeigte nur die *Wechselspannung* im Detektorkreis an, mit einem Vorschaltwiderstand R_1 von 30 000 Ohm betrug die Empfindlichkeit etwa 10 mm / Volt bei 40 cm Lichtzeigerlänge. Auf Einbeziehung der *Gleichspannung* in die Registrierung wurde verzichtet, da hierzu eine Schwingungsspule mit doppelter Wickelung nötig ist. Zur Aufnahme statischer Kennlinien wurde das Vibrationsgalvanometer auf den Spannungsteiler P_2 geschaltet und der Weg des Lichtpunktes bei langsamer Änderung der Gleichspannung mit einem Bleistift verfolgt.

4. Oszillograph

Zur Stromaufzeichnung wurde ein in der Werkstatt des Instituts gebauter Oszillograph vom Bifilartyp benutzt. Bei einer Schleifenlänge von 24 mm und mit einem Spiegel von $0,4 \times 0,5$ mm^2 Fläche gab die benutzte Meßschleife einen Ausschlag von 5—6 mm/mAmp. bei 40 cm Lichtzeigerlänge. Die Eigenfrequenz der Schleife konnte nicht größer als 2000 Hertz genommen werden, da sonst die Empfindlichkeit zu gering gewesen wäre, doch erwies sich dieser Wert als vollkommen ausreichend.

Damit ein möglichst großer Frequenzbereich mit vernachlässigbaren Fehlern in Amplitude und Phase wiedergegeben wird, muß der Dämpfungsgrad der Schleife auf $\alpha = 0{,}65$ eingestellt sein. Es werden dann Frequenzen bis zu 75 Proz. der Eigenfrequenz mit nicht mehr als 3—4 Proz. Fehler wiedergegeben. Um die mit einer Dämpfung der Schleife durch Öl verbundene Verringerung der Eigenfrequenz oder, wenn diese konstant gehalten wird, der Empfindlichkeit zu vermeiden, wurde im vorliegenden Falle nach einem von Williams angegebenen Verfahren[1]) durch ein elektrisches Schaltungsglied der der Schleife zugeführte Strom so verändert, daß ihr Ausschlag gleich dem einer Schleife von dem gewünschten Dämpfungsgrade war.

5. Verstärkeranordnung

Zur Verstärkung des im Detektorkreis fließenden Stromes wurde ein dreistufiger Gleichstromwiderstandsverstärker mit Batteriekopplung benutzt, der durch den Spannungsabfall eines im Detektorkreis liegenden Widerstandes R_3, der je nach der gewünschten Verstärkung zwischen 10—500 Ohm lag, gesteuert wurde und die bis zu vierzigfach vergrößerten Stromschwankungen auf die im Anodenkreis der Endröhre liegende Meßschleife übertrug. Für die Wahl der Röhren und der Anodenkreiswiderstände waren die von Mayer[2]) angegebenen Gesichtspunkte maßgebend. Die Endröhre E_3 hatte eine Emission von 20 mAmp. Ein Teil des die Meßschleife durchfließenden Anodenstroms wurde durch einen zweiten, der Heizbatterie entnommenen Strom kompensiert, der gleich der Hälfte des Emissionstromes gemacht wurde. Durch Änderung der Gittervorspannung an der ersten Röhre wurde der Anodenstrom der Endröhre im Betriebe auf einem bestimmten Ruhewert gehalten, der der aufzunehmenden Kennlinie entsprechend so gewählt war, daß die Aussteuerung den geradlinigen Charakteristikbereich nicht überschritt.

Die Steilheit des Verstärkers wurde zu 40 mAmp./Volt

---

1) C. E. Wynn-Williams, Phil. Mag. 50. S. 1. 1925.
2) H. F. Mayer, Elektrot. Ztschr. 47. S. 10. 1927.

gefunden.[1]) Der aussteuerbare, geradlinige Bereich der Charakteristik entsprach einer Ausschlagsbreite des Lichtzeigers von 60 mm. Beim Aussteuern dieses Bereiches mit 50-periodigem sin-Wechselstrom blieb der mittlere Anodenstrom der Endröhre ungeändert.

6. Williamsglied

Das schon erwähnte, die unmittelbare Dämpfung der Meßschleife ersetzende Schaltungsglied, das kurz als Williamsglied bezeichnet ist, umfaßt die im Schaltungsbild mit R_5, L_4 und C_2 bezeichneten Teile, deren Größe aus den von Williams angegebenen Gleichungen näherungsweise berechnet werden konnte. Durch Drehspiegelbeobachtung der Wiedergabe einer Rechteckskurve wurde die Wirksamkeit des Williamsgliedes geprüft und dabei durch Verändern von C_2 die zur völligen Unterdrückung der Eigenschwingung der Schleife nötige Frequenzgleichheit von Williamsglied und Schleife hergestellt.[2])

7. Genauigkeit der Aufzeichnung

Aus der Abschätzung der von den einzelnen Teilen des Kennlinienschreibers in die Aufzeichnung hineingebrachten Fehler geht hervor, daß in dem in Frage kommenden Frequenz-

---

1) Von einem wechselstromdurchflossenen Spannungsteiler wurden zwei Spannungen abgenommen, von denen die eine den Verstärker steuerte, die andere einen Kompensationsstrom durch die an den Verstärker angeschlossene Meßschleife sandte. Die Bestimmung der Steilheit nach diesem Verfahren hat den Vorzug, daß bei Verwendung von Wechselspannungen verschiedener Amplitude und Kurvenform die der verzerrungsfreien Verstärkung gesetzten Grenzen durch die Unmöglichkeit einer vollständigen Kompensation unmittelbar zur Anschauung kommen.

2) Die exakte Erfüllung dieser Bedingung stieß auf Schwierigkeiten, da sich herausstellte, daß die benutzten Meßschleifen statt einer zwei dicht nebeneinander liegende Resonanzfrequenzen besaßen, was einer ungleichen Spannung der den Spiegel tragenden Bänder oder einer unsymmetrischen Befestigung des Spiegels zugeschrieben werden muß. Bei Vorkommen sprungweiser Stromänderungen ließ sich infolgedessen die Anregung der Eigenschwingung zwar erheblich herabsetzen, aber doch nicht gänzlich vermeiden, so daß der Verwendung von Öldämpfung in diesem Falle der Vorzug zu geben ist. Zur Einstellung des richtigen Dämpfungsgrades diente ein Gemisch von Derizin- und Paraffinöl.

bereich die Abweichungen vom wahren Verlauf einige Proz. nicht überschreiten können. Unabhängig davon ist es möglich, aus manchen Aufzeichnungen unmittelbar auf die Abwesenheit von Verzerrungen zu schließen, wenn nämlich die zu- und abnehmender Spannung entsprechenden Teile der Aufzeichnung einander vollkommen decken. Da sich die fehlerhafte Wiedergabe von Oberwellen auf einen Amplituden- und Phasenfehler zurückführen läßt, die stets gemeinsam auftreten und durch den letzteren auch ein ursprünglich symmetrischer Wechselstromverlauf in der Wiedergabe zu einem unsymmetrischen wird, ist bei falschen Aufzeichnungen die Übereinstimmung von Hin- und Rückgang ausgeschlossen.

8. Erläuterung zu den Kennlinien

Den wiedergegebenen Kennlinien[1]), die sämtlich mit einer Frequenz von 50 Hertz erhalten sind, liegt das gewöhnlich verwendete rechtwinklige Koordinatensystem zugrunde, in dem die Spannungen Abszissen, die Ströme Ordinaten sind. Die Lage der Achsen wurde festgestellt, indem man Oszillograph und Vibrationsgalvanometer einzeln schwingen ließ. Lag außer der Wechselspannung eine Gleichspannung im Detektorkreis, so war statt der so bestimmten Stromachse eine parallel verschobene zu benutzen, die durch den Schnittpunkt einer Widerstandsgeraden mit der Spannungsachse ging. Die Reihenfolge der längs der Abszissenachse eingetragenen Namen der den Kontakt bildenden Leiter bezeichnet die Richtung positiver Spannungen. Ein Stromstärkemaßstab ist den Kennlinien nicht beigefügt, kann aber leicht aus dem angegebenen Spannungsmaßstab und der Neigung der in jedem Koordinatensystem eingezeichneten strichpunktierten Widerstandsgeraden berechnet werden, die der danebenstehenden Ohmzahl entspricht. Da diese Zahl den in Reihe mit dem Kontakt liegenden Widerstand angibt, wird die zugehörige Widerstandsgerade bei Kurzschluß des Kontakts erhalten. Kennlinienteile, die *steiler* als diese Gerade ansteigen, sind nur bei negativem Widerstand des Kontakts[2]) möglich.

---

1) Vgl. S. 557ff.

2) also $\frac{de}{di} < 0$.

Ist die Abhängigkeit von Spannung und Strom bei ansteigender und abnehmender Spannung verschieden, so daß die Kennlinie Schleifen aufweist, so ist deren Durchlaufungssinn durch Beobachtung der gegenseitigen Verschiebung der auf- und absteigenden Teile der Schleife bei einer absichtlich hergestellten Phasenverschiebung des Vibrationsgalvanometers gegen die Wechselspannung leicht festzustellen.

II. Kennlinienbeobachtungen an Kristalldetektoren

1. Untersuchte Kontakte

Die erste Verwendung des Kennlinienschreibers bestand naheliegenderweise in der Beobachtung des Verhaltens der bekannten Detektorkennlinien unter den durch die Anwendung von Wechselspannung geschaffenen besonderen Verhältnissen. Von Detektorkristallen standen Silicium, Bleiglanz, Tellur und Zinkit in mehreren Sorten zur Verfügung, außerdem waren noch Einzelproben von Kupferkies, Braunstein, Karborund, Buntkupfererz, Pyrit vorhanden.[1]) Für die Kontaktspitzen wurde Eisen, Kupfer, Messing, Aluminium und andere Metalle, zuweilen auch ein Detektorkristall verwendet.

2. Detektoreinstellvorrichtungen

Die verwendeten Detektoreinstellvorrichtungen waren von der üblichen, zur Herstellung von Kontakten zwischen einer Spitze und Punkten einer Fläche unter regelbarem Druck dienenden Art. Bei der Konstruktion wurde darauf geachtet, daß Änderungen des Kontaktdrucks keine seitlichen Bewegungen der Kontaktspitze zur Folge hatten und ferner für eine nachgiebige Übertragung der Anpressungskraft auf den Kontakt Sorge getragen, damit der eingestellte Kontaktdruck unabhängig von Erschütterungen und der Wärmedehnung des Kontakts immer gleich blieb. Die dabei verwendeten Federungen, die der jeweiligen Größe des Kontaktdrucks angepaßt waren, lagen zwischen 1—1000 Gramm Kraft pro cm.

Die Fassung der Kristalle erfolgte meist durch Klemmung zwischen Backen. Das Fehlen einer Leitungsanomalie an der

---

1) Für die unentgeltliche Überlassung einer Reihe von Metall- und Mineralproben möchte ich an dieser Stelle der Firma Biermanns Metallindustrie, Hannover, meinen besonderen Dank aussprechen.

Fassungsstelle konnte durch verstärkten Andruck der Kontaktspitze geprüft werden, wobei die Kennlinie in eine Gerade übergehen muß.[1])

3. Kontaktdruck und Kennlinienform

Aus den Ergebnissen früherer Untersuchungen[2]) ist bekannt, daß mit zunehmendem Kontaktdruck die Kennlinien sich Geraden nähern. Innerhalb eines gewissen Druckbereiches werden manche Kennlinien vom Kontaktdruck sehr wenig beeinflußt.[3]) Durch Änderung der Größenordnung des angewendeten Kontaktdrucks wird häufig mit dem gleichen Kontaktmaterial ein ganz neuer Kennlinientyp erhalten: Tellur und Zinkit gaben je nach dem Kontaktdruck zwei verschiedene Kennlinien, und zwar war in beiden Fällen die mit geringem Druck erhaltene Kennlinie symmetrisch zum Nullpunkt des Koordinatensystems, die für größere Drucke erhaltene unsymmetrisch. Ein stetiger Übergang von einer zur anderen Form konnte nicht beobachtet werden. — Eine bestimmte Siliciumsorte ergab bei Änderungen des Kontaktdrucks häufig Umkehr der Gleichrichterwirkung.

Diese Beobachtungen sind wohl so zu erklären, daß für das elektrische Verhalten der Kontakte die Beschaffenheit der Zwischenschicht maßgebend ist, die abhängig ist vom Material der Kontakte, von ihrer Form[4]) und von dem *Druck*, unter dem die Schicht steht.

4. Verwandtschaft von Kohärerkontakten und Kristalldetektoren

Das Verhalten von Kohärerkontakten zwischen Metallen bei zunehmender Spannung und Erschütterung des Kontakts wird hier als bekannt vorausgesetzt.[5]) Ein diesem ganz ähnliches wird bei Kristalldetektoren beobachtet:

1) Ausgenommen sind hiervon die besonders druckfesten Kristalle wie Karborund.

2) M. Kimura und K. Yamamoto, Kyoto Mem. 2. S. 63. 1910 und R. Audubert, Journ. de phys. (5) 7. S. 172. 1917.

3) Z. B. empfindlicher Bleiglanz, A. E. Flowers, Phys. Rev. 29. S. 445. 1909.

4) H. Pélabon, nach Radio News Sept. 1927 und G. Reißaus, Phys. Ztschr. 29. S. 223. 1928. (Stromdichteeinfluß?).

5) Vgl. A. Székely, Ztschr. f. Phys. 22. S. 51. 1924.

Die von Silicium-Metallkontakten[1]) unter geringem Druck erhaltene, flach verlaufende Kennlinie ging bei Vergrößerung der Spannungsamplitude in die besserleitende normale Form über. Fig. 2 zeigt die zuerst für kleine (*a*) und dann für große Amplitude (*b*) erhaltenen Kennlinien. Die schlecht leitende Kennlinie konnte wiedererhalten werden bei Rückkehr zu kleiner Amplitude durch Erschüttern des Kontakts oder zeitweiliges Abheben der Spitze. Die Ähnlichkeit der beobachteten Leitfähigkeitszunahme mit der Kohärerwirkung geht noch weiter darin, daß nach mäßigem Glühen des Kristallkontakts im Vakuum keine flach verlaufenden Kennlinien mehr erhalten werden.[2])

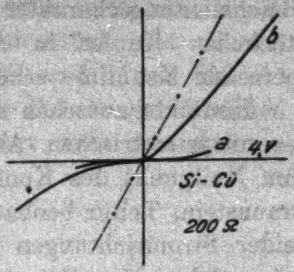


Fig. 2

5. Kontaktmaterial und Kennlinienform

Die Kennlinien mancher Detektorkristalle werden bekanntlich von geringfügigen Beimengungen entscheidend beeinflußt; so befanden sich unter den untersuchten Kristallen empfindlicher und unempfindlicher Bleiglanz[3]), positives und negatives Silicium.[4]) Gewöhnliches Tellur von Kahlbaum und chemisch reines Tellur[5]) sowie geschmolzenes und dann abgeschrecktes Tellur unterschieden sich nicht merklich.

Es liegen Beobachtungen vor, die darauf hinweisen, daß der Einfluß des Kontaktmaterials auf die Kennlinienform kein direkter ist:

Ein Kontakt zwischen einem positiven und einem negativen Siliciumstück läßt eine besonders gute Gleichrichterwirkung erwarten, doch gibt eine solche Zusammenstellung bei allen Drucken schlecht sperrende Kennlinien mit wechselnder Gleich-

1) Empfindlicher Bleiglanz im Kontakt mit Metall verhält sich ebenso.

2) Vgl. Abschn. III, 3. B, a).

3) A. Schleede und H. Buggisch, Ztschr. f. anorg. u. allg. Chem. 161. S. 85. 1927.

4) F. Fischer und E. Baerwindt, Phys. Ztschr. 17. S. 373. 1916.

5) Die Möglichkeit zur Untersuchung desselben verdanke ich Hrn. Prof. W. Biltz.

richtung oder solche von nahe geradlinigem Verlauf. Das ist dasselbe Verhalten, wie es Kontakte zwischen gleichartigem Silicium zeigen. Die benutzten Siliciumstücke (Spitze-Fläche) wurden vor dem Versuch im Kontakt mit Metall auf ihren Gleichrichtungscharakter geprüft. Durch Einfügen von einem Stückchen Kupfer in den Kontakt wurde eine vorzüglich sperrende Kennlinie erhalten.

Kontakte zwischen Kristall und Metall haben häufig trotz des unsymmetrischen Aufbaues Kennlinien, die symmetrisch zum Nullpunkt des Koordinatensystems sind, wie mit Zinkit[1]), Braunstein, Tellur beobachtet wurde, doch ist völlige Gleichheit beider Stromrichtungen z. B. in Bezug auf die Beständigkeit unter elektrischer Belastung natürlich nicht vorhanden. — Das Metall der Kontaktspitze ist von verhältnismäßig geringem Einfluß auf die Kennlinienform.

6. Kennlinien mit und ohne Hysteresis

Die der Gleichrichterwirkung der bekannten Kristalldetektoren zugrundeliegenden, vielfach reproduzierten Kennlinien zeigten bei der benutzten Frequenz von 50 Hertz keinerlei Hysteresis, der Stromverlauf war also bei zu- und abnehmender Spannung derselbe, was die Ergebnisse der früheren Untersuchungen über diesen Punkt bestätigte.

Außer diesen normalen Kennlinien konnten durch die besonderen Bedingungen des Kontaktdrucks und der Lage und Größe des Arbeitsbereiches der Wechselspannung Kennlinien mit Hysteresisschleifen mannigfacher Art erhalten werden, die freilich zum Teil nur kurze Zeit beständig waren und ohne den Kennlinienschreiber wohl kaum entdeckt worden wären. Diese Schleifenkennlinien gehören im wesentlichen zwei verschiedenen Gruppen an, die in den beiden folgenden Abschnitten besprochen sind.

7. Negativer Kontaktwiderstand als Ursache von Schleifenkennlinien

Wie von Lossew zuerst nachgewiesen ist, weist die Kennlinie mancher Detektorkontakte in ihrem Verlauf ein Stück mit S-förmiger Krümmung auf, dessen mittlerem Teil ein

1) F. Seidl, Phys. Ztschr. 27. S. 816. 1926.

negativer Widerstand des Kontakts entspricht. Ist dieser seinem Absolutwert nach größer als der im äußeren Detektorkreis liegende Widerstand, so wird die Stromspannungsabhängigkeit beim Eintritt in das rückwärts geneigte Kennlinienstück labil, und der Stromverlauf geht sprungweise zu stabilen Kennlinienteilen über. Jedes labile Kennlinienstück gibt zu zwei solchen Sprüngen Anlaß, einem bei zu- und einem bei abnehmender Spannung. (Fig. 3 und 4.) Die so entstehenden Hysteresisschleifen sind in ähnlicher Art auch von anderen Entladungsformen her bekannt.

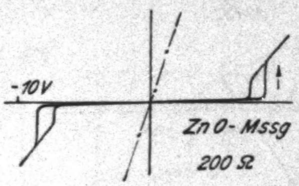


Fig. 3

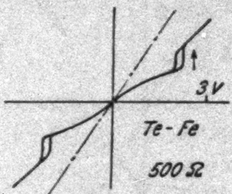


Fig. 4

Kennlinienstücke mit negativem Widerstand treten häufig am Anfange eines steilen Anstieges der Kennlinien auf und mit um so größerer Wahrscheinlichkeit, je höher die diesem entsprechende Spannung ist.

8. Periodischer Wechsel zwischen zwei Kennlinien als Ursache der Schleifenbildung

Die zweite Art von Schleifenkennlinien kommt durch einen in jeder Periode stattfindenden Wechsel zwischen zwei sich im Nullpunkt überschneidenden Kennlinien zustande, von denen jede nur in einer Richtung durchlaufen wird. Die Übergänge von einer Kennlinie zur anderen und umgekehrt treten bei Spannungen entgegengesetzten Vorzeichens ein und sind oft sprungartig. *Die eine Kennlinie ist immer durchaus besserleitend als die andere.* Durch geeignete Wahl des Arbeitsbereiches kann jede der beiden miteinander abwechselnden Kennlinien für sich erhalten werden. In Fig. 5—9 sind einige Beispiele von Schleifenkennlinien mit Überschneidung wiedergegeben. Der bei steigender Spannung erfolgende, plötzliche Übergang zu einer besserleitenden Kennlinie (Fig. 5 und 9) läßt einen kohärenzähnlichen Vorgang vermuten; doch ist hier zum Unter-

schied von der Kohärenz bei Metallkontakten die besserleitende Kennlinie nicht immer eine Gerade, und weiter kann die durch Spannung der einen Richtung bewirkte Leitfähigkeitszunahme durch Anlegung einer entgegengesetzten Spannung wiederaufgehoben werden. Wie statische Kennlinienaufnahmen lehren,

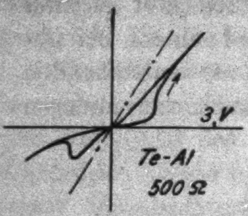


Fig. 5

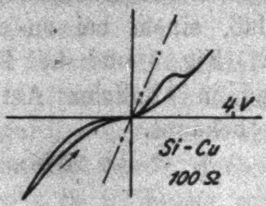


Fig. 6

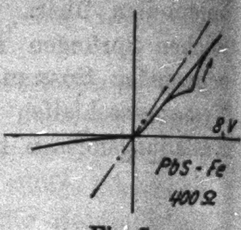


Fig. 7

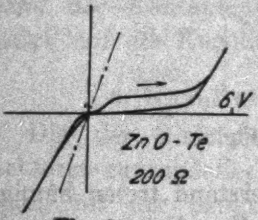


Fig. 8

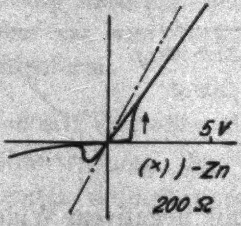


Fig. 9

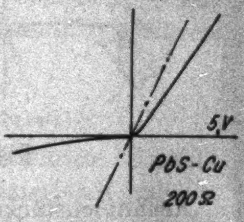


Fig. 10

*) Messing, auf dem Schwefel abgebrannt ist.

ist der Eintritt von Kennliniensprüngen zuweilen an die Überschreitung einer Minimalspannung gebunden.

9. Die Vorgänge im Kontakt

Die Hysteresisschleifen beider Art zeigen, daß ein Detektorkontakt in gewissen Spannungsbereichen zwei Leitfähigkeitszustände mit verschiedenen Stromspannungsabhängigkeiten annehmen kann. Ihr abwechselndes Auftreten ist wahrscheinlich durch Änderungen in der Beschaffenheit der als Sitz der Leitungsanomalie anzusehenden, hypothetischen Zwischenschicht hervorgerufen; die Annahme, daß nur Änderungen des Leitungsmechanismus[1]) vorliegen, vermöchte allenfalls die Schleifenkennlinien erster Art, nicht aber die der zweiten Art zu erklären.

Man kann nun den Versuch machen, aus den Schleifenkennlinien Schlüsse auf das Zustandekommen schleifenloser Kennlinien zu ziehen. Ein Vergleich der Kennlinie Fig. 9 mit der Kennlinie des empfindlichen Bleiglanzes, Fig. 10, führt

1) Z. B. durch Hinzutreten von Stoßionisation.

dazu, den scharfen Knick im Nullpunkte bei der letzteren durch die Annahme zu erklären, daß bei Umkehr der Spannung Veränderungen in der Beschaffenheit der Kontaktstelle auftreten, die ihrerseits Änderungen der Leitfähigkeit nach sich ziehen. Die Abhängigkeit der Leitfähigkeit von der Spannung würde hiernach eine indirekte sein und die Bleiglanzkennlinie sich von der ähnlichen Schleifenkennlinie nur durch den stetigen und umkehrbaren Verlauf des Überganges von einem Leitfähigkeitszustand in den anderen unterscheiden.

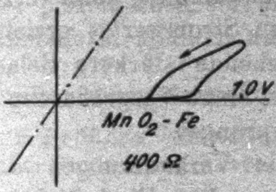


Fig. 11

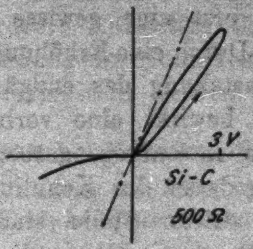


Fig. 12

10. Zeitlicher Ablauf von Änderungen des Leitfähigkeitszustandes

Die bei Schleifenkennlinien sich periodisch wiederholenden Kennlinienänderungen können bei langsamem Verlauf sich über große Teile der Periodendauer erstrecken, wobei ein eigentlicher Gleichgewichtszustand während derselben nicht erreicht wird. Der Strom ändert sich infolgedessen auch dann, wenn die Spannung bei Erreichung ihres positiven oder negativen Höchstwertes einen Augenblick konstant bleibt. Das Zurückbleiben der Änderung des Stromes hinter der der Spannung ist als *elektrische Nachwirkung* bezeichnet. Schleifenbildungen sind mit Sicherheit als von Nachwirkung herrührend zu erkennen bei Vorhandensein einer vertikalen Tangente für den Höchstwert der Spannung, wie dies in Fig. 11 und 12 der Fall ist. Die Nachwirkung ist auch bei statischen Kennlinienaufnahmen noch beobachtbar. Sie äußert sich in einer meist innerhalb 1—2 Sek. abklingenden Zu- oder Abnahme des Stromes bei konstanter Spannung nach plötzlichen Spannungsänderungen.

Die Spannungen der Kennliniensprünge bei den Schleifenkennlinien mit Überschneidung nach Fig. 5 oder 9 wachsen mit der Amplitude der am Kontakt liegenden Wechselspannung,

wenn diese gewisse Werte übersteigt. Sie sind also abhängig von der Geschwindigkeit des Anstieges der Spannung bei ihrem Durchgang durch Null. Dieses Verhalten wurde als Wirkung einer *elektrischen Verzögerung* ausgelegt.[1]) Versuche mit einem rotierenden Umschalter, der abwechselnd Spannungen entgegengesetzter Richtung für die Dauer von 0,006 Sek. an einen Kontakt Buntkupfererz–Kupfer legte, dessen Kennlinie etwa Fig. 5 entspricht, lieferten den Beweis, daß unter bestimmten Umständen der plötzliche Übergang von einer Kennlinie zur anderen erst eine gewisse Zeit nach Anlegen der Spannung erfolgt. Durch eine Erhöhung der Spannung kann verzögerungsfreie Einstellung des endgültigen Stromwertes erzielt werden; dagegen bewirkt eine vorhergehende stärkere Belastung des Kontakts in entgegengesetztem Sinne Vergrößerung der Verzögerungsdauer des Kennliniensprunges.

An dritter Stelle sind die Veränderungen der Kennlinienform zu erwähnen, die unter dem Einfluß der Wechselstrombelastung sich in Zeiten groß gegen die Periodendauer vollziehen. Bei einem Bleiglanzdetektor wurde mehrfach eine allmähliche Entstehung der Sperrfähigkeit beim erstmaligen Einschalten beobachtet. Der anfangs gutleitende negative Ast bewegte sich erst rasch, dann langsam auf die Abszissenachse zu, bis sich eine normale, gut sperrende Kennlinie (Fig. 10) gebildet hatte. An den Kennlinien von Zinkitdetektoren nach Fig. 3 wurde zuweilen langsames Hinausrücken der Spannungen für die Kennliniensprünge zu größeren Werten beobachtet.

11. Erwärmung der Kontaktstelle

Die die Detektorkontakte durchfließenden Ströme können die Kontaktstelle beträchtlich erwärmen, wodurch die Leitfähigkeit des Kontakts zunimmt und Thermokräfte entstehen. Beides beeinflußt den Verlauf der Wechselstromkennlinien in einer von der thermischen Trägheit der Kontaktstelle abhängigen Weise;

1) In Analogie zu den Erscheinungen des elektrischen Durchschlages. — Die Ähnlichkeit der Kennlinien eines überbeanspruchten Dielektrikums und eines schwingungserzeugenden Detektorkontakts im Verein mit der enormen dielektrischen Beanspruchung der Zwischenschicht, die sich bei Bleiglanz zu mehr als 10^6 Volt/cm berechnet, berechtigt dazu, von den neueren Forschungen über die dielektrische Festigkeit dünner Schichten Aufschlüsse für das Detektorproblem zu erhoffen.

doch ergibt eine einfache Näherungsrechnung für die Abkühlungs- bzw. Erwärmungsgeschwindigkeit der Kontaktstelle, daß diese Trägheit sich bei der benutzten Frequenz von 50 Hertz noch nicht bemerkbar machen kann. Zu demselben Schluß führt die gute Sprachwiedergabe durch den „sprechenden Detektor“.[1]) Die Entstehung von Schleifenkennlinien als Folge der Wärmeträgheit der Kontaktstelle ist daher wenig wahrscheinlich und ein Integraleffekt[2]) der Stromwärme jedenfalls völlig ausgeschlossen. Das letztere konnte durch Vergleich von Kennlinien verschiedener Spannungsamplitude bestätigt werden. Anzeichen für einen Einfluß der periodischen Wärmedehnung der Kontaktstelle auf die Kennlinienform konnten nicht festgestellt werden.

III. Verhalten eines Kristalldetektors bei Vakuumentgasung

1. Frühere Versuche im Vakuum über die Oberflächenschichten in Detektorkontakten

Die Untersuchungen über das Verhalten loser Kontakte zwischen Metallen (d. h. von Kohärerkontakten) bei Entfernung der Oberflächenschichten im Vakuum durch Feilen[3]) oder Erhitzen[4]) haben zu Ergebnissen geführt, die im Verein mit der heutigen Kenntnis vom Wesen solcher Schichten kaum daran zweifeln lassen, daß unvollkommene Kontakte zwischen *Metallen* durch die Anwesenheit widerstandsfähiger Adsorptionsschichten bedingt sind. Versuche derselben Art an Kristallkontakten haben mit wenigen Ausnahmen zu einer negativen Beantwortung der Frage nach der Beteiligung von Oberflächenschichten an der Bildung von Detektorkontakten geführt[5]), doch ist bei der Art dieser Versuche keine genügende Sicherheit vorhanden dafür, daß es wirklich gelungen ist, die Adsorptionsschichten zu entfernen. Eine erneute Prüfung der Frage war daher erwünscht.

---

1) Nach P. Collet stellt dieser ein thermisches Phänomen dar Ann. de phys. **15**. S. 365. 1921.

2) Von der allmählichen Erwärmung von Kristall und Spitze bei Belastung längerer Dauer abgesehen.

3) R. H. Goddard, Phys. Rev. **34**. S. 423. 1912.

4) E. Dorn, Ann. d. Phys. **66**. S. 146. 1898 u. W. G. Palmer, Proc. Royal Soc. London, (A) **106**. S. 55. 1924.

5) F. Luchsinger, Phys. Ztschr. **22**. S. 487. 1921 u. R. H. Goddard, a. a. O.

2. Versuchsanordnung

Der im Vakuum zu untersuchende Kontakt befand sich in einem Rezipienten, hergestellt aus einem Glasrohr von 30 mm Weite, der einer einstufigen Stahldiffusionspumpe unmittelbar aufgesetzt war. Im Vorvakuum wurde eine Dampfstrahl- und eine Wasserstrahlpumpe verwendet. Die Kontaktanordnung war an einem in den Rezipienten hineinragenden Glasrohr befestigt, das Teil eines den Rezipienten abschließenden Schliffstücks war, welches zugleich mit den nötigen Durchführungen für die Stromzuleitungen versehen war. Die Kontaktanordnung konnte so ohne Schwierigkeit aus dem Vakuum entfernt und für die daran vorzunehmenden Arbeiten leicht zugänglich gemacht werden.

Der zu den Versuchen benutzte Kontakt wurde gebildet zwischen einer Kante eines länglichen, prismatisch zugeschliffenen Siliciumstückes[1]), das im Laufe der Versuche mehrfach erneuert wurde, und einem damit gekreuzten, federnd angedrückten Draht aus Kupfer oder Wolfram, an dessen freiem Ende eine kleine Eisenmasse befestigt war, die von einem außerhalb des Rezipienten befindlichen Elektromagneten durch die Glaswand hindurch angezogen wurde. Durch langsame Steigerung des Magnetisierungsstromes konnte der Kontaktdruck beliebig geschwächt und schließlich der Kontakt völlig aufgehoben werden. Der federnd gehaltene Draht war infolge seiner Befestigung an einem kleinen schwenkbaren Arm parallel zu sich selbst vor der Kante des Kristalls verschiebbar, um diese in ihrer ganzen Länge absuchen zu können, was durch entsprechende Bewegung des Elektromagneten bewerkstelligt wurde. Da die Kristallkante etwas schräg zur Bewegungsrichtung des Drahtes verlief, kam jeder Punkt der Kante mit einem anderen Punkt des Drahtes in Berührung.

Das Siliciumstück, an dessen rechtwinklig angeschliffene Endflächen kupferne Zuführungen angepreßt waren, konnte durch einen hindurchgesandten Gleich- oder Wechselstrom bis zur teilweisen Schmelzung erhitzt werden. Die 1 mm starken Stromzuleitungen aus Kupferdraht machten mit Siegellack ge-

---

1) Benutzt wurde positives Silicium.

dichtete Durchführungen nötig, die einfachheitshalber auch für die anderen Zuführungsdrähte benutzt wurden. Der den anderen Teil des Kontakts bildende Draht konnte nur im Falle des Kontakts Si—W geglüht werden. Dem 0,2 mm starken Wolframdraht wurde der Glühstrom über biegsame Kupferlitzen zugeführt. In Reihe mit dem Kontakt lag ein Widerstand von 100 Ohm. Die zur Kennlinienaufnahme mit dem Kennlinienschreiber verwendete Wechselspannungsamplitude betrug 3 bis 4 Volt.

3. Versuche

Vor Beginn der Vakuumversuche wurden die Kennlinien für eine große Zahl von Kontaktpunkten in Luft aufgenommen und der Kontaktdruck so eingestellt, daß überall die normale Kennlinie des Siliciums (Fig. 2b) oder die flacher verlaufende Kennlinie nach Fig. 2a erhalten wurde, die eine Vorstufe der ersteren darstellt. Ganz oder genähert geradlinige Kennlinien, wie sie *nach* der Glühbehandlung erhalten wurden, waren also vorher niemals vorhanden. Das Auspumpen des Rezipienten beeinflußte die Kennlinien nicht.

A. *Kontakt Silicium–Kupfer.* Nur der Kristall konnte geglüht werden.

a) Das im Vakuum geglühte Silicium gibt, wenn es nachher an Luft mit einer Kontaktspitze abgesucht wird, die normalen Kennlinien. Ausgenommen sind die nach dem Glühen zur Kontaktbildung im Vakuum benutzte Kante und die beim Glühen geschmolzenen Teile des Kristalls. Die letzteren weisen eine stark verringerte Druckfestigkeit und negativen Gleichrichtungscharakter auf, bei Überschreitung einer Spannung von 2 Volt geht ihre Kennlinie in eine Gerade über. Da durch das Schmelzen offenbar eine tiefergehende Veränderung des Siliciums eintritt, vielleicht durch Abgabe gelöster Gase, sind die geschmolzenen Teile von den Versuchen über den Einfluß von Oberflächenschichten ausgeschlossen worden.

b) Durch das erstmalige Glühen des Siliciums bei aufgehobenem Kontakt im Vakuum verbessert sich die Leitfähigkeit für alle Kontaktstellen und der Knick der Kennlinie im Nullpunkt wird ausgeprägter (verbesserte Sperrwirkung), hierzu gehört, daß flach verlaufende Kennlinien nach dem Glühen nicht mehr erhalten werden. Durch Einlassen von Luft wird

diese Änderung der Kennlinien nur teilweise rückgängig gemacht. Es sei darauf hingewiesen, daß die regenerierende Wirkung der Luft sich nur bei aufgehobenem Kontakt äußert; berühren sich die beiden Teile des Kontakts, so bleibt die Wiederherstellung des normalen Luftdrucks ohne Wirkung.

c) Nach mehrfach wiederholtem Glühen des Siliciums, wobei der Kupferkontakt während desselben abgehoben ist und erst einige Minuten danach, wenn das Silicium sich abgekühlt hat, wieder aufgesetzt wird, ist eine stärkere Veränderung der Kennlinien eingetreten, die jedoch wenig Einheitlichkeit zeigt. Stellenweise bleibt auch bei stärkstem Glühen die normale Kennlinie erhalten, die Kennlinien der übrigen Kontaktpunkte zeigen Verbesserung der Leitfähigkeit und Annäherung an das Ohmsche Gesetz, doch sind völlig geradlinige Verläufe selten. Den Kennlinienänderungen liegt wahrscheinlich das unter d) erwähnte dauernde Verderben des Kontakts zugrunde, da die Kante nach dem Versuch Kupferspuren zeigt. Durch Lufteinlassen werden die eingetretenen Kennlinienveränderungen nur in ganz geringem Maße wieder rückgängig gemacht.

d) Wird der Kupferdraht sofort nach dem Abschalten des Glühstroms an das noch glühende Silicium angelegt und gleichzeitig die Wechselspannung für die Kennlinienaufnahme eingeschaltet, so werden fast immer gutleitende, geradlinige Kennlinien erhalten. Ist ein Teil der Kante des Kristalls auf diese Weise im Vakuum abgesucht, so werden nach Einlassen von Luft an dieser Stelle wieder dieselben geradlinigen Kennlinien erhalten. Unter dem Mikroskop zeigt sich, daß die Kante dort vollständig mit Kupfer überzogen ist. Die Schwächung der Oberflächenschicht hat also eine innige Verbindung von Kristall und Metall ermöglicht, wie sie sonst nur an Metallkontakten beobachtet wird.

B. *Kontakt Silicium—Wolfram.* Beide Teile des Kontakts konnten geglüht werden.

a) Wird nur ein Kontaktteil (Silicium oder Wolfram) im Vakuum bei aufgehobenem Kontakt geglüht, so wird dadurch die normale Kennlinienform bis auf eine geringe Zunahme der Leitfähigkeit verhältnismäßig wenig verändert. Flach ver-

laufende Kennlinien nach Fig. 2a machen solchen mit einem scharfen Knick im Nullpunkte Platz.

b) Nach Ausglühen beider Kontaktteile im Vakuum bei aufgehobenem Kontakt werden Kennlinien mit geradlinigen Ästen und schwach angedeutetem Knick im Nullpunkt und solche, die genau geradlinig sind, erhalten. Bei Verringerung des Kontaktdrucks gehen, ehe die Trennung des Kontakts erfolgt, die ersteren über in die normale Form mit scharfem Knick im Nullpunkte, während bei den letzteren nur plötzliches Nichtleitendwerden beobachtet wird. Nach dem Lufteinlassen geben viele Stellen der Kante sogleich wieder normale Kennlinien, andere erst nach mehrfacher Untersuchung. Einige genau geradlinige Kennlinien mit dem eben erwähnten Verhalten bleiben unverändert bestehen. Wahrscheinlich hat an den betreffenden Stellen eine Verbindung des Kristalls mit dem Metall des Kontaktdrahtes, wie bei Si–Cu beschrieben, stattgefunden.

c) Wird von den *sich berührenden* Kontaktteilen *einer* zum Glühen gebracht, so ergibt die gleichzeitige Kennlinienaufnahme eine Verbesserung der Leitfähigkeit und gestreckteren bis genau geradlinigen Verlauf der Kennlinie. Wenn die Erwärmung nur bis zur dunklen Rotglut geht, so wird beim Abkühlen die Ausgangskennlinie wieder erhalten. Stärkeres Glühen bewirkt bleibende Änderungen der Kennlinie, und zwar kann der Kontakt besser oder schlechter leitend und der Knick im Nullpunkt unabhängig davon schärfer oder stumpfer werden. Auch bei wiederholtem Glühen einer unverändert gelassenen Einstellung ist keine Gesetzmäßigkeit im Ergebnis zu erkennen.

4. Zusammenfassung der Vakuumversuche

Das wesentliche Ergebnis dieser Versuche besteht in folgendem: Durch Glühen beider Teile eines Silicium-Metallkontaktes im Vakuum wird dieser bei konstantem Kontaktdruck besserleitend und die Abweichung vom Ohmschen Gesetz geringer. Offenbar läßt bei fortschreitender Entgasung der beiden Leiter ihre Fähigkeit zur Bildung eines unvollkommenen Kontaktes nach. Bei nicht vollständiger Entfernung der Adsorptionsschichten kehrt diese Fähigkeit wieder, wenn der entgaste Kontakt der Luft ausgesetzt wird. Die von der Kennlinie bei

stufenweiser Entgasung durchlaufenen Formen gleichen ganz den bei zunehmendem Kontaktdruck erhaltenen. Daß es sich dabei nicht nur um eine äußerliche Ähnlichkeit handelt, geht daraus hervor, daß die entgasten Kontaktteile bei stark herabgesetztem Kontaktdruck wieder die für Silicium normale Kennlinie ergeben. Bei genügend weitgehender Entgasung können sich die Teile des Kontakts unter Einwirkung der angelegten Spannung miteinander verbinden, so daß beim Trennen des Kontakts Metallteilchen am Kristall haften bleiben, womit eine Wiederkehr seiner normalen Kennlinie beim Verbringen an Luft unmöglich gemacht ist.

Die Annahme besitzt Wahrscheinlichkeit, daß bei Silicium und anderen Detektorkristallen enge Beziehungen zwischen der Oberflächengashaut und den in oberflächennahen Schichten okkludierten Gasen bestehen. Man hat daher damit zu rechnen, daß bei Entfernung der Oberflächenschicht durch Schaben oder Brechen im Vakuum die Gashaut sich aus dem inneren Gasvorrat neu bildet, womit sich das Fortbestehen der Detektorwirkung bei derartigen Versuchen[1]) erklären läßt. Bei der Entstehung polarisationsähnlicher Erscheinungen an Detektorkontakten spielt vielleicht der elektrolytische Transport von in Ionenform gelösten Gasen eine Rolle.

IV. Unvollkommene Kontakte zwischen gutleitenden Metallen

1. Herstellung unvollkommener Kontakte zwischen Metallen

In den vorhergehenden Teilen dieser Arbeit sind bemerkenswerte Ähnlichkeiten im Verhalten von Kristall- und losen Metallkontakten in bezug auf Kohärerwirkung und die Wirkung des Glühens im Vakuum nachgewiesen. Ein noch besserer Beweis für die Verwandtschaft der beiden Kontaktarten liegt in dem Umstande, daß die Fähigkeit zur Bildung detektorwirksamer Kontakte nicht, wie vielfach angenommen wird, auf die Detektorkristalle beschränkt ist, sondern auch den gutleitenden Metallen zukommt. Allerdings müssen besondere Hilfsmittel oder Kunstgriffe angewendet werden, um mit diesen die für die Detektorwirkung notwen-

1) R. H. Goddard, a. a. O. u. F. Trey, Phys. Ztschr. 26. S. 849. 1925.

digen unvollkommenen Kontakte zu erhalten. Der letzte Teil dieser Arbeit ist allein der Untersuchung von Metallkontakten gewidmet.

Zu den im folgenden beschriebenen Versuchen mit Metallkontakten wurde ein Kontaktmikrometer benutzt, das die Einstellung kleinster Kontaktabstände bis zu Bruchteilen eines mμ auch bei Fehlen widerstandsfähiger Oberflächenschichten gestattete. In dem in Fig. 13 abgebildeten Instrument sind die

Maßstab 1 : 2,5

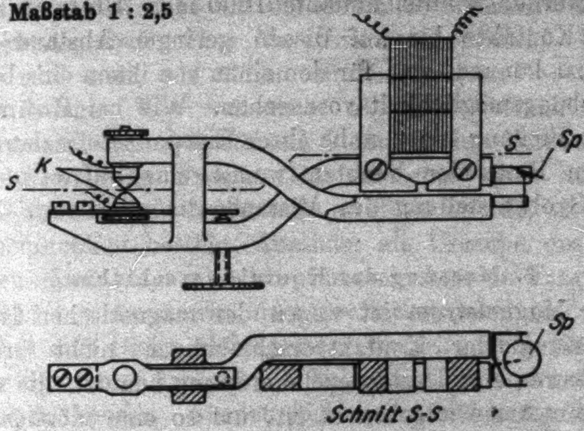


Fig. 13

von G. Hoffmann[1]) und H. Rohmann[2]) angewendeten Konstruktionsprinzipien vereinigt, um rasche und genügend genaue Ablesbarkeit des Abstandes mit bequemer und erschütterungsfreier Bedienung zu verbinden.

2. Beschreibung des Kontaktmikrometers

Das Kontaktmikrometer besteht in einer zangenartigen, aus Messing hergestellten Konstruktion. Infolge starrer Verbindung aller Teile sind nur elastische Deformationen möglich. Die kurzen Arme des Mikrometers, in der Figur links, tragen die isoliert eingesetzten Kontaktstücke *K* und setzen sich nach rechts in die miteinander gekreuzten längeren Arme fort. Sie sind verbunden durch ein doppeltes Querstück. Ein an dem einen der längeren Arme befestigter Elektromagnet zieht das

1) Ztschr. f. Phys. 4. S. 363. 1921.
2) Phys. Ztschr. 21. S. 417. 1920.

aus Eisen bestehende Ende des anderen Armes an. Die dadurch erzeugte Kraft verbiegt das Querstück nach einem nach links konkaven Kreisbogen und nähert auf diese Weise die Kontakte einander an. Ein im Stromkreis des Elektromagneten liegender Schiebewiderstand diente zur Regelung der Anziehungskraft und des davon abhängigen Abstandes der Kontakte. Der so beherrschte Verschiebungsbereich, innerhalb dessen der Kontaktabstand mit einer Genauigkeit von mindestens 1 mμ eingestellt werden konnte, umfaßte 1000 mμ. Um zwei neu eingesetzte Kontakte bis auf diesen geringen Abstand einander nähern zu können, war für den einen von ihnen eine besondere Verschiebungsmöglichkeit vorzusehen. Wie bei Rohmann ist dazu die Biegung einer nahe ihrer Einspannstelle den Kontakt tragenden Blattfeder benutzt, womit eine auf etwa 300 mμ genaue Grobeinstellung des Abstandes möglich war.

3. Messung der Kontaktverschiebung

Der Magnetstrom ist wegen der magnetischen Hysteresis zur Messung der Kontaktverschiebungen nicht brauchbar. Hierzu wurde eine Drehspiegelanordnung benutzt, die am Ende der langen Arme angebracht ist, um so eine möglichst große elastische Übersetzung der Kontaktbewegung zu erhalten. Der drehbare Spiegel *Sp* wird von einem Stahlplättchen getragen, das einem ausgespannten Bronzeband aufgelötet ist und auf das in einem Abstande von 0,3 mm von der Drehachse eine Nadelspitze wirkt. Band und Spiegel sind an dem einen, die Nadel am anderen Arm befestigt. Die am Drehspiegel wirksame Bewegung ist 80mal so groß wie die gleichzeitige Verschiebung der Kontakte; durch den Drehspiegel und einen 5 m langen Lichtzeiger findet eine weitere, optische Vergrößerung der Bewegung statt, so daß einer Abstandsänderung der Kontakte um 1 mμ ein Ausschlag des Lichtzeigers von 2—3 mm entspricht. Geeicht wurde die Anordnung durch Interferenzen zwischen zwei am Ort der Kontakte befestigten Glasplättchen. Für die Messung der ihrer Natur nach meist ungenügend definierten Kontaktabstandsänderungen war ihre Zuverlässigkeit mehr als ausreichend. Durch Aufhängung des Mikrometers an Gummischnüren wurde eine hinreichende Erschütterungsfreiheit erzielt.

4. Kontaktdruck

Werden die im Mikrometer untersuchten Kontakte einander so weit genähert, daß sie eine merkliche Kraft aufeinander ausüben, so wird die Ablesung des Kontaktabstandes fehlerhaft. Von der angezeigten Annäherung der Kontakte ist nur ein Teil wirklich, der andere Teil wird durch die im Kontakt auftretende Anpressungskraft aufgehoben.[1]) Einer scheinbaren Verschiebung von 1 mμ entspricht eine Vergrößerung des Kontaktdrucks um 0,3 g-Kraft.[2]) Den im folgenden gemachten Angaben über Verschiebungsbereiche, Kontaktabstände usw. sind, wie üblich, die *angezeigten Verschiebungen* zugrunde gelegt. Wie weit diese als Kontaktdruck zur Geltung kommen, ist eine für die Deutung der Versuchsergebnisse sehr wichtige Frage. Da für eine stark aufgelöste, lockere Beschaffenheit der Metalle an ihrer Oberfläche keinerlei Wahrscheinlichkeit besteht, kommen als Ursache des unvollkommenen Kontakts nur Adsorptionsschichten in Frage. Eine aus solchen bestehende ein- oder zweifachmolekulare Zwischenschicht hat eine Dicke kleiner als 1 mμ. Da auch Elektronen bei einer Spannung von etwa 1 Volt keine größeren Abstände überspringen können, würden sich bei Annäherung der Kontakte ihre Oberflächen nach Beginn des Leitendwerdens um nicht mehr als etwa 1 mμ nähern können. Alle im folgenden angegebenen Verschiebungen würden also, soweit sie größer als einige mμ sind, so gut wie ganz in Kontaktdruck umzurechnen sein.

5. Vakuumkontaktmikrometer

Um das Verhalten von Kontakten zwischen durch Glühen im Vakuum entgasten Metallen klarzustellen, wurden Versuche mit einem Kontakt gemacht, der im Vakuum durch die Wärmedehnung eines elektrisch geheizten, unter Federspannung stehenden Drahtes betätigt werden konnte. Die Innehaltung eines bestimmten Kontaktabstandes erwies sich aber als unmöglich, außerdem verhinderten bei Vakuumversuchen die von den Quecksilberdampfpumpen herrührenden Erschütterungen

---

1) Die Rückwirkung des Kontaktdrucks auf die Drehspiegeleinstellung ist bei dem vorliegenden Apparat vernachlässigbar.

2) Aus den Abmessungen des Kontaktmikrometers berechnet.

die in Luft noch möglichen Kennlinienbeobachtungen bei der allerdings ziemlich schnell verlaufenden Kontaktbildung und -trennung.

6. Verwendete Schaltung und untersuchte Kontakte

Die für die Untersuchung der Detektorwirkung von Metallkontakten angewendete Schaltung ist in Fig. 14 dargestellt. Die vom Ortssender empfangene modulierte Hochfrequenzspannung E_h hatte eine mittlere Amplitude von etwa 0,4 Volt bei 10^6 Hertz. Die Lautstärke L im Telephon, die ein Maß für die Gleichrichterwirkung des Kontakts abgibt, ist mit den Zahlen 0—4 bezeichnet, wobei $L = 4$ dem erreichbaren Optimum entspricht und die Lautstärke eines guten Kristalldetektors noch ein wenig übertrifft. Der Widerstand im Kreise R_s bestand gewöhnlich nur aus dem Telephon, so daß $R_s = 4000$ Ohm. Die Gleichspannung im Kreise E, die vor allem bei Kontakten zwischen gleichen Metallen als Vor- oder Hilfsspannung unentbehrlich ist, lag zwischen 0 und 4 Volt. Die Spannung am Kontakt ist wegen des Spannungsabfalls in R_s stets kleiner als E. Der Gleichstrom I im Kreise wurde von einem Drehspulinstrument mit 0,5 m Amp. Meßbereich angezeigt. Die mit Hilfe des Kontaktmikrometers zur Berührung gebrachten Metalle hatten meist kugelige Kontaktflächen von 1 mm Radius, die mit Diamantine poliert waren. Die Reihenfolge der Nennung der Kontaktmaterialien (z. B. Fe–Al) bezeichnet im folgenden zugleich die Richtung der angewendeten Gleichspannung.

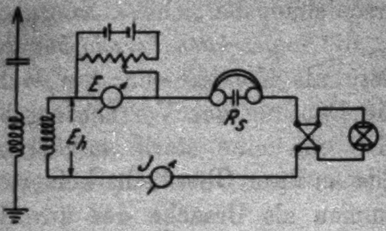


Fig. 14

7. Kontaktabstand und wirksame Einstellung

Bei Annäherung zweier Metallkontakte mit einer Spannung, die klein genug ist, um Kohärenz auszuschalten, (etwa 0,01 Volt), geht ihr Widerstand nach Beginn des Leitendwerdens allmählich auf einen kleinen Wert zurück, der dann bei fortgesetzter Annäherung nahe konstant bleibt, womit der Zustand der guten Leitfähigkeit erreicht ist. Der hierbei auftretende Bereich der langsamen Leitfähigkeitszunahme wird als Kontaktdistanz oder

Mikrophonbereich bezeichnet.[1]) Als Anfangspunkt für die Angabe des Kontaktabstandes ist im folgenden der bei dieser Bestimmung gefundene Eintritt des gutleitenden Zustandes gewählt, um negative Werte des Kontaktabstandes zu vermeiden. Bei Anwendung *größerer Spannungen* kann der Ort des Gutleitendwerdens durch eintretende Kohärenz erheblich vorverschoben werden.

Zwischen den für jede Spannung durch den Übergang in den nicht- oder gutleitenden Zustand gegebenen Grenzen liegen die Einstellungen mit unvollkommenem Kontakt, die als *wirksame Einstellungen* bezeichnet sind, da sie fast ausnahmslos Detektorwirkung ergeben. Die Abweichung ihrer Stromspannungsabhängigkeit vom Ohmschen Gesetz macht es möglich, sie auch bei Benutzung niederfrequenter Wechselspannung statt modulierter Hochfrequenz an den durch Verzerrung der sin-Welle entstehenden Obertönen mit Hilfe des Telephons zu erkennen. Wenn nur Gleichspannung am Kontakt liegt, sind die wirksamen Einstellungen an dem vom Mikrophon her bekannten Rauschen kenntlich. Der sämtliche wirksamen Einstellungen umfassende Abstandsbereich ist als „wirksamer Verschiebungsbereich" bezeichnet und beginnt und endet bei einem einige mμ größeren Kontaktabstande als der mit ihm gewöhnlich nahe identische Mikrophonbereich.

8. Verlagerung des Anfangspunktes der Kontaktabstandsmessung

Während der ersten Minuten nach Inbetriebnahme eines neuen Kontakts wandert oft der wirksame Bereich als Ganzes im Sinne eines abnehmenden Kontaktabstandes. Die dadurch bedingte Nachstellung der Kontakte erreicht Beträge bis zu 1000 mμ, bei jeder Erneuerung der wirksamen Einstellung[2]) kann eine scheinbare Verkürzung bis zu 10 mμ auftreten. Eine Erklärung hierfür liegt wahrscheinlich in der Abflachung der sich berührenden Kugelflächen zu kreisförmigen, ebenen Kontaktflächen, wie sie nach den Versuchen unter dem Mikroskop beobachtet wurden. — Die Kontaktabstandsmessung kann noch in anderer Weise ihren Sinn verlieren. Der wirk-

1) Vgl. H. Rohmann, a. a. O.
2) Vgl. folgenden Abschnitt.

same Bereich hat bei manchen Kontakten keine feste Lage; durch jede Neueinstellung erfährt er unregelmäßige Verlagerungen, wobei jedoch ein festliegender Bereich von 50 mμ nicht überschritten zu werden pflegt.

9. Kohärenz als Störungserscheinung

Die Untersuchung wirksamer Einstellungen ist bei fast allen Kontakten erschwert durch deren Neigung, innerhalb einiger Sekunden oder noch rascher von selbst in den gutleitenden Zustand überzugehen, welcher durch das Fehlen von Abweichungen vom Ohmschen Gesetz und den geringen, gegen R_s vernachlässigbaren Widerstand des Kontakts gekennzeichnet ist. Im Telephon macht sich dies durch ein knackendes Geräuch und Aufhören von Rauschen und Detektorwirkung bemerkbar. Die Erscheinung ist im folgenden als „Kohärenz" bezeichnet, da sie alle Eigenschaften des hiermit bezeichneten elektrischen Vorganges aufweist. Die Größe der Kohärenzneigung ist durch das Material der Anode bestimmt (für W und Fe gering, für Cu groß)[1]), sie wächst mit zunehmender Spannung. Bei längerer Benutzung eines Kontakts, wobei dieser oftmals gutleitend wird und immer wieder wirksame Einstellungen neu hergestellt werden müssen, läßt gewöhnlich die Kohärenzneigung allmählich nach und kann ganz verschwinden. Eingeschaltete mehrstündige Ruhepausen tragen zu dieser Veränderung im Verhalten der Kontakte bei.

10. Kennlinie für Gleichspannung

Die gute Detektorwirkung der Kontakte zwischen Metallen ließ eine scharf gekrümmte oder geknickte Kennlinie erwarten. Es war aber in keinem Falle möglich, bei alleiniger Anwendung von Gleichspannung einen solchen Verlauf festzustellen. Unter Ausschluß der durch Kohärenz verursachten einmaligen Stromanstiege wurden bis zu Spannungen von 0,4 bis 1,5 Volt nur geradlinige oder schwach gekrümmte Kennlinien erhalten. Dieses Ergebnis zwingt zu dem Schluß, daß das elektrische Verhalten der Kontakte bei Belastung mit hochfrequenten Spannungen von dem mit Gleichspannung zu beobachtenden abweicht, indem stark ansteigende Kennlinien-

1) Vgl. A. Székely, Ztschr. f. Phys. 22. S. 51. 1924.

teile nur bei Hochfrequenz in regelmäßiger Wiederkehr unverändert durchlaufen werden können.

11. Kontaktwiderstand bei wirksamer Einstellung

Auf Grund der bei wirksamer Einstellung zum mindesten in Näherung vorhandenen Proportionalität von Gleichstrom und -spannung (von der Spannung 0 bis zu dem Werte der benutzten Hilfsspannung) ist für eine Reihe von Kontaktzusammenstellungen mit guter Detektorwirkung der Kontaktwiderstand R_c nach der Formel $R_c = E/I - R_s$ berechnet. Von den gefundenen Widerständen sind einige mit den dazugehörigen Werten von E und L in der nachstehenden Tabelle gegeben.

Kontakt	R_c	L	E Volt	Kontakt	R_c	L	E Volt
W-As	80 000 100 000	3—4 2—3	2,5 3	Fe-Cu Sb-Ni	15 000 500	3 3	1 0,2
Pt-Pt	2 000	4	0,8	Pt-Al	6 000	2	0,3
W-W	20 000	4	0,4	Fe-Ni Ni-Fe	2 000 3 000	3	0,6
Bi-W	200	3—4	1				
W-Bi	30 000 100 000	3—4	1,5	Zn-Fe	6 000	3	0,7

Der für einen Kontakt erzielbare Höchstwert von R_c steht im allgemeinen in einem Zusammenhange mit seiner Kohärenzneigung derart, daß um so größere Werte von R_c beständig sind, je kleiner die Kohärenzneigung des Kontakts ist. Als Beispiel sei auf die in der Tabelle für W–Bi und Bi–W gegebenen R_c-Werte verwiesen, die die erreichbaren Höchstwerte darstellen. Noch deutlicher ist die Wirkung der verschiedenen Kohärenzneigung für entgegengesetzte Spannungen bei Kontakten wie Fe–Cu, bei denen ein unvollkommener Kontakt mit merklichem Kontaktwiderstand in einer Stromrichtung überhaupt nicht zu erzielen ist. Die Größe von R_c beeinflußt die Gleichrichterwirkung in derselben Weise, wie es ein Nebenschlußwiderstand zum Kontakt tun würde, d. h. mit abnehmendem Kontaktwiderstand sinkt die erhaltene Lautstärke. Bei den meisten Kontakten wird das Nachlassen der Gleichrichterwirkung schon merklich, wenn R_c den Wert von R_s zu unterschreiten beginnt, doch ist bei manchen auch mit Kon-

taktwiderständen von einigen 100 Ohm noch gute Detektorwirkung vorhanden (vgl. Tabelle).

12. Kontakte aus zwei gleichen und zwei ungleichen Metallen

Bei *symmetrisch* zusammengestellten Kontakten war ohne Hilfsspannung keine oder äußerst schwache Detektorwirkung vorhanden. Um laute Detektorwirkung zu erhalten, war eine Hilfsspannung von 0,4 bis 1 Volt notwendig. Kontakte zwischen *ungleichen* Metallen haben häufig Gleichrichterwirkung auch ohne Vorspannung, *mit* dieser war aber die Lautstärke größer. Daß auch nach häufiger Berührung und Kohärenz diese elektrische Unsymmetrie noch erhalten bleibt, zeigt, daß dabei eine Verunreinigung der Oberfläche des einen Kontakts durch das Material des anderen weniger leicht stattfindet, als man etwa nach der Brückentheorie der Kohärenz annehmen könnte. Die ohne Vorspannung wirksam befundenen Kontakte sind (Lautstärke in Klammern): As–Zn (2), Fe–Sn (2), Ni–Sb (2), Pt–Sb (1), Fe–Sb (2), W–Sb (2), W–Bi (1), W–As (1), W–Zn (2), Fe–Zn (1—3), Cd–Al (1), Messg.–Al und Pt–Al ($L = 2$—3, durch Vorspannung nur wenig verbessert).

Zuweilen ließen aus zwei verschiedenen Metallen bestehende Kontakte die erwartete Unsymmetrie des elektrischen Verhaltens vermissen, d. h. die Leitfähigkeitseigenschaften stimmten für die beiden Richtungen der Vorspannung völlig überein, so daß bei wirksamer Einstellung diese kommutiert werden konnte, ohne daß sich L und I (also auch R_o) änderten. Beispiel: Fe–Sb, Pd–Sb, Fe-Ni. Detektorwirkung ohne Vorspannung ist in diesen Fällen nicht vorhanden.

13. Abhängigkeit der Lautstärke von der Vorspannung

Bei einem ohne Vorspannung unwirksamen Kontakt ruft normalerweise schon eine Gleichspannung von einigen hundertstel Volt leise Detektorwirkung hervor, die bei Vergrößerung der Spannung bis $E = 0{,}5$ bis 1 Volt beträchtlich an Lautstärke zunimmt. Weitere Spannungssteigerung bringt gewöhnlich nur geringen Lautstärkegewinn und führt schließlich zur Kohärenz. Die Detektorwirkung war zuweilen weitgehend unabhängig von der Größe der Hilfsspannung[1]), wie

1) Dies gilt vor allem für zunehmende Hilfsspannung.

die folgenden Beispiele zeigen; W–Messing, L nahe unverändert gleich 3—4 für Vorspannungen zwischen 0,7—2,8 Volt; Fe–Fe desgl. $L = 3$ zwischen 0,4—2 Volt. Dieses Verhalten läßt als Ursache des Fehlschlagens der Kennlinienaufnahme mit Gleichstrom[1]) eine selbsttätige Anpassung der Spannung des gleichrichtenden Kennlinienknicks an die Größe der angelegten Gleichspannung vermuten. Wie nämlich aus den später beschriebenen Kennlinienaufnahmen mit niederfrequenter Wechselspannung hervorgeht, ist diese Knickspannung gewöhnlich an keinen bestimmten Wert gebunden und verlagert sich entsprechend der angewendeten Spannungsamplitude. Hierdurch ist wahrscheinlich auch das seltene Vorkommen einer geschwächten und fehlerhaften Gleichrichterwirkung zu erklären, die bei Kristalldetektoren die gewöhnliche Folge einer um einige zehntel Volt vom richtigen Werte abweichenden Vorspannung ist.

Der Wert des vom Kontakt in wirksamer Einstellung gleichgerichteten Stromes wurde als Differenz der Ablesungen am Strommesser mit und ohne hochfrequente Spannung im Kreise erhalten, wobei Unabhängkeit des R_e von der Art der Belastung vorausgesetzt ist. Auffälligerweise waren die gemessenen Werte vielfach kleiner als die mit einem Kristalldetektor in gleicher Schaltung erhaltenen, bei mindestens gleicher Lautstärke des Metallkontakts.

14. Abreißen des Kontakts

Gleichsam das Gegenstück zum Verderben der wirksamen Einstellung durch Gutleitendwerden (Kohärenz) stellt die Neigung mancher Kontakte dar, aus der wirksamen Einstellung heraus innerhalb 1—20 Sek. von selbst nichtleitend zu werden. Dieser als Abreißen des Kontakts bezeichnete Vorgang hat große Ähnlichkeit mit der bei den Kennlinienaufnahmen mit niederfrequenter Wechselspannung beobachteten raschen Abnahme der Stromamplitude.[2]) Er tritt besonders bei Versuchen mit größeren Hilfsspannungen (1—2 Volt) auf. Annäherung der Elektroden wirkt der Stromabnahme entgegen,

---

1) Vgl. Abschnitt IV, 10.
2) Vgl. Abschnitt IV, 20.

doch vermag sie den Kontakt nur einige Zeit wirksam zu erhalten, da in der Folge der fortgesetzten Annäherung zur Verhinderung des Abreißens Kohärenz eintritt. Beobachtungen sind gemacht an den Kontakten: Fe–Messing, Fe–Ag, Zn–Fe, Cd–Al, W–Mg, Sb–Pd, Sb–Ni, Sb–Fe. Die wirksame Einstellung war in diesen Fällen meist nur durch Trennen des gutleitenden Kontakts zu erhalten.

15. **Abhängigkeit der Detektorwirkung vom Kontaktabstand**

Bei den meisten Kontakten ist ein stetiger Übergang vom leitenden Zustand zum nichtleitenden und umgekehrt nicht möglich, sie zeigen vorwiegend folgendes Verhalten: Bei Annähern erfolgt Kohärenz, nur beim Trennen des gutleitenden Kontakts wird eine wirksame Einstellung erhalten. Beim weiteren Auseinanderziehen wird der Kontakt nach Zunahme des Widerstandes plötzlich nichtleitend. Die Lautstärke ist innerhalb des Bereichs guter Detektorwirkung, der im Mittel 10 mμ umfaßt, nahe unabhängig vom Abstande. Ebenso nimmt der Kontaktwiderstand in diesem Bereich nur langsam ab; bei weiterer Annäherung fällt er durch Kohärenz meist plötzlich auf Null. Auf zahlreiche kleine Abweichungen von diesem Schema kann hier nicht eingegangen werden; zwei Fälle normalen Verhaltens bei Abstandsänderungen sind in den Abschnitten S. 562 und 563, beschrieben.

Eine umkehrbare, d. h. bei zu- und abnehmendem Kontaktabstande übereinstimmende Abhängigkeit des L und I von den Verschiebungen war nur in einigen wenigen Fällen vorhanden. Das regelmäßige Verhalten dieser Kontakte läßt eine ausführliche Beschreibung der Beobachtungen gerechtfertigt erscheinen:

Pt–Pt, $E = 1$ Volt, $L = 4$. Bei Annäherung setzt die Detektorwirkung ziemlich plötzlich ein. Durch weniger als 1 mμ Verschiebung steigt L auf den größtmöglichen Wert, bleibt innerhalb des wirksamen Bereiches (Rauschen im Telephon) von etwa 8 mμ nahe konstant und verschwindet dann beim Gutleitendwerden des Kontakts. Der Kontaktwiderstand beträgt nach Beginn des Leitendwerdens bis zu 7000 Ω, er nimmt bei Annäherung zunächst langsam ab und geht dann (Knacken im Telephon) sprungweise auf Null herunter.

Der Verlauf von R_e und L bei Abstandsänderungen entspricht einer umkehrbaren Abhängigkeit. Bei Anwendung einer Spannung von 0,01 Volt ($E_h = 0$) erfolgt der Übergang vom nicht- in den gutleitenden Zustand für eine Verschiebung von weniger als 1 mμ, Zwischenstellungen konnten nicht beobachtet werden. Die Kontaktdistanz ist also praktisch Null.

Fe–Fe, $E = 0{,}8$ Volt, $L = 3$—4. Die Detektorwirkung setzt plötzlich ein, bleibt auf etwa 30 mμ konstant und geht bei fortgesetzter Annäherung nach insgesamt 150 mμ auf nahe Null herunter, ohne bei weiterer Anpressung von einigen 100 mμ vollständig zu verschwinden. Der Übergang in den gutleitenden Zustand vollzieht sich hier vollkommen stetig durch langsame Abnahme von R_e, dessen Wert im Bereich maximaler Lautstärke einige 1000 Ω beträgt. Die Umkehrbarkeit der Abstandsabhängigkeit ist hier nur unvollkommen, da die stark angepreßten Kontakte beim Trennen kleben. Mit $E = 0{,}01$ Volt, $E_h = 0$ wird die Kontaktdistanz, innerhalb der der Kontakt vom nicht- in den gutleitenden Zustand übergeht, zu etwa 200 mμ gefunden. Beim Trennen macht sich wieder das Kleben bemerkbar.

Ni–Mg, $E = 0{,}6$—1,8 Volt, $L = 3$. Das Einsetzen der Detektorwirkung bei Annäherung erfolgt hier in derselben Weise wie in den beiden vorigen Fällen und ist umkehrbar. Bei weiterer Annäherung bleibt L zunächst konstant, während R_e langsam kleiner wird, der Übergang in den gutleitenden Zustand vollzieht sich in wechselnder Weise, teilweise durch stetige Abnahme von R_e und L, teilweise durch Kohärenz. Dieser letztere Teil ist nicht mehr umkehrbar.

Über die Rolle der Zwischenschicht bei diesen Versuchen kann man sich etwa die folgende Vorstellung machen: Der Beginn des Stromdurchganges bei Annähern der Kontakte kann wegen der geringen angewendeten Spannung als gleichzeitig mit der Berührung der Oberflächenschichten eintretend angesehen werden, innerhalb des Bereiches *guter* Detektorwirkung wird dann ein zunehmender Druck auf die Oberflächenschichten ausgeübt, den diese aber noch ohne Veränderung aufzunehmen vermögen. Bei weiterer Anpressung weichen sie dem Druck und werden in das sie tragende Metall hineingepreßt, wodurch ein direkter Stromübergang von Metall zu

Metall möglich wird. Der zur Einpressung der Zwischenschicht erforderliche Druck ist offenbar klein bei Pt, groß bei Fe. Die Kontaktdistanzmessung nach Rohmann, bei der eine elektrische Beanspruchung der Oberflächenschicht nach Möglichkeit vermieden wird, liefert ein relatives Maß ihrer Widerstandsfähigkeit gegen mechanische Beanspruchung. Man kann versuchen, die hier gegebene Deutung des Gutleitendwerdens auf die gewöhnliche, durch Spannungsumkehr nicht aufhebbare Kohärenz zu übertragen, indem man sie erklärt durch das Nachgeben der Oberflächenschichten unter dem durch die elektrostatische Anziehung der Kontakte erzeugten Druck.

16. Kleben der Kontakte

Zuweilen bleibt eine beträchtliche Kontaktabstandsvergrößerung ohne Wirkung auf Kontaktwiderstand und Detektorwirkung, welches Verhalten als Kleben des Kontakts bezeichnet ist. Das Kleben tritt unter verschiedenen Umständen auf: a) Bei der Trennung durch Kohärenz gutleitend gewordener Kontakte ist eine beträchtliche Vergrößerung des Kontaktabstandes (20—200 mμ) erforderlich, um eine Leitfähigkeitsabnahme zu erzielen, die dann meist als plötzliches Nichtleitendwerden eintritt. Dieses durch Kohärenz hervorgerufene Kleben war besonders stark bei Ni–Mg, Pt–Sn, Al–Messg., Fe–Messg., Fe–Zn. Kein Kleben nach Kohärenz zeigte Ag–Cu. b) Bei Pt–Al konnte die wirksame Einstellung (R_c = 2000—3000 Ohm, $L = 2-3$) erst durch eine Abstandsvergrößerung von 100—300 mμ aufgehoben werden. c) Kleben tritt auch nach starker Anpressung der Kontakte mit Verwendung sehr kleiner Spannungen auf, wie dies bei Kontaktdistanzmessungen nach Rohmann der Fall ist. Ein Kontakt Fe–Fe, dessen Kontaktdistanz zu 100—150 mμ bestimmt wurde, zeigte unter diesen Umständen folgendes Verhalten: Beim Auseinanderziehen der vorher zu gutleitender Berührung gebrachten Kontakte blieb der kleine Wert von R_c zunächst auf 50—100 mμ nahe unverändert und nahm sogar noch etwas ab; erst bei weiterer Vergrößerung des Abstandes um 10—20 mμ stieg R_c rasch an und der Kontakt wurde nichtleitend, während die bei Annäherung erfolgende Abnahme des R_c sich auf einem Bereich von 100—150 mμ gleichmäßig verteilte.

Das Kleben kann durch ein wirkliches Aneinanderhaften der Kontakte verursacht werden, was für das Kleben nach Kohärenz wahrscheinlich ist, es kann aber auch dadurch vorgetäuscht sein, daß die Kontakte vor dem Auseinanderziehen unter starkem Druck standen, so daß die leitende Berührung bei Verminderung des Druckes nicht sogleich aufgehoben wird.

17. Anomalie der Abhängigkeit des Stroms vom Abstande

Die bisher angeführten Beobachtungen betrafen solche Fälle von Abstandsabhängigkeit, bei denen der Strom bei Annäherung zunimmt, beim Auseinanderziehen abnimmt. Es wird aber merkwürdigerweise auch das umgekehrte Verhalten beobachtet. Bei manchen Kontakten geht bei Annäherung Leitfähigkeit und Detektorwirkung durch ein Minimum. Die Versuche sind teilweise nur mit Gleichspannung ausgeführt, da bei Überlagerung mit Hochfrequenz die Beobachtungen leicht durch Kohärenz beeinträchtigt werden. In diesen Fällen gab die Stärke des Rauschens bei den verschiedenen Kontaktabständen[1]) einen Anhalt für die vermutliche Gleichrichterwirkung. Es folgen die über die anomale Abstandsabhängigkeit gemachten Beobachtungen.

Pt–Al (auch Al–Pt). Die Kontakte wurden aus einer detektorwirksamen Einstellung mit $E = 1$ Volt einander genähert, dabei nahm I bis auf 0 ab, womit zugleich das Rauschen verschwand; bei fortgesetzter Annäherung stieg I wieder an, das Rauschen setzte wieder ein und wurde, wenn I den Kurzschlußwert erreichte, endgültig zu Null. Abnahme und Wiederansteigen des Stromes auf den Kurzschlußwert vollzogen sich innerhalb etwa 100 mμ und waren umkehrbar. Bei Vergrößerung des Abstandes über den der Ausgangsstellung hinaus wurde Kleben beobachtet, der Strom nahm auf einige 100 mμ nur ganz wenig ab und die Detektorwirkung ging langsam auf $L = 2$ herunter, die Unterbrechung des Kontakts erfolgte plötzlich. Versuche, bei denen einer Gleichspannung von 0,2 Volt eine niederfrequente Wechselspannung E_n von 0,1 Volt überlagert war, bestätigten die gefundene Abhängigkeit der Leitfähigkeit vom Abstande.

---

1) Vgl. Abschn. IV, 7.

Fe–Sn. Mit $E = 0{,}3$ Volt nimmt beim Annähern I anfänglich ab, beim Auseinanderziehen zuerst zu und bleibt dann lange konstant.

Fe–Ni. Bei Belastung allein mit Wechselspannung, $E_a = 0{,}1$ Volt, nimmt beim Annähern die Stromamplitude ab und umgekehrt.

Die obigen Kontakte sind fast alle ziemlich druckfest, d. h. sie ertragen beträchtliche Anpressungen, ohne gutleitend zu werden. Weiter zeigen die Versuche, daß, wenn auch wohl durch einen Zufall die Beobachtungen sich nur auf Kontakte zwischen ungleichen Metallen beziehen, das Auftreten der Anomalie sich nicht auf eine Stromrichtung beschränkt.

18. Schwingungserzeugung mit Metallkontakten

Einige Metallkontakte wurden auf ihre Eignung zur Erzeugung elektrischer Schwingungen geprüft. Ein W–W-Kontakt gab verhältnismäßig die besten Resultate. In der in Fig. 15 dargestellten Schwingschaltung mit $L = 0{,}1$ H, $C = 0{,}25\ \mu$F vermochte dieser bei passender Einstellung des Kontaktabstandes für $E = 6$ bis 7 Volt und $R_s = 400$—700 Ohm längere Zeit Schwingungen zu unterhalten.

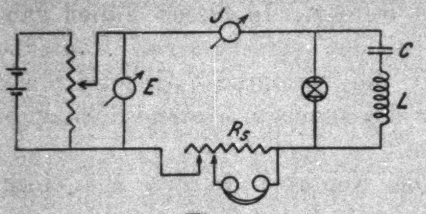


Fig. 15

Jede Neueinstellung eines schwingungserzeugenden Kontakts macht längeres Probieren unter Veränderung von E, R_s und des Kontaktabstandes notwendig. Geringfügige Kontaktverschiebungen oder Änderungen von E oder R_s um einige Prozent genügen, um die Schwingungserzeugung für die Dauer der Änderung zum Erlöschen zu bringen. Größere Änderungen von E, R_s oder des Kontaktabstandes bewirken bleibendes Unwirksamwerden, so daß eine Neueinstellung notwendig wird. Das allgemeine Ergebnis dieser Versuche ist, daß Kennlinienstücke mit negativem Widerstand, die zur Schwingungserzeugung geeignet sind, bei Metallkontakten zu den Seltenheiten gehören, was durch Kennlinienaufnahmen[1]) bestätigt wird.

1) Vgl. Abschn. IV, 20.

19. Von selbst auftretende periodische Kennlinienänderungen

An demselben W–W-Kontakt in der zur Schwingungserzeugung benutzten Schaltung wurde folgende Beobachtung gemacht: Bei $R_s = 400$ Ohm, $E = 6$ Volt traten periodisch in Abständen von etwa 10 Sek. für Bruchteile einer Sekunde Schwingungen auf. Jedesmal stieg I vor Beginn der Schwingungen langsam um etwa 20 Proz. an und ging bei ihrem Aufhören um denselben Betrag plötzlich herunter. — Ein ganz ähnliches Verhalten wurde an der Kennlinie eines Bleiglanz–Kupferkontakts beobachtet. Der anfangs flach, etwa nach Fig. 10 verlaufende negative Ast erweiterte sich rasch zu einer — auch unter anderen Umständen beobachteten — Schleife mit vertikaler Tangente für den Höchstwert der Spannung, die sich zuletzt nahe momentan bis zum größtmöglichen Stromwerte ausbildete und gleich darauf verschwand, worauf sich das jeweils einige Sekunden erfordernde Spiel, mit dem flachen Verlauf beginnend, erneuerte.

20. Kennlinienaufnahmen mit Kennlinienschreiber

Durch Verwendung niederfrequenter Wechselspannung, meist in Verbindung mit einer überlagerten Gleichspannung, gelang es im Gegensatz zu den allein mit Gleichspannung unternommenen Versuchen nichtgeradlinige Kennlinien von Metallkontakten zu erhalten, die als ihrer Detektorwirkung zugrunde liegend angesehen werden können. Der Kennlinienschreiber erwies sich als sehr geeignet für die Beobachtung der raschen Veränderungen unterworfenen Kennlinien. Die angewendeten Spannungen (bis zu 8 Volt) waren höher als bei den Versuchen über die Detektorwirkung und die Kohärenzneigung daher größer. Die verbessernde Wirkung längerer Benutzung machte sich auch hier bemerkbar. Die Kontakte waren meist ziemlich druckfest, kleinere Kontaktabstandsverringerungen blieben ohne Wirkung. Eine stetige Veränderung der Kennlinienform mit dem Kontaktabstande konnte nicht beobachtet werden.

Fig. 16 und 17 zeigen Kennlinien eines Kontakts Wolfram-Wismut für größtenteils im Gebiet positiver bzw. negativer Spannungen liegende Arbeitsbereiche. Die früher gefundene

Abhängigkeit des Kontaktwiderstandes von der Stromrichtung[1]) bestätigt sich. Die Kennlinienknicke in beiden Figuren besitzen gute Gleichrichterwirkung, auch der in Fig. 17, da die schädliche Wirkung der besseren Anfangsleitfähigkeit durch

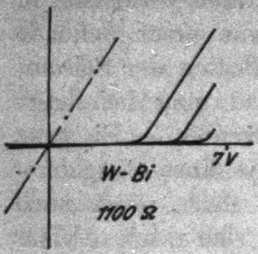


Fig. 16

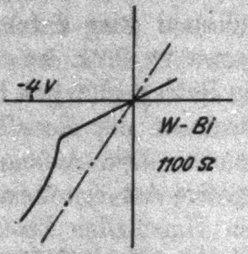


Fig. 17

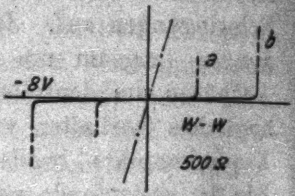


Fig. 18

den infolge Negativwerdens des Kontaktwiderstandes ermöglichten steilen Stromanstieg am Ort des Knicks wieder aufgehoben wird.[2]) Bei der in Fig. 16 dargestellten Kennlinie nimmt die Spannung für den den steilen Stromanstieg einleitenden Knick während der Beobachtung zu, wie dies durch zwei weitere Linienzüge angedeutet ist, wodurch schließlich der Kontakt bis zum Höchstwert der Spannung nichtleitend wird. Durch Spannungserhöhung kann der steigende Ast wiederausgebildet werden. Der Versuch, dieses Ergebnis durch Annäherung der Kontakte zu erzielen, bleibt wirkungslos oder hat Kohärenz zur Folge. — Ein Kontakt W–Cu ergibt bei Belastung mit Wechselspannung überlagert von positiver Gleichspannung Kennlinien der in Fig. 16 dargestellten Art, schon 0,1 Volt negativer Gleichspannung verursacht Kohärenz des Kontakts. — Die in Fig. 18a dargestellte Kennlinie ist besonders kennzeichnend für Metallkontakte. Der Kontakt ist bis dicht an den positiven und negativen Höchstwert der Spannung so gut wie nichtleitend, bei deren Erreichung steigt die Kennlinie vertikal an. Die

---

1) Vgl. Abschn. IV, 11.

2) Bei der praktischen Verwendung zur Gleichrichtung von Hochfrequenz liegen die Verhältnisse noch günstiger, da man bei Benutzung eines Blockkondensators mit einem geringeren Reihenwiderstand zu rechnen hat.

steilen Äste verkürzen sich rasch während der Beobachtung, was durch ihren gestrichelt gezeichneten Teil angedeutet ist. Bei Vergrößerung der Spannungsamplitude wandern sie mit dem Höchstwert der Spannung (Fig. 18a und b). Unmittelbar nach einer Spannungssteigerung tritt eine größere Stromamplitude auf, doch sinkt diese dann rasch wieder auf einen kleinen Wert. Diese Ermüdungserscheinung kommt bei Verwendung von Hochfrequenz wahrscheinlich in Fortfall, im übrigen bürgen die scharfen Knicke der Kennlinie für gute Detektorwirkung.

Zusammenfassung

Mit Wechselspannung von 50 Perioden/Sek. wurden Kennlinien von einer großen Zahl von Detektorkontakten bei wechselndem Kontaktdruck aufgenommen. Kennlinien mit Hysteresisschleifen sind häufig. Viele von diesen entstehen dadurch, daß bei steigender Spannung der einen Richtung plötzlich ein Leitfähigkeitszuwachs eintritt, der bei abnehmender Spannung erhalten bleibt, aber durch entgegengesetzt gerichtete Spannung wiederaufgehoben wird. Aus diesem Verhalten wird auf eine verschiedene Beschaffenheit der Kontaktstelle für Spannungen entgegengesetzter Richtung geschlossen und dieser Schluß auf unipolar leitende Kontakte mit schleifenlosen Kennlinien übertragen. Die Veränderlichkeit der Kennlinien bei konstanten äußeren Verhältnissen und das häufige Vorkommen negativer Kontaktwiderstände sind bisher wenig beachtete Eigentümlichkeiten der Detektorkontakte.

Versuche mit einem Kristallkontakt, der durch Glühen im Vakuum entgast werden konnte, lassen darauf schließen, daß ohne Adsorptionsschichten kein detektorwirksamer Kontakt möglich ist. Bei geschwächter Adsorptionsschicht muß der Kontaktdruck beträchtlich herabgesetzt werden, um noch dieselbe in einer Richtung schlechtleitende Kennlinie zu erhalten wie in Luft, außerdem zeigt der Kontakt eine an der Luft nicht vorhandene Neigung zur Kohärenz, ähnlich den Metallkontakten.

Bei der Untersuchung der Detektorwirkung von Kontakten zwischen gutleitenden Metallen wurde die Feststellung ihrer Abhängigkeit vom „Kontaktabstande" durch störende Erschei-

nungen verschiedener Art, die näher beschrieben sind, oft verhindert. Die Kennlinien der Metallkontakte konnten nicht mit Gleichspannung, wohl aber mit niederfrequenter Wechselspannung aufgenommen werden. Sie weisen meist Teile mit negativem Widerstand auf, die aber nur selten zur Schwingungserzeugung verwendbar sind.

Durch die Beobachtungen wird wahrscheinlich gemacht, daß die Detektorkontakte unvollkommene Kontakte sind, deren Eigenschaften bedingt sind durch die den Leitern anhaftenden Adsorptionsschichten. Der Übergang von nicht-Ohmscher zu normaler Leitung bei zunehmendem Kontaktdruck wird durch die Annahme erklärt, daß die trennenden Adsorptionsschichten in die Kontaktflächen eingepreßt werden, dadurch eine direkte Berührung derselben ermöglichend.

Die vorliegenden Untersuchungen wurden ausgeführt im Physikalischen Institut der Technischen Hochschule Hannover. Es ist mir eine angenehme Pflicht, Hrn. Prof. Dr. J. Precht für die Anregung und stete Förderung der Arbeit zu danken.

(Eingegangen 7. Mai 1928)

---

7. *Über Piezoquarzplatten als Sender und Empfänger hochfrequenter akustischer Schwingungen;*

von F. W. Hehlgans[1])

(Hierzu Tafel XVIII)

Inhalt: I. Einleitung: Literatur, Stand der Forschung und Ziel der Arbeit. — II. Herstellung und Einbau der Quarzplatten. — III. Der Piezoquarz als Schallsender. — 1. Die Apparatur; 2. Feststellung der Resonanzfrequenzen und Messung der zugehörigen elektrischen Wellenlänge; 3. Messung der akustischen Wellenlänge aus der Rückwirkung stehender Wellen auf den Sendequarz; 4. Messung der akustischen Wellenlänge mit Kundtschen Staubfiguren. — IV. Der Piezoquarz als Schallempfänger. — 1. Die Empfangseinrichtung und ihre Prüfung; 2. Abstimmung des Empfangsquarzes auf den Sendequarz und Vergleichung ihrer Eigenschwingungen. — V. Anwendung des Resonatorquarzes zur Untersuchung von Schallfeldern und von Quarzschallsendern. — 1. Messung der akustischen Wellenlänge mit dem Quarzschallresonator; 2. Amplitudenverteilung auf der Stirnfläche des Quarzsenders; 3. Intensitätsverteilung in Abhängigkeit vom Azimut. — VI. Zusammenfassung und Schluß.

I. Einleitung: Literatur, Stand der Forschung und Ziel der Arbeit

Als Quellen hochfrequenter akustischer Schwingungen wurden bisher kleine Stimmgabeln, Galtonpfeifen, elektrische Funkenstrecken und Lichtbögen, sowie Piezoquarze verwandt.

R. Koenig[2]) erzeugte mit Stimmgabeln Töne bis zu einer Frequenz von 90 000 Hertz, Edelmann[3]) mit einer Galtonpfeife bis 170 200 Hertz. Altberg[4]) untersuchte die von Hertzschen Funkenstrecken ausgehenden akustischen Schwingungen und konstruierte einen Druckapparat, der Intensitätsmessungen im Schallfeld von akustischen Schwingungen von beliebiger Schwingungsform gestattete. Mit der Altbergschen

1) Jenaer Dissertation.

2) R. Koenig, Wied. Ann. **69**. S. 626 und 721. 1899.

3) M. Th. Edelmann, Ann. d. Phys. **2**. S. 469. 1900.

4) W. Altberg, Ann. d. Phys. **23**. S. 267. 1907.

Anordnung bestimmte Neklepajew[1]) auf Anregung von Lebedew bei Frequenzen bis etwa 410000 Hertz den Absorptionskoeffizienten von Luft für hochfrequente akustische Schwingungen. Dieckmann[2]) benutzte mit einem Poulsonlichtbogen erzeugte akustische Schwingungen bis 800000 Hertz zur Messung der Schallgeschwindigkeit in Leuchtgas.

Langevin[3]) verwandte als erster piezoelektrisch erzwungene mechanische Schwingungen von Quarzplatten zur Konstruktion eines Schallsenders zum Zwecke der Echolotung. Pierce[4]) benutzte die dämpfende Rückwirkung von an einem Metallspiegel reflektierten Schallwellen auf die Quarzschwingungen zur Messung der akustischen Halbwellenlänge und zur Bestimmung der Schallgeschwindigkeit hochfrequenter Schwingungen in Luft und CO_2. Heegner[5]) und Dye[6]) untersuchten die akustische Beeinflussung der Dämpfung von Quarzschwingungen. Rich und Pielemeier[7]) verwandten Piezoquarze als Schallsender, um mit dem Druckapparat nach Altberg[8]) die Absorptionskoeffizienten von Luft und CO_2 für hochfrequente akustische Schwingungen zu bestimmen. R. W. Wood und Alfred L. Loomis[9]) wiesen mit Piezoquarzschallsendern interessante physikalische und biologische Effekte von hochfrequenten akustischen Schwingungen großer Intensität nach.

Über die Eigenschaften von Piezoquarzen als Schallsender ergaben die bisherigen Untersuchungen folgendes. Es können akustische Schwingungen von etwa $4 \cdot 10^4$ Hertz bis $3 \cdot 10^6$ Hertz erzeugt werden, wie Pierce[10]) gezeigt hat. Die Schwingungen der Quarze zeichnen sich durch außerordentliche Konstanz der Frequenz aus und werden deshalb bekanntlich

---

1) N. Neklepajew, Ann. d. Phys. **35**. S. 175. 1911.
2) E. Dieckmann, Ann. d. Phys. **27**. S. 1066. 1908.
3) P. Langevin, Publ. spéc. No. 3, Sécrét. Général Bur. Hydr. Int. Monaco, 1924.
4) G. M. Pierce, Proc. Amer. Ac. Arts a. Sciences **60**. S. 271. 1925.
5) W. Heegner, Telefunken-Ztg., 8. Jhrg., Nr. 44. S. 60. 1926.
6) D. W. Dye, Proc. Phys. Soc. of London **38**. S. 427. 1926.
7) D. L. Rich und W. H. Pielemeier, Phys. Rev. (2) **25**. S. 117. 1925.
8) W. Altberg, a. a. O.
9) R. W. Wood u. A. L. Loomis, Phys. Rev. (2), **29**. S. 373. 1927.
10) G. W. Pierce, a. a. O.

mit Vorteil zur Frequenzkontrolle von Röhrensendern verwandt. Der Temperaturkoeffizient beträgt nur etwa $5 \cdot 10^{-4}$ Proz. pro Grad Celsius. Die Frequenz ist in geringem Grade abhängig von der Größe des Luftzwischenraumes zwischen der Quarzplatte und ihren Elektroden. Dye[1]) fand für den Fall des transversalen reziproken Piezoeffektes eine Frequenzänderung um 2 Promille bei einer Versuchsfrequenz von 44 000 Hertz, wenn der Luftzwischenraum von 0,2 auf 2 mm geändert wurde. Der Einfluß des Luftzwischenraumes kann beseitigt werden, indem man entweder die von E. Giebe und A. Scheibe[2]) angegebene Anordnung wählt, bei welcher die Anregungselektroden sehr klein sind, so daß der größte Teil der Quarzplatte außerhalb der Elektroden liegt, oder indem man die Elektroden chemisch oder galvanostegisch unmittelbar auf die Quarzplatten bringt. Der letztere Weg wurde von Cady[3]) zuerst angegeben und von Gabel[4]) zur Konstruktion einer praktischen Fassung für Piezoquarzplatten benutzt. Die Einflüsse der inneren Reibung, Lagerung, akustischen Strahlung, mitschwingender Luftsäulen und elektrischer Kreise auf die Dämpfung der Quarzschwingungen wurden von Dye[5]), Heegner[6]), Meissner[7]) und Powers[8]) untersucht. Beim Zusammentreffen aller ungünstigen Umstände ist beim transversalen reziproken Piezoeffekt das log. Dekrement eines Piezoquarzes immer noch von der Größenordnung $1 \cdot 10^{-4}$.

Bei all den angeführten Arbeiten werden Piezoquarze akustisch nur als Schallsender benutzt. Es ist aber, wie schon Langevin[9]) bemerkte, klar, daß sich ein solcher Piezoquarz auch als Schallempfänger eignen muß. Wird eine geeignet geschnittene Quarzplatte der Einwirkung von Schallwellen ausgesetzt, deren Frequenz gleich einer Eigenfrequenz der Quarzplatte ist, so erzeugen diese infolge des direkten

1) D. W. Dye, a. a. O. S. 451.
2) E. Giebe und A. Scheibe, Elektrotechn. Ztschr. 47. S. 5. 1926.
3) W. G. Cady, Proc. Inst. Radio Eng. 10. S. 83. 1922.
4) V. Gabel, Jahrb. d. drahtl. Telegr. u. Telef. 29. S. 194. 1927.
5) D. W. Dye, a. a. O.
6) K. Heegner, a. a. O.
7) A. Meissner, Jahrb. d. drahtl. Teleg. u. Telef. 29. S. 20. 1927
8) W. F. Powers, a. a. O.
9) P. Langevin, a. a. O.

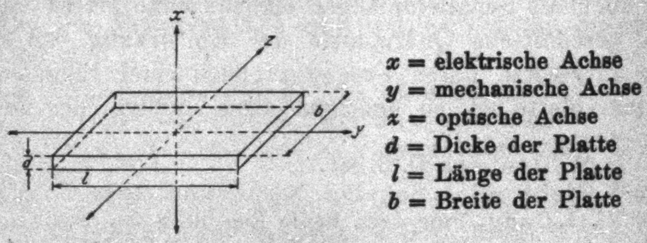
Piezoeffektes Wechselspannungen auf der Quarzplatte. Langevin schlägt vor, diese Wechselspannnngen durch Verstärkung und Überlagerung nachzuweisen. Dieser Nachweis muß aber auch mit einem empfindlichen Detektor in Verbindung mit einem Galvanometer möglich sein. Der Galvanometerausschlag ist in diesem Falle proportional dem mittleren Quadrat des Stromes, und — da dieser proportional der Druckamplitude der auftreffenden Schallwelle ist — proportional dem mittleren Quadrat der Druckamplitude, d. h. der Intensität der Schallwelle.

Der Piezoquarz als Schallempfänger reagiert wegen seiner hohen Selektivität merkbar nur auf Schallwellen von der Frequenz einer seiner mechanischen Eigenschwingungen. Er ist im Gegensatz z. B. zur Rayleighschen Scheibe unempfindlich gegenüber allen andersartigen Bewegungen des Schallmediums.

In der vorliegenden Arbeit soll über Versuche berichtet werden, die auf Anregung von Hrn. Prof. Dr. Busch im hiesigen Physikalischen Institut der Universität unternommen wurden, um die Eigenschaften von Piezoquarzen als Schallempfänger festzustellen, und um mittels derartiger Schallempfänger Piezoquarzschallsender und das von diesen erzeugte Schallfeld zu untersuchen.

II. Herstellung und Einbau der Quarzplatten

Die Quarzplatten. Die Fig. 1 zeigt, in welcher Weise die Platten aus dem Quarzkristall herausgeschnitten wurden. Die



Orientierung der Achsen in den Quarzplatten

Fig. 1

Breite b der Platte verläuft parallel der optischen Achse z, ihre Dicke d verläuft parallel einer der drei kristallographisch

zweizähligen „elektrischen" Achsen x des Quarzkristalles. Die Länge l der Platte liegt dann in Richtung einer der drei sogenannten „mechanischen" Achsen y des Kristalles.

Die Herstellung. Die Platten wurden von der Fa. Carl Zeiss-Jena hergestellt. Im Verlaufe des Herstellungsganges wurde zunächst eine kreisrunde Platte senkrecht zur optischen Achse mit einer Genauigkeit von 0,2° aus dem Quarzkristall herausgeschnitten; die Prüfung der Lage der optischen Achse erfolgte dabei auf optischem Wege. Die Orientierung der übrigen Achsen erfolgte nun piezoelektrisch mit der von Riecke und Voigt[1]) angegebenen Apparatur, die im wesentlichen aus einem Hebelapparat und aus einem Elektrometer besteht. Mit der Apparatur wurden zwei gegenüberliegende Stellen des Umfanges der Kreisplatte aufgesucht, bei deren wechselnder Belastung stärkste Aufladungen an zwei anderen senkrecht zu den ersten liegenden Stellen erfolgte. In dieser Weise konnten je eine „mechanische" und „elektrische" Achse mit einer Genauigkeit von ± 1° größter Abweichung von den Normalen der zugehörigen Flächen der Quarzplatte (vgl. Fig. 1) orientiert werden. Die Flächen der Platten wurden geschliffen und poliert. Aus Gründen der Festigkeit wurde nur einwandfreies (glasklares) Material verwandt.

Wahl der Abmessungen der Platten

Tabelle 1

Plattenzeichen	Anzahl	Dimensionen		
		1 mm	*b* mm	*d* mm
A	2	25	12	6
B	2	36	12	6
C	2	36	3,5	6
D	2	40	20	5
E	3	40	18	5
F	2	40	10	10

Die Tab. 1 gibt eine Übersicht über die Dimensionen der benutzten Quarzplatten. In jedem Falle wurden mindestens zwei gleiche Platten aus demselben Quarzkristall herausgeschnitten. Unter der gegebenen alphabetisch fortlaufenden

1) E. Riecke und W. Voigt, Wied. Ann. 45. S. 523. 1892.

Bezeichnung der Tab. 1 werden die Platten im folgenden angeführt.

Die Flächen $b \times d$ der Platten (vgl. Fig. 1) wurden zur Schallsendung bzw. zum Empfang benutzt und deshalb möglichst groß gemacht. Dabei wurde die Dicke möglichst klein gemacht, um einerseits das in ihrer Richtung angelegte elektrische Wechselfeld möglichst stark zu machen und um andererseits einen möglichst großen Unterschied der Grundfrequenzen in Richtung der elektrischen und der mechanischen Achse zu erhalten.

Es muß darauf geachtet werden, daß nicht auch in Richtung der optischen Achse Eigenschwingungen vorhanden sind, deren Frequenz mit einer Eigenschwingung in einer der beiden anderen Richtungen zusammenfällt, weil schon sehr geringe Orientierungsfehler, wie sie bei der Herstellung unvermeidlich sind, mechanische Kopplungen zwischen den Schwingungen erzeugen können, die trotz ihrer Kleinheit bei der geringen Dämpfung der Schwingungen zu störenden Rückwirkungen Veranlassung geben.

Bei dem hier benutzten Effekt bestimmt die Länge l der Platten ihre mechanische Eigenfrequenz. Aus der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles im Quarzkristall

$$v = 5{,}45 \cdot 10^5 \, [\mathrm{cm/sec^{-1}}]$$

und der Länge l [cm] der Quarzplatte erhält man die Grundfrequenz n_0 bei frei schwingenden Plattenenden nach der Formel:

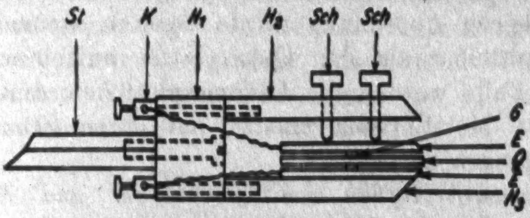
$$n_0 = \frac{5{,}45 \cdot 10^5}{2\,l} \, [\mathrm{sec^{-1}}].$$

Die Anregungselektroden. Die Anregungselektroden wurden entweder unmittelbar auf die Quarzflächen $b \times l$ (Fig. 1) gebracht oder ihnen in bestimmtem Abstande gegenübergestellt. Im ersteren Falle wurden die Platten entweder nach dem Vorschlag von Gabel[1]) chemisch versilbert und darauf zum Schutze der Silberschicht galvanisch verkupfert, oder es wurden Stanniolblättchen auf die Quarzflächen geklebt. Mit dieser Anordnung kann nur die Grundfrequenz der Platten kräftig

1) V. Gabel, a. a. O.

angeregt werden. Wurden Elektroden mit bestimmtem Abstande von der Quarzplatte verwandt, so wurden nach dem Beispiel von E. Giebe und A. Scheibe[1]) zur Anregung der Grundschwingung ein Paar von Metallelektroden von der Größe der Plattenflächen $b \times l$ (Fig. 1) und zur Anregung der Oberschwingungen so viel Paare von Elektroden verwandt, wie die Ordnungszahl der betreffenden Schwingung angab.

Die Quarzhalter. In der Fig. 2 sind die verwandten Quarzhalter gezeichnet. Diese wurden sowohl zum Senden als auch zum



St = Vierkanteisen *K* = Klemme
H_1—H_3 = Hartgummi *E* = Elektrode
G = Glimmerplättchen *Q* = Quarzplatte
Sch = Schraube

Quarzhalter

Fig. 2

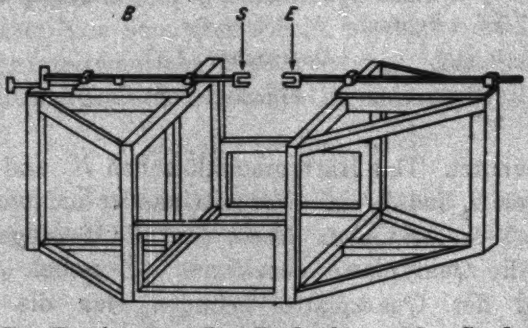
Empfang benutzt. Das Hartgummiklötzchen H_1 und die Hartgummiplatten H_2 und H_3 sind starr miteinander und mit dem Vierkanteisenstab *St* verbunden. Mit *E* sind die Messingelektroden, mit *Q* ist die Quarzplatte bezeichnet. Zwischen den Elektroden und der Quarzplatte befinden sich die Glimmerplättchen *G*. Die Klemmen *K* dienen der Stromzufuhr. Die obere Elektrode *E* wird durch die Schrauben *Sch* parallel den Quarzflächen $b \times l$ justiert. Die Platten H_2 und H_3, sowie die Elektroden *E* sind unter Winkeln von 45° abgeschrägt, um Schallreflexionen an ihnen für das beobachtete Schallfeld unwirksam zu machen. Die beschriebene Anordnung ist bei Verwendung der entsprechenden Anzahl von Elektrodenpaaren und Glimmerplättchen auch für die Oberschwingungen der Platten anwendbar.

1) E. Giebe und A. Scheibe, Ztschr. f. Phys. 33. S. 338. 1925.

Die Glimmerplättchen *G* wurden dorthin gelegt, wo sich nach den unten angegebenen Versuchen mit Chladnischen Klangfiguren die Knotenflächen der betreffenden Plattenschwingung befanden. In ähnlicher Weise ist Dye[1]) mit Korkstückchen verfahren. Der Abstand zwischen Quarzplatte und Elektroden ist durch geeignete Wahl der Dicke der Glimmerplättchen regulierbar und betrug je nachdem etwa 1—9 mm. Durch besondere Versuche, bei denen die Quarzplatten frei auf Schneiden lagen, wurde festgestellt, daß die Glimmerplättchen die Plattenschwingungen nicht störten.

Die gleiche Anordnung wurde benutzt, wenn die Elektroden unmittelbar auf den Quarzplatten aufgebracht waren. In diesem Falle wurden die Glimmerplättchen durch je ein dreikantiges Metallprisma ersetzt, auf deren Schneiden die Metallbelegungen auflagen.

Gemeinsamer Aufbau von Quarzsender und Empfänger. Gemeinsam für den Quarzsender und -empfänger wurde aus starken Eichenbohlen ein Gestell gebaut (225 cm lang,



E = Empfänger *B* = Beobachter *S* = Sender

Einbau der Piezoquarze

Fig. 3

100 cm hoch, 52 cm breit), wie es die Fig. 3 zeigt. Zu Messungen war ein Abstand der Quarze bis 70 cm frei verfügbar. Auf der Sende- und Empfangsseite waren nach dem Beispiel von E. Meyer[2]) unter 45° zur Schallrichtung Filz-

1) D. W. Dye, a. a. O.

2) E. Meyer, E.N.T. 3. S. 290. 1926.

wände angebracht (500 × 500 mm² groß, 13 mm dick). Diese Filzwände verhinderten durch Reflexion und Schallabsorption Störungen des Schallfeldes zwischen den Quarzen infolge von Reflexionen am Gestell. Die Filzwände sind wegen der Übersichtlichkeit in der Fig. 3 nicht eingezeichnet.

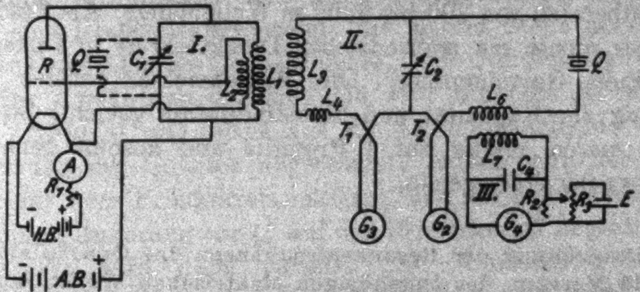
Als Träger der Quarzhalter dienten horizontale Vierkanteisenstäbe mit horizontaler Querschnittsdiagonale, die in ihrer Längsrichtung beweglich waren. Der eine von ihnen konnte mittels einer Mikrometerschraube bewegt werden. Mit Hilfe eines Nonius konnten dabei Entfernungsänderungen der Quarze auf 0,05 mm genau abgelesen werden. Entfernungsänderungen der Quarze durch Verschieben des zweiten Vierkanteisenstabes konnten mit einer Genauigkeit von ± 0,25 mm abgelesen werden.

III. Der Piezoquarz als Schallsender

1. Die Apparatur

Die Fig. 4 zeigt die Anordnung für den Piezoquarz als Schallsender.

Der Röhrensender. Zur Erzeugung der den Piezoquarzen aufgeprägten elektrischen Schwingungen diente der Röhren-



R = Senderöhre	R_1—R_3 = Widerstände	G_2—G_4 = Galvanometer
A = Amperemeter	C_1—C_4 = Kapazitäten	D_2 = Detektor
HB = Heizbatterie	L_1—L_7 = Selbstindukt.	Q = Piezoquarze
AB = Anodenbatterie	T_1—T_2 = Thermoelem.	E = Akkumulator

Piezoquarz als Schallsender

Fig. 4

sender, welcher in der Fig. 4 gezeichnet ist. R ist eine Telefunkensenderöhre Type R.S. 55 I, HB eine Heizbatterie von 12 Volt. Der Widerstand R_1 und das Amperemeter A dienen

zur Regulierung und Beobachtung des Heizstromes. Die Anodenspannung von 440 Volt lieferte eine Akkumulatorenbatterie.

Der Primärkreis *I* bestand aus der variablen Kapazität C_1 (4 Drehkondensatoren, davon zwei zu je 1500 cm maximaler Kapazität zur Grobeinstellung, je einer von 500 bzw. 50 cm zur Feineinstellung der gewünschten Frequenz) und aus einer Selbstinduktion L_1 (auswechselbare Flachspulen von etwa $1 \cdot 10^6$ bis $1{,}7 \cdot 10^7$ cm) mit passenden Rückkopplungsspulen L_2.

Der Sekundärkreis *II* war mit Hilfe der Spule L_3 (Flachspulen von etwa $1 \cdot 10^5$ bis $7 \cdot 10^7$ cm) veränderlich mit dem Röhrensender gekoppelt. Die variable Kapazität C_2 bestand je nach der Wellenlänge aus einem Drehkondensator von 1500 bzw. 500 cm zur Grobeinstellung und einem von 50 cm zur Feineinstellung.

Der Piezoquarz. Der Piezoquarz Q konnte entweder parallel der Kapazität C_1 oder unter Zwischenschaltung des Thermoelementes T_2 mit Galvanometer G_2 zur Messung des von Q aufgenommenen Stromes parallel zur Kapazität C_2 des Sekundärkreises *II* geschaltet werden.

Die Wellenmesser. Die Messung der elektrischen Wellenlänge geschah mit Hilfe zweier Resonanzwellenmesser für den Gesamtbereich von 200 bis 8000 m Wellenlänge. Als Resonanzanzeiger diente ein aperiodischer Detektorkreis in Verbindung mit einem Galvanometer. Die Wellenmesser wurden durch Messung der Kapazität und Selbstinduktion geeicht; ihre Angaben waren relativ auf 1 Promille und absolut genommen auf etwa 0,5 Proz. genau.

2. Feststellung der Resonanzfrequenzen der Quarzplatten und Messung der zugehörigen elektrischen Wellenlänge

Die Feststellung der Resonanzfrequenzen der Grund- und Oberschwingungen der Quarzplatten erfolgte auf zwei voneinander verschiedenen Methoden: erstens durch Chladnische Klangfiguren und durch die zuerst von E. Giebe und A. Scheibe[1]) beobachteten Leuchterscheinungen und zweitens durch die Absorptionsmethode von Cady.[2])

1) E. Giebe u. A. Scheibe, Ztschr. f. Phys. **33**. S. 335. 1925.
2) W. G. Cady, a. a. O.

Methode der Klangfiguren und Leuchterscheinungen. Die Quarzplatte liegt lose zwischen ihren Elektroden, welche in einem Funkenmikrometer anstatt der Kugeln befestigt sind, und ist parallel dem Abstimmungskondensator C_1 des Primärkreises I geschaltet. Der Sekundärkreis II wird nicht benutzt. Die Frequenz des Röhrensenders wird durch Veränderung von C_1 so lange variiert, bis sich Bärlappsamen oder Korkmehl, welche auf die Flächen $b \times l$ bzw. $l \times d$ der Platten (Fig. 1) gebracht werden, zu Chladnischen Klangfiguren ordnet. Bei schärfster Resonanzeinstellung treten bei genügend großer Amplitude auch bei Atmosphärendruck zwischen der Quarzplatte und ihren Elektroden Leuchterscheinungen auf und zwar an den Stellen, an welchen sich auf den Flächen $b \times l$ der Bärlappsamen sammelt, nämlich in den Knotenlinien. An diese Stellen wurden die Glimmerplättchen G (Fig. 2) gebracht.[1]) Das Auftreten der Leuchterscheinungen gab das schärfste Kriterium dieser Methode für die Resonanzeinstellung.

Absorptionsmethode von Cady. Zur Kontrolle der soeben beschriebenen Methode diente die Absorptionsmethode von Cady, welche bekanntlich darauf beruht, daß ein mit dem Piezoquarz gekoppelter und auf ihn abgestimmter Resonanzkreis eine Resonanzkurve zeigt, die an der Stelle der Eigenfrequenz des Quarzes eine schmale, tiefe Einsenkung besitzt.

Zur Ausführung der Methode wird zunächst der Primärkreis I (Fig. 4) wie oben auf die zu untersuchende Eigenschwingung des Quarzes abgestimmt, sodann wird der Piezoquarz aus dem Primärkreis entfernt, und der Sekundärkreis II wird durch Änderung von C_2 auf den Primärkreis I abgestimmt.[2]) Der Quarz wird dann parallel dem Kondensator C_2 des Sekundärkreises II geschaltet, und nunmehr wird durch Varia-

---

1) Bei den Grundschwingungen der Platten zeigte sich eine bemerkenswerte Unsymmetrie in der Ausprägung der Klangfiguren und Leuchterscheinungen. Diese traten an diagonal gegenüberliegenden Vierteln der Quarzflächen $b \times l$ auf. Mit Hilfe episkopischer Projektion kann man den Vorgang der Bildung der Klangfiguren auf den Flächen $d \times l$ einem größeren Kreise demonstrieren.

2) Man erspart auf diese Weise die sonst üblichen mühsamen Einstellungsmethoden, vgl. dazu: A. Scheibe, Jahrb. d. drahtl. Telegr. u. Telef. 28. S. 19. 1926.

tion des Kondensators C_1 des Primärkreises I die Resonanzkurve des Sekundärkreises II mit parallel geschaltetem Piezoquarz mit Hilfe des Thermoelements T_1 und des Galvanometers G_3 aufgenommen. T_1 ist ein hochempfindliches Vakuumthermoelement aus Konstantan und Manganindraht vom Durchmesser 0,015 mm. Der Widerstand des Heizzweiges betrug 23,5 Ohm. G_3 war ein Drehspulspiegelgalvanometer (Empfindlichkeit: $1,5 \times 10^{-8}$ Amp., 1 m Skalenabstand, 1 mm Ausschlag, 435 Ohm).

Die der obenerwähnten tiefsten Einsenkung der Resonanzkurve entsprechende Frequenz wurde mit dem Wellenmesser gemessen. Mit der gleichen Anordnung wurde später bei den akustischen Versuchen die Senderanordnung auf den als Schallsender dienenden Quarz abgestimmt.

Das Stromminimum ist am schärfsten bei der Grundschwingung der Platten ausgeprägt. Die Methode läßt eine Einstellung der Resonanzfrequenz mit einer Genauigkeit von einigen Zehntausendsteln zu. Die Kontrolle der nach der Methode der Klangfiguren und Leuchterscheinungen erzielten Resonanzeinstellung mit Hilfe der Absorptionsmethode ergab, daß mit der erstgenannten Methode eine Einstellung des Röhrensenders mit mindestens 1 Promille Genauigkeit möglich ist.

Die Versuche ergaben weiter, daß nicht nur die Platten gleicher Dimensionen sondern auch alle Platten gleicher Länge ohne Rücksicht auf den Querschnitt innerhalb der angegebenen Genauigkeit in den Frequenzen der Grund- und Oberschwingungen übereinstimmten. Über eine sehr viel schärfere Prüfung dieses Verhaltens auf akustischem Wege wird weiter unten berichtet.

Elektrische Wellenlängenmessungen. Die Tab. 2 gibt eine Zusammenstellung der aus der Plattenlänge l und der Schallgeschwindigkeit im Quarz berechneten und der mit den Resonanzwellenmessern gemessenen Werte der elektrischen Wellenlänge λ_e bei den Resonanzfrequenzen der Quarzplatten. Für die erstere ergibt sich die Formel:

$$\lambda_e = 1,1 \cdot 10^5\, l \text{ [cm]}.$$

Die Tab. 2 zeigt befriedigende Übereinstimmung zwischen den gemessenen und den berechneten Werten von λ_e, und

Tabelle 2

Elektrische Wellenlänge λ_e der Eigenfrequenzen der Quarzplatten

Plattenzeichen	Ordnungszahl	λ_e aus l berechnet	λ_e gemessen
A	1	2750 m	2760 m
l = 25 mm	—	—	1860 „
	—	—	1560 „
	2	1375 „	1380 „
	—	—	1120 „
	3	916 „	925 „
B und C	1	3960 m	3960 m
l = 36 mm	—	—	2650 „
	—	—	2300 „
	2	1980 „	1980 „
	—	—	1630 „
	3	1320 „	1320 „
	—	—	1100 „
	4	990 „	980 „
D, E und F	1	4400 m	4420 m
l = 40 mm	—	—	3050 „
	—	—	2490 „
	2	2200 „	2215 „
	—	—	1920 „
	3	1467 „	1470 „
	—	—	1280 „
	4	1100 „	1115 „
	5	880 „	890 „

weiter zeigt die Tab. 2, daß außer den harmonischen Oberschwingungen noch solche Oberschwingungen festgestellt wurden, deren Frequenzen nicht ganzzahligen Vielfachen der Grundfrequenz entsprechen. Über die akustischen Methoden zum Nachweis dieser Schwingungen wird weiter unten berichtet. Diese Oberschwingungen, für die eine theoretische Erklärung fehlt, wurden schon früher von Cady[1]) bei dem longitudinalen reziproken Piezoeffekt und von Pierce[2]) und Dye[3]) bei dem hier benutzten transversalen reziproken Piezoeffekt gefunden.

3. Messung der akustischen Wellenlänge aus der Rückwirkung stehender Wellen auf den Sendequarz

Meßmethode. Zur Bestimmung der Wellenlängen in Luft, die den Eigenschwingungen der Quarze zugeordnet sind, wurden

1) W. G. Cady, Journ. Opt. Soc. Am. 10. S. 4. 1925.
2) G. W. Pierce, Proc. Am. Ac. Arts. a. Sc. 59. S. 79. 1925.
3) D. W. Dye, a. a. O. S. 458.

zunächst Versuche nach der Methode von Pierce[1]) unternommen, bei der bekanntlich der Piezoquarz zwischen Anode und Gitter einer Glühelektronenröhre geschaltet wird, während das Gitter durch einen hohen Widerstand mit der Kathode verbunden ist. Der Quarz führt Schwingungen von der Frequenz seiner Grundschwingung aus. Die akustische Wellenlänge wird durch die Rückwirkung bestimmt, welche die an einer verschiebbaren Metallplatte reflektierten Wellen auf den Sendequarz ausüben. Diese Rückwirkung, die durch die Änderung des Anodenstroms gemessen wird, ist am stärksten, wenn der Abstand der Metallplatte vom Quarzsender einem ganzzahligen Vielfachen der akustischen Halbwellenlänge $\lambda/2$ entspricht, da dann dem Quarz besonders viel Energie entzogen wird. An diesen Stellen entstehen daher scharfe Minima des Anodenstromes.

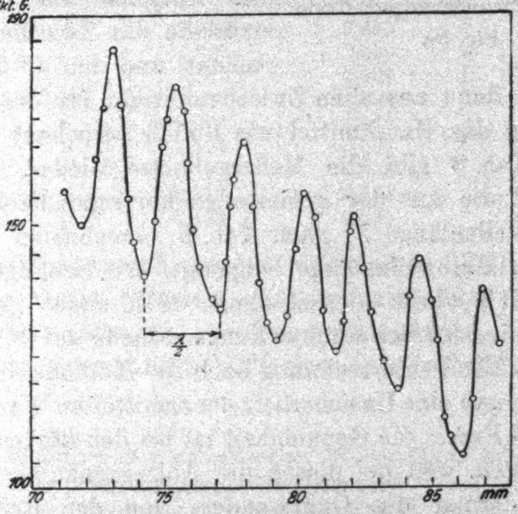
Später wurde, um die Versuchsanordnung zu vereinfachen und um auch Oberschwingungen verwenden zu können, zu folgender Anordnung übergegangen. Der Quarz liegt parallel zum Abstimmungskondensator C_2 des Sekundärkreises *II* (Fig. 4) unter Zwischenschaltung einer Einrichtung, die den vom Quarz aufgenommenen Strom zu messen gestattet. Zunächst wird der Primärkreis *I* nach der Absorptionsmethode von Cady genau auf die Eigenfrequenz der Quarzplatte eingestellt, so daß der Quarz Schwingungen von maximaler Amplitude ausführt. Bringt man jetzt gegenüber der Stirnfläche des Quarzes eine reflektierende Metallplatte an, so wird je nach deren Entfernnng infolge der Rückwirkung der stehenden Wellen die Schwingungsamplitude des Quarzes und damit der von ihm aufgenommene Strom geändert.

Zur Messung der Stromschwankungen war das Thermoelement T_2 zu unempfindlich, es wurde deshalb der in Fig. 4 gezeichnete Detektorkreis *III* verwandt, der mit Hilfe der Spulen L_6 (etwa $1{,}2 \cdot 10^5$ cm) und L_7 (etwa $1{,}7 \cdot 10^7$ cm) mit dem Sekundärkreis *II* gekoppelt war. D_2 ist ein Bleiglanzdetektor, C_4 ein Blockkondensator von 2 Mikrofarad und G_4 ein Drehspulzeigergalvanometer mit einer Empfindlichkeit von $1{,}2 \cdot 10^{-4}$ Volt pro Grad der 200 teiligen Skala. Da bei der

1) G. W. Pierce, a. a. O. **60**. S. 276. 1925.

Verschiebung der Reflektorplatte der Ausschlag des Galvanometers G_4 sich nur um einige Prozent änderte, so wurde mittels einer Potentiometerschaltung (R_2, R_3, E) der Ruhestrom des Galvanometers G_4 nahezu kompensiert, so daß eine erheblich größere Empfindlichkeit des Galvanometers angewandt werden konnte.

Die Reflektorplatte (200×200 mm² groß) wurde in der Anordnung der Fig. 3 an Stelle des Empfängers angebracht; am Sender konnte eine gleichgroße mit rechteckigem Ausschnitt befestigt werden, durch welchen der Quarz mit seiner Stirnfläche hindurchsah. Es wurde stets mit so kleiner Amplitude gearbeitet, daß auch bei verdunkeltem Zimmer keine Leuchterscheinungen wahrnehmbar waren; die Amplitude wurde durch Veränderung der induktiven Kopplung L_2/L_3 (Fig. 4) des Primärkreises I mit dem Sekundärkreis II reguliert. Die Messungen wurden in freier Luft ausgeführt, deren Temperatur auf 0,1° C genau abgelesen werden konnte.

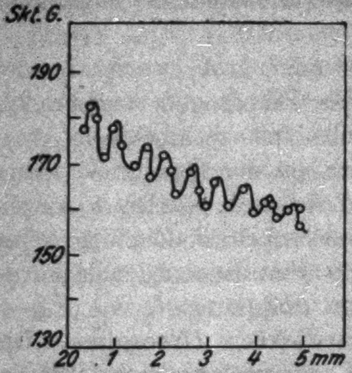


Quarzplatte B; n = 75690 Hertz
Abszissen: Abstände der Reflektorplatte vom Sendequarz
Ordinaten: Galvanometerausschläge
$\frac{\lambda}{2}$ = Halbwellenlänge in Luft

Wellenlängenmessung nach der Rückwirkungsmethode

Fig. 5

Die Fig. 5 gibt einen Ausschnitt aus einer Meßreihe mit den Quarzplatten B bei der Grundschwingung (n = 75690 Hertz) wieder. Als Abszissen sind die Abstände der Reflektorplatte vom Sendequarz, als Ordinaten die Ausschläge des Galvanometers G_4 aufgetragen. In der gleichen Weise gibt die Fig. 5a eine Messung mit der 5. Harmonischen (n = 340600 Hertz) der Quarzplatten D wieder.



Quarzplatte D; n = 340600 Hertz
Wellenlängenmessung
nach der Rückwirkungsmethode
Fig. 5a

Ergebnisse. Aus den Meßkurven, die etwa 15–20 Halbwellenlängen umfaßten, wurden die Halbwellenlängen sowohl aus den Abszissendifferenzen der Maxima als auch der Minima nach der Methode der kleinsten Quadrate in der Weise berechnet, daß zunächst aus der Einzelmeßreihe das Zwischenmittel berechnet und auf 0° C reduziert wurde und dann aus allen Zwischenmitteln für die betreffende Schwingung das Hauptmittel wie üblich berechnet wurde.

Die Tab. 3 gibt die Meßergebnisse wieder. Zum Vergleich sind die aus der gemessenen korrespondierenden elektrischen Wellenlänge λ_e nach Tab. 2 berechneten Werte der akustischen Halbwellenlänge beigefügt. Die Schallgeschwindigkeit in Luft[1]) wurde hierbei gleich 331,6 m/sec gesetzt. Die Meßwerte sind bei der Rückwirkungsmethode auf 0° C reduziert angegeben. Die Fehlerrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate ergab eine Unsicherheit der ermittelten Werte zwischen 0,2 und 1,5 Proz.; die Genauigkeit ist bei den kürzesten Wellen am geringsten, weil bei diesen die Ablesegenauigkeit der Entfernungsänderung des Quarzsenders von der Reflektorplatte (0,05 mm) bereits etwa $^1/_{10}$ der beobachteten Halbwellenlänge beträgt.

Die Tab. 3 zeigt innerhalb der Meßgenauigkeit befriedigende Übereinstimmung zwischen den direkt gemessenen und

1) Geiger-Scheel, Handb. d. Phys. 8. S. 623. 1927.

Tabelle 3

Halbwellenlänge λ/2 in Luft der Quarzschwingungen

Plattenzeichen	Ordnungszahl	λ/2 berechnet mm	λ/2 gemessen mit a) Rückw. Meth. mm	λ/2 gemessen mit b) Staubfiguren mm
A l = 25 mm	1	1,526	1,528	1,55
		1,030	1,035	1,10
		0,863	0,868	0,88 *
	2	0,764	0,759	0,79 *
		0,619	0,620	
	3	0,512	0,513	
B l = 36 mm	1	2,190	2,195	2,24
		1,565	1,573	1,60
		1,272	1,275	1,38
	2	1,098	1,102	1,15
		0,901	0,890	0,90
	3	0,730	0,732	0,76 *
		0,608	0,600	
	4	0,542	0,553	
D, E und F l = 40 mm	1	2,444	2,435	2,50
		1,687	1,690	1,74
		1,377	1,380	1,40
	2	1,225	1,220	1,28
		1,073	1,065	1,09
	3	0,834	0,839	0,85 *
		0,708	0,695	0,70 *
	4	0,617	0,614	0,64 *
	5	0,491	0,490	

den aus der korrespondierenden elektrischen Wellenlänge im voraus berechneten Werten, insbesondere zeigt die Tab. 2 wiederum das Auftreten von Oberschwingungen, deren Frequenzen nicht ganzzahligen Vielfachen der Grundfrequenz entsprechen.

4. Messung der akustischen Wellenlänge mit Kundtschen Staubfiguren

Die Kundtschen Staubfiguren wurden in kleinen Glasröhren erzeugt. Hierbei wurden die von Koenig[1]) und Edelmann[2]) gemachten Erfahrungen benutzt. Mit Piezoquarzplatten lassen sich wegen der großen Intensität und der konstanten

1) R. Koenig, a. a. O.

2) M. Th. Edelmann, a. a. O.

Frequenz der Schwingungen die Messungen leichter ausführen als mit den von den vorgenannten Autoren benutzten Schallquellen.

Der Sendequarz wird zu kräftigen Schwingungen angeregt und an dem offenen Ende des mit Bärlappsamen (in feiner, fadenförmiger Verteilung) versehenen Glasröhrchens vorbei bewegt. Das Glasröhrchen wird von einer Stativklammer in horizontaler Lage zwischen Korkplättchen gehalten. Die verwandten Glasröhrchen waren 20—40 mm lang bei einem inneren Durchmesser von 1,5—6 mm. Je höher die Versuchsfrequenz war, um so dünnwandiger, enger und kürzer mußten die Röhrchen sein, um klare Staubfiguren zu erhalten. Das eine Röhrenende wurde mit Pizëin verschlossen (besser als Kork). Die passenden Röhrenverhältnisse müssen durch Probieren gefunden werden.

Die Fig. 6, Taf. XVIII zeigt bei drei verschiedenen Röhrchen eine photographische Aufnahme von Staubfiguren, welche mit der Quarzplatte D bei $n = 68125$ Hertz erhalten wurden. Das Röhrchen am weitesten links hat sich vor der Aufnahme etwas gedreht, man sieht aber gerade hierbei die feinen Spitzen des an den Knotenstellen liegen gebliebenen Pulvers. Um eine klare, kontrastreiche Aufnahme zu erhalten, wurde hier mehr Pulver verwandt als bei den Versuchen zu Meßzwecken.

In der letzten Spalte der Tab. 3 sind die nach dieser Methode erhaltenen Meßresultate aufgezeichnet. Die akustische Halbwellenlänge $\lambda/2$ wurde aus dem mit Mikroskop und Maßstab ausgemessenen Abstand zweier noch deutlicher Knotenstellen berechnet. Reduktionen der so gefundenen Werte wurden nicht vorgenommen, da der Wert der Schallgeschwindigkeit in Glasröhren[1]), die in wechselnder Weise durch Reibung an den Wänden, Wärmeleitung, Schallintensität und Frequenz beeinflußt wird, nicht genügend bekannt ist. Die kleinste gemessene Wellenlänge ist fast um die Hälfte kleiner als die von Edelmann[2]) erreichte kleinste Halbwellenlänge von 1 mm. Bei Halbwellenlängen unterhalb 0,9 mm war es sehr schwer, die Röhrchen zum Ansprechen zu bringen, die Staubfiguren waren aber dann besonders schön ausgeprägt;

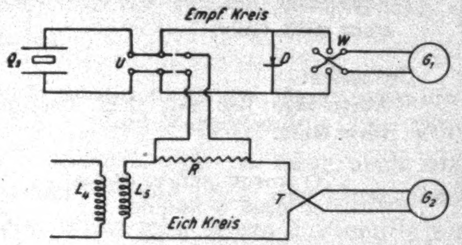
1) Geiger-Scheel, Handb. d. Phys. 8. S. 625ff. 1927.
2) M. Th. Edelmann, a. a. O.

die betreffenden Halbwellen sind in der Tab. 3 mit Sternen versehen. Die Messungen zeigten wiederum das Auftreten von unharmonischen Oberschwingungen.

IV. Der Piezoquarz als Schallempfänger

1. Die Empfangseinrichtung und ihre Prüfung

Wie in der Einleitung ausgeführt wurde, beruht die Wirkungsweise des Piezoquarzes als Schallempfänger darauf, daß durch die auftreffenden Schallwellen von der Frequenz einer Eigenschwingung der Quarzplatte diese zu Eigenschwingungen angeregt wird und daß ihre Flächen $b \times l$ infolge des direkten Piezoeffekts Ladungen zeigen, die mittels eines Detektors nachgewiesen werden können. Um quantitative Schlüsse



G_1—G_2 = Galvanometer
D = Detektor
Q_2 = Empfangsquarz
R = Widerstand
W = Wippe
L_4—L_5 = Selbstindukt.
U = Umschalter
T = Thermoelement

Der Piezoquarz als Schallempfänger

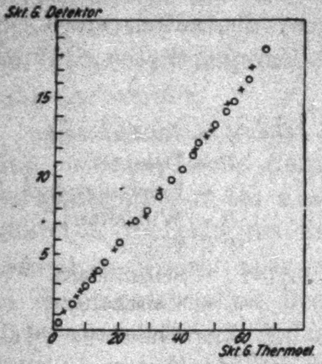
Fig. 7

ziehen zu können, muß der Detektor geeicht werden. Die Versuchseinrichtung, welche in der Fig. 7 gezeichnet ist, zerfällt daher in einen Empfangskreis und einen Eichkreis.

Der Empfangskreis. Die Empfangsschaltung bestand aus dem Empfangsquarz Q_2 mit seinen Elektroden, dem Bleiglanzdetektor D und dem Drehspulspiegelgalvanometer G_1 (Empfindlichkeit: $1{,}5 \cdot 10^{-8}$ Amp., 1 m Skalenabstand, 1 mm Ausschl., 435 Ohm). Mit der Quecksilberwippe W wird der Gleichstrom in G_1 kommutiert. Mittels des Umschalters U konnte die Empfangsschaltung: Detektor D und Galvanometer G_1 parallel zum Widerstand R des Eichkreises geschaltet werden. Die Empfangsapparatur wurde durch Gehäuse aus Weißblech, die Galvanometerzuleitungen wurden durch Panzerschlauch abgeschirmt.

Der Eichkreis. Die Spule L_4 ($7 \cdot 10^4$ cm) gehört zum Sekundärkreis *II* des Röhrensenders (Fig. 4) und ist mit der Spule L_5 ($1{,}2 \cdot 10^5$ cm) in stetig veränderlicher Weise gekoppelt. *R* ist ein induktionsfreier Widerstand von 5,3 Ohm, *T* ein hochempfindliches Vakuumthermokreuz und G_2 ein Drehspulzeigergalvanometer (Empfindlichkeit: $3{,}81 \cdot 10^{-8}$ Amp. pro Grad der 90teiligen Skala).

Eichung der Empfangsschaltung. Mittels des Umschalters *U* in Fig. 4 wurde der Quarzresonator Q_2 abgeschaltet und der Detektor *D* mit dem Galvanometer G_1 an die Enden des Widerstands *R* des Eichkreises gelegt. Durch Veränderung



Abszissen:
Ausschläge des mit dem Thermoelement verb. Galv.

Ordinaten:
Ausschläge des mit dem Detektor verb. Galv.

○ zuerst aufgenommen
× nach 8 Stunden

Detektoreichung mit Thermoelement
Fig. 8

der Kopplung der Spulen L_4 und L_5 wurde der Strom im Eichkreise variiert, so daß der Detektorstrom mit dem durch das Thermoelement fließenden Strom verglichen werden konnte.

Das Ergebnis einer solchen Eichmessung zeigt die Fig. 8. Die Abhängigkeit der Galvanometerausschläge voneinander ist eine lineare, die gute Übereinstimmung der beiden Reihen von Eichpunkten zeigt die Konstanz des Detektors. Häufige Wiederholung derartiger Eichmessungen zeigte, daß bei allen verwandten Wechselstromfrequenzen bei den benutzten kleinen Stromstärken stets Proportionalität zwischen den Galvanometerausschlägen bestand.

Prüfung der rein akustischen Erregung. Die Empfangsschaltung mußte daraufhin geprüft werden, daß die vom Detektor *D* und Galvanometer G_1 angezeigten Spannungen auch

wirklich nur durch die auftreffenden Schallwellen vermöge des Piezoeffektes und nicht etwa durch direkte elektromagnetische Einwirkung des Senders auf die Empfangsapparatur hervorgerufen wurden. Die Prüfung erfolgte in der Weise, daß ein Stück Karton zwischen Sende- und Empfangsquarz gebracht wurde. War die Apparatur in Ordnung, so durfte das Empfangsgalvanometer keinen Ausschlag zeigen. Es zeigte sich, daß dieses zunächst nicht der Fall war, daß vielmehr bei der Prüfung beträchtliche Restausschläge des Galvanometers übrig blieben. Durch die obenerwähnte Abschirmung (Gehäuse aus Weißblech und Panzerschlauch für die Zuleitungen) konnten diese Restausschläge bis auf einen praktisch unmerklichen Rest ($^1/_2$ Skt. bei einem Ausschlag ohne Schirm von 250 Skt.) beseitigt werden. In vielen Fällen genügte dieser Grad der Abschirmung noch nicht (Näheres darüber vgl. Abschnitt V_1 unten).

2. Abstimmung des Empfangsquarzes auf den Sendequarz und Vergleichung ihrer Eigenschwingungen

Methode. Es ist zwar oben auf elektrischem Wege festgestellt worden, daß die Eigenschwingungen zweier gleicher Quarze auf mindestens 1 Promille einander gleich waren; bei der geringen Dämpfung der Quarzschwingungen fragt sich aber, ob diese Gleichheit so genau ist, daß zwei zusammengehörige Quarzplatten ohne weiteres auf Resonanz abgestimmt sind.

Um diese Frage zu untersuchen, wurden die Eigenschwingungen der Quarze systematisch variiert. Dazu diente die in der Einleitung erwähnte Abhängigkeit der Frequenz der Quarzschwingungen von dem Abstande zwischen den Elektroden und der Quarzplatte. Die Frequenzänderung durch Änderung dieses Abstandes, welche zuerst von Cady[1]) experimentell festgestellt wurde, folgt nach Dye[2]) daraus, daß man den schwingenden Quarz ersetzen kann durch eine Serienkombination von einer Kapazität, einer Selbstinduktion und einem Ohmschen Widerstand, die Luftzwischenräume zwischen der Quarzplatte und ihren Elektroden wirken wie ein kleiner Kondensator, der dieser Kombination in Serie zugeschaltet ist.

1) W. G. Cady, Journ. Opt. Soc. Am. 10. S. 4. 1925.
2) D. W. Dye, a. a. O. S. 402.

Durch Variation der Elektrodenabstände wird diese Zusatzkapazität und damit die Eigenfrequenz des Ersatzkreises geändert.

Zur Ausführung der Abstimmungsversuche standen zwei einander gleiche Plattenkondensatoren zur Verfügung, deren Platten sehr genau parallel justiert werden konnten; die Abstände der Platten, welche aus 3 mm starken, sauber abgeschliffenen, rechteckigen Messingblechen von der Größe der Flächen $b \times l$ (vgl. Fig. 1) der verwandten Quarzplatten bestanden, konnten mittels eines Nonius auf 0,1 mm genau abgelesen werden. Die Quarzplatten (Sender und Empfänger) wurden so auf die eine der horizontal gestellten Kondensatorplatten gelegt, daß sich ihre Stirnflächen in konstantem Abstande, parallel und in gleicher Höhe befanden; bei dem Quarzsender wurde ein bestimmter Luftzwischenraum durch Entfernung der zweiten Elektrode vom Quarz eingestellt, der Luftzwischenraum auf der Empfangsseite wurde stetig variiert, und zu jedem eingestellten Luftzwischenraum wurde der zugehörige Ausschlag des Empfangsgalvanometers abgelesen.

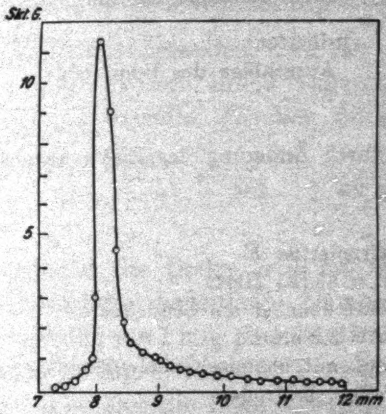
Bei den Abstimmungsversuchen wurde mit Luftzwischenräumen gearbeitet, welche größer waren als 1,5 mm, da bei kleineren Abständen die einfache Theorie und die aus dieser folgenden unten angegebenen Formel zur Berechnung der Frequenzänderung nicht mehr gelten.[1])

Befanden sich die Metallbelegungen unmittelbar auf den Quarzflächen, so konnte die Frequenz des schwingenden Quarzes durch einen kleinen, dem Quarz in Serie zugeschalteten Kondensator veränderlicher Kapazität variiert werden. Bei den Abstimmungsversuchen wurde in diesem Falle so vorgegangen, daß der eine Quarz in Symmetriestellung zu seinen Metallelektroden mit bestimmtem Luftzwischenraum gebracht wurde, während dem anderen Quarz, bei welchem sich die Metallbelegungen unmittelbar auf den Quarzflächen befanden, einer der erwähnten kleinen Plattenkondensatoren in Serie zugeschaltet wurde. Bei diesen Versuchen mußte der Serienkondensator am Empfänger ebenfalls durch Weißblechgehäuse gegen direkte elektromagnetische Kopplung mit dem Röhrensender abgeschirmt

1) D. W. Dye, a. a. O. S. 425.

werden, und seine Zuleitungen mußten so geführt werden, daß ihre Kapazitäten den gesuchten Effekt nicht überdeckten.

Eine Abstimmung des Quarzsenders in der besprochenen Weise auf den Quarzempfänger, dessen Elektrodenabstände dabei konstant gehalten werden, empfiehlt sich nicht; denn bei Variation des Elektrodenabstandes bzw. der Kapazität des Zusatzkondensators wird der Sendequarz gegenüber dem Primär- und Sekundärkreis des Röhrensenders (Fig. 4) verstimmt, und die Verhältnisse werden kompliziert und unübersichtlich. Es wurde deshalb nur die Frequenz des Quarzempfängers variiert, während alles übrige konstant gehalten wurde.



Quarzplatten F
$n = 68125$ Hertz
Elektrodenabst. am Sendequarz
$a = 8$ mm
Metallelektr. bei Sender und Empf.
Entf. der Quarze ca. 140 mm

Abszissen:
Elektrodenabst. am Empf.

Ordinaten:
Ausschl. des Empf.-Galv.

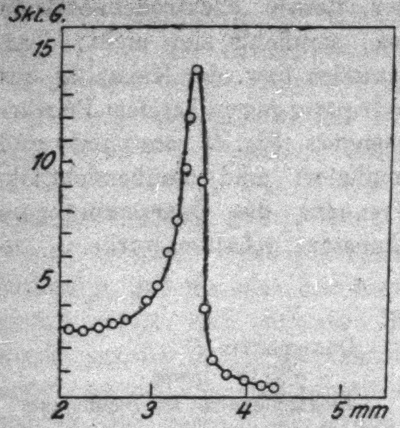
Abstimmung des Quarzempf. durch Änderung des Elektrodenabstandes

Fig. 9

Ergebnisse. Bei Änderung des Elektrodenabstandes wurde in dieser Weise die Fig. 9 mit den Quarzplatten F ($n = 68125$ Hertz) erhalten. Als Abszissen sind die Elektrodenabstände auf der Empfangsseite, als Ordinaten die Ausschläge des Empfangsgalvanometers G_1 (Fig. 7) aufgetragen. Der konstante Elektrodenabstand auf der Sendeseite betrug 8 mm. Die Fig. 9 zeigt, daß die Resonanz sehr angenähert bei gleichen Elektrodenabständen eintritt, wenn die beiderseitigen Elektroden von gleicher Größe sind, wie es hier der Fall war.

Die Fig. 9a gibt zum Vergleich eine in derselben Weise mit den Quarzplatten E ($n = 68125$ Hertz) aufgenommene Kurve bei kleineren Elektrodenabständen wieder (3,5 mm auf der

Sendeseite). Auch hier zeigt sich wieder die gute Übereinstimmung zwischen den Elektrodenabständen auf der Sende- und Empfangsseite.



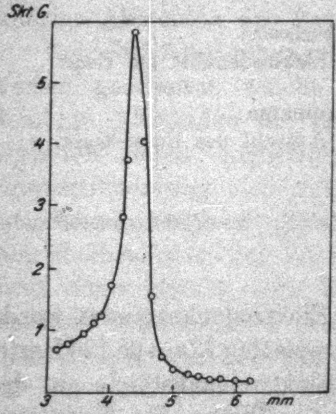
Quarzplatten *E*
n = 68125 Hertz
Elektrodenabst. am Sendequarz
a = 3,5 mm
Entfernung der Quarze: ca. 125 mm

Abszissen:
Elektrodenabst. am Empf.

Ordinaten:
Ausschläge des Empf.-Galv.

Abstimmung des Quarzempfängers durch Änderung des Elektrodenabst.

Fig. 9a



Quarzplatten *E*
n = 68125 Hertz
Elektrodenabst. am Sendequarz
a = 3,5 mm
Empf. mit chemisch niedergeschlagenen Silberelektroden.
Entf. der Quarze ca. 120 mm

Abszissen:
Plattenabst. des Serienkond. am Empfänger

Ordinaten:
Ausschl. des Empf.-Galv.

Abstimmung des Quarzempf. durch einen kleinen Serienkondensator

Fig. 9b

Die Fig. 9b wurde bei Verwendung von Metallelektroden konstanten Abstandes auf der Sendeseite und fest dem Quarz anliegenden Elektroden beim Empfänger erhalten. Abszissen sind hier die Plattenabstände des mit dem Quarzempfänger in Serie geschalteten Plattenkondensators (Plattengröße 3×3 cm^2). Als Ordinaten sind die zugehörigen Ausschläge des Empfangs-

galvanometers aufgetragen. Der konstante Elektrodenabstand beim Sendequarz betrug 3,5 mm. Verwandt wurden wie bei Fig. 9a die Quarzplatten *E*. Die Fläche, welche bei diesen Quarzen die Zusatzkapazität bestimmt, ist 18 × 40 mm² groß. Der Eintritt der Resonanz bei einem Plattenabstand von etwa 4,5 mm auf der Empfangsseite steht damit in guter Übereinstimmung.

Vergleichnng der Eigenschwingungen. Aus den Resonanzkurven der Figg. 9, 9a und 9b kann man den Unterschied zwischen den Eigenschwingungen des Sende- und Empfangsquarzes zahlenmäßig ableiten. Nach Dye[1]) ist nämlich die relative Frequenzänderung $\frac{\Delta n}{n}$, die durch Änderung des totalen Elektrodenabstandes, d. h. der Summe der Abstände der Elektroden von den ihnen zugewandten Quarzflächen, von a auf $a + \Delta a$ entsteht, gegeben durch:

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{d}{300} \cdot \frac{\Delta a}{\left[\left(a + \frac{d}{\varepsilon}\right)^2 + \Delta a\left(a + \frac{d}{\varepsilon}\right)\right]},$$

worin d die Dicke, $\varepsilon = 4{,}3$ die Dielektrizitätskonstante der Quarzplatte bedeutet. Demnach entspricht einer Abstandsänderung um 1 mm eine relative Frequenzänderung von 0,28 Promille in Fig. 9, von 0,65 Promille in Fig. 9a und 9b. Da in den Figuren sich die Lage des Resonanzmaximums auf etwa 0,1 mm genau bestimmen läßt, konnten auf diese Weise bei den angegebenen Versuchen die Eigenschwingungen der Quarzplatten auf 0,03 Promille bzw. 0,07 Promille genau verglichen werden. Das Ergebnis des Vergleichs ist im vorliegenden Falle das, daß die Eigenschwingungen von Platten gleicher Länge und gleichen Querschnitts auf mindestens 0,1 Promille miteinander übereinstimmen.

In der gleichen Weise wie Platten gleicher Dimensionen wurden auch Platten gleicher Länge aber verschiedenen Querschnittes miteinander verglichen. Auf elektrischem Wege (vgl. oben) war festgestellt, daß z. B. die Frequenzen der Platten *E* und *F* auf mindestens 1 Promille übereinstimmten; die ungleich schärfere akustische Methode der Frequenzvergleichung durch

1) D. W. Dye, a. a. O. S. 425.

Abstimmung einer als Sender geschalteten Platte F auf eine als Empfänger geschaltete Platte E (und umgekehrt) vermittels Änderung des Elektrodenabstandes ergab eine Genauigkeit der Übeinstimmung der Grundfrequenz der Platten von 0,5 Promille. Die Übereinstimmung ist nicht so gut wie die bei den Platten gleicher Dimensionen; der Grund dafür ist, daß die Platten gleicher Dimensionen so aus derselben Quarzplatte herausgeschnitten waren, daß ihre Länge l, welche die Frequenz bestimmt, genau gleich war, während sich die Gleichheit der Länge bei den aus verschiedenen Kristallplatten geschnittenen Platten E und F mechanisch nur auf etwa $\pm$ 0,1 mm treiben ließ.

Diese zuletzt angeführten Versuche sind deshalb besonders wichtig, weil sie zeigen, daß man die Frequenz von Quarzplatten mittels Änderung des Elektrodenabstandes fein regulieren kann, wenn die Platte mechanisch durch Abschleifen auf etwa 1 Promille der Frequenz genau hergestellt ist. Durch Regulierung des Elektrodenabstandes können Platten verschiedenen Querschnittes also als Sender und Empfänger bei vollkommener Resonanz verwandt werden.

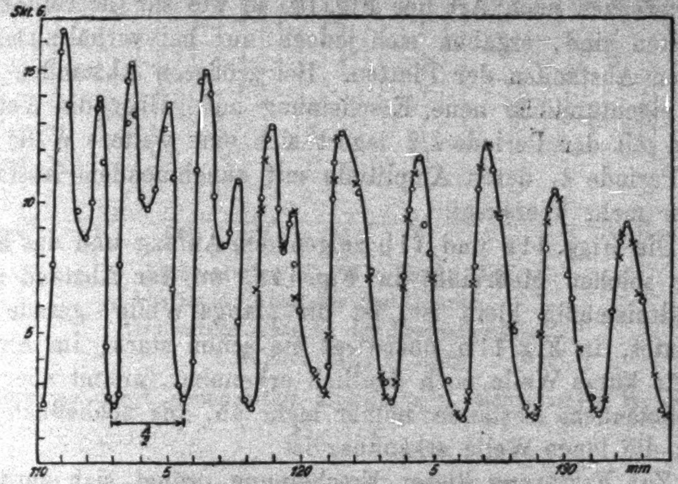
V. Anwendung des Resonatorquarzes zur Untersuchung von Schallfeldern und von Quarzschallsendern

1. Messung der akustischen Wellenlänge mit dem Quarzresonator

Methode I. Nach der im Abschnitt III 3. oben beschriebenen Methode wurde die akustische Wellenlänge der Quarzschwingungen durch die Rückwirkung bestimmt, welche die an einer verschiebbaren Metallplatte reflektierten Wellen auf den Sendequarz ausüben. Hierbei kann man, anstatt die Rückwirkung auf den Sendequarz zu beobachten, auch die Schallamplitude an der reflektierenden Wand messen. Dieses wurde in der Weise ausgeführt, daß in der reflektierenden Metallplatte ein rechteckiger Ausschnitt angebracht wurde, durch den der Empfangsquarz so hindurchschaute, daß seine Stirnfläche in der dem Sender zugekehrten Plattenebene lag. Gemessen wird der Ausschlag des Empfangsgalvanometers in Abhängigkeit von der Entfernung der beiden Quarze voneinander.

Die Fig. 10 gibt einen Ausschnitt aus einer auf diese Weise erhaltenen Messung mit den Quarzplatten E (n = 68125 Hertz) wieder. Als Abszissen sind die Abstände der Quarze, als

Ordinaten die zugehörigen Ausschläge des Empfangsgalvanometers aufgetragen. Die Kurve zeigt ausgesprochene Minima im Abstande der akustischen Halbwellenlänge $\lambda/2$; außer diesen treten weitere, weniger ausgeprägte Interferenzminima auf, welche von der ersten Harmonischen (doppelte Grundfrequenz) herrühren. Das schnelle Verschwinden der letztgenannten Minima erklärt sich aus der größeren Absorption des Schallmediums für die Oberschwingung. Oberschwingungen der



Quarzplatten E; $n = 68125$ Hertz
Abszissen: Abstand der Quarze
Ordinaten: Ausschl. des Empf.-Galv.
$\frac{\lambda}{2}$ = Halbwellenlänge in Luft
○ Hauptmessung
× Kontrollmessung 2 Stunden später

Messung der akustischen Wellenlänge mit dem Quarzresonator
Fig. 10

Quarzplatten, deren Frequenz einem geradzahligen Vielfachen der Grundfrequenz entspricht, können nach der Theorie[1]) nicht mit einem einzigen Elektrodenpaar, wie es hier verwandt wurde, angeregt werden; vermutlich genügte aber schon eine geringe Unsymmetrie der Anordnung, wie sie z. B. schon durch nicht

1) M. v. Laue, Ztschr. f. Phys. 34. S. 347. 1925.

genaues Parallelstehen der Elektroden erreicht wird, um die Anregungsbedingungen zu schaffen.

Die Ergebnisse der Messungen der akustischen Wellenlänge nach dieser Methode decken sich mit denen der Rückwirkungsmethode (Tab. 3). Auch hier wurden wieder solche Oberschwingungen der Platten gefunden, deren Frequenzen nicht ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz sind.

Über eine Interferenzerscheinung und weitere Meßmethode. Interferenzen nach Art der Fig. 10, so wie sie theoretisch zu erwarten sind, ergaben sich jedoch nur bei verhältnismäßig kleinen Abständen der Platten. Bei größeren Abständen tritt eine eigentümliche neue Erscheinung auf. Über die Wellenkurve mit der Periode $\lambda/2$ lagert sich eine weitere Welle mit der Periode λ, deren Amplitude mit zunehmendem Abstande immer mehr überwiegt.

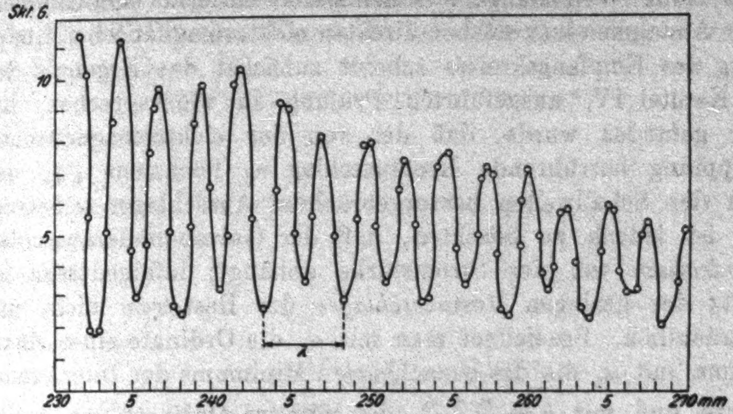
Die Figg. 11a und 11b zeigen den Anfang und das Ende einer solchen Meßreihe; in Fig. 11a, wo der Abstand noch verhältnismäßig klein ist, ist die „lange Welle" gerade angedeutet, in Fig. 11b überwiegt sie schon stark; im Anfang ist die kurze Welle noch deutlich erkennbar, nimmt aber mit zunehmendem Abstande immer mehr ab, bis schließlich nur noch die lange Welle erkennbar ist.

Zur Erklärung dieser Erscheinung drängt sich zunächst die Vermutung auf, daß im Quarzsender neben der durch Resonanz angeregten Hauptschwingung noch eine „Unterschwingung" von halber Frequenz vorhanden ist, die in der beschriebenen Versuchsanordnung stehende Wellen von doppelter Länge erzeugt. Dieser Annahme widerspricht die Beobachtung, daß durch Maßnahmen, welche die Reflexion verschlechtern, etwa Entfernung der reflektierenden Platten oder Schiefstellen des Resonators, die „richtige" Welle zwar stark geschwächt, die „lange Welle" aber in keiner Weise beeinflußt wird.

Trotz dieser Versuchsergebnisse, welche der Annahme einer „Unterschwingung" widersprechen, wurde eine Reihe von Versuchen angestellt, auf die hier nicht näher eingegangen werden kann, um die hypothetische Schwingung halber Frequenz direkt nachzuweisen; jedoch mit durchaus negativem Erfolg, so daß diese Annahme als widerlegt anzusehen ist.

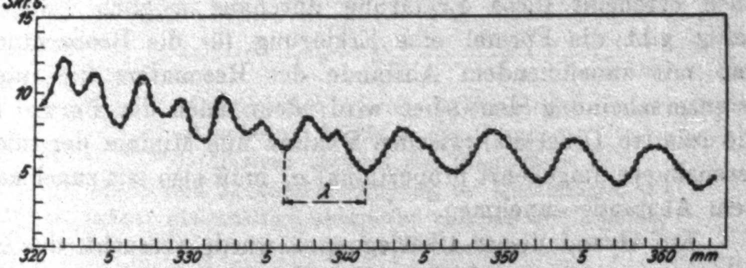
Eine andere Erklärungsmöglichkeit ergibt sich, wenn man

annimmt, daß im Stromkreise des Empfangsquarzes vom Sendekreis aus auf direktem Wege ein Strom induziert wird. Dieser Strom würde sich dem Piezostrom überlagern; da der erstere



Quarzplatten *E*; $n = 68125$ Hertz
Abszissen: Abstände der Quarze
Ordinaten: Ausschl. der Empfangsgalv.
λ Wellenlänge in Luft

Interferenzen durch gleichzeitige akustische u. elektromagn. Kopplung
Fig. 11a



Quarzplatten *E*; $n = 68125$ Hertz
λ Wellenlänge in Luft

Übergang von der Doppelwelligkeit zur Einwelligkeit
Fig. 11b

bei der großen elektrischen Wellenlänge praktisch konstante Phase besitzt, während die Phase des Piezostromes sich proportional mit der Entfernung vom Sendequarz derart ändert, daß einer Verschiebung um λ eine Phasenänderung um 2π

entspricht, müssen Interferenzen entstehen, deren Maxima Phasengleichheit zwischen Piezostrom und induziertem Strom anzeigen, so daß die Maxima der Interferenzkurven um je eine volle Wellenlänge λ voneinander entfernt sein müssen. Der Annahme einer solchen direkten elektromagnetischen Kopplung des Empfangskreises scheint zunächst das Ergebnis der in Kapitel IV_1 ausgeführten Prüfung zu widersprechen, bei der gefunden wurde, daß der von der elektromagnetischen Kopplung herrührende Restausschlag α_0 höchstens $\frac{1}{500}$ des von den Schallwellen hervorgebrachten Ausschlages α betrug. Es ist jedoch zu beachten, daß der Galvanometerausschlag *quadratisch* von der Stromstärke abhängt; infolgedessen ist trotz des geringen Rest*ausschlages* der Rest*strom* nicht unbeträchtlich. Bezeichnet man mit α_1 die Ordinate eines Maximums, mit α_2 die des benachbarten Minimums der Interferenzkurve und mit $\bar{\alpha} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$ die mittlere Ordinate, so ergibt eine einfache Rechnung die Näherungsformel

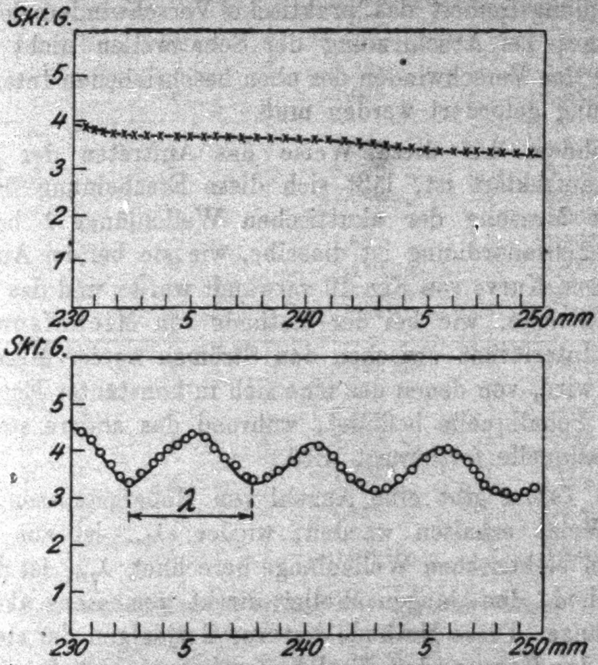
$$\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\bar{\alpha}} = 4 \cdot \sqrt{\frac{\alpha_0}{\alpha}},$$

was für das erwähnte Zahlenverhältnis $\frac{\alpha_0}{\alpha} = 500$ eine Ordinatendifferenz der Interferenzkurve von 18 Proz. ergibt. Danach erscheint diese Erklärung durchaus möglich. Gleichzeitig gibt die Formel eine Erklärung für die Beobachtung, daß mit zunehmendem Abstande des Resonators die Interferenzerscheinung deutlicher wird; denn nach der Formel ist die relative Differenz zwischen Maxima und Minima der Interferenzkurve umgekehrt proportional α, muß also mit zunehmendem Abstande zunehmen.

Auf Grund dieser Überlegungen wurde versucht, die Abschirmung noch sorgfältiger als bisher auszuführen, indem nicht nur der Detektor und die Galvanometerzuleitung, sondern auch der Empfangsquarz selber in ein Metallgehäuse eingeschlossen wurde, aus dem nur die Stirnfläche des Quarzes $b \times l$ heraussah. Wenn in dieser Weise sorgfältigst darauf geachtet wurde, daß auch nicht der kleinste Teil des Empfangskreises unabgeschirmt war, gelang es tatsächlich, die „lange Welle“ vollständig zum Verschwinden zu bringen, und sie anderseits nach Belieben wieder hervorzurufen, indem z. B.

ein Stück der Galvanometerzuleitung in Form einer kleinen Schleife aus dem Panzerschlauch herausgezogen wurde.

Ein Beispiel eines solchen Versuches, bei dem Sender und Empfänger ohne reflektierende Platten benutzt wurden, gibt die Fig. 12. Die obere Kurve, die bei vollkommen abgeschirmtem



Quarzplatten E; $n = 68125$ Hertz
Abszissen: Abstände der Quarze
Ordinaten: Ausschl. des Empf.-Galv.
oben: rein akustische Erregung des Quarzempfänger
unten: gleichzeitige akustische und elektr. Kopplung
λ = akustische Wellenlänge
Entkopplung der Empfangseinrichtung
Fig. 12

Empfänger aufgenommen wurde, zeigt keinerlei Wellen mehr, während die untere, mit den deutlich hervortretenden Wellen dadurch erhalten wurde, daß in die Zuleitung zum Galvanometer eine nicht abgeschirmte Schleife von etwa 110 cm² Windungsfläche eingefügt wurde.

Damit ist bewiesen, daß die Ursache der „langen Welle" tatsächlich die noch vorhandene geringe elektromagnetische

Kopplung zwischen Sender und Empfänger war.[1]) Dieses Ergebnis ist von großer praktischer Bedeutung überall da, wo man den Piezoquarz als Schallempfänger zu quantitativen Messungen benutzt; es zeigt, daß man mit äußerster Sorgfalt jede derartige Kopplung beseitigen muß und daß als Kriterium für Kopplungsfreiheit das praktische Verschwinden des Restausschlages bei Abschirmung der Schallwellen nicht genügt, vielmehr das Verschwinden der oben beschriebenen Interferenzerscheinung gefordert werden muß.

Nachdem auf diese Weise das Auftreten der „langen Welle" aufgeklärt ist, läßt sich diese Erscheinung ihrerseits zu einer Messung der akustischen Wellenlänge λ benutzen. Die Versuchsanordnung ist dieselbe, wie sie bei der Aufnahme der unteren Kurve von Fig. 12 verwandt wurde, und das Prinzip ist das gleiche, wie bei der Methode von Michelson[2]), bei der die Interferenz zwischen den Strömen zweier Mikrophone benutzt wird, von denen das eine sich in konstanter Entfernung von der Schallquelle befindet, während das andere stetig von der Schallquelle fortbewegt wird.

Die Tab. 4 gibt eine Anzahl von Meßergebnissen, die in dieser Weise erhalten wurden, wieder; $\lambda_{\text{ber.}}$ ist aus der gemessenen elektrischen Wellenlänge berechnet, $\lambda_{\text{gem.}}$ ist die nach der Methode der „langen Welle" direkt gemessene akustische Wellenlänge. Diese Methode hat vor derjenigen der stehenden Wellen den Vorzug, daß die Interferenzen innerhalb eines fast beliebig großen Abstandsbereiches der Quarze auftreten, und infolgedessen eine sehr viel größere Anzahl von Perioden zur Messung benutzt werden kann als bei der Methode der stehenden Wellen, die auf verhältnismäßig kurze Abstände beschränkt ist. Die Methode der „langen Welle" gibt infolgedessen wesentlich genauere Ergebnisse.

---

1) In einer inzwischen veröffentlichten Arbeit von R. C. Hitchcock (Proc. Rad. Eng. 15. S. 902. 1927) findet der Verfasser ebenfalls Wellen von doppelter Länge und versucht, sie durch eine infolge der großen Schwingungsamplitude vergrößerten Schallgeschwindigkeit zu erklären. Ob diese Erscheinung mit der in der vorliegenden Arbeit beobachteten zusammenhängt, läßt sich auf Grund der kurzen Angaben von Hitchcock nicht beurteilen.

2) F. Kohlrausch, Lehrb. d. prakt. Phys. § 72. IIIB. S. 231. 1927.

Tabelle 4

Wellenlänge λ der Quarzschwingungen in Luft

Plattenzeichen	Ordnungszahl	λ berechnet	λ gemessen
A	1	3,052 mm	3,051 mm
l = 25 mm		2,060 „	2,065 „
		1,726 „	1,729 „
	2	1,526 „	1,520 „
		1,288 „	1,240 „
	3	1,024 „	1,025 „
B	1	4,380 mm	4,387 mm
l = 36 mm		3,130 „	3,138 „
		2,544 „	2,550 „
	2	2,196 „	2,200 „
		1,802 „	1,800 „
	3	1,460 „	1,463 „
		1,216 „	1,212 „
	4	1,084 „	1,102 „
D, E und F	1	4,888 mm	4,870 mm
l = 40 mm		3,374 „	3,380 „
		2,754 „	2,762 „
	2	2,450 „	2,445 „
		2,144 „	2,133 „
	3	1,668 „	1,679 „
		1,416 „	1,350 „
	4	1,324 „	1,230 „
	5	0,982 „	0,981 „

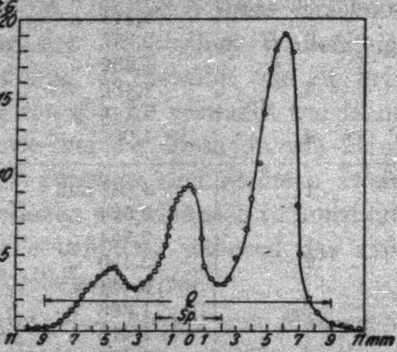
2. Amplitudenverteilung auf der Stirnfläche des Quarzschallsenders

Die Amplitudenverteilung. Die Versuchsanordnung ist folgende. Genau vor der Mitte der Stirnfläche des Empfangsquarzes und in konstantem Abstande von dieser steht ein schmaler, rechteckiger Spalt, der sich in einer Metallplatte befindet. Die Stirnfläche des Sendequarzes wird mittels eines mechanischen Triebes stetig und meßbar an diesem Spalt vorbei bewegt. Der Ausschlag des mit dem Empfangsquarz verbundenen Galvanometers gibt ein Maß für die Amplitude desjenigen Teiles der Stirnfläche des Sendequarzes, welcher sich gerade vor dem Spalt befindet.

Die Fig. 13 zeigt eine Aufnahme mit den Quarzplatten *E* bei ihrer Grundschwingung (n = 68125 Hertz). Als Ordinaten sind die Ausschläge des mit dem Empfangsquarz verbundenen Galvanometers, als Abszissen die Stellungen der Stirnfläche des Sendequarzes zur Spaltmitte aufgetragen. In der Stellung 0

befindet sich die Mitte der Stirnfläche des Sendequarzes genau vor der Spaltmitte, in den beiderseits symmetrisch dazu gelegenen Stellungen 9 befindet sich je eine der Kanten d (Fig. 1) der Stirnfläche $b \times d$ des Sendequarzes vor der Spaltmitte. Die Quarzbreite $Q = 18$ mm und die Spaltbreite $Sp = 4$ mm sind in der Figur eingezeichnet.

Die Fig. 13 zeigt, daß bei rechteckiger Stirnfläche des Quarzschallsenders die Verteilung der Amplitude auf derselben nicht gleichmäßig ist, daß vielmehr 3 Maxima der Amplitude auftreten, von denen das eine etwa in der Mitte der Stirnfläche



Quarzplatten E; $n = 68125$ Hertz
Q = Quarzbreite = 18 mm
Sp = Spaltbreite = 4 mm
Abszissen: Stellungen der Stirnfläche zur Spaltmitte
Ordinaten: Ausschl. des Empf.-Galv.

Amplitudenverteilung bei rechteckiger Stirnfläche des Piezoquarzes

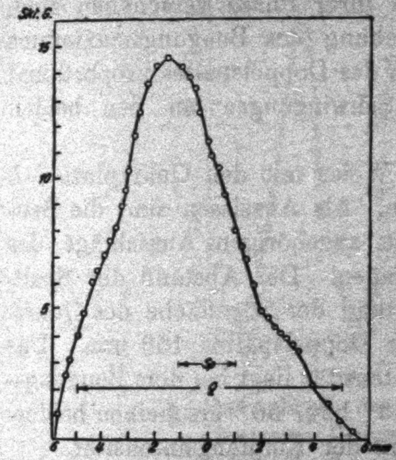
Fig. 13

liegt, während die beiden anderen auf ungefähr $^1/_4$ bzw. $^3/_4$ der Breite b der Stirnfläche des Quarzsenders liegen und in ihrer Höhe stark verschoben sind. Diese unsymmetrische Verteilung der Amplitude zeigte sich bei allen Quarzplatten mit rechteckiger Stirnfläche. Das Hauptmaximum der Amplitude liegt auf derselben Seite der Stirnfläche, auf der auch die Leuchterscheinungen auftreten (vgl. Anm. S. 597). Dieser Intensitätsverteilung entsprechen auch die von Meissner[1]) beobachteten Luftströmungen, welche bei in ihrer Grundschwingung

1) A. Meissner, Jahrb. d. drahtl. Telegr. u. Teleph. 29. S. 20. 1927.

erregten Quarzplatten von etwa diagonal gegenüberliegenden Punkten der Stirnflächen ausgehen.

In derselben Weise wie Fig. 13 bei rechteckiger Stirnfläche des Quarzsenders ist die Fig. 14 für die quadratische Stirnfläche der Quarzplatten F aufgenommen. Die Quarzbreite $Q = 10$ mm und die Spaltbreite $Sp = 2$ mm sind in der Fig. 14 eingezeichnet. Im Gegensatz zu den Aufnahmen mit rechteckiger Stirnfläche zeigen die Aufnahmen mit quadratischer



Quarzplatten F;
$n = 68125$ Hertz
Q = Quarzbreite = 10 mm
Sp = Spaltbreite = 2 mm

Abszissen: Stellungen der Stirnfläche zur Spaltmitte

Ordinaten: Ausschl. des Empf.-Galv.

Amplitudenverteilung bei quadratischer Stirnfläche des Piezoquarzes
Fig. 14

Stirnfläche des Quarzsenders, daß bei diesen nur 1 Maximum der Amplitude vorhanden ist, welches aber nicht genau in der Symmetrieebene der Quarzplatte liegt.

Phase der mehrfachen Amplitudenmaxima bei rechteckiger Stirnfläche. Um die gegenseitige Phase der Amplitudenmaxima bei rechteckiger Stirnfläche des Quarzsenders zu ermitteln, wurden folgende Beugungsversuche unternommen. Vor der Stirnfläche des Quarzsenders befanden sich zwei Spalte ($4 \times 7\,\mathrm{mm}^2$), deren Abstand so gewählt war, daß er ungefähr dem Abstande zweier benachbarter Maxima auf der Stirnfläche des Quarzes entsprach. Die Spalte befanden sich in einer Metallplatte ($200 \times 200\,\mathrm{mm}^2$), welche mit dem Quarzsender um die Mitte des Doppelspaltes gedreht werden konnte. Mit dieser Anordnung wurde die Schallintensität, die vom Doppelspalt ausgeht, in Abhängigkeit vom Azimut durch Aufnahme mit dem Reso-

natorquarz bestimmt, der sich in der Nullstellung genau vor der Mitte des Doppelspaltes befand. Die Ablesegenauigkeit der Drehung betrug $\pm 0{,}25^{\circ}$.

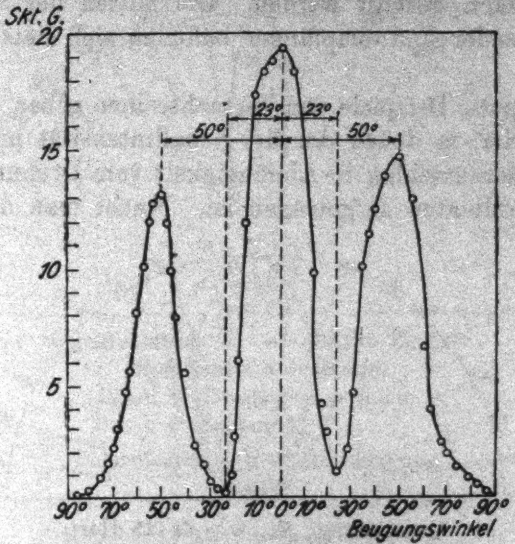
Von den Beugungsbildern gilt analog den Kurven der Optik, daß vor der Mittelsenkrechten des Doppelspaltes das Hauptmaximum des Beugungsbildes liegen muß, wenn die Schwingungen vor den beiden Spalten gleichphasig sind. Dagegen liegt an dieser Stelle ein Beugungsminimum, wenn die beiden Schwingungen um π in ihrer Phase verschoben sind, und allgemein ist die Verschiebung des Beugungsmaximums gegenüber der Mittelsenkrechten des Doppelspaltes proportional dem Phasenunterschiede der Schwingungen an den beiden Spalten.

Die Fig. 15 ist in dieser Weise mit den Quarzplatten *E* ($n = 68125$ Hertz) aufgenommen. Als Abszissen sind die Beugungswinkel, als Ordinaten die zugehörigen Ausschläge des Empfangsgalvanometers aufgetragen. Der Abstand der Spaltmitten betrug 6,5 mm, der Abstand der Stirnfläche des Quarzempfängers von der Mitte des Doppelspaltes 150 mm. Das Hauptmaximum der Empfangsintensität liegt bei dem Beugungswinkel Null, bei Drehung um 23° bzw. 50° erscheinen beiderseits Minima bzw. Nebenmaxima der Empfangsintensität.

Die Beugungsbilder ergeben Gleichphasigkeit der Schwingungen an den Stellen maximaler Amplitude der Stirnfläche des Quarzsenders. Weitere Versuche mit verschiedenen Abständen der Spaltmitten ergaben, daß bei den rechteckigen Stirnflächen der Quarzschallsender alle Teile der Stirnfläche miteinander in Phase sind.

Berechnung der akustischen Wellenlänge λ. Die Beugungsbilder mit dem Doppelspalt geben eine weitere Methode zur Bestimmung der akustischen Wellenlänge λ. Bezeichnen wir mit S den Abstand der Spaltmitten, mit α_1 den Beugungswinkel des ersten Intensitätsminimums, mit α_2 den des Nebenmaximums, so ist bekanntlich angenähert $\lambda = 2S \cdot \sin \alpha_1$ bzw. $\lambda = S \cdot \sin \alpha_2$. Mit den Werten $S = 6{,}5$ mm, $\alpha_1 = 23^{\circ}$, $\alpha_2 = 50^{\circ}$ aus Fig. 15 ergeben sich daraus die Werte $\sim 5{,}1$ mm bzw. $\sim 5{,}0$ mm für λ, was in guter Übereinstimmung steht mit dem in der Tab. 3 angegebenen Werte $\frac{\lambda}{2} = 2{,}435$ mm, dabei ist noch zu bemerken, daß die Berechnung der akustischen Wellen-

länge λ aus dem Azimut des Nebenmaximums weniger genau ist, da hier durch Überlagerung der Beugungsbilder von einfachem und Doppelspalt eine Verschiebung des Maximums eintritt.



Quarzplatten E; n = 68125 Hertz
Abszissen: Beugungswinkel
Ordinaten: Ausschl. des Empf.-Galv.

Beugungsbild mit Doppelspalt

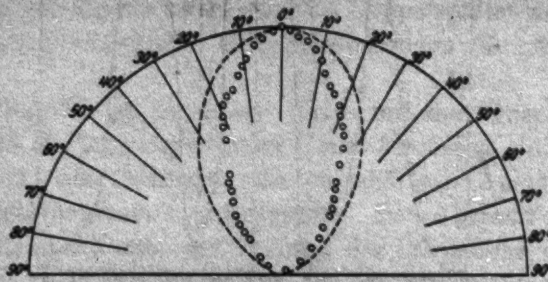
Fig. 15

3. Intensitätsverteilung in Abhängigkeit vom Azimut

Versuchsanordnung. Die Versuchsanordnung ist folgende. Der Quarzsender sieht mit seiner Stirnfläche $b \times d$ (Fig. 1) so durch den rechteckigen Spalt einer Metallplatte, daß sich die Stirnfläche in der Ebene der Metallplatte befindet. Weitere Metallplatten schirmen den Quarzsender so ab, daß nur von dieser Stirnfläche aus eine Einstrahlung in das beobachtete Schallfeld erfolgen kann. Die Mitte der Stirnfläche des Quarzsenders befindet sich genau in der vertikalen Drehachse eines horizontalen Armes, dessen Drehwinkel α an einer Gradskala mit einer Genauigkeit von $\pm 0{,}25^{0}$ abgelesen werden können. Auf dem 70 cm langen Dreharm ist der Quarzempfänger so montiert, daß seine Kanten b (Fig. 1) vertikal stehen. Der Quarzempfänger ist mit seinen Elektroden in einem einseitig

offenen Hartgummikästchen eingeschlossen, so daß die dem Quarzsender zugewandte Stirnfläche durch die Öffnung des Kästchens hervorlugt. Der Sendequarz kann sowohl hochkant als auch flach gestellt werden. Die Mitten der Stirnflächen von Quarzsender und -empfänger befinden sich stets in gleicher Höhe.

Ergebnisse. Beispiele von Versuchsreihen geben die Figg. 16 bis 18 wieder, in denen der der Schallintensität proportionale Galvanometerausschlag in Abhängigkeit vom Drehungswinkel α in Polarkoordinaten aufgetragen ist. Macht man die — nach

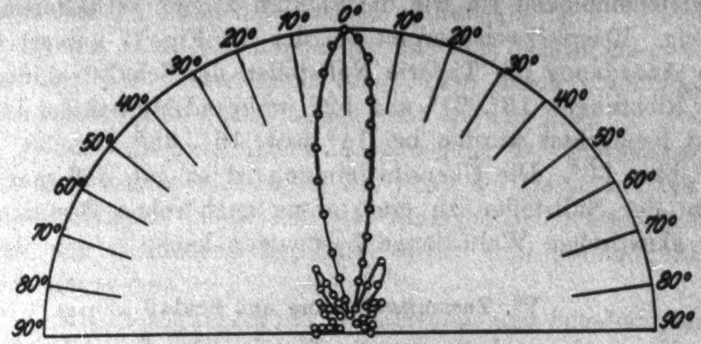


Quarzplatten E; $n = 68125$ Hertz
Spaltbreite $a = 5$ mm
Akust. Wellenlänge $\lambda \approx 5$ mm
– – – – theoretische Kurve
o o o o Meßpunkte
Polardiagramm der Richtwirkung
Fig. 16

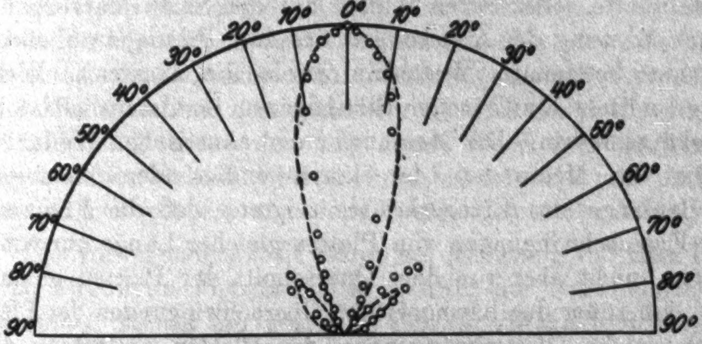
den im vorigen Abschnitt mitgeteilten Versuchsergebnissen allerdings nur sehr roh zutreffende — Annahme, daß die ganze Stirnfläche des Sendequarzes mit gleichmäßiger Amplitude und gleichphasig schwingt, so lassen sich die zu erwartenden Kurven auf Grund der optischen Theorie der Beugung an einem Einzelspalt[1]) berechnen, wobei als Spaltbreite die in horizontaler Richtung gemessene Breite der Stirnfläche des Sendequarzes, also bei Hochkantstellung die Dicke d, bei Flachstellung die Breite b (Fig. 1) einzusetzen ist. Die so berechneten theoretischen Kurven sind in den Polardiagrammen (Figg. 16 und 18) mit eingezeichnet.

1) Vgl. dazu z. B. Müller-Pouillet, Lehrb. d. Phys. u. Meteor. Bd. 2. S. 799 ff., Braunschweig 1909; Anwendung der Theorie auf Schallstrahler bei Stenzel, E. N. T. 4. S. 239. 1926.

Die experimentellen Kurven zeigen die nach der Theorie zu erwartende Richtwirkung, die um so stärker ausgeprägt ist, je größer die „Spaltbreite", d. h. die Ausdehnung der Sende-



Quarzplatten *E*; $n = 68125$ Hertz
Spaltbreite $a = 18$ mm
akust. Wellenlänge $\lambda \approx 5$ mm
o o o o Meßpunkte
Polardiagramm der Richtwirkung
Fig. 17



Quarzplatten *F*; $n = 68125$ Hertz
Spaltbreite $a = 10$ mm
akust. Wellenlänge $\lambda \approx 5$ mm
– – – – theor. Kurve
o o o o Meßpunkte
Polardiagramm der Richtwirkung
Fig. 18

quarzstirnfläche in Richtung der Meßebene ist. Die Übereinstimmung der Kurven mit dem theoretischen Verlauf its befriedigend, auch bei Fig. 17, wo die theoretische Kurve der

Übersichtlichkeit halber nicht gezeichnet ist. Die Abweichungen rühren offenbar von der ungleichmäßigen Verteilung der Schwingungsamplitude längs der Stirnfläche her; der Einfluß dieser Ungleichmäßigkeit ist, wie die Figuren zeigen, verhältnismäßig gering. Beispielsweise ergibt bei der der Fig. 17 entsprechenden Anordnung die Theorie Nullstellen der Schallstrahlung in den Richtungen 15°, 31° und 52°, während Minima der Intensität beobachtet wurden bei 14° bzw. 16°, 36° bzw. 38° und 56° bzw. 60°. Die Übereinstimmung ist so gut, daß man die Lage der Nullstellen zu einer wenn auch rohen Bestimmung der akustischen Wellenlänge λ benutzen kann.

VI. Zusammenfassung und Schluß

Zweck der Arbeit war, die Eignung des Piezoquarzes als Schallquelle und Schallempfänger zu untersuchen und eine entsprechende Methodik auszuarbeiten.

1. Bei der Untersuchung des Piezoquarzes als Schallsender wurde die akustische Wellenlänge der Quarzschwingungen mit Hilfe der Rückwirkung, welche die an einer verschiebbaren Metallplatte reflektierten Wellen auf den Sendequarz ausüben, durch Messung der Änderungen des zum Piezoquarz fließenden Stromes bestimmt. Weiterhin wurde die akustische Wellenlänge mittels Kundtscher Staubfiguren in kleinen Glasröhren direkt gemessen. Die Messungen der akustischen Wellenlänge sowie die Messungen der korrespondierenden elektrischen Wellenlänge des Erregerkreises zeigten, daß die Frequenzen der Eigenschwingungen von Platten gleicher Länge nur von der Länge, nicht aber von dem Querschnitt der Platten abhängen und daß außer den harmonischen Oberschwingungen der Platten auch solche Oberschwingungen der Platten auftreten, deren Frequenzen nicht ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz sind.

2. Bei der Untersuchung der Eigenschaften des Piezoquarzes als quantitativer Empfänger hochfrequenter akustischer Schwingungen wurde gezeigt,

a) daß die Eigenschwingungen von Platten gleicher linearer Abmessungen, die aus demselben Quarzkristall herausgeschnitten waren, auf mindestens 0,1 Promille genau miteinander übereinstimmten. Die Eigenschwingungen zweier Plattenpaare von gleicher Länge aber verschiedenem Querschnitt, welche aus

verschiedenen Quarzkristallen herausgeschnitten waren, stimmten auf 0,5 Promille miteinander überein; die weniger genaue Übereinstimmung in diesem Falle wurde auf bei der Herstellung unvermeidliche Längendifferenzen zurückgeführt;

b) daß der Quarzempfänger auf den Quarzsender durch Änderung der Elektrodenabstände bzw. durch einen kleinen Serienkondensator genau abgestimmt werden kann;

c) daß eine rein akustische Erregung der Empfangsapparatur nur dann gewährleistet ist, wenn der Empfangskreis auf das sorgfältigste vor direkter elektromagnetischer Beeinflussung durch den Sendekreis geschützt wird; eine Methode hierzu wurde angegeben.

3. Mit Piezoquarzen als Schallsender und Schallempfänger wurden folgende Messungen ausgeführt.

a) Eine Messung der akustischen Wellenlänge durch Aufnahme der Schallamplitude an einer verschiebbaren, reflektierenden Wand. Hierbei wird die Schallamplitude an der reflektierenden Wand in Abhängigkeit von der Entfernung der Platte vom Quarzsender mittels des Quarzempfängers gemessen.

b) Bei der Messung der Amplitudenverteilung auf den Stirnflächen von Piezoquarzschallsendern wurde eine unsymmetrische Verteilung mit 3 Maximis bei rechteckigem und eine solche mit 1 Maximum bei quadratischem Querschnitt nachgewiesen.

c) Eine Messung der von einem Piezoquarzschallsender ausgestrahlten Schallintensität in Abhängigkeit vom Azimut ergab angenähert die von der Theorie geforderte Verteilung.

Die vorliegende Arbeit wurde auf Anregung von Hrn. Prof. Dr. H. Busch im Physikalischen Institut der Universität Jena ausgeführt. Es sei mir gestattet, ihm für die dauernde freundliche Unterstützung und Beratung meinen herzlichsten Dank auszusprechen. Ebenso herzlich danke ich Hrn. Geh. Hofrat Prof. Dr. M. Wien für seine mannigfachen Anregungen und für seine stetig fördernde Anteilnahme an dem Fortschreiten der Arbeit.

Der Helmholtz-Gesellschaft bin ich für die Bereitstellung von Geldmitteln, der Fa. Carl Zeiss-Jena bin ich für die sorgfältige Herstellung der Quarzplatten zu Dank verpflichtet.

(Eingegangen 22. Mai 1928)

---

8. *Zur Theorie der Brownschen Molekularbewegung;*
von Richard Gans

Die grundlegenden Arbeiten Einsteins[1]) und Smoluchowskis[2]) über Brownsche Molekularbewegung befassen sich mit der Translation kugelförmiger Teilchen. Allerdings behandelt Einstein auch die Rotation um eine raumfeste Achse, doch das ist ein Problem von praktisch geringer Bedeutung. Über diesen Bereich ist man kaum hinausgekommen. Schon die Rotationsbewegung einer Kugel um ihren Mittelpunkt zeigt sich der theoretischen Behandlung viel schwieriger zugänglich als die Translationsbewegung.[3]) Der innere Grund dieses Unterschiedes ist folgender: So, wie man die Translationsbewegung als Zickzacklinie auffassen kann, die aus gleichen geradlinigen Strecken der Länge λ besteht, deren Richtungen ganz unabhängig voneinander sind, darf man bei der Rotationsbewegung eine Folge von Drehungen um einen konstanten Winkel, aber um dauernd wechselnde, ganz voneinander unabhängige Achsen annehmen, aber während die Translationen eine kommutative Gruppe bilden, ist das bei den Rotationen nicht der Fall. Die Abzählung der Möglichkeiten einer bestimmten, aus n Elementarschritten sich zusammensetzenden Lagenänderung ist also in diesem Falle viel komplizierter als in jenem.

Die gegebene Methode ist deshalb die, eine partielle Differentialgleichung für die Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Lage des Teilchens aufzustellen, was übrigens Einstein (a. a. O.) für die Translationsbewegung und neuerdings F. Perrin[4]) bei

---

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. (4) 19. S. 371. 1906.

2) M. v. Smoluchowski, Ann. d. Phys. (4) 21. S. 756. 1906.

3) Vgl. die Bemerkungen hierzu bei G. L. de Haas-Lorentz, Die Brownsche Bewegung und einige verwandte Erscheinungen. Braunschweig 1913. S. 43.

4) F. Perrin, Compt. rend. 181. S. 514. 1925.

der Behandlung eines speziellen Problems der Rotation um einen festen Punkt auch getan haben.

Diese Methode erlaubt es, wie im folgenden gezeigt werden soll, ganz allgemein die Molekularbewegung eines beliebigen Körpers zu behandeln, also z. B. die gleichzeitigen Translationen und Rotationen eines dreiachsigen Ellipsoids, wodurch dann die speziellen Fälle von Kugeln, Nadeln und Scheiben mit erledigt sind.

§ 1. Das Grundgesetz der Molekularbewegung

Die doppelte kinetische Energie eines Teilchens, dessen Lage durch die verallgemeinerten Koordinaten $q_1, q_2, \cdots q_n$ gegeben ist, sei

$$2T = \sum_{i,k} A_{ik}\, \dot{q}_i\, \dot{q}_k\,. \tag{1}$$

Bewegt es sich in einer reibenden Flüssigkeit, so sei die in der Zeiteinheit entwickelte Wärme

$$2F = \sum_{i,k} g_{ik}\, \dot{q}_i\, \dot{q}_k\,. \tag{2}$$

Hier sind sowohl die A_{ik} als auch die g_{ik}, deren Bestimmung ein hydrodynamisches Problem ist, Funktionen der q.

Nun lauten die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen[1])

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} = Q_i\,, \tag{3}$$

wo die Q_i die Komponenten der verallgemeinerten Kraft sind, die in dem von uns betrachteten Falle der Molekularbewegung einen ganz unregelmäßigen Einfluß auf die Bewegung haben. Insbesondere kommt ebenso häufig ein positiver Wert Q_i vor wie derselbe negative Wert.

Setzt man (1) und (2) in (3) ein, und nimmt man die Bewegung als so langsam an, daß alle Terme, welche Quadrate

---

1) Hier ist eine gewisse Voraussetzung über die Reibungskräfte gemacht, nämlich daß sie vollständig aus der Zerstreuungsfunktion F folgen. Das nimmt auch Lord Rayleigh (Theory of sound 1. § 81) stillschweigend an, während Lamb (Lehrbuch der Hydrodynamik, Leipzig und Berlin 1907. S. 652) besonders darauf hinweist, daß (3) nur gilt, wenn die Reibungskräfte keinen gyrostatischen Anteil haben, der keine Arbeit leistet. Diese Voraussetzung ist gleichbedeutend mit gewissen Symmetrieeigenschaften des bewegten Körpers.

oder Produkte der $\dot{q}$ enthalten, vernachlässigt werden können, so erhält man

$$\sum_k A_{ik}\ddot{q}_k + \sum_k g_{ik}\dot{q}_k = Q_i \,. \tag{4}$$

Die Gleichungen (1), (2) und (4) lassen sich dadurch auf eine einfachere Form bringen, daß man die beiden quadratischen Formen T und F durch eine infinitesimale Transformation

$$d\xi_i = \sum_k \alpha_{ik}\, d q_k \,, \tag{5}$$

in der die α_{ik} von den q abhängen, gleichzeitig in die Summe von Quadraten verwandelt, und zwar speziell auch noch so, daß die Koeffizienten der transformierten Form F alle den Wert 1 haben. Dadurch wird also

$$2T = \sum_{k=1}^{n} a_k \dot{\xi}_k^2 \,, \tag{6}$$

$$2F = \sum_{k=1}^{n} \dot{\xi}_k^2 \,, \tag{7}$$

wo die a_k im allgemeinen von sämtlichen q abhängen.

Dann nehmen die Bewegungsgleichungen (4) die einfachere Form an

$$a_i \ddot{\xi}_i + \dot{\xi}_i = \Xi_i \,, \tag{8}$$

wo die Ξ_i mit den Q_i durch die Beziehung

$$\sum_i Q_i\, d q_i = \sum_i \Xi_i\, d\xi_i$$

verknüpft sind, so daß

$$\Xi_i = \sum_k Q_k \frac{\partial q_k}{\partial \xi_i} \,.$$

Da die Gleichungen (5) im allgemeinen nicht integrabel sind, so existieren keine endlichen Größen ξ, wohl aber können wir von diesen in der unmittelbaren Umgebung eines Punktes $q_{10}, q_{20} \ldots$ sprechen, wenn wir sämtlichen ξ in diesem Punkte die Werte Null geben. Dann folgt aber[1]) aus (8) mit

1) Z. B. nach P. Langevin, Compt. rend. 146. S. 530. 1908; vgl. auch G. L. de Haas-Lorentz, Die Brownsche Bewegung, Braunschweig 1913. S. 48.

Berücksichtigung des Boltzmannschen Gleichverteilungssatzes, nach dem $a_i \overline{\xi_i^2} = kT$ ist, für den über viele Teilchen erstreckten Mittelwert

$$\overline{\xi_k} = 0; \qquad \overline{\xi_k^2} = 2kTt \qquad (k = 1, 2 \ldots n), \tag{9}$$

wenn t nur klein genug gewählt wird.

Um deutlich zu machen, daß die ξ_k hier unendlich kleine Größen sind, schreiben wir die Gleichungen (9) in der Form

$$\overline{d\xi_k} = 0; \qquad \overline{d\xi_k^2} = 2kTt. \tag{9'}$$

Dieses für die *Mittelwerte* jeden Freiheitsgrades gültige Resultat gibt uns Anlaß, die wirkliche sehr komplizierte und ganz unkontrollierbare Bewegung vereinfachend so darzustellen, daß für *jedes* Teilchen in der sehr kleinen Elementarzeit τ

$$d\xi_k^2 = 2kT\tau \tag{9''}$$

gilt, also

$$ds^2 = \sum_{k=1}^{n} d\xi_k^2 = 2kT\tau n, \tag{10}$$

d. h. der Punkt legt im ξ-Raum in der kleinen konstanten Elementarzeit τ den geradlinigen Weg der konstanten Größe λ zurück, wo

$$\lambda^2 = 2kT\tau n \tag{10'}$$

ist. Dabei sollen die Richtungen dieser Elementarschritte ganz den Gesetzen des Zufalls überlassen bleiben. [1])

Aus diesem Grundgesetz folgt nach (10) durch Division durch $dt^2 = \tau^2$ und Berücksichtigung von (7), daß die in der Zeiteinheit entwickelte Reibungswärme den Wert

$$2F = \sum_{k=1}^{n} \dot{\xi}_k^2 = \frac{2kTn}{\tau}$$

hat oder, wenn wir auf die q zurücktransformieren, nach (2)

$$2F = \sum_{i,k} g_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k = \frac{2kTn}{\tau}.$$

Die bei der Bewegung entwickelte Wärme hat also einen nur von der Temperatur und der Zahl der Freiheitsgrade abhängigen Wert.

1) Es ist nicht einmal nötig, Elementarschritte gleicher Größe anzunehmen. Tut man es nicht, so bedeutet das λ^2 der Gleichung (10') den quadratischen Mittelwert aller Elementarschritte.

Multiplizieren wir diese Gleichung beiderseits mit $d t^2 = \tau^2$ und berücksichtigen (10'), so erhalten wir

(11) $$d s^2 = \sum_{i,k} g_{ik}\, d q_i\, d q_k = \lambda^2 .$$

Wir können also das Grundgesetz auch so aussprechen:

Im nichteuklidischen q-Raum mit der Maßbestimmung (11) legt der Punkt in der Elementarzeit τ die konstante Strecke λ zurück.

Nun definieren wir $U(q_1, q_2 \ldots q_n, t)\sqrt{g}\, dq_1, dq_2 \ldots dq_n$ als Wahrscheinlichkeit, daß der Punkt zur Zeit t im Volumelement $dv = \sqrt{g}\, dq_1, dq_2 \ldots dq_n$ des q-Raums liegt, wo

(12) $$g = |g_{ik}|$$

bedeutet, und es handelt sich darum, eine partielle Differentialgleichung für U aufzustellen. Da die Wahrscheinlichkeit U direkt proportional der Anzahl Teilchen N in der Volumeinheit ist, können wir mit der Größe N operieren und später N durch U ersetzen. Für N gilt die Kontinuitätsgleichung, und diese wollen wir jetzt ableiten.

Der Raum v sei durch die Oberfläche σ mit der nach außen positiv gerechneten Normalen ν begrenzt. Wir fragen uns, wie viele Teilchen in der Elementarzeit τ durch den Elementarschritt λ von außen nach innen durch das Oberflächenelement $d\sigma$ hindurchtreten, beschränken uns aber zunächst auf diejenigen Teilchen, die mit der Normalen ν den Winkel α bilden. Die Zahl dieser besonderen Gruppe pro Volumeinheit nennen wir N_α. Dann gilt

(13) $$\sum_\alpha N_\alpha = \frac{N}{2},$$

wobei der Faktor $\frac{1}{2}$ der Tatsache Rechnung trägt, daß nur die auf die Oberfläche zueilenden Teilchen durch sie hindurchtreten können.

Die von uns gesuchte Zahl ist

(14) $$n_1 = d\sigma \int_0^{\lambda \cos \alpha} N_\alpha\, d\nu .$$

Dabei ist aber zu berücksichtigen, daß N_α Funktion von ν ist, also nach dem Taylorschen Satz

$$N_\alpha = N_{\alpha 0} + \left(\frac{\partial N_\alpha}{\partial \nu}\right)_0 \nu$$

geschrieben werden kann, wenn $\nu = 0$ der Normalenpunkt auf der Oberfläche selbst ist. Somit ergibt sich aus (14)

$$(15)\qquad n_1 = d\sigma\left[N_{\alpha 0}\,\lambda\cos\alpha + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial N_\alpha}{\partial \nu}\right)_0 \lambda^2\cos^2\alpha\right].$$

Ebenso berechnet sich die Zahl der von innen nach außen durch $d\sigma$ unter dem Winkel α hindurchtretenden Teilchen zu

$$(15')\quad n_2 = d\sigma\int\limits_{-\lambda\cos\alpha}^{0} N_\alpha\,d\nu = d\sigma\left[N_{\alpha 0}\,\lambda\cos\alpha - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial N_\alpha}{\partial \nu}\right)_0 \lambda^2\cos^2\alpha\right],$$

so daß

$$(16)\qquad n_1 - n_2 = d\sigma\frac{\partial N_\alpha}{\partial \nu}\lambda^2\cos^2\alpha$$

die Teilchenzunahme im Volumen v durch die in der Zeit τ erfolgende Bewegung der besonderen betrachteten Gruppe ist. Wir haben jetzt zunächst über α zu summieren, d. h.

$$\sum_\alpha N_\alpha\cos^2\alpha = \overline{\cos^2\alpha}\sum_\alpha N_\alpha$$

zu bilden. Da nach unserem Elementargesetz alle Richtungen gleich wahrscheinlich sind, so ist im n-dimensionalen Raume $\overline{\cos^2\alpha} = \frac{1}{n}$, also wegen (13) $\sum_\alpha N_\alpha\cos^2\alpha = \frac{N}{2n}$, so daß (16) übergeht in

$$d\sigma\frac{\lambda^2}{2n}\frac{\partial N}{\partial \nu}.$$

Die Integration über die ganze Oberfläche ergibt also mit Beachtung von (10′)

$$k T\tau\int\frac{\partial N}{\partial \nu}\,d\sigma.$$

Andererseits ist die Zunahme der Teilchenzahl im Volumen v und in der Zeit $\tau\int\frac{\partial N}{\partial t}\,\tau\,dv$. Setzen wir diese Größen einander gleich, wenden den Gaussschen Satz an und ersetzen N durch die der Teilchenzahl proportionale Wahrscheinlichkeit U, so erhalten wir

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k T\,\mathrm{div\,grad}\,U$$

oder in den krummlinigen nichteuklidischen Koordinaten q geschrieben[1]),

1) Vgl. z. B. R. Courant u. D. Hilbert, Methoden d. math. Physik 1. S. 194. Berlin 1924.

(17) $$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{kT}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sqrt{g} \sum_{k=1}^{n} g^{ik} \frac{\partial U}{\partial q_k} \right).$$

Dabei berechnen sich die g^{ik} aus den g_{ik} durch die linearen Gleichungen

(18) $$\sum_i g_{ik} g^{il} = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad k \neq l \\ 1 & \text{für} \quad k = l. \end{cases}$$

§ 2. Rotationsbewegung von Kugeln

Zur Behandlung der molekularen Rotationsbewegung von Kugeln führen wir als Koordinaten die Eulerschen Winkel ϑ, ψ, φ ein, von denen die ersten beiden die Lage einer in der Kugel festen Achse bezüglich eines raumfesten Bezugssystems bestimmen, während φ den Winkel bedeutet, den eine körperfeste, durch jene Achse gehende Ebene mit der „Knotenlinie" bildet.

Bedeuten p, q, r die Winkelgeschwindigkeiten um drei aufeinander senkrechte körperfeste Achsen, so ist die in der Zeiteinheit erzeugte Reibungswärme

(19) $$2F = w(p^2 + q^2 + r^2),$$

wo nach Kirchhoff[1])

(20) $$w = 8\pi \mu a^3$$

ist, unter μ und a den Reibungskoeffizienten der Flüssigkeit bzw. den Radius der Kugel verstanden.

Da nun[2])

(21) $$\begin{cases} p = \dot{\psi} \sin \vartheta \sin \varphi + \dot{\vartheta} \cos \varphi \\ q = \dot{\psi} \sin \vartheta \cos \varphi - \dot{\vartheta} \sin \varphi \\ r = \dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi}, \end{cases}$$

so ergibt sich für die Maßbestimmung

(22) $$ds^2 = w(d\vartheta^2 + d\psi^2 + d\varphi^2 + 2 \cos \vartheta \, d\psi \, d\varphi).$$

Wir haben also

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = w; \quad g_{23} = w \cos \vartheta; \quad g_{31} = g_{12} = 0,$$

1) G. Kirchhoff, Vorlesungen über Mechanik, 4. Aufl. Leipzig 1897. S. 378. Formel (18).

2) Vgl. z. B. R. H. Weber u. R. Gans, Repertorium der Physik 1 I. Leipzig und Berlin 1915. S. 58.

und daraus folgt nach (18)

$$\left\{\begin{aligned} g^{11} &= \frac{1}{w}; \quad g^{22} = g^{33} = \frac{1}{w \sin^2 \vartheta}; \\ g^{23} &= -\frac{\cos \vartheta}{w \sin^2 \vartheta}; \quad g^{31} = g^{12} = 0 \end{aligned}\right.$$

und nach (12)

$$g = w^3 \sin^2 \vartheta,$$

so daß (18) in

$$(23) \quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{k T}{w} \Bigg\{ & \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin \vartheta \frac{\partial U}{\partial \vartheta}\right) \\ & + \frac{1}{\sin^2 \vartheta}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} - 2 \cos \vartheta \frac{\partial^2 U}{\partial \psi \, \partial \varphi}\right)\Bigg\} \end{aligned}\right.$$

übergeht.

Es handelt sich nun darum, diese Gleichung zu integrieren. Zu dem Zweck machen wir die folgende Überlegung. Ist die Anfangslage der Kugel durch bestimmte Werte von ϑ, ψ, φ, etwa $\vartheta = \psi = \varphi = 0$ gegeben, und haben diese Größen zur Zeit t die Werte ϑ, ψ, φ angenommen, so kann man bekanntlich durch eine einzige Drehung um eine geeignet gewählte Achse die Kugel aus der Anfangslage in die Endlage überführen. Diese Achse sei durch die beiden Eulerschen Winkel Θ, Ψ bestimmt, während der Drehwinkel, der die Überführung leistet, Φ genannt werde (für $t = 0$ ist also $\Phi = 0$). Dann muß es aus Symmetriegründen ein Integral von (23) geben, das außer von t nur von Φ abhängt, von Θ und Ψ aber unabhängig ist. Gerade dieses Integral interessiert uns aber. Wir haben also ϑ, ψ, φ durch Θ, Ψ, Φ auszudrücken, jene Größen durch diese in (23) zu ersetzen und das Integral zu suchen, das nur von t und Φ abhängt.

Dieser Gedanke soll nun analytisch durchgeführt werden. Ein Punkt der Kugel habe zur Zeit t in einem raumfesten Koordinatensystem die Koordinaten x, y, z, während er für $t = 0$ die Koordinaten x_0, y_0, z_0 gehabt habe. Außerdem nehmen wir noch zwei in der Kugel feste Systeme ξ, η, ζ und Ξ, H, Z an, deren Achsen Richtungscosinusse bezüglich der x, y, z-Achse haben, die sich in bekannter Weise[1]) durch die Eulerschen Winkel ϑ, ψ, φ bzw. Θ, Ψ, Φ ausdrücken.

1) Vgl. etwa R. H. Weber u. R. Gans, Repertorium der Physik 1 I. Leipzig und Berlin 1915. S. 42.

Während also x, y, z mit der Zeit veränderlich sind, bleiben ξ, η, ζ sowie Ξ, H, Z konstant.

Geben wir die erwähnten Richtungscosinusse also durch die Schemen

	Ξ	H	Z
x	A_1	A_2	A_3
y	B_1	B_2	B_3
z	Γ_1	Γ_2	Γ_3

	ξ	η	ζ
x	α_1	α_2	α_3
y	β_1	β_2	β_3
z	γ_1	γ_2	γ_3

und unterscheiden die für $t = 0$ gültigen Werte durch den Index 0, so gelten die geometrisch ohne weiteres evidenten Beziehungen

$$(24a)\quad \begin{cases} A_{10}A_1 + A_{20}A_2 + A_{30}A_3 = \alpha_{10}\alpha_1 + \alpha_{20}\alpha_2 + \alpha_{30}\alpha_3, \\ B_{10}A_1 + B_{20}A_2 + B_{30}A_3 = \beta_{10}\alpha_1 + \beta_{20}\alpha_2 + \beta_{30}\alpha_3, \\ \Gamma_{10}A_1 + \Gamma_{20}A_2 + \Gamma_{30}A_3 = \gamma_{10}\alpha_1 + \gamma_{20}\alpha_2 + \gamma_{30}\alpha_3. \end{cases}$$

$$(24b)\quad \begin{cases} A_{10}B_1 + A_{20}B_2 + A_{30}B_3 = \alpha_{10}\beta_1 + \alpha_{20}\beta_2 + \alpha_{30}\beta_3, \\ B_{10}B_1 + B_{20}B_2 + B_{30}B_3 = \beta_{10}\beta_1 + \beta_{20}\beta_2 + \beta_{30}\beta_3, \\ \Gamma_{10}B_1 + \Gamma_{20}B_2 + \Gamma_{30}B_3 = \gamma_{10}\beta_1 + \gamma_{20}\beta_2 + \gamma_{30}\beta_3. \end{cases}$$

$$(24c)\quad \begin{cases} A_{10}\Gamma_1 + A_{20}\Gamma_2 + A_{30}\Gamma_3 = \alpha_{10}\gamma_1 + \alpha_{20}\gamma_2 + \alpha_{30}\gamma_3, \\ B_{10}\Gamma_1 + B_{20}\Gamma_2 + B_{30}\Gamma_3 = \beta_{10}\gamma_1 + \beta_{20}\gamma_2 + \beta_{30}\gamma_3, \\ \Gamma_{10}\Gamma_1 + \Gamma_{20}\Gamma_2 + \Gamma_{30}\Gamma_3 = \gamma_{10}\gamma_1 + \gamma_{20}\gamma_2 + \gamma_{30}\gamma_3. \end{cases}$$

Da wir nun für $t = 0$ $\vartheta = \psi = \varphi = 0$ angenommen haben, so ist[1])

$$(25)\quad \begin{cases} \alpha_{10} = 1; & \beta_{10} = 0; & \gamma_{10} = 0 \\ \alpha_{20} = 0; & \beta_{20} = 1; & \gamma_{20} = 0 \\ \alpha_{30} = 0; & \beta_{30} = 0; & \gamma_{30} = 1. \end{cases}$$

Ferner ist für $t = 0$ $\Phi = 0$, also[1])

$$(25')\quad \begin{cases} A_{10} = \cos\Psi & B_{10} = \sin\Psi & \Gamma_{10} = 0 \\ A_{20} = -\sin\Psi\cos\Theta & B_{20} = \cos\Psi\cos\Theta & \Gamma_{20} = \sin\Theta \\ A_{30} = \sin\Psi\sin\Theta & B_{30} = -\cos\Psi\sin\Theta & \Gamma_{30} = \cos\Theta. \end{cases}$$

Aus (24a) mit Benutzung von (25) folgt A_3; ebenso aus (24b) bzw. (24c) B_3 und Γ_3. Wir erhalten so

$$(26)\quad \begin{cases} A_3 = A_{30}\alpha_1 + B_{30}\alpha_2 + \Gamma_{30}\alpha_3, \\ B_3 = A_{30}\beta_1 + B_{32}\beta_2 + \Gamma_{30}\beta_3, \\ \Gamma_3 = A_{30}\gamma_1 + B_{30}\gamma_2 + \Gamma_{30}\gamma_3. \end{cases}$$

1) Vgl. z. B. R. H. Weber und R. Gans, a. a. O.

Da A_3, B_3, Γ_3 nur von Θ und Ψ abhängen[1]) und nicht von Φ, und da bei der Drehung sich nur Φ ändert, aber nicht Θ und Ψ, so ist

(27) $$A_3 = A_{30}; \quad B_3 = B_{30}; \quad \Gamma_3 = \Gamma_{30},$$

d. h. die Gleichungen (26) gehen über in

(28) $$\begin{cases} A_3(\alpha_1 - 1) + B_3\alpha_2 + \Gamma_3\alpha_3 = 0, \\ A_3\beta_1 + B_3(\beta_2 - 1) + \Gamma_3\beta_3 = 0, \\ A_3\gamma_1 + B_3\gamma_2 + \Gamma_3(\gamma_3 - 1) = 0. \end{cases}$$

Daraus berechnet sich $A_3 : B_3$ (Γ_3 interessiert uns nicht) zu

(29) $$\frac{A_3}{B_3} = \frac{\gamma_1 + \alpha_3}{\gamma_2 + \beta_3},$$

oder mit Benutzung von (27) und (25') links, sowie der Ausdrucke für die Richtungscosinusse rechts nach einfacher Umformung

$$\operatorname{tg}\Psi = \operatorname{ctg}\frac{\varphi - \psi}{2},$$

d. h.

(30) $$\Psi = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi - \psi}{2}.$$

Ferner folgt aus (24c) mit Berücksichtigung von (25)

$$\Gamma_1 = A_{10}\gamma_1 + B_{10}\gamma_2 + \Gamma_{10}\gamma_3,$$
$$\Gamma_2 = A_{20}\gamma_1 + B_{20}\gamma_2 + \Gamma_{20}\gamma_3,$$
$$\Gamma_3 = A_{30}\gamma_1 + B_{30}\gamma_2 + \Gamma_{30}\gamma_3.$$

Setzt man rechts die Werte (25') ein, so erhält man mit Benutzung von (30)

(31) $$\begin{cases} \sin\Theta\sin\Phi = \sin\vartheta\cos\frac{\varphi + \psi}{2}, \\ \sin\Theta\cos\Phi = -\sin\vartheta\cos\Theta\sin\frac{\varphi + \psi}{2} + \sin\Theta\cos\vartheta, \\ \cos\Theta = \sin\vartheta\sin\Theta\sin\frac{\varphi + \psi}{2} + \cos\Theta\cos\vartheta. \end{cases}$$

Aus der letzten Gleichung berechnet sich

(32) $$\operatorname{ctg}\Theta = \operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\varphi + \psi}{2}.$$

Mittels diesen Wertes kann man Θ aus der zweiten Gleichung (31) eliminieren und erhält

(33) $$\cos\Phi = \cos\vartheta - 2\cos^2\frac{\vartheta}{2}\sin^2\frac{\varphi + \psi}{2}.$$

1) Vgl. z. B. R. H. Weber und R. Gans, a. a. O.

Damit ist unser Ziel erreicht: die Gleichungen (30), (32) und (33) geben uns Θ, Ψ, Φ als Funktionen von ϑ, ψ, φ. Die letzte derselben schreiben wir noch etwas anders, indem wir

$$\eta = 1 + 2\cos\Phi; \quad u = \cos\vartheta; \quad v = \cos(\varphi + \psi) \tag{34}$$

setzen. Sie nimmt dann die Formen an

$$\eta = u + v + uv. \tag{35}$$

Nimmt man nun an, daß die abhängige Veränderliche U in der partiellen Differentialgleichung (23) außer von t nur von η abhängt, so erhält man

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{kT}{w}\left\{(1+\eta)(3-\eta)\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} - 2\eta\frac{\partial U}{\partial \eta}\right\}. \tag{36}$$

Da hier auf der rechten Seite nur η, aber nicht u und v explizit auftreten, so ist unser Versuch tatsächlich geglückt.

Integration der Differentialgleichung und Eigenschaften der Integrale

Zur Integration dieser Gleichung benutzen wir die Methode der partikularen Integrale, setzen also an

$$U = \sum_n C_n e^{-\frac{kT}{w}n(n+1)t} y_n, \tag{37}$$

wo die y_n reine Funktionen von η sind. Dann führen wir noch die neue Variable x durch

$$\eta = 4x - 1 \tag{38}$$

ein, so daß also nach (34)

$$x = \cos^2\frac{\Phi}{2} \tag{38'}$$

wird und den Bereich $0 \leq x \leq 1$ durchläuft.

y_n genügt dann der Differentialgleichung

$$x(1-x)y_n'' + \left(\frac{1}{2} - 2x\right)y_n' + n(n+1)y_n = 0. \tag{39}$$

Damit y_n im ganzen Wertebereich der Variablen x beschränkt bleibt, muß n eine ganze Zahl sein, und zwar darf man sich auf die nicht negativen ganzen Zahlen beschränken. Dann erhält man als Lösungen die Jacobischen Polynome[1]) G_n,

---

1) Vgl. z. B. R. Courant und D. Hilbert, Methoden d. math. Phys. 1. S. 75. Berlin 1924.

die sich auch durch die hypergeometrische Reihe F folgendermaßen darstellen lassen

(40) $$y_n = G_n\left(1, \frac{1}{2}, x\right) = F\left(n+1, -n, \frac{1}{2}, x\right).$$

Zur Ableitung der Integraleigenschaften transformieren wir (39) durch die Substitution

(41) $$y_n = \sqrt{\frac{x}{1-x}}\, z_n$$

in die selbstadjungierte Gleichung

(42) $$\frac{d}{dx}\left[x^{3/2}(1-x)^{1/2} z_n'\right] + n(n+1)\sqrt{\frac{x}{1-x}}\, z_n = 0.$$

Daraus ergibt sich nach bekanntem Verfahren zunächst

$$[n(n+1) - m(m+1)]\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}\, z_n z_m\, dx$$
$$= \left| x^{3/2}(1-x)^{1/2}(z_m' z_n - z_n' z_m)\right|_0^1$$

oder durch Wiedereinführung von y_n auf der rechten Seite[1])

$$= \left| x^{1/2}(1-x)^{3/2}(y_n y_m' - y_m y_n')\right|_0^1.$$

Daraus folgt

(43) $$\begin{cases} \int_0^1 z_n z_m \sqrt{\frac{x}{1-x}}\, dx = 0 \qquad n \neq m \\ \text{oder} \\ \int_0^1 y_n y_m \sqrt{\frac{1-x}{x}}\, dx = 0 \qquad n \neq m. \end{cases}$$

Die Funktionen $\left(\frac{1-x}{x}\right)^{1/4} y_n$ sind also zueinander orthogonal. Zur Berechnung der Konstanten

$$a_n = \int_0^1 y_n^2 \sqrt{\frac{1-x}{x}}\, dx = \int_0^1 y_n z_n\, dx$$

---

1) Das ist notwendig, denn da z_n und z_n' an den Grenzen des Bereichs unendlich werden, sieht man der rechten Seite nicht ohne weiteres an, daß sie Null wird.

berücksichtigen wir, daß[1])

$$z_n = \frac{2^{2n}\Pi(n)}{\Pi(2n)} u_n^{(n)}$$

ist, wo zur Abkürzung gesetzt ist

$$u_n^{(n)} = \frac{d^n}{dx^n}\left[x^{n-1/2}(1-x)^{n+1/2}\right].$$

Dann erhalten wir durch fortgesetzte Teilintegrationen

$$a_n = \frac{(-1)^n 2^{2n}\Pi(n)}{\Pi(2n)}\int_0^1 u_n y_n^{(n)}\,dx,$$

und da aus der Polynomdarstellung der y_n[1]) folgt

$$y_n^{(n)} = (-1)^n 2^{2n}\Pi(n),$$

so wird

$$a_n = \frac{2^{4n}(\Pi(n))^2}{\Pi(2n)}\int_0^1 x^{n-1/2}(1-x)^{n+1/2}\,dx$$

$$= \frac{2^{4n}(\Pi(n))^2\,\Pi\left(n-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Pi(2n)\,\Pi(2n+1)} = \frac{\pi}{2},$$

wir haben also schließlich[2])

$$\int_0^1 y_n^2\sqrt{\frac{1-x}{x}}\,dx = \frac{\pi}{2}. \tag{44}$$

Da wir ferner später die y_n für das Argument $x = 1$ brauchen werden, wollen wir diese Größen noch angeben.

Nach (40) ist

$$y_n(1) = F\left(n+1, -n, \frac{1}{2}, 1\right),$$

und daraus folgt[3])

$$y_n(1) = \frac{\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)\Pi\left(-\frac{3}{2}\right)}{\Pi\left(-n-\frac{3}{2}\right)\Pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}.$$

---

1) Vgl. R. Courant-Hilbert, a. a. O.

2) Die Formeln (43) und (44) gehen auch aus den allgemeinen von H. Rademacher, Ztschr. f. Phys. 39. S. 462 (7) und S. 463 (13) 1926 abgeleiteten hervor.

3) Vgl. z. B. H. Weber, Die partiellen Differentialgleichungen d. math. Physik 2. S. 33, Formel (5). Braunschweig 1912.

Nun ist nach der Formel[1])

$$\Pi(-x)\,\Pi(x-1) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \quad \text{für } x = n + \frac{3}{2}$$

$$\Pi\left(-n-\frac{3}{2}\right) = -\frac{\pi(-1)^n}{\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)};$$

ferner gilt[1])

$$\Pi\left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}; \quad \Pi\left(-\frac{3}{2}\right) = -2\sqrt{\pi},$$

so daß schließlich wird

(45) $$y_n(1) = (-1)^n(2n+1).$$

Die Funktionaldeterminante

$U \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\psi\, d\varphi$ war die Wahrscheinlichkeit, daß die Lage des Teilchens in den Bereich zwischen ϑ und $\vartheta + d\vartheta$, ψ und $\psi + d\psi$, φ und $\varphi + d\varphi$ fällt. Da wir nun U als Funktion von Θ, Ψ, Φ dargestellt haben (daß U dabei von Θ und Ψ unabhängig ist, ist gleichgültig), so müssen wir $\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\psi\, d\varphi$ noch durch Θ, Ψ, Φ und ihre Differentiale ausdrücken.

Nach (30), (32) und (33) war

(46) $$\begin{cases} \Psi = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} + \frac{\psi}{2}, \\ r = \operatorname{ctg}\Theta = \operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\varphi+\psi}{2}, \\ s = \cos\Phi = \cos\vartheta - 2\cos^2\frac{\vartheta}{2}\sin^2\frac{\varphi+\psi}{2}. \end{cases}$$

Daraus folgt durch einfache Rechnung

(47) $$d\Psi\, dr\, ds = \left(r^2 + \frac{s+1}{2}\right)\cos\frac{\varphi+\psi}{2}\, d\vartheta\, d\psi\, d\varphi.$$

Wir müssen also noch $\cos\frac{\varphi+\psi}{2}$ und $\sin\vartheta$ durch r und s ausdrücken. Aus den letzten beiden Gleichungen (46) folgt

(48) $$\cos^2\frac{\vartheta}{2} = \frac{r^2}{\sin^2\frac{\psi+\varphi}{2} + r^2}; \quad \frac{1+s}{2} = \cos^2\frac{\vartheta}{2}\cos^2\frac{\psi+\varphi}{2};$$

Elimination von $\cos^2\frac{\vartheta}{2}$ ergibt also

1) Vgl. z. B. E. Jahnke und F. Emde, Funktionentafeln, S. 26. Leipzig und Berlin 1909.

$$\cos^2\frac{\psi+\varphi}{2} = \frac{(r^2+1)(s+1)}{2r^2+s+1}. \tag{49}$$

Setzt man diesen Wert ferner in die zweite Gleichung (48) ein, so erhält man

$$\cos^2\frac{\vartheta}{2} = \frac{2r^2+s+1}{2(r^2+1)}, \quad \text{also } \sin^2\frac{\vartheta}{2} = \frac{1-s}{2(r^2+1)},$$

so daß

$$\sin^2\vartheta = \frac{(2r^2+s+1)(1-s)}{(r^2+1)^2} \tag{50}$$

wird. Wir erhalten also aus (47), (49) und (50)

$$\sin d\vartheta\, d\psi\, d\varphi = 2\sqrt{\frac{1-s}{1+s}}\,\frac{d\Psi\, dr\, ds}{(r^2+1)^{3/2}},$$

und da aus der zweiten Gleichung (46)

$$\sin\Theta\, d\Theta = -\frac{dr}{(r^2+1)^{3/2}}$$

folgt, so wird mit sinngemäßer Unterdrückung des Minuszeichens

$$\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\psi\, d\varphi = 2\sin\Theta\, d\Theta\, d\Psi\sqrt{\frac{1-s}{1+s}}\, ds$$

oder, da nach (46), (34) und (38) $s = 2x - 1$ ist,

$$\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\psi\, d\varphi = 4\sin\Theta\, d\Theta\, d\Psi\sqrt{\frac{1-x}{x}}\, dx. \tag{50'}$$

Hier ist nach (38') $x = \cos^2\frac{\Phi}{2}$.

Es ist also

$$U\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\psi\, d\varphi = 4\, U(x,t)\sqrt{\frac{1-x}{x}}\sin\Theta\, d\Theta\, d\Psi\, dx$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Lage zur Zeit t aus der Lage zur Zeit $t = 0$ durch eine Drehung um den Winkel

$$\Phi\left(x = \cos^2\frac{\Phi}{2}\right)$$

um die durch Θ und Ψ gegebene Achse hervorgeht. Wie zu erwarten war, sind alle diese Achsenrichtungen gleich wahrscheinlich.

Nennt man $V(x,t)dx$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß zur Zeit t die Größe x zwischen x und $x + dx$ liegt unabhängig davon, um welche Achse die zur Überführung der Anfangs- in die Endlage nötige Drehung erfolgt ist, so hat man über Θ und Ψ zu integrieren und erhält unter Berücksichtigung von (37) und (40)

(51) $$V(x,t) = 16\pi\sqrt{\frac{1-x}{x}}\sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-\frac{kT}{W}n(n+1)t} G_n(1, \tfrac{1}{2}, x).$$

Die Konstanten C_n bestimmen sich durch die Bedingungen daß für $t = 0$ und $x \neq 1$

(52) $$V = 0,$$

und für jeden Wert von t

(53) $$\int_0^1 V(x,t)\,dx = 1$$

sein soll.

Wir können die Bedingung (52) auch durch folgende ersetzen:

(52') $$\begin{cases} \text{für } t = 0 \text{ und } 1 > x > 1 - \varepsilon & V = A \\ \qquad\qquad\quad 1 - \varepsilon > x > 0 & V = 0 \end{cases}$$

und dann zum Grenzwert $\lim \varepsilon \to 0$ übergehen. Wegen (53) muß dann $A\varepsilon = 1$ sein, so daß im Endresultat weder ε noch A mehr vorkommt.

Die aus (51) folgende Gleichung

(54) $$V(x,0) = 16\pi\sqrt{\frac{1-x}{x}}\sum_{n=0}^{\infty} C_n y_n(x)$$

multiplizieren wir mit $y_n\,dx$ und integrieren von 0 bis 1. Dann ergibt sich wegen (52')

$$A\int_{1-\varepsilon}^{1} y_n\,dx = 16\pi C_n \cdot \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}}\, y_n^2(x)\,dx,$$

und da die linke Seite mit der für ε geltenden Voraussetzung $y_n(1)A\cdot\varepsilon$ ist[1]), so wird mit Benutzung von (44) und (45)

(55) $$C_n = (-1)^n \frac{2n+1}{8\pi^2},$$

so daß schließlich

(56) $$V(x,t) = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{1-x}{x}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)e^{-\frac{kT}{W}n(n+1)t} G_n(1, \tfrac{1}{2}, x).$$

---

1) Da wir später nur die ersten Glieder der Reihe brauchen werden, liegt kein Bedenken gegen den so ausgeführten Grenzübergang vor.

Für $t = \infty$ bleibt nur das erste, $n = 0$ entsprechende Glied übrig, und man erhält für diesen Fall

$$V(x,t)_{t \to \infty} = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{1-x}{x}},$$

d. h. die Wahrscheinlichkeit, daß der Punkt im Element $d\Theta\, d\Psi\, dx$ liegt, ist

$$\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{1-x}{x}}\, dx \cdot \frac{\sin\Theta\, d\Theta\, d\Psi}{4\pi}.$$

Das ist aber nach (50') gleich $\frac{1}{8\pi^2}\sin\vartheta\, d\psi\, d\varphi$. Nach unendlich langer Zeit ist also, wie vorauszusehen war, Gleichwahrscheinlichkeit der Orientierungen eingetreten.

Aus (56) ergeben sich z. B. die Mittelwerte von $\cos\Phi$ und $\cos^2\Phi$, wo, wie erinnerlich, Φ die Drehung um irgendeine Achse ist, durch die man die Anfangslage in die zur Zeit t gültige Lage überführen kann.

Nach (38') ist nämlich $\cos\Phi = 2x - 1$. Da ferner[1])

$$G_0 = 1; \quad G_1 = 1 - 4x; \quad G_2 = 1 - 12x + 16x^2,$$

so berechnet sich

$$\cos\Phi = -\frac{G_0 + G_1}{2}; \quad \cos^2\Phi = \frac{G_0}{2} + \frac{G_1}{4} + \frac{G_2}{4}. \tag{57}$$

Durch Multiplikation dieser Ausdrücke mit $V(x,t)\,dx$, Integration von 0 bis 1 und Berücksichtigung der Integraleigenschaften [Formel (43) und (44)] folgt

$$\begin{cases} \overline{\cos\Phi} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{-\frac{2kTt}{w}} \\ \overline{\cos^2\Phi} = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}e^{-\frac{2kTt}{w}} + \frac{5}{4}e^{-\frac{6kTt}{w}}. \end{cases} \tag{58}$$

Diese Ausdrücke spielen eine Rolle in der Theorie der polarisierten Fluoreszenz[2]), bei der man annimmt, daß das zur Zeit $t = 0$ angeregte Molekül die absorbierte Energie zur Zeit t in Form von Fluoreszenzstrahlung wieder emittiert. Man kann so den Beitrag berechnen, den die molekularen Rotationen wegen der Verweilzeit t zur Depolarisation des Fluoreszenzlichts liefern.

---

1) Vgl. R. Courant-Hilbert, a. a. O.

2) F. Perrin, Compt. rend. 181. S. 514. 1925; Journ. de phys. et le Radium (6) 7. S. 390. 1926.

Bemerkung: Hätte jedes Teilchen eine im Raume feste Achse, deren Richtung wiederum ganz willkürlich sein könnte, so würde U der Gleichung genügen

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{kT}{w} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}$$

mit den Nebenbedingungen

für $t = 0$ und $\varphi \neq 0$: $\quad U = 0$

sowie

$$\int_0^{2\pi} U\, d\varphi = 1.$$

Daraus ergibt sich

$$U = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\varphi \cdot e^{-\frac{kT}{w} n^2 t}$$

und infolgedessen

$$(58') \qquad \overline{\cos \varphi} = e^{-\frac{kT}{w} t}; \qquad \overline{\cos^2 \varphi} = \frac{1}{2}\left(1 + e^{-\frac{4kT}{w}}\right).$$

Diese Formeln sind von den für variable Achsen gültigen (58) merklich verschieden. Für sehr kleine Werte von $\frac{kT}{w} t$ gehen die Gleichungen (58') in die von **Einstein** angegebene

$$\overline{\varphi^2} = \frac{2kT}{w} t$$

über, während unter derselben Bedingung aus (58)

$$\overline{\Phi^2} = \frac{6kT}{w} t$$

folgt.

§ 3. Orientierung von Rotationskörpern

Wenn es sich nur darum handelt, die Wahrscheinlichkeit für die Achsenrichtungen von Rotationskörpern (z. B. Nadeln oder Scheiben) zu bestimmen, unabhängig davon, welche Orientierung die Teilchen bei festgehaltener Figurenachse haben, so hat man nach (21) von der Maßbestimmung

$$ds^2 = w(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\psi^2) + w'(\cos\vartheta\, d\psi + d\varphi)^2$$

auszugehen, wo w und w' die Reibungswiderstände sind, die bei Rotation um eine zur Figurenachse senkrechte Achse bzw. um die Figurenachse, auftreten. Daraus gewinnt man die partielle Differentialgleichung für U

$$(59)\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial t} = \dfrac{kT}{w}\left[\dfrac{1}{\sin\vartheta}\,\dfrac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\,\dfrac{\partial U}{\partial\vartheta}\right) + \dfrac{1}{\sin^2\vartheta}\right. \\ \left.\cdot\left(\dfrac{\partial^2 U}{\partial\psi^2} - 2\cos\vartheta\,\dfrac{\partial^2 U}{\partial\psi\,\partial\varphi} + \dfrac{w\sin^2\vartheta + w'\cos^2\vartheta}{w'}\,\dfrac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}\right)\right].\end{cases}$$

Hat die Figurenachse anfänglich die Lage $\vartheta = 0$, so wird U für alle Zeiten von ψ und φ unabhängig sein. Es gilt also

$$(59') \qquad \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{kT}{w}\,\frac{\partial}{\partial x}(1 - x^2)\frac{\partial U}{\partial x},$$

wo $x = \cos\vartheta$ gesetzt ist, mit den Nebenbedingungen

(60) für $t = 0$ und $x \neq 1$ $\quad U = 0$

$$(61) \qquad \int_{-1}^{+1} U(x,t)\,dx = 1.$$

Dadurch ist U eindeutig bestimmt.

Ähnlich wie im vorigen Paragraphen ersetzen wir die Bedingung (60) wieder durch die folgende

$$(60')\begin{cases}\text{für } t = 0 \text{ und } -1 < x < 1 - \varepsilon \quad U = 0 \\ \text{für } t = 0 \text{ und } \;\;\; 1 - \varepsilon < x < 1 \quad U = A\end{cases}$$

und gehen dann zum Grenzfall $\lim \varepsilon \to 0$ über, wobei $A\varepsilon = 1$ sein muß wegen (61).

Eine Lösung von (59') ist

$$U(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\, e^{-\frac{kTt}{w} n(n+1)} P_n(x),$$

unter den P_n die Kugelfunktionen verstanden.

Multiplikation von $U(x,0)$ mit $P_n(x)\,dx$, Integration von -1 bis $+1$, Berücksichtigung der Gleichung $P_n(1) = 1$ und der Integraleigenschaften der Kugelfunktionen ergibt $C_n = \frac{2n+1}{2}$, also

$$(62) \qquad U = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2}\, e^{-n(n+1)\frac{kTt}{w}} P_n(x).$$

Für den Mittelwert $\overline{P_n(x)}$ folgt dann aus (62)

$$(63) \qquad \overline{P_n(x)} = \int_{-1}^{+1} P_n(x)\, U\, dx = e^{-n(n+1)\frac{kTt}{w}},$$

und daraus erhält man z. B. die Mittelwerte

$$\bar{x} = e^{-2\frac{kTt}{w}}; \quad \overline{x^2} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} e^{-6\frac{kTt}{w}},$$

Formeln, die Perrin (a. a. O.) bereits ohne Integration von (59') gefunden hat.

§ 4. Allgemeine Molekularbewegung von Rotationskörpern

Neben den Eulerschen Winkeln ϑ, ψ, φ die die Orientierung des Teilchens bestimmen, führen wir nicht die raumfesten Koordinatenachsen x, y, z ein, sondern wir zeichnen durch den Anfangspunkt des Koordinatensystems, der zur Zeit $t = 0$ mit dem Mittelpunkt des Teilchens zusammenfällt, drei aufeinander senkrechte Achsenrichtungen, die den Hauptachsen des Teilchens in seiner augenblicklichen Orientierung parallel sind, und nennen q_1, q_2, q_3 die Koordinaten des Teilchenmittelpunkts in diesem System. Dann gilt

$$\text{(64)} \quad \begin{cases} q_1 = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z \\ q_2 = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z \\ q_3 = \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z, \end{cases}$$

wo die α, β, γ sich in bekannter Weise durch die Eulerschen Winkel ausdrücken.

Dann lautet die Maßbestimmung

$$ds^2 = w_1 (dq_1^2 + dq_2^2) + w_3\, dq_3^2 + w(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\psi^2) + w'(\cos\vartheta\, d\psi^2 + d\varphi^2).$$

Hier bedeuten w_1 und w_3 die Widerstandskoeffizienten für Translationen senkrecht bzw. parallel zur Figurenachse, während w und w' diese Koeffizienten für die Rotationen sind, genau wie im vorigen Paragraphen. Dann lautet die Differentialgleichung für U

$$\text{(65)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} = kT\left[\dfrac{1}{w_1}\left(\dfrac{\partial^2 U}{\partial q_1^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial q_2^2}\right) + \dfrac{1}{w_3}\dfrac{\partial^2 U}{\partial q_3^2}\right] \\ \quad + \dfrac{kT}{w}\left[\dfrac{1}{\sin\vartheta}\dfrac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\dfrac{\partial U}{\partial\vartheta} + \dfrac{1}{\sin^2\vartheta}\right. \\ \quad \left.\cdot\left(\dfrac{\partial^2 U}{\partial\psi^2} - 2\cos\vartheta\dfrac{\partial^2 U}{\partial\psi\,\partial\varphi} + \dfrac{w\sin^2\vartheta + w'\cos^2\vartheta}{w'}\dfrac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}\right)\right]. \end{cases}$$

Ein von ϑ, ψ, φ unabhängiges Integral, das den Bedingungen genügt

für $t=0$ und $q_1 \neq 0$; $q_2 \neq 0$; $q_3 \neq 0$ $U=0$

sowie

$$\iiint U\, dq_1\, dq_2\, dq_3 = 1,$$

ist

$$U = \frac{w_1 \sqrt{w_3}}{(4\pi k T t)^{3/2}}\, e^{-\left[\frac{w_1}{4kTt}(q_1^2+q_2^2)+\frac{w_3}{4kTt}q_3^2\right]}. \tag{66}$$

Mittels (64) folgt

$$w_1(q_1^2+q_2^2)+w_3 q_3^2 = w_1 r^2 + (w_3 - w_1)(\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z)^2,$$

wo $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Somit wird

$$U = \frac{w_1 \sqrt{w_3}}{(4\pi k T t)^{3/2}}\, e^{-\frac{w_1}{4kTt} r^2} \cdot e^{-\frac{w_3 - w_1}{4kTt}(\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z)^2}. \tag{67}$$

Für die Fortbewegung der Teilchen interessiert uns nur der Mittelwert

$$V = \frac{1}{8\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} U \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\psi\, d\varphi. \tag{68}$$

Da $\alpha_3 = \sin\vartheta\cos\psi$; $\beta_3 = \sin\vartheta\sin\psi$; $\gamma_3 = \cos\vartheta$ ist, so können wir auf der Einheitskugel den Punkt $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$ als Pol, Θ als Polabstand, η als geographische Länge einführen und erhalten aus (68) durch Einsetzen von (67)

$$V = \frac{1}{2}\frac{w_1\sqrt{w_3}}{(4\pi k T t)^{3/2}}\, e^{-\frac{w_1}{4kTt}r^2}\int_0^{\pi} e^{-\frac{w_3-w_1}{4kTt} r^2 \cos^2\Theta} \sin\Theta\, d\Theta$$

$$= \frac{w_1\sqrt{w_3}}{(4\pi k T t)^{3/2}}\, e^{-\frac{w_1}{4kTt}r^2}\int_0^{1} e^{-\frac{w_3-w_1}{4kTt} r^2 s^2}\, ds.$$

Ist $w_3 > w_1$ (abgeplattete Rotationskörper), so wird also

$$V = \frac{w_1\sqrt{w_3}}{(4\pi k T t)^{3/2}}\, e^{-\frac{w_1}{4kTt}r^2}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\Phi\left(\sqrt{\frac{w_3-w_1}{4kTt}}\,r\right)}{\sqrt{\frac{w_3-w_1}{4kTt}}\,r}, \tag{69a}$$

wo Φ das Gausssche Fehlerintegral ist. Ist dagegen $w_3 < w_1$ (verlängerte Rotationskörper), so wird

$$(69\text{b}) \qquad V = \frac{w_1 \sqrt{w_3}}{(4\pi k T t)^{3/2}} e^{-\frac{w_1}{4kTt}r^2} \frac{\Psi\left(\sqrt{\frac{w_1 - w_3}{4kTt}}\, r\right)}{\sqrt{\frac{w_1 - w_3}{4kTt}}\, r}.$$

Hier bedeutet[1])

$$\Psi(\sigma) = \int_0^\sigma e^{s^2} d s .$$

In beiden Fällen ist für kleine Argumente $\sqrt{\frac{w_1 - w_3}{4kTt}}\, r$ bezw. $\sqrt{\frac{w_3 - w_1}{4kTt}}\, r$ das Verhalten der Wahrscheinlichkeit bis auf den Faktor $\frac{\sqrt{w_3}}{\sqrt{w_1}}$ genau so, als ob man es mit Kugeln des Widerstandskoeffizienten w_1 zu tun hätte. Ist aber dieses Argument groß, so wird V im ersten Falle kleiner, im zweiten Falle viel größer.

Um den ganz anderen Verlauf des Diffusionsvorgangs bei Scheiben und bei Kugeln deutlich zu machen, wollen wir annehmen, daß der Kugelradius c so gewählt sei, daß der Widerstandskoeffizient $w = 6\pi\mu c$ gleich dem Widerstandskoeffizienten der Scheibe für Verschiebungen in ihrer eigenen Ebene $w_1 = \frac{32}{3}\mu a$ ist, wo a den Scheibenradius bedeutet (vgl. § 5), mit anderen Worten $a = \frac{9\pi}{16} c$. Der Widerstandskoeffizient für Verschiebungen parallel der Figurenachse der Scheibe ist $w_3 = \frac{3}{2} w_1$ (vgl. § 5). Für das Verhältnis der für die Scheibe gültigen Wahrscheinlichkeitsfunktion V_σ [vgl. Formel (69a)] und der für die Kugel maßgebenden $V_\varkappa$, die aus (69a) für $w_1 = w_3$ hervorgeht, folgt dann

$$\frac{V_\sigma}{V_\varkappa} = \frac{\sqrt{3\pi}}{2} \frac{\Phi\left(\sqrt{\frac{w_1}{8kTt}}\, r\right)}{\sqrt{\frac{w_1}{8kTt}}\, r}.$$

Die Tabelle gibt $\frac{V_\sigma}{V_\varkappa}$ als Funktion von $\sqrt{\frac{w_1}{8kTt}}\, r$, und die Figur veranschaulicht den Verlauf.

1) Wegen dieser Funktion beachte man das von R. Gans, Wied. Ann. 49. S. 168. 1916 Gesagte.

$\sqrt{\frac{w_1}{8kTt}}\,r$	$\frac{V_\sigma}{V_\varkappa}$
0,0	1,225
0,3	1,189
0,5	1,130
0,8	1,007
1,0	0,914
1,5	0,699
2,0	0,540
3,0	0,362
4,0	0,271
5,0	0,217

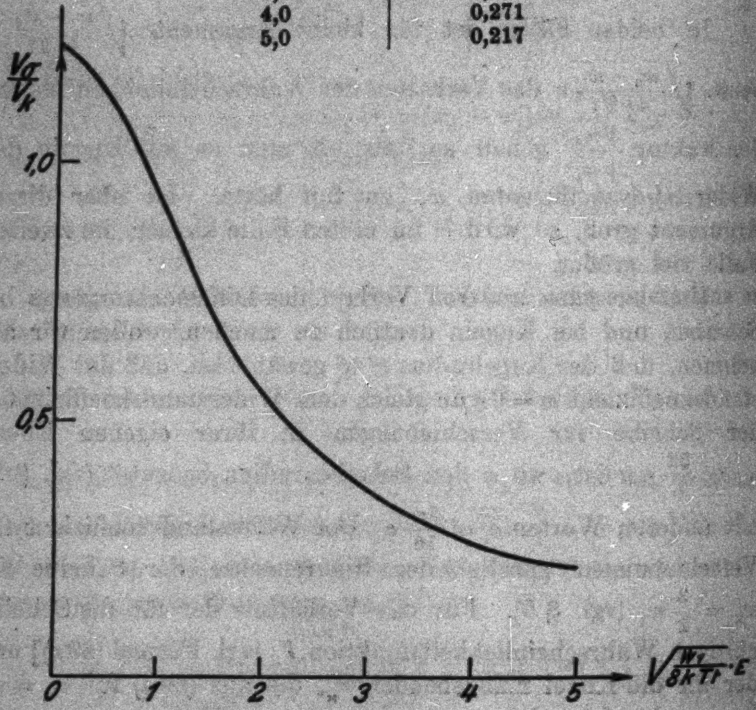


Fig. 1

Die durch Diffusion sich ergebenden Konzentrationen sind also in beiden Fällen gänzlich verschieden.

Den quadratischen Mittelwert $\overline{x^2} = \overline{y^2} = \overline{z^2} = \frac{\overline{r^2}}{3}$ erhält man am einfachsten aus (66), indem man bedenkt, daß $r^2 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$ ist. So ergibt sich nämlich

(70) $$\overline{x^2} = \overline{y^2} = \overline{z^2} = \frac{\overline{r^2}}{3} = \frac{2kTt}{3}\left(\frac{2}{w_1} + \frac{1}{w_2}\right),$$

d. h. man erhält die bekannte Formel

$$\overline{x^2} = \frac{2kT}{W},$$

wenn man

$$(71) \qquad \frac{1}{W} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{w_1} + \frac{1}{w_3}\right)$$

setzt. Hätte man übrigens keine Figurenachse angenommen, sondern die Symmetrieverhältnisse eines dreiachsigen Ellipsoids, so hätte man anstatt (66)

$$U = \frac{\sqrt{w_1 w_2 w_3}}{(4\pi k T t)^{3/2}} e^{-\frac{1}{4kTt}(w_1 q_1^2 + w_2 q_2^2 + w_3 q_3^2)}$$

und dementsprechend

$$(71') \qquad \frac{1}{w} = \frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2} + \frac{1}{w_3}$$

erhalten. Das liegt daran, daß auch dann die Maßbestimmung in zwei Summanden zerfällt, deren erster nur die $d q_1, d q_2, d q_3$ enthält, während der zweite nur von ϑ, ψ, φ und ihren Differentialen abhängig ist, so daß die (65) entsprechende Differentialgleichung auch in zwei Summanden derselben Eigenschaft zerfällt.

Die mittlere Beweglichkeit ist also das arithmetische Mittel der Beweglichkeiten in Richtung der drei Hauptachsen.

§ 5. Die Widerstandskoeffizienten

In der Theorie der Brownschen Bewegung spielen die Widerstandskoeffizienten eine wesentliche Rolle, die deshalb jetzt angegeben werden sollen, und zwar wird man sehr viele praktisch vorkommende Fälle beherrschen, wenn man diese Größen für ein Ellipsoid kennt, von dem Kugel, Scheibe und Stäbchen ja Spezialfälle sind. Trotzdem es keine Mühe macht, die fraglichen Koeffizienten für dreiachsige Ellipsoide anzugeben, wollen wir uns auf verlängerte und abgeplattete Rotationsellipsoide beschränken, deren Halbachsen $a = b$ und c seien.

In Frage kommen die beiden Widerstandskoeffizienten für Translationen in Richtung der Figurenachse und senkrecht zu ihr, die im vorigen Paragraphen w_3 und w_1 genannt wurden, d. h. die Kräfte, welche nötig sind, um dem Teilchen in einer Flüssigkeit des Reibungskoeffizienten μ die Geschwindigkeit 1 in der betreffenden Richtung zu geben. Ferner handelt es

sich um die Widerstandskoeffizienten w' und w für Rotationen um die Figurenachse bzw. um eine zu dieser senkrechten Achse, d. h. die Drehmomente, die erforderlich sind, um dem Teilchen die Winkelgeschwindigkeit 1 um die betreffende Achse zu geben.

1. Translationen

Die einschlägigen Formeln, die von Oberbeck[1]) stammen, finden sich z. B. bei Lamb[2]) wiedergegeben. Der Widerstandskoeffizient für Translationen eines verlängerten Rotationsellipsoids senkrecht zur Figurenachse ergibt sich aus denselben zu

$$w_1 = \frac{16\pi\mu c}{\frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{1-3\varepsilon^2}{2\varepsilon^3}\lg\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}, \tag{72}$$

wo ε die numerische Exzentrizität $\left(\varepsilon^2 = \frac{c^2 - a^2}{c^2}\right)$ bedeutet. Für die Kugel ($\varepsilon = 0$) folgt hieraus die bekannte Stokessche Formel

$$w = 6\pi\mu c.$$

Für Stäbe ($a \ll c$) ergibt sich aus (72) als Grenzfall

$$w_1 = \frac{8\pi\mu c}{\ln\frac{c}{a} + 1{,}1931} \tag{72'}$$

(1,1931 ist $\frac{1}{2} + \ln 2$). Findet die Bewegung in Richtung der Figurenachse statt, so gilt

$$w_3 = \frac{16\pi\mu c}{\frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^3}\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} - \frac{2}{\varepsilon^2}}, \tag{73}$$

die für Stäbe in

$$w_3 = \frac{4\pi\mu c}{\ln\frac{c}{a} + 0{,}1931} \tag{73'}$$

übergeht. Ist das Rotationsellipsoid abgeplattet, so erhält man für die Bewegung senkrecht zur Figurenachse $\left(\varepsilon^2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2}\right)$

$$w_1 = \frac{16\pi\mu c}{(1 + 2\varepsilon^2)\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon^3}\arcsin\varepsilon - \frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon^2}} \tag{74}$$

und im Grenzfall der Kreisscheibe ($c \ll a$)

---

1) A. Oberbeck, Crelles Journ. 81. S. 62. 1876.

2) H. Lamb, Lehrb. d. Hydrodynamik, Leipzig und Berlin 1907 S. 687.

(74′) $$w_1 = \frac{32\mu a}{3},$$

dagegen für die Bewegung in Richtung der Figurenachse

(75) $$w_3 = \frac{8\pi\mu c}{\frac{1-e^2}{e^2} - (1-2e^2)\frac{\sqrt{1-e^2}}{e^3}\arcsin e}$$

und im Grenzfall der Kreisscheibe

(75′) $$w_3 = 16\mu a.$$

2. Rotationen

Die Widerstandskoeffizienten für Rotationen um die Hauptachsen ergaben sich aus einer Untersuchung von Edwardes.[1]) Diese Arbeit ist, soweit ich sehe, wenig beachtet worden, doch lohnt es sich, sie der Vergessenheit zu entreißen.

Übrigens sei gleich bemerkt, daß die für uns wesentliche Formel für das Drehmoment, die sich auf S. 77 der zitierten Abhandlung findet, unrichtig ist, was man schon daraus erkennt, daß sie für $a = b = c$ nicht in die bekannte Kirchhoffsche Formel (20) übergeht. Der bei Edwardes vorkommende Zahlenfaktor $\frac{32}{5}$ muß durch $\frac{16}{3}$ ersetzt werden. Sonst ist alles in Ordnung, wovon ich mich durch Nachprüfen überzeugt habe, insbesondere das Geschwindigkeitsfeld im Unendlichen, welches zur Berechnung des Drehmoments genügt.

Hiernach ruft eine Rotation um die a-Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ω eine Strömungsgeschwindigkeit hervor, deren Komponenten sich durch die Formeln

$$u = \sigma\left[c^2 y \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial z} - b^2 z \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y}\right]$$

$$v = \sigma\left[c^2 y \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y \partial z} - b^2 z \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} - c^2 \frac{\partial \Omega}{\partial z}\right]$$

$$w = \sigma\left[c^2 y \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} - b^2 z \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z \partial y} + b^2 \frac{\partial \Omega}{\partial y}\right]$$

ausdrücken, während der Flüssigkeitsdruck

$$p = 2\varrho\mu(b^2 - c^2)\sigma\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y \partial z}$$

ist (ϱ Dichte, μ Zähigkeit der Flüssigkeit).

---

1) D. Edwardes, Quarterly Journ. of Math. 26. S. 70. 1893.

Hier bedeutet

$$\Omega = \frac{1}{2}\int\limits_{\lambda}^{\infty}\left(\frac{x^2}{a^2+s}+\frac{y^2}{b^2+s}+\frac{z^2}{c^2+s}-1\right)\frac{ds}{D},$$

wo $D = \sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}$ ist und λ durch

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1$$

definiert ist. Ω ist also das Potential eines Ellipsoids, das gleichförmig mit Masse der Dichte $-\frac{1}{2\pi a b c}$ erfüllt ist. Ferner ist σ eine Abkürzung für

$$\sigma = \frac{\omega}{b^2 B + c^2 C},$$

wo

$$B = \int\limits_0^{\infty}\frac{ds}{(b^2+s)D}; \quad C = \int\limits_0^{\infty}\frac{ds}{(c^2+s)D}.$$

Es läßt sich leicht verifizieren, daß die Werte für u, v, w, p den Differentialgleichungen für langsame Bewegungen reibender Flüssigkeiten sowie den für die Oberfläche gültigen Grenzbedingungen $u = 0$; $v = -\omega z$; $w = +\omega y$ genügen.

Das Drehmoment, welches zur Aufrechterhaltung der Rotation nötig ist, kann aus den Werten für u, v, w in unendlicher Entfernung ermittelt werden. Dort nimmt Ω aber den einfachen Wert $-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{r}$ an, da man sich für diesen Fall die Gesamtmasse $-\frac{2}{3}$, die das Potential Ω erzeugt, im Koordinatenursprung konzentriert denken kann.

So ergibt sich als Widerstandskoeffizient für Rotationen um eine zur Figurenachse (c-Achse) eines verlängerten Rotationsellipsoids senkrechte Achse nach der allgemein gültigen Formel

$$w = \frac{16\pi\mu}{3}\,\frac{b^2+c^2}{b^2 B + c^2 C}$$

(76) $$w = \frac{16\pi\mu}{3}a^2 c\,\frac{2-\varepsilon^2}{\frac{1-\varepsilon^4}{2\varepsilon^3}\lg\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}-\frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon^2}},$$

die für $\varepsilon = 0$ (Kugel) in die bekannte Kirchhoffsche Formel $8\pi\mu a^3$ übergeht, während sie für Stäbe ($a \ll c$) den Wert

(76')
$$w = \frac{8\pi\mu}{3} c^3 \frac{1}{\lg\frac{c}{a} + 0{,}1931}$$

annimmt. Findet die Drehung dagegen um die Figurenachse statt, so wird

(77)
$$w' = \frac{16\pi\mu}{3} a^2 c \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{1-\varepsilon^2}{2\varepsilon^3}\lg\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}},$$

ein Ausdruck, der für Stäbe in

(77')
$$w' = \frac{16\pi\mu}{3} a^2 c \frac{1}{1 - \frac{a^2}{c^2}\lg\frac{c}{a}}$$

übergeht.

Ist das Rotationsellipsoid abgeplattet, so wird für Drehungen um eine zur Figurenachse senkrechte Achse

(78)
$$w = \frac{16\pi\mu}{3} a^2 c \frac{2-\varepsilon^2}{\frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon^2} + (2\varepsilon^2 - 1)\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon^3}\arcsin\varepsilon},$$

was für Kreisscheiben ($\lim \varepsilon = 1$) in

(78')
$$w = \frac{32}{3}\mu a^3$$

übergeht. Für Drehungen um die Figurenachse wird

(79)
$$w' = \frac{16\pi\mu}{3} a^2 c \frac{1}{\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon^3}\arcsin\varepsilon - \frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon^2}},$$

d. h. für Kreisscheiben

(79')
$$w' = \frac{32}{3}\mu a^3,$$

das ist derselbe Wert, wie bei Rotationen um eine in der Scheibenebene liegende Drehachse, vgl. (78').

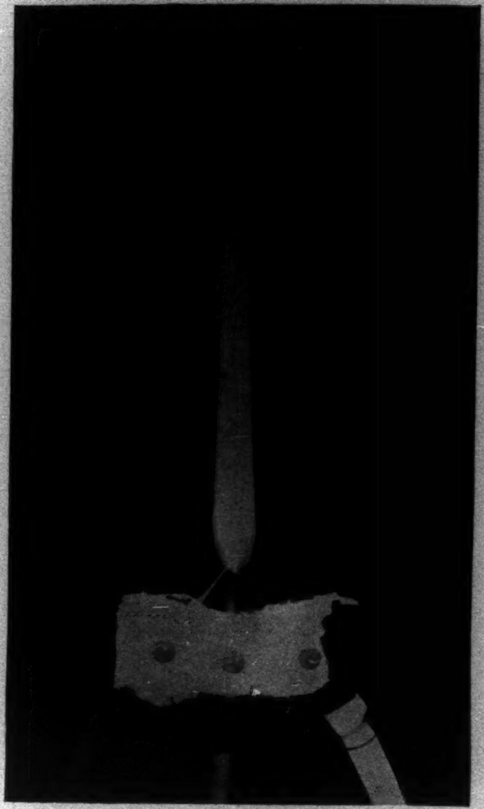
Es braucht wohl kaum erwähnt zu werden, daß Rotationen um eine Figurenachse, also insbesondere auch Rotationen von Kugeln überhaupt, durch Impulse von Molekülen nicht erzeugt werden können. Wenn man also von solchen Rotationen spricht, so ist gemeint, daß das Teilchen nicht genau die Form eines Rotationskörpers hat.

Die Koeffizienten w hängen nach dem Obigen von zwei Variabeln c und ε ab. Durch Statistik über Translations-

beobachtungen kann man nach § 4, Formel (71) $\frac{1}{W}$ bestimmen, d. h. nach (72) und (73) bzw. (74) und (75) einen Ausdruck der Form $c \cdot f_1(\varepsilon)$. Die Messung der Funkelzeiten nicht kugelförmiger, einseitig beleuchteter Teilchen ergibt nach den noch nicht veröffentlichten Untersuchungen Frln. Stadies ein Mittel zur Ermittlung von w, vgl. (76) bzw. (78), eine Größe, die die Form $c^2 f_2(\varepsilon)$ hat. Dadurch ergibt sich prinzipiell eine Möglichkeit, ε und c einzeln, d. h. Größe und Form der Teilchen zu bestimmen.

Königsberg, 25. April 1928, II. Physikalisches Institut.

(Eingegangen 23. Mai 1928)



Der Pfeil deutet die zur Messung benutzte Flammenstelle an

Fig. 1

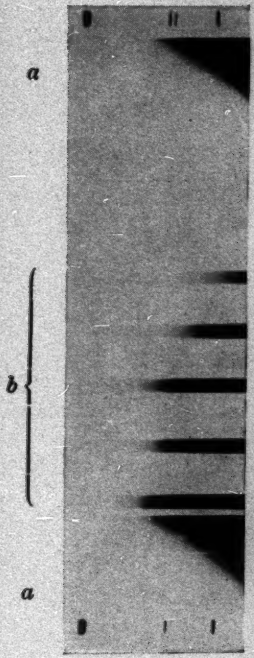
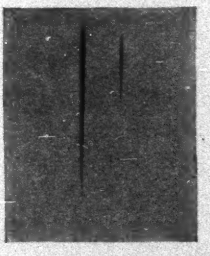


Fig. 3

a) Nernstfaden d. Keil

b) Intensitätsmarken (mit rotier. Sektor)

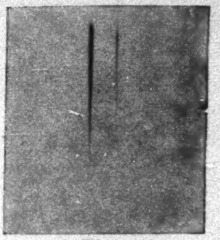


Auswertung des Intensitätsverhältnisses des Rb-Dubletts nach der „Rastermethode“ (mit Kreuzraster)

Fig. 5 **Fig. 5a**

H. Jakob

Auswertung des Intensitätsverhältnisses des Rb-Dubletts nach der „Rastermethode“



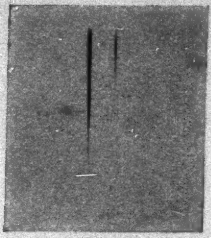
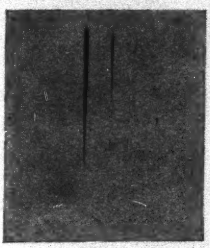


Fig. 6 **Fig. 6a**

Unsymmetrieen infolge Verkantung des Kreuzrasters gegen die Linie



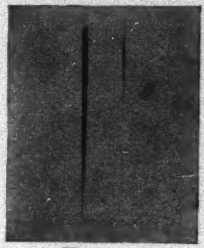


Fig. 7 **Fig. 7a**

Aufnahmen mit Linienraster

Aufnahmen zur Auswertung des „wahren“ Intensitätsverhältnisses

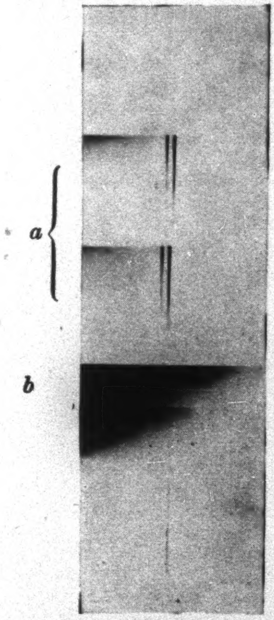


Fig. 15

a) Aufnahmen des Rb-Dubletts
b) Aufnahme zur Feststellung des Reflexionsvermögens des Spiegels am Orte der Rb-Linien

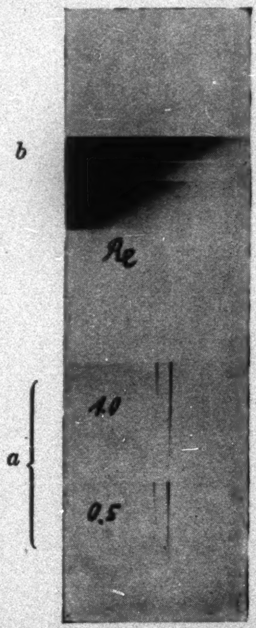


Fig. 16

a) Aufnahmen des Cs-Dubletts
b) Aufnahme zur Feststellung des Reflexionsvermögens des Spiegels am Orte der Cs-Linien

H. Jakob

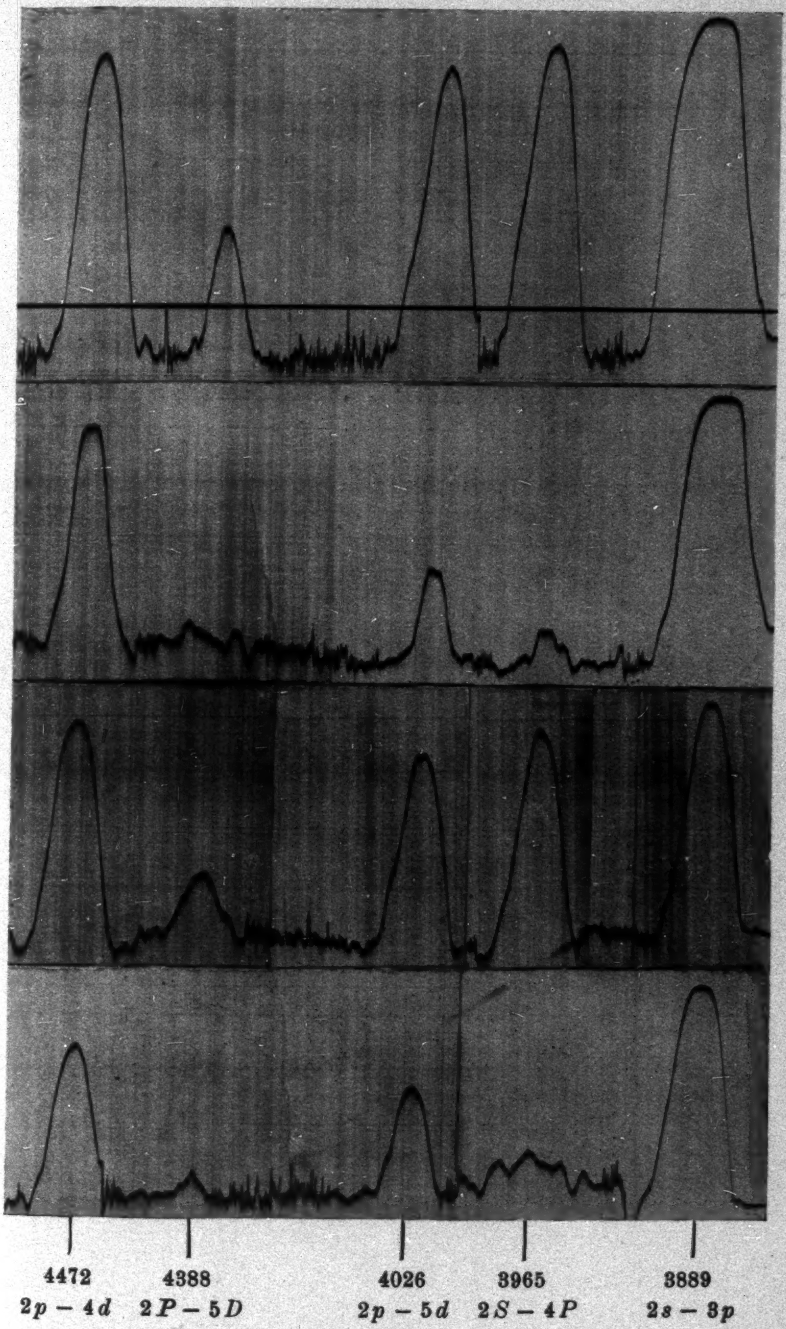


Fig. 1
P. Säule
0,5 mm

Fig. 2
P. Säule
100 mm

Fig. 3
Kath.-Str.

Fig. 4
Kan.-Str.

J. Stark

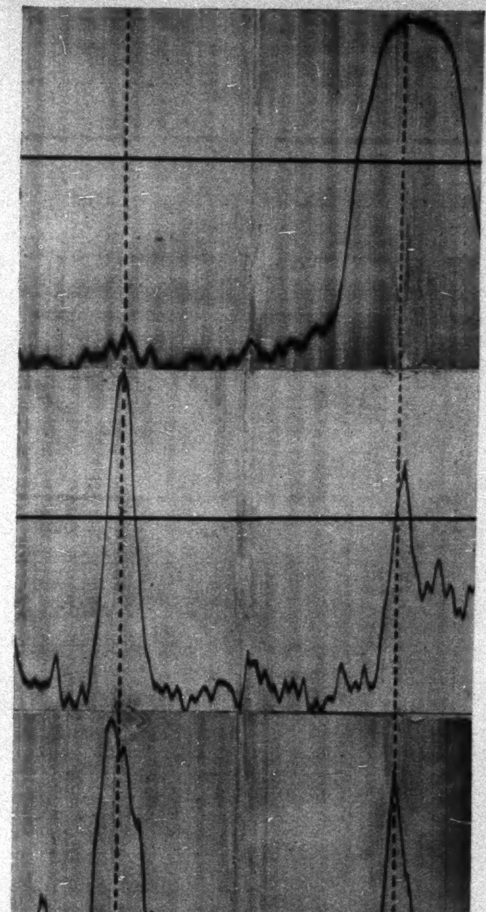


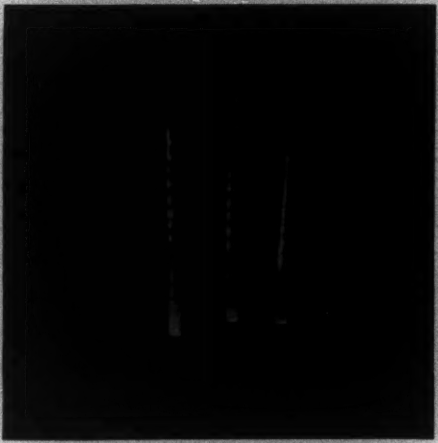
Fig. 1
Hg-Dampf

Fig. 2
5 mm He + 0,001 Hg

Fig. 3
35 mm He + 0,001 Hg

Fig. 4
15 mm Ne + 0,001 Hg

J. Stark



Quarzplatten D; $n = 68125$ Hertz
Kundtsche Staubfiguren in Glasröhren
(Photogr. Aufnahme)
Fig. 6

F. W. Hehlgans

1928 № 13

ANNALEN DER PHYSIK

VIERTE FOLGE. BAND 86

1. *Der Gehalt der Luft an Radium-Emanation, nach Messungen bei Flugzeugaufstiegen;*[1)]

von A. Wigand und F. Wenk

(Hierzu Tafel XIX und XX)

Inhalt: 1. Aufgabe. — 2. Meßverfahren; a) Versuchsbedingungen im Flugzeug; b) Auswahl des Meßverfahrens; c) Apparatur; d) Gang der Versuche, Kontrollen und Eichungen; e) Auswertung; f) Meßgenauigkeit. — 3. Ergebnisse. — 4. Diskussion der Ergebnisse. — 5. Zusammenfassung.

1. Aufgabe

Die Klärung der Frage nach den Ionisatoren, die in der freien Atmosphäre wirken, erfordert eine quantitative Bestimmung der vertikalen Verteilung der Radiumemanation bis zu großen Höhen. Die Ergebnisse einer solchen Untersuchung lassen Aufschlüsse erwarten über die atmosphärische Ionisierungsbilanz, auch über die Herkunft der in der freien Atmosphäre enthaltenen Radiumemanation, über die allgemeinmeteorologisch wichtige Größe des auf der Scheindiffusion durch Turbulenz beruhenden Austauschs, ferner auch über den Ursprung der durchdringenden Höhenstrahlung.

Bisher liegen solche Messungen der Radiumemanation in der freien Atmosphäre noch nicht vor. Die zahlreichen Messungen im Laboratorium und im Freien am Boden erlauben keine Schlüsse auf den Emanationsgehalt der freien Atmosphäre, auch Messungen im Gebirge nicht, wie sie Wright und Smith[2)] auf dem 2460 m hohen Mt. Pauai bei Manila ausgeführt haben.

Nach kurzen Notizen von Ebert und Lutz[3)] zeigten

1) Vorläufige Mitteilungen: F. Wenk, Diss. Halle 1924 (nicht gedruckt); A. Wigand, Phys. Ztschr. 25. S. 684. 1924; „Luftelektr. Untersuchungen bei Flugzeugaufstiegen", Fortschr. d. Chem., Phys. und physik. Chem. (Eucken) 18. Heft 5, Serie B, S. 36. Berlin 1925 (Bornträger).

2) J. R. Wright u. O. F. Smith, Phys. Ztschr. 15. S. 31. 1914.

3) H. Ebert, Münch. Ber., math.-phys. Kl. 30. S. 517. 1900; H. Ebert u. C. W. Lutz, Beitr. z. Phys. d. fr. Atm. 2. S. 201 1908.

Luftproben, die bei einer Münchener Freiballonfahrt aus der Höhe mitgenommen waren, einen Emanationsgehalt der höheren Schichten, welcher der Größenordnung nach nicht wesentlich von dem der unteren Schichten abwich; nähere Angaben über Meßverfahren und Ergebnisse fehlen.

Indirekte Emanationsbestimmungen von Flemming[1]) im Freiballon nach der Methode der Drahtaktivierung, die nur relative Vergleiche gestattet, ergaben, daß an einem Gewittertage die Aktivierung mit der Höhe zunahm; an anderen Tagen wurde Abnahme der Aktivierung mit wachsender Höhe gefunden, einmal auch bis 3700 m Höhe keine Änderung, und darüber, oberhalb von Wolken, bis 8000 m Höhe eine Abnahme im Verhältnis 39 : 2,5.

Messungen der durchdringenden Strahlung lassen ebenfalls indirekte Schlüsse zu auf das Vorhandensein radioaktiver Substanzen in der Luft. Aus den Ergebnissen derartiger Freiballonmessungen konnte Kolhörster[2]) den Emanationsgehalt der Luft über dem Erzgebirge in 3000—4000 m Seehöhe auf $1300 \cdot 10^{-18}$ Curie/cm^3 schätzen; das ist das 15-fache des mittleren Gehalts am Boden.

Brandes[3]) fand durch Aktivierung von Drachendrähten bis 300 m Höhe Zunahme der Aktivierung. Nach zahlreichen ähnlichen Messungen von Bongards[4]) in Lindenberg unterliegt die Aktivierung von Drachendrähten starken zeitlichen Schwankungen. Die Verwertbarkeit solcher Messungen wird beeinträchtigt durch den Einfluß des elektrostatischen Erdfeldes, das unabhängig vom Emanationsgehalt der Luft starken Schwankungen unterworfen ist.

Aus solchen indirekten Messungen läßt sich quantitativ nichts schließen und höchstens qualitativ folgern, daß auch in

---

1) H. Flemming, Phys. Ztschr. 9. S. 801. 1908; Ill. Aeron. Mitt. 13. S. 1019. 1909.

2) W. Kolhörster, Verh. d. D. Phys. Ges. 15. S. 1113. 1913; Phys. Ztschr. 15. S. 1154. 1913; W. Kolhörster (mit A. Wigand u. K. Stoye), Abh. d. Naturf. Ges. Halle. N. F. Nr. 4. S. 43—44. 1914.

3) H. Brandes, Diss. Kiel 1905.

4) H. Bongards, Arb. d. Pr. Aeron. Obs. Lindenberg i. J. 1913 9. S. 411. 1914; Met. Ztschr. 1914. S. 189; 1919. S. 339; Phys. Ztschr. 21, S. 141. 1920.

den bodenfernen Luftschichten radioaktive Zerfallsprodukte vorkommen.

Nimmt man an, daß die radioaktiven Substanzen in der Atmosphäre ausschließlich von der Erdoberfläche stammen, so läßt sich ihre *mittlere* vertikale Verteilung unter dem Einfluß des vertikalen Luftaustausches mit Annahme bestimmter, aus anderen meteorologischen Vorgängen gewonnener Werte für die Größe des Austauschs berechnen.[1]) Ein derartiger „normaler" Verteilungszustand kann sich wohl einstellen, wenn man absehen darf von lokalen und zeitweisen Störungen durch besondere meteorologische Bedingungen, wie starke Aufwärtsbewegung der Luft bei Gewitterbildung oder andrerseits Hemmung der vertikalen Bewegung durch Sperrschichten. Würde ein solcher normaler Verteilungszustand im Mittel über größeren Festlandmassen gleicher Bodenbeschaffenheit festgestellt, so könnte man aus solchen Messungen den Schluß ziehen, daß die Radiumemanation nur von der Erdoberfläche stammt. Auch böten dann solche Messungen die Möglichkeit einer unabhängigen Bestimmung der Austauschgröße. Bei Gewitterlage ist eine (im Vergleich zur normalen) langsamere, beim Vorhandensein starker Sperrschichten eine schnellere Abnahme des Emanationsgehalts der Luft mit wachsender Höhe zu erwarten.

Eine befriedigende Beantwortung der Frage nach der vertikalen Verteilung der Emanation und damit ihrer Herkunft ist nur auf Grund neuer, quantitativer Messungen möglich. Dazu wurde bei unserer Arbeit die Methode der direkten und absoluten Radiumemanationsmessung im Flugzeug angewandt.

2. Meßverfahren

a) Versuchsbedingungen im Flugzeug

Das Flugzeug bietet gegenüber dem Freiballon und Drachen für physikalische Versuche manche Vorteile. Für Emanationsmessungen günstig ist besonders der starke, durch geeignetes Steuern ziemlich konstant zu haltende Fahrtwind. Er garantiert, daß beim Horizontalfluge der Mittelwert des Emanationsgehaltes

1) V. F. Hess u. W. Schmidt, Phys. Ztschr. 19. S. 109. 1918; W. Schmidt, Phys. Ztschr. 27. S. 371. 1926; „Der Massenaustausch in freier Luft und verwandte Erscheinungen", S. 80—82. Hamburg 1925 (Grand).

der betreffenden Schicht gemessen werden kann, und daß Störungen, wie z. B. beim Freiballon durch eventuellen Emanationsgehalt des Füllgases, nicht in Betracht kommen. Der hohe Staudruck des Fahrtwindes kann ferner dazu dienen, die Luft mit gut konstanter Geschwindigkeit durch die Apparatur zu treiben. Weiterhin kann das Flugzeug über beliebige Zeitdauer und in beliebiger Höhenlage horizontal fliegen, was beim Freiballon nur in Stabilitätsschichten gut gelingt. In anderer Beziehung aber sind physikalische Messungen im Flugzeug derart erschwert gegenüber Laboratoriumsmessungen, daß beim Entwurf einer Meßapparatur weitgehend darauf Rücksicht genommen werden muß.

Das zur Verfügung stehende Hallesche Universitätsflugzeug gehörte einem Flugzeugtyp an, wie er im Jahre 1915 zu militärischen Beobachtungsflügen verwendet worden war: Ein verspannter Doppeldecker (RuC 1) mit vorn liegendem Propeller und 160 PS-Mercedes-Standmotor. Das Flugzeug besaß bei Beginn der Versuche eine Gipfelhöhe von etwa 3200 m. Durch Einbau eines überkomprimierten Motors gelang es leider nur, die Gipfelhöhe auf 3800 m zu steigern, da die Motorleistung durch unregelmäßigen Gang stark herabgedrückt wurde. Das Flugzeug konnte schnellstens in 20 Minuten auf 2000 m, in etwas über einer Stunde auf Gipfelhöhe steigen. Beim Geradeausflug in geringen Höhen ließ sich die Eigengeschwindigkeit etwa zwischen 25 und 35 m/sec regulieren. Dem unteren Geschwindigkeitswerte entspricht ein Mindeststaudruck von etwa 40 kg/m^2, mit dem also gemäß den Schwebebedingungen des Flugzeugs auch in jeder beliebigen größeren Höhe gerechnet werden konnte.

Da auf große Gipfelhöhe Wert gelegt wurde, so war schädlicher Luftwiderstand zu vermeiden, und die Instrumente mußten tunlichst in der Karosserie untergebracht werden. Außer dem Beobachterraum mit $120 \times 100 \times 90$ cm^3 stand dafür im wesentlichen eine kleine rückwärtige Verlängerung desselben mit $20 \times 100 \times 90$ cm^3 allein noch zur Verfügung. Das Gewicht der Apparatur durfte auch nicht allzu hoch werden.

Besonders bei einem starkmotorigen Flugzeug, wie dem zur Verfügung stehenden, treten manche Erscheinungen auf, die bei Laboratoriumsversuchen nicht vorkommen. Die Motor-

vibrationen teilen sich dem ganzen Flugzeug mit. Instrumente, die im Propellerluftstrom liegen, werden außerdem durch Turbulenzböen erschüttert. Ferner ist das Flugzeug Beschleunigungen (hauptsächlich vertikalen) ausgesetzt, die bei stark böigem Wetter die Größe der Schwerebeschleunigung übersteigen können. Für ungünstige Landungen muß mit der Gefahr des Überschlagens oder, besonders im rückwärtigen Beobachtersitz, wenigstens mit stärkeren Stößen gerechnet werden. Das Motorengeräusch macht eine akustische Verständigung mit dem Führer unmöglich. Fahrtwind und Kälte in größerer Höhe erschweren außerordentlich schriftliche Notizen. Vibrationen, Motorengeräusch, Fahrtwind, räumliche Beengung stören beim Beobachten und Ablesen der Instrumente. Durch die hohen Kosten des Brennstoffes beim starkmotorigen Flugzeug und durch Betriebsschwierigkeiten des Motors (besonders bei Temperaturen unter 0°) wurden unsere Versuche erschwert und die Zahl der Aufstiege wie auch die Versuchsdauer und die Meßgenauigkeit beschränkt; dies war auch für die Auswahl des Meßverfahrens ausschlaggebend.

b) Auswahl des Meßverfahrens

Als Maßeinheit für den Gehalt der Luft an Ra-Emanation kann man den Gehalt einer Luftmasse oder eines Luftvolumens wählen. Obwohl es bei den großen Druck- und Temperaturdifferenzen innerhalb des Höhenbereiches empfehlenswert schien, die Luftmasse in Übereinstimmung mit den Überlegungen von Hess und Schmidt[1]) zugrunde zu legen, so wurde doch die andere Einheit gewählt, weil sie in der Literatur üblicher ist, und zwar ein Emanationsgehalt von $1 \cdot 10^{-18}$ Curie/cm³. Mit der angegebenen Luftdichte läßt sich die Einheit umrechnen.

Bei den zu erwartenden Konzentrationen unter $100 \cdot 10^{-18}$ Curie/cm³ war eine *Anreicherung* der Emanation in dem zur Ionisationskammer geführten Luftquantum unbedingt erforderlich, da die Messung des Ionisationsstromes in der Luftprobe mit den zur Verfügung stehenden Mitteln erst von etwa $2000 \cdot 10^{-18}$ Curie/cm³ mit einiger Genauigkeit möglich gewesen wäre. Die Anreicherung konnte nur im Flugzeug selbst ge-

1) V. F. Hess u. W. Schmidt, a. a. O.

schehen, da wegen Raummangels große Gefäße oder wegen der Absorptionsfähigkeit gummierten Stoffes Ballonets nicht verwendbar schienen; jedenfalls kamen Gefäße von solcher Größe, daß damit ausreichende Luftproben aus der Höhe für mehrere Messungen hätten herabgenommen werden können, nicht in Betracht. Ferner mußte die Anreicherung in der kurzen Zeit von einigen Minuten ausführbar sein.

Es sind im wesentlichen drei Anreicherungsmethoden bekannt: Die Absorption durch Flüssigkeiten, z. B. Toluol, die Adsorption durch Kohle und die Kondensation durch flüssige Luft. Erfolgreich zu Meßzwecken verwendet wurden nur die beiden letzten Methoden. Sämtliche Methoden und ihre Eignung zu Meßzwecken werden in Lehrbüchern der Radioaktivität[1]), besonders eingehend von Olujic[2]) behandelt. Danach ist die Absorptionsmethode auch im vorliegenden Fall ohne weiteres auszuscheiden. Auch die Kondensationsmethode erscheint wegen der technischen Schwierigkeiten im Flugzeuge zunächst nicht als die vorteilhafteste. Am günstigsten schien uns anfangs die Adsorptionsmethode unter Verwendung einer geeigneten Kohleart zu sein. Der Kohlemenge ist durch die Manipulationen beim Entgasen eine obere Grenze gesetzt aus technischen und Genauigkeitsgründen. Damit nun durch die große Geschwindigkeit, mit der eine kleine Kohlensäule durchströmt werden müßte, die Adsorption nicht allzu sehr beeinträchtigt wird, wurde bisher eine für Flugmessungen unzulässig große Meßdauer von mindestens 10 Stunden bei dieser Methode angewandt. Es war jedoch denkbar, daß sich außer der bisher meist verwendeten Kokosnußschalenkohle noch andere Kohlesorten finden ließen, bei denen der Adsorptionsvorgang rascher erfolgen würde und daher größere Durchströmungsgeschwindigkeit zuließe. Das „Rademanit" genannte, fein verteilte Kohlepulver kürzt nach Gockel[3]) die Meßdauer nicht ab.

1) St. Meyer u. E. Schweidler, Radioaktivität, 2. Aufl. Leipzig 1927 (Teubner).

2) J. Olujic, Diss. Freiburg (Schweiz) 1918; Jahrb. d. Rad. 15. S. 158. 1918.

3) A. Gockel, Luftelektr. Beobachtungen, Neue Denkschr. d. Schweiz. Naturf. Ges. 54. Abh. 1. S. 4. 1917.

Daraufhin wurde eine körnige *Kohlesorte* untersucht, die im Kriege in Gasmasken als Adsorptionsmittel für Giftgase Verwendung gefunden hatte. Zunächst sollte nur ihr Adsorptionsvermögen (in dem eben definierten Sinne) mit demjenigen der Kokosnußschalenkohle verglichen werden. Zu diesem Zwecke wurden die Kohlekörnchen jeder der beiden Sorten in je eine gläserne Verbrennungsröhre gefüllt und bildeten darin geometrisch gleiche Säulen. Diese Unterbringung eignete sich sowohl für das Durchströmen der Luft als auch für das nachherige Erhitzen, das zum Austreiben der Ra-Emanation nötig war. Emanationshaltige Zimmerluft passierte zunächst eine Trocknungsanlage, wurde dann in die beiden Kohlesäulen verzweigt, in einem gemeinsamen Windkessel wieder vereinigt und von dort durch eine Saugpumpe abgesaugt. Die Durchsaugegeschwindigkeit wurde relativ hoch angesetzt und nach Angabe zweier eingebauter Strommesser für beide Stromzweige stets gleich groß einreguliert. Durch gleichzeitiges Erhitzen im Gasofen auf Glühtemperatur wurden dann die beiden Kohlesäulen entgast, darauf das emanationshaltige Gas in zwei gleiche Ionisationskammern überführt und die Sättigungsströme gemessen. Das Verhältnis des Ionisationsstromes bei Gasmaskenkohle zu demjenigen bei Kokosnußkohle war nur 0,7 im Mittel. Dadurch erübrigten sich eingehendere Messungen, und die Adsorptionsmethode mußte mangels einer geeigneteren Kohlesorte für die Flugmessungen als unverwendbar angesehen werden. Ein weiterer prinzipieller Nachteil dieses Verfahrens wäre gewesen, daß der Staudruck des Fahrtwindes dabei nicht zur Durchströmung hingereicht hätte, so daß eine kompliziertere Pumpvorrichtung nötig geworden wäre. Schließlich sprach noch gegen die Methode, daß der Adsorptionskoeffizient auch von der Temperatur[1]) und Feuchtigkeit abhängt.

So wurde denn trotz der technischen Schwierigkeiten die sogenannte *Kondensationsmethode* für die Flugzeugmessungen gewählt. Als ihre ausschlaggebenden Vorteile waren anzusehen, daß damit die weitaus kürzeste Meßdauer erreichbar schien, und daß der Staudruck des Fahrtwindes für die Durchströmung zu genügen versprach. Angestrebt wurde die Beschränkung der Versuchsdauer auf höchstens 15 Minuten.

1) H. Roth, Diss. Frankfurt 1915; F. Mohr, Diss. Frankfurt 1916.

c) Apparatur

Außer den Fluganforderungen wurde von der Apparatur verlangt, daß sie möglichst leicht zu transportieren sei, da die Flüge zur Aufnahme der Luftproben in Adlershof-Berlin, die Ionisationsmessungen zur Bestimmung des Emanationsgehaltes, die Bodenmessungen und Eichungen dagegen in Halle a. S. ausgeführt werden sollten. Während jedes Fluges war die Aufnahme mehrerer Luftproben in verschiedener Höhe erwünscht.

Da die Hantierungen im Flugzeug möglichst zu reduzieren, solche mit flüssiger Luft zu vermeiden waren, so schien es am vorteilhaftesten, denjenigen Teil der Luftstromleitung, in dem die Anreicherung vor sich gehen sollte, vor dem Aufstieg mit dem Kühlbad von flüssiger Luft zu umgeben und darin bis nach der Landung zu lassen. Dann konnte die flüssige Luft so untergebracht werden, daß sie während des Fluges und bei den Erschütterungen einer normalen Landung nicht ausfließen und die Insassen gefährden konnte. So mußte für jede Messung ein besonderes derartiges Kühlstück vorhanden sein. Es handelte sich nun darum, die Kühlstücke so klein und leicht wie möglich zu halten. Im Gegensatz dazu sollte aber möglichst schnell eine möglichst große Luftmenge durch die Leitung strömen. Und auf keinen Fall durfte der Anreicherungsvorgang unter diesen Forderungen leiden.

Die Wahrscheinlichkeit, daß sich bei der geringen Konzentration (im Mittel 1—2 Atome/cm^3) mehrere Ra-Emanationsatome um einen Kondensationskern gruppieren und einen Kristall bilden können, der sich durch seine Schwere aus dem Gasgemisch ausscheidet, erscheint sehr gering. So wird wohl eher von einer Art *Adsorptionsvorgang* an den festen Wänden des Kühlers zu sprechen sein.

Die Frage, unterhalb welcher Temperatur der Sättigungsdampfdruck der Emanation so gering wird, daß Kondensation eintreten kann, kommt bei den erwähnten Konzentrationen ebenfalls nicht in Betracht, da von einem Partialdruck dabei wohl kaum noch gesprochen werden kann. Jedenfalls mußte die Temperatur, bei der man noch einen merklichen Dampfdruck der Ra-Emanation beobachten kann [-155^0 nach

Rutherford und Soddy[1]), — 164° nach Loria[2])] möglichst weit unterschritten werden. Eine untere Grenze für das praktische Arbeiten bildete die Verflüssigungstemperatur des Sauerstoffes von — 183°.

Mit einem einfachen zylindrischen Gefäß, wie es z. B. Olujic[3]) benützt hatte, war die Kühlwirkung unzulänglich. Schon Satterly[4]) und Ashman[5]), die zuerst diese Methode benutzten, hatten Kühlstücke verwendet, welche Ähnlichkeit mit den Kühlern der heutigen Verbrennungsmotoren besaßen. Für den vorliegenden Zweck schien ein *Lamellenkühler* besonders gut, wie er in den Jahren 1913—15 für schwächere Flugmotoren verwendet worden war. Die Kühlerlamelle war 10 cm hoch, 2 cm breit, 50 cm lang; die Stärke des Messingbleches, welches die Wärme abzuleiten hatte, betrug 0,3 mm. Da die volle Länge von 50 cm für die Unterbringung in einem Kühlbad mit flüssiger Luft schon sehr hinderlich gewesen wäre, wurde mittelst einer theoretisch gewonnenen, in der Praxis bewährten Formel[6]) die nötige Länge berechnet. Die Formel lautet:

$$\frac{T_0 - T_A}{T_0 - T_E} = e^{-\frac{a}{c}\frac{Ul}{f}\left(\frac{v_0}{v}\right)^{n-1}}.$$

Darin bedeutet:

T_0 = Temperatur des Bades,
T_A = „ der eintretenden Prüfluft,
T_E = „ der austretenden Prüfluft,
c = spezifische Wärme der Luft (c_p),
U = Umfang eines Kühlerquerschnitts,
f = freie Querschnittsfläche,
l = Kühlerlänge,
v = Durchströmungsgeschwindigkeit,
$\left.\begin{matrix} a \\ v_0 \\ n \end{matrix}\right\}$ = Form- und sonstige Konstanten.

1) E. Rutherford u. F. Soddy. Phil. Mag. (6) 5. S. 561. 1903.
2) S. Loria, Wien. Ber. (IIa) 124. S. 829. 1915.
3) J. Olujic, a. a. O.
4) J. Satterly, Phil. Mag. (6) 16. S. 584. 1908.
5) G. C. Ashman, Ill. Journ. (4) 26. S. 119. 1908.
6) Pülz, Kühlung und Kühler für Flugmotoren (Handb. d. Flugzeugkunde Bd. VI, 2. Teil) 1920, Berlin W 62, Richard Karl Schmidt u. Co.

Der Rechnung zugrunde gelegt wurde eine Durchströmungsgeschwindigkeit von 1 Liter/sec. Eine genaue Bestimmung von f war schwierig, doch mußte f zwischen 4 und 8 cm^2 liegen. Für $f = 8$ war bei einer Kühlerlänge von 20 cm ein T_E zu erwarten von -158^0, für $f = 4$ ein T_E von -172^0. So wurde eine Kühlerlänge von 25 cm gewählt.

In Fig. 1, Taf. XIX, ist k das vordere von drei solchen nebeneinander eingebauten Kühlerstücken; ein derartiges Kühlerstück k ist noch zur Ansicht des Längsschnittes auf den Apparat gestellt. Es besteht aus vier geriffelten und geknickten Einzellamellen in Parallelschaltung. Die Temperatur der ausströmenden Luft wurde bei der Höchststromgeschwindigkeit von 0,7 Liter/sec, wie wir sie später verwendeten, mit einem Pentanthermometer zu mindestens -165^0 gemessen, was als genügend anzusehen war. Eine Versuchsdauer von 3 bis 7 Minuten konnte dann hinreichen.

Die zweite für die Berechnung der Kühler und der Durchströmungsgeschwindigkeit wichtige Frage ist, welcher Bruchteil des Emanationsgehaltes bei den relativ hohen Geschwindigkeiten festgehalten wird, vor allem *wie der Adsorptionskoeffizient a von der Durchströmungsgeschwindigkeit v abhängt*;

$$a = \frac{\text{adsorbierte Em-Menge}}{\text{gesamte Em-Menge}}.$$

Die quantitative Erfassung dieser Abhängigkeit wird erleichtert durch die Strömungsform, die im Kühler als vorherrschend vorausgesetzt werden kann. Die zu prüfende Luft muß nämlich den Kühler in einer großen Zahl von Stromröhren durchströmen, die im wesentlichen nicht aneinander grenzen, sondern von den Kühlerwänden begrenzt werden. In einem kleinen Luftquantum, das einen kleinen Teil einer solchen Stromröhre ausfüllen möge, sei an Ra-Emanation die Menge M vorhanden. Der Adsorptionsvorgang wird dann darin bestehen, daß pro Zeiteinheit jeweils ein bestimmter Teil von M nach den Kühlerwänden hin diffundiert, um dort durch Adsorption festgehalten zu werden. Wie beim Massenwirkungsgesetz wird also M in den betreffenden Luftquantum abnehmen nach der Formel:

$$\frac{dM}{dt} = -M\varphi.$$

Der Koeffizient φ hängt von der Stelle ab, an der sich das Luftquantum in der Stromröhre gerade befindet. Bezeichnet man also mit s die Längserstreckung der Stromröhre, so kann man schreiben:

$$\varphi = \varphi(s),$$

und die Geschwindigkeit der Fortbewegung des Luftquantums längs der Stromröhre wird dann sein:

$$\frac{ds}{dt} = v f(s);$$

hier bedeutet v eine bestimmte, für die vorliegende Rechnung konstante Geschwindigkeit der Gesamtströmung in Liter/sec.

Man erhält so die Gleichung:

$$\int_{M_0}^{M_1} \frac{dM}{M} = -\frac{1}{v} \int_{s_0}^{s_1} \frac{\varphi(s)}{f(s)}\, ds.$$

$\varphi(s)$ wird nur innerhalb eines bestimmten Gebietes der Stromröhre von Null verschieden sein, nämlich dort, wo die Wände die zur Adsorption erforderliche tiefe Temperatur besitzen, kann dagegen in den wärmeren Zu- und Ableitungen praktisch gleich Null gesetzt werden. Dann ist, wenn nur die Einlaßöffnung s_0 und die Auslaßöffnung s_1 außerhalb des kaltwandigen Gebietes gelegt werden, das Integral auf der rechten Seite als Apparatkonstante anzusehen, die mit v_0' bezeichnet werden möge. Es wird also:

$$\frac{M_1}{M_0} = e^{-\frac{v_0'}{v}},$$

und man erhält für den Adsorptionskoeffizienten a' der Stromröhre:

$$a' = \frac{M_0 - M_1}{M_0} = 1 - e^{-\frac{v_0'}{v}}.$$

In einer größeren Luftmenge L möge nun gleichmäßig die Emanationskonzentration c herrschen. Auf jede der vielen Stromröhren des Kühlers entfalle beim Durchströmen der Luftmenge L ein kleiner Teil dL derselben. Von dem Emanationsgehalt wird also adsorbiert werden:

$$\int c\, a'\, dL = a\, c\, L,$$

wobei a nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung als eine

Konstante des ganzen Kühlers angesehen werden kann. Bezeichnet man mit v_0 den Mittelwert von v_0', so kann man die bisher für die Stromröhre geltende Beziehung, nunmehr auf den ganzen Kühler angewandt, schreiben:

$$a = 1 - e^{-\frac{v_0}{v}}.$$

v_0 ist dann ebenfalls eine Apparatkonstante des ganzen Kühlers. Zeichnet man den Verlauf der a-v-Kurve, indem man ein gemessenes, zusammengehöriges Wertepaar für a und v (vgl. später) zugrunde legt, so zeigt sich, daß die Kurve flach verläuft bei kleinem v für a nahe gleich 1 und sich nach steilerem Verlauf wieder verflacht bei großem v. Bei großem v ist angenähert:

$$a = \frac{v_0}{v}.$$

Das a für v nahe gleich Null auch bei sehr kleinen Konzentrationen der Emanation gleich 1 gesetzt werden kann, scheint aus allen früheren Versuchen nach der Kondensationsmethode hervorzugehen.

Streng gültig sind diese Überlegungen für die Abhängigkeit des a von v nicht, da der Einfluß, den v auf die Strömungsform (Turbulenz) und die Temperaturverteilung im Kühler ausübt, nicht berücksichtigt ist. Wie groß die Apparatkonstante v_0 werden würde, und in welchem Bereiche der a-v-Kurve die Messungen vorgenommen werden mußten, war von vornherein nicht abzusehen und konnte sich erst aus den Eichungen ergeben. Die mit den entwickelten Formeln erzielte Annäherung wurde als hinreichend angenommen, da die Abweichungen wohl nicht sehr groß sein können. Es erschien aber gut, unter allen Umständen die Möglichkeiten zur Adsorption recht groß zu machen. Deshalb wurde dem 25 cm langen Kühlerstück (k) noch ein 8 cm langes Kästchen aus Messingblech ($k\,m$) angeschlossen (Fig. 1, Taf. XIX), das mit Glaswolle gefüllt war. Außer der Adsorptionswirkung war hier eine Möglichkeit zum Abfiltrieren von Emanationsnebel gegeben, falls sich ein solcher direkt oder aus Kohlensäure oder Wasserdampf mit Emanationsatomen als Kondensationskernen bilden sollte.

Damit die Kühler sich nicht durch Reif- und Schneeansatz von Kohlensäure und Wasser verstopfen sollten, wurde der

Luftstrom vorher durch einen Kühlturm (*t*, Figg. 1 und 2, Taf. XIX) geleitet. Er hatte dort ein Messingrohr zu umströmen, das durch die aus dem Kühlbad verdampfte flüssige Luft und eingefüllten Kohlensäureschnee gekühlt wurde. Diese Vorkühlung leistete zwar gute Dienste, befriedigte aber nicht voll; ein langsames Sinken der Durchströmungsgeschwindigkeit infolge von Kühlerverstopfung ließ sich bei größerer Luftfeuchtigkeit nicht vermeiden.

Die Luft sollte vom Staudruck des Fahrtwindes durch die Apparatur getrieben werden. Deshalb wurde über dem Oberdeck des Flugzeuges außerhalb des Bereiches von Propellerwind und Auspuff eine *Staudüse* (*d*, Fig. 2 und 3, Taf. XIX und XX) angebracht, die durch einen Schlauch (*s*, Fig. 3, Taf. XX) von 1,8 cm Weite elastisch mit den Kühlturm *t* verbunden war. Direkt hinter der Staudüse hatte die Luft ein eingebautes *Venturirohr* (*v*, Fig. 2, Taf. XIX) zu passieren, wie es zum Messen der Eigengeschwindigkeit eines Flugzeugs dient. Durch Ausgießen mit Paraffin wurde das Venturirohr derart verengt, daß bei den geplanten Durchströmungsgeschwindigkeiten eine genügende Druckdifferenz gegenüber dem Staudruck auftrat, um durch eine Alkoholsäule genau genug gemessen werden zu können. Der annähernde Staudruck der Durchströmung wurde, um alle Störungen zu vermeiden, im vorderen Teil der Staudüse abgenommen.

Die Eichung dieses Strommessers geschah mit einem Gasmesser und gestattete, etwa $^1/_{10}$ Liter/sec mit guter Genauigkeit abzulesen. Der Eichung nach folgte die entstehende Druckdifferenz p mit großer Genauigkeit dem Bernoullischen Gesetz:

$$v^2 = K \cdot \frac{p}{\varrho} \cdot$$

Die Luftdichte ϱ, deren Änderungen mit der Flughöhe beachtet werden mußten, ließ sich bei den Flügen dem jeweiligen Meteorogramm entnehmen. Diese Art der Strommessung konnte auch für die Bodenmessungen verwendet werden, wobei die Luft mit einer Rotationspumpe durch die Apparatur gesaugt wurde. Ein besonderer Gasmengenmesser war damit überflüssig. Von der Strommeßdüse führten zwei dünne Schlauchleitungen zu einem einfachen Alkoholmanometer (*m*, Fig. 2

und 3, Taf. XIX und XX), das im Flugzeuge vor dem Beobachtersitz angebracht war. Während des Versuchs wurde der Gang des Manometers zum Entwurf der Strom-Zeit-Kurve dauernd durch Ablesungen verfolgt.

Zur Aufnahme der flüssigen Luft war ein besonderes *Gefäß* zu schaffen. Es hatte so viel flüssige Luft aufzunehmen, daß trotz der Verdunstungsverluste während der Versuche und auch im Ruhezustand noch etwa 3 Stunden nach dem Einfüllen der flüssigen Luft genügend darin war, um die Kühler sicher auch bei kleinen Neigungen völlig zu bedecken. Wärmeleitungsberechnungen ergaben, daß das unter den gegebenen Raum- und Gewichtsverhältnissen nur mit einem doppelwandigen Vakuumgefäß möglich war. Bei den Berechnungen leisteten Untersuchungsergebnisse aus dem Physikalischen Institut in Leipzig[1]) wertvolle Dienste. Mit den Gefäßdimensionen stiegen der Bedarf an flüssiger Luft, das Apparaturgewicht, statische und sonstige Schwierigkeiten sehr rasch. Es mußte deshalb mit 3 Kühlern und infolgedessen mit 3 Messungen pro Flug vorlieb genommen werden.

Das Gefäß bestand aus einer rechteckigen inneren Wanne von $37 \times 25 \times 9\ \mathrm{cm}^3$, die von einer äußeren in 1 cm Wandabstand umgeben war. Die Wände waren aus nur 1 mm starkem Eisenblech, der Wärmekapazität und des Gewichts wegen. Die Oberflächen des Zwischenraumes wurden mit Silberpapier überzogen. Ein Gerippe aus paraffinierten Holzstäben stützte die Wände gegeneinander ab, wo die großen Seitenflächen den Atmosphärendruck nicht aushielten. Die oberen Ränder der beiden Wannen waren durch Konstantanbleche miteinander verbunden, um durch die erforderliche metallische Verbindung nicht allzuviel Wärme übergehen zu lassen. Vor dem Fluge wurde der Zwischenraum frisch evakuiert. Etwas in den Zwischenraum eingeführte Holzkohle sollte bei der Abkühlung mit flüssiger Luft das Vakuum verbessern.

Die durch die Praxis bestätigten Vorberechnungen ergaben einen Bedarf von etwa 8 kg (7 Liter) flüssiger Luft. Davon entfielen nur etwa 0,4 kg auf die Abkühlung der zu prüfenden

1) F. Banneitz, G. Rhein u. B. Kurze, Ann. d. Phys. 61. S. 113. 1920.

Luft, 2,5 kg dienten zur Deckung der Verluste beim Eingießen und zur Abkühlung der eingetauchten Metallteile, 3 kg verdampften infolge Wärmeleitung in 3 Stunden und 2 kg hatten nach 3 Stunden noch die Kühler zu bedecken. Eine Nachfüllung wurde nie nötig, wäre auch während des Fluges nicht durchführbar gewesen.

Die Montierung der drei Kühler (*k*) und des Vorkühlturms (*t*) an einem starken Brett *b* ist aus den Figg. 1 und 2, Taf. XIX, ersichtlich. Die Kühler sind mit dem Kühlturm durch Metallröhren von 12 mm Weite verbunden und können durch Metallhähne (*h*) mit großer Bohrung abgeschlossen werden. Sonst sind keine Hähne in der Leitung. An den Enden der Kühler strömt die Luft durch Messingrohre ins Freie; hier konnten Korkstopfen aufgesetzt werden.

Bei den hohen Temperaturunterschieden des Kühlaggregates waren alle Abdichtungen außer der metallischen Lötung unzulänglich. Metallteile, die der freien Luft ausgesetzt waren, erhielten einen Wärmeschutz, der in den Figg. 1 und 2, Taf. XIX, nur am Kühlturm vorhanden ist. Das ganze Kühlaggregat wurde vor dem Beobachter an starken Gummiseilen aufgehängt, und zwar so, daß eine Neigung um die Querachse des Flugzeuges möglich war, die leicht vom Beobachter reguliert werden konnte, besonders während des meist steilen Gleitfluges. Beim Anhängen des Gefäßes mit flüssiger Luft (*g*, Fig. 2, Taf. XIX) tauchten die Kühler in die flüssige Luft ein. Der obere Rand des Gefäßes konnte durch starke Haltekeile so gegen eine Filzlage am Brett *b* gepreßt werden, daß auch bei den Landungserschütterungen keine flüssige Luft ausfloß. Die Schlauchverbindung (*s*, Fig. 3, Taf. XX) hinderte die Neigungsmöglichkeit nicht.

Die zu den Versuchen verwendete flüssige Luft mußte einen möglichst hohen Prozentgehalt an *Sauerstoff* besitzen. Bei Verwendung von flüssiger Luft mit höherem Stickstoffgehalt trat (ein Zeichen für die gute Kühlung!) Sauerstoffkondensation in den Kühlern während der Durchströmung ein, wodurch die Meßresultate eines Fluges vernichtet wurden.

d) Gang der Versuche, Kontrollen und Eichungen

Zur Durchführung eines Versuchs hatte der Beobachter nach dem Erreichen einer gewünschten Höhenlage durch

Zeichen an den Flugzeugführer das Horizontalfliegen in dieser Schicht einzuregulieren. Dann war der Korkstopfen eines noch freien Kühlers abzunehmen und der entsprechende Hahn zu öffnen. Während des Versuches von 7 Minuten Höchstdauer mußten nach Manometer- und Stoppuhrablesungen die Daten zum Entwurf der Zeit-Strom-Kurve notiert werden. Zur Beendigung des Versuchs waren Hahn und Kühlermündung wieder zu schließen; gleichzeitig war eine Zeitmarke am Barographen anzubringen und dem Flugzeugführer das Zeichen zum Weitersteigen oder zum Gleitflug zu geben.

Temperatur und Luftdruck der geflogenen Höhenstufe und damit die Luftdichte ergaben sich aus der entstehenden markanten Stelle im *Meteorogramm*, die beim Horizontalflug entstand. Das Meteorogramm lieferte ferner die aerologischen Daten zur genauen Bestimmung der Flughöhe und zur Beurteilung der Luftschichtung während des Fluges. Dazu wurden entweder die Registrierungen zweier geeichter Baro- und Thermographen oder aber bequemer und genauer das Meteorogramm eines Wigand-Koppeschen Flugzeugmeteorographen[1]) (*w*, Fig. 3, Taf. XX) benutzt, so weit ein solcher verfügbar war. Auch dienten die zeitlich und örtlich benachbarten Lindenberger Fesselaufstiegsergebnisse zum Vergleich und zur Ergänzung.

Sogleich nach der Landung wurden von Gehilfen die drei mit Salzwasser gefüllten *Blechbüchsen* (*r*, Fig. 1, Taf. XIX) von je 2 Liter Inhalt an das Flugzeug gebracht, zum Umfüllen der in den Kühlern gesammelten Emanation. Die Büchsen konnten an die Bordwand des Flugzeuges gehängt und durch Gummischläuche und Gummistopfen mit den Kühlermündungen verbunden werden (Fig. 1, Taf. XIX). Dann wurden die Quetschhähne am unteren Ende der Blechbüchsen geöffnet und, nach dem Ausfließen einer geringen Menge Salzlösung, die Dichtheit der Verbindung und die Konstanz des Unterdrucks geprüft.

Jetzt wurde das Gefäß mit flüssiger Luft nach unten abgenommen. Die frei hängenden Kühler erwärmten sich rasch auf Außentemperatur, und die Ausdehnung ihres Luftinhaltes ließ je etwa 0,3 Liter der Salzlösung ausfließen. Nun wurden die Hähne geöffnet. Dadurch liefen die restlichen 1,7 Liter

1) A. Wigand u. H. Koppe, Ztschr. f. Flugtechn. u. Motorl. 14. S. 106. 1923.

Salzlösung aus jeder Blechbüchse vollends aus und saugten durch Spülung mit Außenluft, deren Emanationsgehalt vernachlässigt werden durfte, die etwa noch im Kühler verbliebenen Reste der Emanationsanreicherung mit in die Blechbüchsen hinein, was durch die langgestreckte Kühlerform begünstigt wurde. Dann konnten die Blechbüchsen zum Transport metallisch verschlossen werden. Ra-Emanation adsorbierende feste Substanzen befanden sich nicht im Innern der Blechbüchsen. Die Absorption durch Reste der hochkonzentrierten Kochsalzlösung kann nach Kofler[1]) nicht in Betracht kommen. Kontrollmessungen hierzu, auch über etwaige Emanationsabsorption durch einen vorübergehend angebrachten Gummiverschluß, ließen keinerlei Verlust erkennen.

Nach 20 bis 30 Stunden konnte der Inhalt der Blechbüchsen im Laboratorium in Halle a. S. in die *Ionisationskammer* überführt werden. Diese faßte 3 Liter. Sie wurde evakuiert und mit einer Blechbüchse verbunden. Dann wurde die Luft in der Blechbüchse dadurch in die Ionisationskammer hinübergedrängt, daß man Salzwasser durch den Unterdruck in der Büchse von unten langsam einströmen ließ. Damit war die vollständige Überführung gewährleistet. Der restliche Inhalt der Ionisationskammer wurde unter Nachspülen der Röhrenverbindung mit Zimmerluft gefüllt, deren relativ hoher Emanationsgehalt bei geeigneten Maßregeln konstant blieb. Der hierdurch bewirkte Anteil am Ionisationsstrom war auch bei der Messung des Normalverlustes (Ionisationsstrom ohne Prüfluft) vorhanden, fiel also bei der Subtraktion des Normalverlustes vom Ionisationsstrom heraus.

Nach der Überführung wurde drei Stunden bis zur Messung des Ionisationsstromes gewartet, so daß die Frage, ob Zerfallsprodukte der Emanation aus dem Blechgefäß mit in die Ionisationskammer gelangten oder nicht, innerhalb der Fehlergrenzen keine Rolle spielte.

Die Ionisationskammer war ein Zylinderkondensator mit innen 11 cm Durchmesser und 30 cm Höhe. Es konnte hier die Formel von Duane und Laborde[2]) angenähert gelten,

---

1) M. Kofler, Phys. Ztschr. 9. S. 6. 1908.

2) W. Duane u. A. Laborde, Le Radium 7. S. 162. 1910; Compt. rend. 150. S. 1421. 1910.

da die Abmessungen des Zylinders denen des mittelgroßen Zylinders von Duane und Laborde gut entsprachen; exaktere Eichungen waren den Umständen nach nicht möglich und dürften auch für unsern Zweck entbehrlich sein, da es uns im wesentlichen auf die Untersuchung der Änderung des Emanationsgehalts mit der Höhe ankam. Die Kammer wurde auf ein Wulfsches Zweifadenelektrometer aufgesetzt. Die Kapazität des Systems betrug 9,85 cm. Sättigungsstrom war durch die Höhe der angelegten Spannung von 440 Volt gewährleistet. Als negativ geladene innere Stabelektrode stand für jede der drei Messungen ein besonderer Messingstab zur Verfügung, damit die bei einer Messung darauf angehäuften Zerfallsprodukte der Ra-Emanation nicht die nachfolgende Messung stören konnten. Diese Stäbe waren genau gleich geformt, hatten aber verschiedene Eigenstrahlung, so daß der Normalverlust für jeden Stab besonders bestimmt werden mußte.

Zur Messung des *Ionisationsstromes* wurde der Spannungsabfall verfolgt, indem die Spannung an der inneren Elektrode der Ionisationskammer in gleichen Intervallen von 5 oder 10 Minuten (je nach der Schnelligkeit des Abfalls) abgelesen wurde; daraus ließ sich der mittlere Spannungsabfall, unter Voraussetzung seiner Linearität in einem gewissen Bereich, nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnen. Vermindert um den Normalverlust ergab er den gesuchten korrigierten Spannungsabfall.

Die Messung des *Normalverlustes* geschah in der Weise, daß eine Blechbüchse mit entemanierter Luft gefüllt und der Ionisationsstrom ihres Inhalts genau so gemessen wurde, wie bei den eigentlichen Messungen mit Prüfluft. Die Kontrollluft konnte deshalb für entemaniert gelten, weil sie in ganz langsamem Strom einen Kühler mit flüssiger Luft passiert hatte, so langsam, daß der Adsorptionskoeffizient hierbei sehr nahe gleich 1 sein mußte.

Die Bestimmung des *Adsorptionskoeffizienten* a für die Hauptversuche geschah dadurch, daß die drei Kühler hintereinander geschaltet und die Anreicherungen aus dem Emanationsgehalt einer durch das ganze Aggregat gesaugten Luftmenge in den einzelnen Kühlern wie beim eigentlichen Versuch gemessen wurden. Bezeichnet man mit m_1, m_2, m_3 die in den Kühlern 1,

2, 3 gemessenen Mengen Ra-Emanation, so gilt für den Adsorptionskoeffizienten die Beziehung:

$$a = 1 - \frac{m_2}{m_1} = 1 - \frac{m_3}{m_2}$$

unter der Voraussetzung, daß a bei allen Kühlern denselben Wert hat. Obgleich die Luft in den zweiten und dritten Kühler mit tieferer Temperatur als in den ersten gelangte, war doch die Gleichung erfüllt und somit die Berechnungsweise von a als berechtigt erwiesen. Da während des Versuchs die Durchströmungsgeschwindigkeit langsam sank, so war ein Mittelwert zu berechnen, der wie bei den Hauptversuchen $\bar{v} = 0{,}55$ Liter/sec betrug. Der zugehörige Mittelwert des Adsorptionskoeffizienten ergab sich zu $a = 0{,}33$; die Einzelwerte dieser Messungen waren 0,35, 0,33, 0,30. Danach wurde gemäß den Überlegungen im vorigen Abschnitt die a-v-Kurve entworfen, und es ergab sich, daß im verwendeten Meßbereich das Gesetz: $a = \frac{v_0}{v}$ als befriedigende Annäherung gelten durfte. Infolge der hohen zulässigen Geschwindigkeit bei der Durchströmung konnte die Versuchsdauer einer Flugmessung auf 3 bis 7 Minuten beschränkt werden.

e) Auswertung

Ist ΔV der in der Ionisationskammer gemessene, mit dem Normalverlust korrigierte Spannungsabfall in Volt/Stunde, so ergibt sich der gemessene Ionisationsstrom bei einer Kapazität von 9,85 cm zu: $i = 0{,}91 \cdot 10^{-5}\, \Delta V$ (ESE).

Zur Berechnung des Emanationsgehalts der untersuchten Luft wird für die benutzte Ionisationskammer die angenäherte Gültigkeit der Formel von Duane und Laborde angenommen. Während bei voller Strahlungswirkung der Ra-Emanation und des aktiven Niederschlags durch 1 Curie Ra-Emanation ein Ionisationsstrom von $6{,}1 \cdot 10^6$ (ESE) erzielt wird, ist nach dieser Korrektionsformel bei der benutzten Ionisationskammer mit innen 11 cm Durchmesser und 30 cm Höhe nur eine Strahlungswirkung von 75 Proz. zu erwarten; denn der volle Ionisationsstrom ist nach Duane-Laborde zu multiplizieren mit dem Faktor:

$$\left(1 - 0{,}572\,\frac{\text{Oberfläche}}{\text{Volumen}}\right) = \left(1 - \frac{1230}{2860}\right) = 0{,}75\,.$$

1 Curie Ra-Emanation erzeugte also für unsere Versuche einen Ionisationsstrom von

$$i_0 = 0{,}75 \cdot 6{,}1 \cdot 10^6 \text{ (ESE)}.$$

Um den Zerfall der Emanation zwischen dem Zeitpunkt der Entnahme der Luftprobe und dem Zeitpunkt der Ionisationsmessung in Rechnung zu stellen, ist i mit dem Zerfallsfaktor

$$z = e^{\lambda T}$$

zu multiplizieren, wo λ die Zerfallskonstante der Ra-Emanation, T die zwischen der Durchströmung und der i-Messung verflossene Zeit bedeutet.

Die in Curie gemessene Menge Ra-Emanation, die in einem Kühler adsorbiert war, betrug also:

$$\frac{i}{i_0} \cdot z = E' \int_0^t a_{(v)} v \, dt,$$

wenn E' die Curieanzahl in 1 Liter Prüfluft bedeutet, t die Zeit der Durchströmung in Sekunden, v die Durchströmungsgeschwindigkeit in Liter/Sekunden und $a_{(v)}$ den von v abhängigen Adsorptionskoeffizienten.

Gemäß der Überlegung im Abschn. 2c kann man mit Mittelwertbildung setzen:

$$\int_0^t a_{(v)} v \, dt = a_{(\bar{v})} L.$$

Hier bedeutet

$$L = \int_0^t v \, dt = \bar{v} t$$

die durchgeströmte Luftmenge in Litern gemessen. $a_{(\bar{v})}$ läßt sich mit dem Mittelwert $\bar{v}$ bestimmen aus der durch die Eichversuche (Abschn. 2d) gewonnenen $a_{(v)}$-Kurve. Für

$$\bar{v} = 0{,}55 \text{ Liter/sec}$$

wird diese Berechnungsweise mit $a = 0{,}33$ genau gelten; wenn bei vereinzelten Messungen andere $\bar{v}$-Werte benutzt werden mußten, ist dies besonders vermerkt.

Bezeichnet man schließlich mit E die Curieanzahl im Volumen 10^{18} cm³, so ist: $E = 10^{15} E'$, und der wie üblich in

der Einheit 10^{-18} Curie/cm³ gemessene Emanationsgehalt der Luft ergibt sich durch Berechnung nach der Formel:

$$E = 10^{18} \cdot \frac{i}{i_0} \cdot z \cdot \frac{1}{a\,L} = 10^{18} \cdot \frac{0{,}91 \cdot 10^{-5} \cdot \Delta V}{0{,}75 \cdot 6{,}1 \cdot 10^{6}} \cdot z \cdot \frac{1}{0{,}33 \cdot L} =$$

$$= 6{,}1 \cdot 10^{3} \cdot \frac{z \cdot \Delta V}{L}\,.$$

f) Meßgenauigkeit

Um die Genauigkeit der Resultate abschätzen zu können, muß man zunächst die einzelnen Faktoren des Ansatzes betrachten. Die konstanten Faktoren der Kapazität und der Duane-Laborde-Korrektion können nur geringe Fehler hervorbringen, die überdies sämtliche Messungen gleichsinnig und proportional der Emanationsmenge beeinflussen.

Von den variablen Faktoren läßt sich z mit jeder wünschenswerten Genauigkeit bestimmen. Die Faktoren a und L sind voneinander abhängig. Die Genauigkeit von L ist mitbestimmt durch die Genauigkeit der Stromdüseneichung und der Manometerablesungen. Der Entwurf der Strom-Zeit-Kurve wurde dadurch beeinträchtigt, daß bei Vertikal- und Horizontalböen, ungleichmäßigem Gang des Motors und Höhensteuerbewegungen des Flugzeugführers kleine Geschwindigkeits- und Manometerschwankungen auftraten, die nicht einzeln abgelesen und noch weniger zeitlich registriert werden konnten. Hierbei kam aber ein Umstand zustatten, der aus den Überlegungen über die Beziehung zwischen a und v mit einer hierfür genügenden Sicherheit entnommen werden kann. In dem verwendeten Geschwindigkeitsbereich kann man nämlich a umgekehrt proportional v setzen, wodurch die Mittelwertsbildung in dem Integral

$$\int_0^t a\,v\,d\,t$$

in hohem Maße begünstigt wird. Der durch a und L gemeinsam entstehende Fehler kann nach den Beobachtungen bei den Eichungen auf ± 10 Proz. veranschlagt werden, solange die mittlere Durchströmungsgeschwindigkeit $\bar{v}$ nahe gleich 0,55 Liter/sec eingehalten worden war.

Dazu tritt noch ein weiterer Fehler, der sich aus der Differenz Meßstrom minus Normalverlust ergibt. Eine Schätzung

dieses Fehlers kann aus der Feststellung entnommen werden, daß der Spannungsabfall bei mehreren Messungen mit unveränderter Ionisation und Isolation um ± 0,15 Volt/Stunde divergierte. Der so für die Differenz bestehende Fehler von ± 0,3 Volt/Stunde ist unabhängig vom Emanationsgehalt und fällt daher bei kleinen Emanationsmengen verhältnismäßig stark ins Gewicht, so daß unterhalb eines bestimmten Emanationsgehaltes von

$$E_0 = 6{,}1 \cdot 10^3 \cdot \frac{z}{L} \cdot 0{,}3$$

nicht mehr gemessen werden konnte.

Die Grenzen des gesamten möglichen Fehlers jedes Versuchs, wie sie sich nach diesen Ausführungen berechnen lassen, sind für die Flugmessungen in Tab. 1 angegeben; die Fehler der konstanten Faktoren wurden dabei vernachlässigt.

3. Ergebnisse

Sämtliche Flugzeugaufstiege fanden in Adlershof am Südostrande Berlins von der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt aus statt (Seehöhe 35 m). Bei geringen Flughöhen wurde kaum die engere Umgebung dieses Geländes verlassen; nur in größeren Höhen mögen sich die Flüge 10 bis 15 km vom Flugplatze entfernt haben, was belanglos sein dürfte.

In Tab. 1 sind die Ergebnisse der fünf erfolgreichen Aufstiege angegeben. Die mit Stern versehene Messung des vierten Aufstiegs konnte wegen Motorenschadens nur mit relativ kleiner Durchströmungsgeschwindigkeit ausgeführt werden. Da auch hier, mangels einer genauen Bestimmung des Adsorptionskoeffizienten von a für diesen Fall, $a = 0{,}33$ gesetzt wurde, so ist der mögliche Fehler vermutlich größer als der angegebene. An dem relativ hohen Emanationsgehalt, wie er bei dieser Messung gefunden wurde, ist jedoch deshalb nicht zu zweifeln. Bei einer ebenfalls mit Stern versehenen Messung des zweiten Fluges war die Abweichung der Durchströmungsgeschwindigkeit von $v = 0{,}55$ geringer.

Tab. 2 gibt die Resultate der Bodenmessungen wieder. Diese wurden alle im Gelände des Physikalischen Instituts in Halle a. S. angestellt. Für die beiden mit Stern versehenen Werte gilt das zuvor Gesagte. Der Wert von Zimmer 69, in

dem die Ionisationsmessungen angestellt wurden, ist durch direktes Einführen der Zimmerluft in die Ionisationskammer ohne Anreicherung bestimmt worden.

Tabelle 1

Flug Nr.	Datum	Zeit	Seehöhe in m	Unters. Luftmenge in Litern	Ra-Em.-Gehalt 10^{-18} Curie/cm³	Fehlergrenze ±	Luftdichte in kg/m³	Wind in m/sec	Wetterlage	Höhe der unteren Sperrschichtgrenze in m
I.	30.10.23	13^{40-45}	900	157	190	36	1,23	W z N 14	Antizyklonal mit Randstör.	850
II.	31.10.23	10^{48-55}	1100–1200	278	328*	32*	1,09	W z S 9	desgl.	800
		10^{10-15}	2300–2400	169	0	15	0,97	W z S 12		
III.	8.4.24	12^{29-34}	550–600	172	168	36	1,21	NNW 11	Antizyklonal	(keine Sperrschicht)
		12^{52-57}	2200–2400	182	24	14	1,02	NNW 14		
		13^{25-30}	3800	147	0	17	0,87	NNW 18		
IV.	6.3.24	11^{40-45}	250–350	166	42	18	1,26	ENE 10	desgl.	1000
		11^{45-48}	350	89	24	26	1,25	ENE 10		
		$11^{55}-12^{02}$	1250–1350	123	141*	>24*	1,14	ENE 7		
V.	20.8.24	8^{50-54}	300–400	134	426	63	1,14	SW 12	Zyklonal	600
		$8^{59}-9^{04}$	1400–1500	174	28	17	1,02	SWzW 9		
		9^{13-16}	2000	98	0	24	0,98	SWzW 9		

Tabelle 2

Ort: Physikal. Instit. Halle	Datum	Zeit	Ra-Em-Gehalt 10^{-18} Curie/cm³
Zimmer 69 . .	mehrfache Messungen		7700 (Mittelwert)
Zimmer 44 . .	11. 12. 23	16^{30}	13400
	11. 12. 23	17^{00}	13800
Turmspitze (30 m hoch)	1. 3. 23	17^{00}	3620
Garten	1. 3. 24	17^{30}	495
Turmspitze . .	13. 3. 24	17^{00}	2710*
Garten	13. 3. 24	17^{30}	354*

4. Diskussion der Ergebnisse

Zur Beurteilung der *Flugmessungsergebnisse* (Tab. 1) ist es erforderlich, die Vorgeschichte der Luftmassen, aus denen die Luftproben stammen, wenigstens für eine so lange Zeitdauer

in Erwägung zu ziehen, daß die Ra-Emanation während dieser Zeit nicht größtenteils zerfallen sein kann.

Für die beiden ersten Flüge herrschen nahezu dieselben meteorologischen Verhältnisse. Ein Hochdruckgebiet befand sich über Deutschland; doch reichten die Randstörungen eines Tiefdruckgebietes mit dem Kern südlich von Island bis in die Gegend von Berlin. Ein Windsprung und eine untere Sperrschichtgrenze in etwa 800 m Seehöhe lassen daher den Schluß zu, daß auch die untersten Messungen beider Flüge bereits über einer Aufgleitfläche stattfanden, und daß die untersuchte Luft im Verlauf eines Tages aus Bodennähe im Gebiet der britischen Inseln herangeführt sein konnte.

Für den dritten Flug lag keinerlei Schichtung vor; über die Herkunft der Luftmassen waren nur unzureichende Aufschlüsse zu erlangen. Mit zunehmender Höhe nahm die Temperatur bis 3800 m gleichmäßig von 0° auf −26° ab, also mit einem Gradienten von −0,7°/100 m. Die ziemlich unstabile Schichtung dürfte eine gleichmäßige Durchmischung der Luft begünstigt haben, wenn auch der antizyklonale Witterungscharakter mit der langsam absteigenden Luftbewegung den Bodeneinfluß in der Höhe herabgemindert haben mag.

Beim dritten Fluge wurde ein Apparat zur Messung der *durchdringenden Strahlung*[1]) (Kolhörster Nr. I) mitgeführt. Der gefundene Durchschnittswert während des ganzen Fluges für die Ionisierungsstärke infolge durchdringender Strahlung ergab einen Überschuß von 3,2 Ionen/cm³ sec über den am Boden gemessenen Wert. Dabei befand sich der Apparat 40 Minuten lang über 2000 m, davon 15 Minuten lang nahe der Gipfelhöhe von 3800 m. Dieser Wert stimmt gut überein mit den Zahlenwerten, die bei anderen Messungen[2]) in solchen Höhen der freien Atmosphäre gefunden wurden.

Ob beim vierten Flug eine Aufgleitfläche angenommen werden kann, ist nicht ganz sicher. Durch Temperaturverlauf, Windsprung und Dunstgrenze war aber jedenfalls in 1100 m Seehöhe die obere Grenze einer etwa 100 m starken Sperr-

---

1) W. Kolhörster, Phys. Ztschr. 14. S. 1066. 1913. — W. Kolhörster (mit A. Wigand u. K. Stoye), Abh. der Naturf. Ges. Halle, N. F. Nr. 4. 1914.

2) A. Wigand, Phys. Ztschr. 25. S. 445. 1924.

schicht gekennzeichnet. Infolgedessen wäre es denkbar, daß die Luftmasse in der Höhe der obersten Messung (1250 bis 1350 m) mit dem größeren Emanationsgehalt infolge Aufgleitens an der Sperrschichtgrenze wesentlich anderer Herkunft war als die Luftmasse in der Höhe der beiden unteren Messungen (250 bis 350 m).

Der fünfte Flug fand statt nach Vorüberziehen eines Teiltiefs und damit verbundener Abkühlung. Starke Bodenerwärmung hatte kurz vor dem Aufstieg zu Kumulusbildung in 500 m Seehöhe geführt. Der hohe Emanationswert der untersten Messung, wie er auch am Boden häufig gefunden wird, ist damit durch die kräftige vertikale Konvektion erklärt. Die beiden oberen Messungen fanden oberhalb der leichten Sperrschicht des oberen Kumulusniveaus statt. Über dieser Sperrschicht betrug der Temperaturgradient ziemlich gleichmäßig $-0{,}7^{\circ}/100$ m.

Das übereinstimmende Ergebnis unserer Flugmessungen ist *allgemein eine starke Abnahme des Gehalts der Luft an Ra-Emanation mit zunehmender Höhe in der freien Atmosphäre.* Für den Betrag dieser Abnahme ist die atmosphärische *Schichtung* maßgebend: Beim Vorhandensein von Sperrschichten für die vertikale Konvektion kann der Emanationsgehalt stärker mit zunehmender Höhe abnehmen als beim Fehlen von Sperrschichten. Andererseits kann aber auch oberhalb solcher Schichtgrenzen ein Emanationsgehalt von derselben Größenordnung wie am Erdboden vorkommen, wenn die betreffende Luftmasse über einer Aufgleitfläche in einer zum Zerfall der Emanation relativ kurzen Zeit in die Höhe gelangt ist.

Herkunft und Vorgeschichte der Luft in den verschiedenen Höhen bestimmen die Änderung des Emanationsgehalts mit der Höhe. Daß die in der Atmosphäre vorhandene Emanation *nur vom Erdboden her* stammt, ist durch unsere Flugmessungen erwiesen, zum mindesten für die Tage, an denen die Flüge stattfanden. Die Ansicht von Bongards[1]), daß die Ra-Emanation in der Erdatmosphäre normalerweise oder auch nur an gewissen Tagen von der Sonne infolge ihrer Tätigkeit stamme, findet in unseren Messungsergebnissen bis 3800 m Höhe keine

---

1) H. Bongards, Phys. Ztschr. **21**. S. 141. 1920; **24**. S. 16 u. 295. 1923; vgl. dazu A. Gockel, Phys. Ztschr. **24**. S. 500. 1923.

Stütze; auch die neueren Flugmessungen von Bongards[1]) in 3000 m Höhe nach der Induktionsmethode mit Aspiration sprechen offenbar nicht dafür.

Zur Berechnung einer mittleren Vertikalverteilung der Ra-Emanation, wie sie von Meyer und Schweidler[2]) nach der vorläufigen Mitteilung unserer Versuchsergebnisse ausgeführt worden ist, scheint uns, in Anbetracht der großen Mannigfaltigkeit im einzelnen, die Zahl der Beobachtungen und Beobachtungstage noch nicht ausreichend.

Die allgemeine Abnahme der Ra-Emanation mit zunehmender Höhe ist nach unseren Flugmessungen stärker, als sich nach der Berechnung von Hess und Schmidt[3]) ergibt, bei der angenommen wurde, daß die Emanation nur vom Erdboden her stammt, und daß für den *vertikalen Luftaustausch* solche *mittleren Verhältnisse* herrschen, wie sie sich nach den Erfahrungen bei anderen meteorologischen Vorgängen ergeben haben. Das läßt darauf schließen, daß an unseren Versuchstagen die Austauschgröße geringer war als die mittlere; die vorhandenen Sperrschichten wirkten hier bestimmend, indem sie dem Austausch hinderlich waren. Andererseits weisen die Messungen von Flemming[4]), nach der allerdings unsicheren Methode der Drahtaktivierung, an einem Gewittertage mit starker Vertikalkonvektion und Niederschlag zwischen 900 und 1800 m Höhe auf einen wesentlich höheren Emanationsgehalt hin als am Boden.

Nimmt man keine konstante Austauschgröße für alle Höhen an und berücksichtigt auch den Einfluß des vertikalen Temperaturgradienten und von Sperrschichten, so ergibt die Rechnung nach einer neueren Untersuchung von Schmidt[5]) eine stärkere Abnahme des Ra-Emanationsgehalts mit zu-

1) H. Bongards, Phys. Ztschr. 25. S. 679. 1924.

2) St. Meyer u. E. Schweidler, Radioaktivität, S. 585. 2. Aufl. Leipzig (Teubner) 1927.

3) V. F. Hess u. W. Schmidt, Phys. Ztschr. 19. S. 109. 1918. — W. Schmidt, Der Massenaustausch in freier Luft und verwandte Erscheinungen, S. 80—82. Hamburg (Grand) 1925.

4) H. Flemming, Phys. Ztschr. 9. S. 801. 1908; Ill. Aeron. Mitt. 13. S. 1019. 1909.

5) W. Schmidt, Phys. Ztschr. 27. S. 371. 1926.

nehmender Höhe als bei den früheren, vereinfachten Berechnungen von Hess und Schmidt, in befriedigender Übereinstimmung mit unseren Flugmessungen. Die von Schmidt auf diesem Wege berechneten Werte für den Gesamtgehalt der Atmosphäre an Ra-Emanation und die Abgabe der Emanation seitens des Erdbodens sind daher als plausibel anzusehen.

Daß die Emanation in der Atmosphäre nur vom Erdboden stammt, und zwar vom festen Boden, ist auch durch die stets sehr klein gefundenen Emanationsmengen in der untersten Luftschicht *auf See in Landferne* erwiesen. Bei den Carnegiefahrten 1915 bis 1921[1]) war der Mittelwert von 333 solchen Messungen des Ra-Emanationsgehalts $1{,}2 \cdot 10^{-18}$ Curie/cm³, von 48 Messungen südlich von 50° südlicher Breite sogar nur $0{,}3 \cdot 10^{-18}$ Curie/cm³. Auf dem tiefgefrorenen und schneebedeckten Boden Spitzbergens fand Behounek[2]) den Emanationsgehalt der Luft $< 10 \cdot 10^{-18}$ Curie/cm³. Auf Helgoland ist nach Messungen von Hess[3]) der Emanationsgehalt der Luft mindestens 10 mal kleiner als der mittlere Gehalt über dem Festland. Diese geringen Emanationsmengen sind von gleicher Größenordnung wie die, entsprechend der Meßgenauigkeit unserer Flugmessungen, in Tab. 1 mit 0 bezeichneten Werte der bodenfernen Schichten in 2000—3800 m Höhe.

Der Versuch einer *Ionisierungsbilanz* der freien Atmosphäre wird für die unteren Luftschichten von der gemessenen und auch rechnerisch durch die Austauschgröße bestimmbaren Vertikalverteilung der Ra-Emanation als eines maßgebenden und sehr variablen Ionisators ausgehen und außerdem die durchdringende Höhenstrahlung sowie die weniger wirksamen anderen radioaktiven Substanzen als Ionisatoren berücksichtigen. Dabei hat eine Mittelbildung vorläufig wenig Aussicht auf Erfolg; vielmehr wird man zunächst mit Bestimmungen von Ionisierungsstärke, Wiedervereinigung und Ionengehalt unter Beschränkung auf meteorologisch charakterisierbare Einzelfälle eher zum Ziel kommen. In größerer Bodenferne der

1) S. J. Mauchly, Terr. Magn. 29. S. 187. 1924; Phys. Rev. 25. S. 254. 1924.

2) F. Behounek, Journ. de Phys. et le Radium (6) 8. S. 161. 1927.

3) V. F. Hess, Wien. Ber. (IIa) 136. S. 636. 1927.

Troposphäre, schon von 2 km Höhe an, ist dann der überwiegend wirksame Ionisator die Höhenstrahlung, gegen welche die Wirkung der radioaktiven Substanzen der Atmosphäre, auch der Ra-Emanation, zurücktritt.

Die bei größerer Höhe in geschlossenen Gefäßen beobachtete verstärkte Ionisation infolge *durchdringender Strahlung* kann keinesfalls auf vermehrten Emanationsgehalt der Luft in der Umgebung des Meßgeräts zurückgeführt werden. Denn damit die Zunahme der durchdringenden Strahlung mit der Höhe und ihre große Härte durch die Höhenverteilung der Emanation vorgetäuscht werden könnte, indem der beobachtete Wert der durchdringenden Strahlung ein γ-Strahlenmaß des umgebenden Emanationsgehalts der betreffenden Höhe wäre, müßte dieser Gehalt ganz beträchtlich mit der Höhe zunehmen, was nach unseren, an verschiedenen Tagen ausgeführten Flugmessungen keineswegs der Fall ist, während die Zunahme der durchdringenden Strahlung oberhalb 2 km Höhe stets und ohne Ausnahme gefunden wird.

Zu den *Bodenmessungen* (Tab. 2) ist zu bemerken, daß in den Räumen des Physikalischen Instituts in Halle viel mit Radiumpräparaten gearbeitet worden ist; daraus erklärt sich der hohe Emanationsgehalt in den Zimmern. Die beiden im Garten gemessenen Werte sind im Verhältnis zu sonstigen Werten der untersten Luftschicht an anderen Orten nicht ungewöhnlich hoch; auch die erste Messung von Flug V in 300 bis 400 m Höhe zeigt dieselbe Größe. Auffallend sind dagegen die großen Werte auf dem 30 m hohen Turm des Instituts, die durch zwei Messungen bei verschiedenen Wetterlagen festgestellt wurden. Da auch die Gartenmessungen in der Nähe der Außenmauer des Gebäudes gemacht worden sind, ohne eine nennenswerte Erhöhung zu zeigen, ist ein Gebäudeeinfluß als Ursache der hohen Turmwerte unwahrscheinlich. Vielmehr werden diese Turmwerte wohl den Emanationsgehalt der Luftschicht in Schornsteinhöhe über der Stadt darstellen. Bekanntlich okkludieren Kolloide, auch die atmosphärischen Kolloide Ruß und Staub, die Ra-Emanation besonders stark, so daß eine Anreicherung in der vom Boden abgehobenen Rauchluftschicht verständlich wäre. Auch kann man daran denken, daß Emanation, die in den natürlichen

Kohlen okkludiert ist, beim Verbrennungsprozeß frei wird und in der Rauchluft als Anreicherung gegenüber der nur durch die Bodenatmung mit Emanation versorgten Luft erscheint.

5. Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit bezweckt die Ausführung absoluter, direkter Messungen des Ra-Emanationsgehalts in der freien Atmosphäre bei Flugzeugaufstiegen, zur Klärung der Frage nach der vertikalen Verteilung der Ra-Emanation in der Atmosphäre und nach ihrer Herkunft.

Nach Vorversuchen mit Kohleadsorption wurde die Methode der Kondensation der Emanation bei der Temperatur des flüssigen Sauerstoffs für die Messungen im Flugzeug als die geeignetste befunden. Die hierfür geschaffene Apparatur gestattet bei jedem Flugzeugaufstieg drei Messungen von je nur 3 bis 7 Minuten Dauer zu machen.

Die bei fünf Flugzeugaufstiegen bis 3800 m Höhe gefundenen Werte zeigen im allgemeinen eine starke Abnahme des Ra-Emanationsgehaltes mit zunehmender Höhe auf sehr kleine Werte, wobei im einzelnen die Luftschichtung maßgebend ist. Die Änderung des Emanationsgehalts mit der Höhe wird bestimmt durch Herkunft und Vorgeschichte der Luft in den verschiedenen Höhen.

Die Flugmessungen beweisen die alleinige Herkunft der Ra-Emanation der Atmosphäre von der Erdoberfläche und zeigen, daß ihre vertikale Verteilung nur durch den Luftaustausch und das Aufgleiten der Luft auf Schichtgrenzflächen zustande kommt.

Messungen auf dem 30 m hohen Turm des Physikalischen Instituts in Halle ergaben einen auffallend hohen Emanationsgehalt der Rauchluftschicht über der Stadt.

Diese Arbeit wurde vom Physikalischen Institut der Universität Halle und von der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt in Berlin-Adlershof aus mit einem Halleschen Universitätsflugzeug durchgeführt. Apparate zu den Versuchen stellte außerdem das Universitätslaboratorium für angewandte Physik in Halle, zur Verfügung. Die Kosten trug die Aero-

physikstiftung in Halle, mit einem Beitrag von seiten der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft.

Die größeren Mengen flüssiger Luft für die Flüge lieferte uns kostenlos in zuvorkommendster Weise das Sauerstoffwerk Borsigwalde der Gesellschaft für Lindes Eismaschinen A.-G.; für die Bodenmessungen stellte uns ebenso dankenswerterweise das Ammoniakwerk Merseburg (Leunawerk) flüssige Luft zur Verfügung. Ferner haben wir für gestiftete Betriebsstoffe bei den Flügen zu danken den Firmen „Olex", Berlin-Schöneberg, Deutsch-Amerikanische Petroleumgesellschaft, Leipzig, und Ölwerke Stern-Sonneborn A.-G., Hamburg.

Schließlich und nicht zuletzt sind wir den Flugzeugführern Gillert, Möller und Peckmann sowie den Mitgliedern der Akademischen Fliegergruppe Charlottenburg für ihre selbstlose Mitarbeit zu besonderem Danke verpflichtet.

Hohenheim-Stuttgart, Physikal. Institut der Landw. Hochschule, 26. Mai 1928.

(Eingegangen 18. Juni 1928)

2. *Über Dielektrizitätskonstanten von Elektrolytlösungen;*

von H. Hellmann und H. Zahn

(Erwiderung auf den gleichnamigen Artikel von P. Walden, H. Ulich und O. Werner).

Es dürfte heute wohl allgemeine Übereinstimmung darüber bestehen, daß die Dielektrizitätskonstante verdünnter wäßriger Elektrolytlösungen wenigstens bei sehr geringen Konzentrationen kleiner als die des Lösungsmittels ist. Jedoch finden sich große Widersprüche in den Angaben über die Beträge dieser Erniedrigungen, die von manchen Autoren recht erheblich, von anderen hingegen außerordentlich klein gefunden worden sind. Wir möchten in der nachstehenden Mitteilung nur Stellung nehmen zu den Untersuchungen der Herren Walden, Ulich und Werner[1]), nicht aber zu denen anderer Forscher, deren Ergebnisse von unseren in ähnlicher Weise abweichen, da eine Nachprüfung ihrer Methoden uns bisher noch nicht möglich war; wir hoffen jedoch später auf diesen Punkt noch zurückkommen zu können.

Während die Herren Walden, Ulich und Werner in dem ihrer Meßmethode zugänglichen Konzentrationsgebiete beträchtliche Erniedrigungen der DK gefunden hatten, wobei sie für die erhaltenen Resultate eine große Genauigkeit beanspruchen, konnten wir[2]) in diesem Gebiete nur sehr viel kleinere Abnahmen feststellen, für die wir nur eben die Größenordnung verbürgen möchten. Die Angaben der Herren werden, wenn auch nicht zahlenmäßig, so doch annähernd ge-

---

1) P. Walden, H. Ulich und O. Werner, Ztschr. f. physik. Chem. 115. S. 178. 1925 (I), a. a. O. 116. S. 261. 1925 (II); P. Walden und O. Werner, a. a. O. 129. S. 389. 1927 (IV); P. Walden, H. Ulich und O. Werner, a. a. O. 129. S. 417. 1927 (VI).

2) H. Hellmann und H. Zahn, Physik. Ztschr. 27. S. 636. 1926 sowie Ann. d. Phys. 81. S. 711. 1926.

stützt durch die Arbeiten von Sack[1]), Pechhold[2]) und Schmidt[3]), während unsere durch die Mitteilungen von Voigt[4]), Deubner[5]), Skancke und Schreiner[6]) eine Bestätigung gefunden haben. Wir hatten früher die Vermutung ausgesprochen, daß die Messungen von Walden, Ulich und Werner durch eine Rückwirkung ihres Meßkreises auf den Sender beeinflußt gewesen seien; durch die neueste Mitteilung (VI) ihrer Versuche bei verschiedenen, darunter äußerst losen Koppelungen haben die Herren jedoch dargetan, daß ihre Messungen dieser Fehlerquelle nicht unterworfen waren. Da unsere frühere Versuchsanordnung uns deshalb besonders vertrauenswürdig erschien, weil sie künstlich hervorgerufene Erniedrigungen der DK, die wir durch Acetonzusätze zu den leitenden Lösungen erzeugten, stets richtig messen ließ — die Lösungen allein, die nach Walden, Ulich und Werner gleich große Erniedrigungen aufweisen sollten, zeigten diese jedoch nicht —, so haben wir uns bemüht, neue Erklärungsmöglichkeiten für die Diskrepanz der beiderseitigen Aussagen zu finden. Hierüber soll im nachstehenden berichtet werden. Wir wollen vorwegnehmen, daß es bei der Wiederholung der Versuche von Walden, Ulich und Werner nicht nur gelungen ist, die von den Herren angegebenen großen Erniedrigungen ebenfalls zu finden, sondern sie auch bei ganz loser Kopplung sogar nicht unerheblich zu unterschreiten; es ist möglich, innerhalb eines ziemlich ausgedehnten Bereiches jede beliebige „Erniedrigung der DK“ zu erhalten. Diese scheinbaren Erniedrigungen vermochten wir auf zwei gleichsinnig wirkende Ursachen zurückzuführen, von denen eine im Prinzip der Meßmethode liegt und daher auch unbedingt die Messungen von Walden, Ulich und Werner beeinflußt haben muß; allerdings reicht diese zur Erklärung der Unstimmigkeiten nicht aus, da sie nur kleine Korrektionen bedingt. Die zweite Ursache hängt mit Koppelungsbedingungen zusammen, wenn auch in anderer Weise, als

1) H. Sack, Physik. Ztschr. 28. S. 199. 1927.
2) R. Pechhold, Ann. d. Phys. 83. S. 427. 1927.
3) Cl. C. Schmidt, Phys. Rev. 30. S. 925. 1927.
4) B. Voigt, Ztschr. f. Phys. 44. S. 70. 1927.
5) A. Deubner, Ann. d. Phys. 84. S. 429. 1927.
6) R. Skancke und E. Schreiner, Physik. Ztschr. 28. S. 597. 1927.

wir es früher angenommen hatten; sie würde vollkommen ausreichen, die großen Unterschiede zu erklären. Zwar können wir nicht mit Sicherheit behaupten, daß diese Fehlerquelle bei den Versuchen der Herren vorgelegen hat, da keine diesbezüglichen Angaben vorliegen; es spricht andererseits in ihren Mitteilungen nichts dafür, daß diese Störung erkannt und ausgeschaltet war. Da wir zeigen können, daß diese Fehlerquelle bei der Untersuchung isolierender Flüssigkeiten kaum in Betracht kommt und sich daher leicht der Wahrnehmung entzieht, während sie bei leitenden Lösungen große Meßfehler im Sinne einer Verkleinerung der DK hervorrufen kann, da sich ferner ergeben hat, daß nur, wenn sie vorlag, große Erniedrigungen erhalten wurden, die mit Beseitigung der Störungsquelle verschwanden, so liegt für uns die Vermutung doch sehr nahe, daß sie bei den Versuchen der Herren eine Rolle gespielt haben mag. Jedenfalls sind wir nach wie vor der Ansicht, daß die abnorm großen Erniedrigungen der DK bei Beobachtung mittels einer Resonanzmethode durch den Einfluß der Leitfähigkeit vorgetäuscht sind.

Nach dem vorstehend Gesagten hat sich unsere Erwiderung zunächst mit dem Prinzip der Meßmethode zu befassen; in einem zweiten Teil soll der mögliche Einfluß der obengenannten Fehlerquelle dargelegt und diskutiert werden. Über die experimentellen Ergebnisse, die größtenteils Herr cand. phys. Rieckhoff im Kieler Physikalischen Institut unter Leitung des einen von uns erhalten hat, wird hier nicht ausführlich berichtet, da sie im Zusammenhange mit weiteren Messungen später veröffentlicht werden sollen. Wir beschränken uns daher im wesentlichen auf die Wiedergabe seiner qualitativen Resultate, die unsere Darlegungen durchaus bestätigen. Von Einzelheiten seiner Apparatur werden wir so viel mitteilen, daß eine Nachprüfung unserer Aussagen in einfacher Weise möglich ist.

Da wir gegen die Resonanzmethode von Walden, Ulich und Werner einen prinzipiellen Einwand erheben, so sei sie des Zusammenhangs wegen hier noch einmal kurz dargestellt. Ein Erreger ungedämpfter Schwingungen induziert in sehr loser Koppelung auf einen Resonanz- oder Meßkreis, der aus

einer festen Induktivität und einer veränderlichen Kapazität besteht. Letztere wird durch einen „Flüssigkeitskondensator" gebildet, der zur Aufnahme der zu untersuchenden Lösung dient, und einem diesem parallel geschalteten Meßkondensator, an welchem die Einstellung auf Resonanz mit dem Primärkreis vorgenommen wird. Die Anordnung wird mit nichtleitenden Flüssigkeiten bekannter DK geeicht, die Eichung auch bei der Untersuchung leitender Lösungen bis zu ziemlich hohen Leitfähigkeitsbeträgen als gültig angenommen. Der Fehler, den die Nichtberücksichtigung der Leitfähigkeit in den DK-Werten bedingt, ist von den Herren Walden, Ulich und Werner in ihrer ersten Veröffentlichung diskutiert worden; sie kommen dabei zu dem Schluß, daß er innerhalb des Anwendungsbereiches ihrer Methode keine merkliche Rolle spielt.

Bei dieser Betrachtung wird ausgegangen von der Differentialgleichung für ein aus Widerstand R, Induktivität L und verlustfreier Kapazität C bestehendes System mit zu C parallel geschaltetem Widerstande W, wenn darauf eine äußere ungedämpfte EMK der Kreisfrequenz ω_0 wirkt. Indessen wird die Rechnung nicht durchgeführt, vielmehr die Gleichung für die Eigenfrequenz des gedämpften Resonanzkreises aufgestellt und diese der weiteren Diskussion zugrunde gelegt. Wir zitieren nun wörtlich: „Nehmen wir nun an, daß das Resonanzmaximum dann erreicht wird, wenn unsere Eigenfrequenz ν durch entsprechende Veränderung der Kapazität des Resonanzkreises gleich der (konstant angenommenen) Frequenz ν_0 der auftreffenden Wellenzüge des Sendekreises wird, so trifft dies in Strenge nur für ungedämpfte Kreise zu. Die zu erwartenden Unterschiede sind aber dann zu vernachlässigen, wenn die gegenseitige Induktion von Sende- und Resonanzkreis gegenüber der Selbstinduktion zu vernachlässigen, wenn also die Kopplung sehr lose ist." [1])

Dies trifft aber keineswegs zu. Nun interessieren hier überhaupt nicht die Eigenschwingungen [2]) des Systems, die ja sehr bald abgeklungen sind, sondern die von der äußeren EMK erzwungenen ungedämpften Schwingungen, deren Amplitude

1) Abhandlung I, S. 199.

2) Vgl. hierzu den Nachtrag am Schluß dieser Abhandlung.

dann ihren größten Wert erhält, wenn das Impediment des Meßkreises ein Minimum wird. Ist der Widerstand des Kreises sehr klein, dann fällt bekanntlich die Eigenfrequenz im Resonanzfalle mit der der äußeren EMK praktisch zusammen; bei großem Widerstand hingegen ist die Eigenfrequenz, die sich aus den Einstellwerten auf Resonanz und den Widerständen berechnet, immer kleiner als die Erregerfrequenz, und zwar gilt dies auch für beliebig lose Kopplung! Der Sachverhalt ist besonders durchsichtig, wenn die Flüssigkeit isoliert, d. h. $W = \infty$ ist. Dann ist das Impediment des Meßkreises bekanntlich $= \sqrt{R^2 + \left(\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C}\right)^2}$ und die Stromstärke ein Maximum für $\omega_0 L C = 1$ bzw. $\nu_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{LC}$, während die Eigenfrequenz sich mit denselben Werten von L und C zu $\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$ berechnet. Etwas unübersichtlicher werden die Beziehungen bei leitenden Flüssigkeiten im Kondensator, deren Leitvermögen durch einen endlichen Wert von W parallel zu C berücksichtigt wird. Statt von der Differentialgleichung auszugehen, rechnet man bequemer mit Widerstandsoperatoren, wenn man sich nur für die erzwungenen, also nicht mit dem Faktor $e^{-\lambda t}$ behafteten Schwingungen interessiert. Der Operator des Meßkreises ist gegeben durch $\Omega = R + j\omega_0 L + z$, wo der komplexe Ausdruck z den Operator der Verzweigung zwischen C und W bedeutet.

Es gilt

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{W} + j\omega_0 C$$

bzw.

$$z = \frac{W}{1 + \omega_0^2 C^2 W^2}(1 - j\omega_0 C W) = A(1 - jB).$$

Der Operator des Kreises ist dann

$$\Omega = (R + A) + j(\omega_0 L - AB),$$

sein absoluter Betrag

$$|\Omega| = \sqrt{(R + A)^2 + (\omega_0 L - AB)^2}$$

die Impedanz des Systems. Da bei der Meßmethode von Walden, Ulich und Werner die Einstellung auf Resonanz

durch Veränderung der Kapazität bewirkt wird, so erhält man die Resonanzkapazität C_{res} aus der Beziehung

$$\frac{d[(R+A)^2+(\omega_0 L - A B)^2]}{d C} = 0,$$

woraus folgt $$C_{res} = \frac{1}{\omega_0^2 L}\left(1+\frac{2R}{W}+\frac{\omega_0^2 L^2}{W^2}+\frac{R^2}{W^2}\right)^{1)},$$

wobei sämtliche Glieder in der Klammer, wenn man die von Walden, Ulich und Werner für ihre Meßanordnung angegebenen Daten benutzt, klein gegen 1 sind und $-\left(\frac{R}{W}\right)^2$ auf alle Fälle noch gegen die beiden anderen Glieder vernachlässigt werden kann.

Beachtet man, daß die Eichung mit isolierenden Flüssigkeiten vorgenommen ist, wobei $W = \infty$ bzw. $A = 0$ zu setzen sind, so erhält man für diesen Fall $C'_{res} = \frac{1}{\omega_0^2 L}$. Da nun die Induktivität des Kreises L, sowie die Erregerfrequenz ω_0 konstant gehalten werden, so ist die Resonzkapazität C_{res} bei einer leitenden Lösung im Kondensator ($W < \infty$, $A > 0$) gegeben durch

Gl. (1)
$$\begin{cases} C_{res} = C'_{res}\left(1+\frac{2R}{W}+\frac{1}{\omega_0^2 C'^2_{res} W^2}\right), \\ \frac{C_{res} - C'_{res}}{C'_{res}} = \frac{\Delta C}{C} = \frac{2R}{W} + \frac{1}{\omega_0^2 C'^2 W^2}. \end{cases}$$

Nimmt man zunächst einmal an, daß die DK der Lösung mit der des Lösungsmittels identisch sei, so bedingt eine vorhandene Leitfähigkeit, daß die Resonanzkapazität gemäß Gl. (1) größer ist als bei dem nichtleitenden Lösungsmittel. Bei der mit nichtleitenden Flüssigkeiten geeichten Meßanordnung von Walden, Ulich und Werner bedeutet aber eine Vergrößerung der Meßkapazität eine Verkleinerung der DK der Flüssigkeit, da ja die durch die Abnahme der DK gestörte Resonanz durch Zuschaltung von Kapazität im Meßkondensator wieder ausgeglichen wird. Im Gegensatz hierzu rechnen Walden, Ulich und Werner aus, daß eine Erhöhung der Leitfähigkeit eine Zunahme der DK vortäusche. Zu diesem falschen Schluß gelangen sie dadurch, daß sie die gar nicht in Be-

1) Die strenge Formel lautet

$$C_{res} = \frac{1}{\omega_0^2 L}\left(\frac{1}{2}+\frac{R}{W}+\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{R}{W}+\frac{R^2}{W^2}+\frac{\omega_0^2 L^2}{W^2}}\right).$$

tracht kommenden Eigenschwingungen und nicht die im System erzwungenen Schwingungen behandeln.

Bei Resonanzeinstellung mittels einer dem Flüssigkeitskondensator parallel geschalteten Kapazität wirkt eine Leitfähigkeitszunahme wie eine Abnahme der DK bei isolierenden Flüssigkeiten!

Ganz anders gestaltet sich das Resultat, wenn die Einstellung auf Resonanz mittels einer im System vorhandenen Induktivität, also an einem Variometer[1], erfolgt. Dann ist in dem Ausdruck $(R + A)^2 + (\omega_0 L - AB)^2$ bei gegebenem unveränderlichen Kondensator das Glied $(R + A)^2$ konstant und die Minimumsbedingung ist gegeben durch $\omega_0 L = AB$. Da

$$AB = \frac{\omega_0 C W^2}{1 + \omega_0^2 C^2 W^2} = \frac{1}{\omega_0 C\left(1 + \frac{1}{\omega_0^2 C^2 W^2}\right)},$$

so folgt für nichtleitende Flüssigkeiten, bei denen $W = \infty$ ist, $AB = \frac{1}{\omega_0 C}$, während bei leitenden Lösungen AB infolge der scheinbar vergrößerten Kapazität kleiner wird und daher zur Abstimmung eine Verminderung von L erfordert. Hat man die Meßanordnung ebenfalls mit isolierenden Flüssigkeiten verschiedener DK geeicht, so täuscht jetzt eine Zunahme der Leitfähigkeit eine Erhöhung der DK vor, die sich berechnet aus $\frac{(L' - L)}{L} = \frac{1}{\omega_0^2 C^2 W^2}$, worin L' die Resonanzinduktivität bei einer isolierenden, L die bei einer leitenden Flüssigkeit bedeuten.

Wir kehren zu der Meßanordnung von Walden, Ulich und Werner mit veränderlicher Einstellkapazität zurück, um den Einfluß der Leitfähigkeit auf die Messung der DK zahlenmäßig zu diskutieren, und zwar für das gleiche System, das die Herren ihren entsprechenden Rechnungen zugrunde gelegt haben. Seine Konstanten sind $C = 5{,}55 \cdot 10^{-12}$ Farad, $L = 1 \cdot 10^{-6}$ Henry, $R = 1$ Ohm; dem Einflusse der Leitfähigkeit werde durch verschiedene, C parallel geschaltete Widerstände W entsprochen. Die Wellenlänge des Sendekreises sei 4,5 m, die Kreisfrequenz der erzwungenen Schwin-

---

1) Dieser Fall ist z. B. von R. T. Lattey, Phil. Mag. 41. S. 829. 1921, behandelt.

gungen ω_0 somit $4{,}2 \cdot 10^8$. Die nachstehende Tab. 1 zeigt den Verlauf von $\Delta C/C$ bei verschiedenen Werten von W einmal nach der Berechnung von Walden, Ulich und Werner, das andere Mal nach unserer Gleichung (1)

Tabelle 1

$W =$	$1 \cdot 10^5$	$5 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^4$	$1 \cdot 10^4$	$5 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^3$	
$-\Delta C/C$	$1{,}71 \cdot 10^{-6}$	$2{,}80 \cdot 10^{-5}$	$1{,}88 \cdot 10^{-4}$	$5{,}00 \cdot 10^{-4}$	$1{,}90 \cdot 10^{-3}$	$1{,}17 \cdot 10^{-2}$	nach
$+\Delta \varepsilon$	$1{,}37 \cdot 10^{-4}$	$2{,}20 \cdot 10^{-3}$	0,011	0,040	0,152	0,936	W., U., W
$+\Delta C/C$	$3{,}90 \cdot 10^{-5}$	$1{,}16 \cdot 10^{-4}$	$5{,}73 \cdot 10^{-4}$	$2{,}09 \cdot 10^{-3}$	$7{,}95 \cdot 10^{-3}$	$4{,}83 \cdot 10^{-2}$	nach
$-\Delta \varepsilon$	0,003	0,0093	0,046	0,167	0,636	3,864	H. u. Z.

Die durch den Einfluß der Leitfähigkeit vorgetäuschte Änderung der DK $\Delta \varepsilon = -80\,\Delta C/C$ in der Tab. 1 ist von uns berechnet unter der Annahme, daß die ganze Kapazität C bis auf eine sehr kleine zusätzliche Einstellkapazität durch den Flüssigkeitskondensator gebildet werde. Bei den Messungen traf dies nicht zu; in dem von den Herren betrachteten Fall, der der Mehrzahl ihrer mit wäßrigen Lösungen angestellten Versuche entsprechen dürfte, betrug die Kapazität des Zusatzkondensators etwa den vierten Teil von der des Flüssigkeitskondensators, so daß dann die Werte von $\Delta \varepsilon$ um rund 25 Proz. zu erhöhen wären. Da die scheinbare Erniedrigung der DK sehr stark mit zunehmender Leitfähigkeit der Kondensatorfüllung anwächst, so würden sich auch sonstige, z. B. dielektrische Verluste im Kondensatorgefäß, die additiv hinzutreten, den Scheineffekt bei höheren Konzentrationen merklich verstärken.

Der Vergleich der beiderseitigen Werte zeigt, daß wir scheinbare Erniedrigungen berechnen, die etwa 4mal so groß sind als die nach Walden, Ulich und Werner sich ergebenden scheinbaren Erhöhungen. Allerdings sind unsere $\Delta \varepsilon$-Werte noch viel kleiner als die von den Herren angegebenen Erniedrigungen der DK., die bei wäßrigen Lösungen bis zu $\Delta \varepsilon > -6$ ansteigen, während der größte Wert von uns, den wir aus der vorstehenden Tabelle zum Vergleich heranziehen dürfen, $\Delta \varepsilon = -0{,}17$ ist, da die Meßmethode die Verwendung wesentlich kleinerer Werte als $W = 10^4$ nicht zuläßt. Wir können daher als Ergebnis der bisherigen Betrachtungen nur aussprechen, daß die Korrektionen, welche infolge der Leit-

fähigkeit an den gefundenen DK.-Werten anzubringen sind, im entgegengesetzten Sinne ausfallen, als sie von Walden, Ulich und Werner berechnet sind, und wenigstens bei den konzentrierteren der verwendeten Lösungen immerhin so groß, daß sie bei der Genauigkeit, welche die Herren für ihre Methode beanspruchen, nicht außer acht gelassen werden dürfen.

Der Vollständigkeit halber wollen wir noch erwähnen, daß wir auch den Fall nichtquasistationärer Stromverteilung im Meßkreise ausführlich diskutiert haben, um festzustellen, ob die zwischen dem Meß- und dem Flüssigkeitskondensator in den Verbindungsdrähten enthaltene unvermeidliche Induktivität einen wesentlichen Einfluß auf die Messung der DK. besitzen kann. Die Rechnung zeigt, daß der grundsätzlich vorhandene Einfluß bei den vorliegenden Versuchsbedingungen so klein ausfällt, daß er vernachlässigt werden darf. Da sich auch sonst bei dieser strengeren Behandlungsweise keine wesentlichen neuen Gesichtspunkte ergeben, können wir von der Mitteilung der bedeutend komplizierteren Formeln Abstand nehmen.

Die vorstehenden Betrachtungen vermögen die Ergebnisse von Walden, Ulich und Werner nur in quantitativer Hinsicht und auch da nur wenig zu modifizieren. Die Tatsache, daß die Herren wesentlich größere Erniedrigungen als wir und einige andere Experimentatoren gefunden haben, würde also dadurch nicht in Frage gestellt. Wenn wir trotzdem den Standpunkt weiter vertreten, daß die von den Herren mitgeteilten Erniedrigungen viel zu groß sind, so veranlassen uns zu dieser Stellungnahme unsere sowie Hrn. Rieckhoffs Versuche, bei denen die Bedingungen weitgehend variiert wurden und bei denen derartig große Erniedrigungen — wir wollen sie scheinbar nennen — nur dann gefunden wurden, wenn eine gewisse Fehlerquelle vorhanden war, nach deren Beseitigung sie bis auf einen sehr kleinen Bruchteil verschwanden. Diese Fehlerquelle lag in einer weiterhin zu beschreibenden Art der Koppelung des Detektorkreises an das Resonanzsystem; wir glauben aus den vorliegenden Angaben entnehmen zu dürfen, daß sie mit der von Walden, Ulich und Werner verwendeten identisch ist. Wir wollen

durch Rechnung und Experiment dartun, daß diese Fehlerquelle bei der Untersuchung nichtleitender Flüssigkeiten, also bei der Eichung der Apparatur so wenig in Erscheinung tritt, daß sie der Beobachtung entgehen kann, bei leitenden Lösungen dann aber um so stärker zur Wirkung kommt, je besser diese leiten, und daß sie dabei deren DK. um Beträge der in Betracht kommenden Größenordnung kleiner erscheinen läßt. Weiterhin können wir einfache Wege angeben, um das Vorhandensein dieser Fehlerquelle festzustellen, sowie um sie zu beseitigen, und glauben daher, daß von nun an DK-Messungen

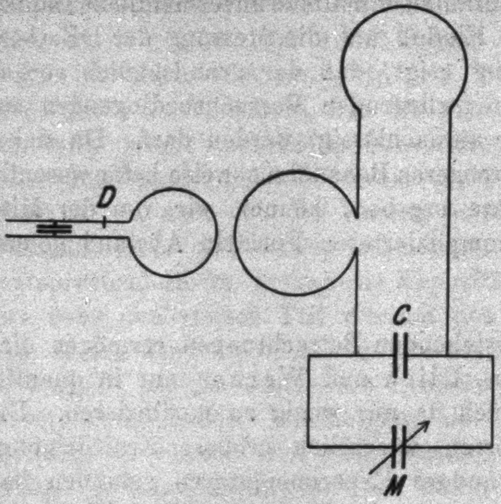


Fig. 1

an leitenden Substanzen nach einer Resonanzmethode nur dann Anspruch auf Genauigkeit erheben können, wenn hinreichend dargetan ist, daß diese Fehlerquelle sicher ausgeschlossen war.

Bei Walden, Ulich und Werner war der Detektor- an den Resonanzkreis magnetisch gekoppelt nach dem in Fig. 1 gegebenen Schema. Bei Wiederholung der Versuche wurden die Resultate der Herren zunächst bestätigt; d. h. war der Meßkondensator *M* dadurch geeicht, daß in den Kondensator *C* nacheinander nichtleitende Flüssigkeiten verschiedener DK. eingefüllt und die zugehörigen Resonanzeinstellungen an *M* festgestellt waren, so ergab sich für eine in *C* eingefüllte KCl-Lösung bekannter Konzentration aus der Resonanzeinstellung eine Erniedrigung der DK., die

zwar nicht zahlen-, aber doch größenordnungsmäßig mit den Angaben von Walden, Ulich und Werner übereinstimmte. Wurde nun der Detektorkreis an den zweiten Ring gekoppelt — wir bemerken dazu, daß bei diesen Versuchen der Erregerkreis bis zu 2 Meter von diesem Ring entfernt war, Rückwirkung also nicht bestand — so erhielt man nach vorgenommener Eichung für die DK in diesem speziellen Falle eine deutlich höhere DK. als zuvor, die „Erniedrigung" hatte also abgenommen. Wurde das Doppelringsystem durch ein längliches Drahtrechteck ersetzt, so ließ sich durch Verschieben der Kopplungsschleife in konstantem Abstande über den Drähten ein kontinuierlicher Übergang der „DK.-Erniedrigung" von kleinen bis zu wesentlich höheren Werten als den von Walden, Ulich und Werner angegebenen erhalten! Die ganze Frage schien daher doch eine Koppelungsangelegenheit zu sein, wenn auch anderer Art, als wir es früher vermutet hatten. Wir wollen diese Möglichkeit zunächst rechnerisch diskutieren und auf die experimentelle Bestätigung unserer Vermutung später eingehen.

Von dem Erregersystem werde bei äußerst loser magnetischer Koppelung im Meßkreis eine EMK $E_1 \sin \omega t$, im Detektorkreis eine EMK $E_2 \sin \omega t$ induziert. Es handelt sich im zweiten Falle um die Wirkung, die auch ohne Anwesenheit des Resonanzkreises im Detektorkreis auftreten würde. Ist der Detektorkreis aperiodisch, was bei Verwendung eines Kristalldetektors zutrifft, so fließt in ihm der Strom $i_2 \sin \omega t$. Im Meßkreis fließt ein Strom $I_1 \sin(\omega t - \varphi)$, wo φ von den Konstanten des Kreises abhängt; im einfachsten Falle, wenn der Kreis aus in Reihe geschalteten C, L, R besteht, ist φ gegeben durch

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

und wird bei Resonanzeinstellung $= 0$. Der Meßkreisstrom induziert seinerseits im Detektorkreis eine um $\pi/2$ verschobene EMK. bzw. einen dieser gleichphasigen Strom $i_1 \cos(\omega t - \varphi)$. Den Stromeffekt im Detektorkreis, für den der Galvanometerausschlag ein Maß ist, bestimmt die resultierende Stromstärke $I \sin(\omega t + \vartheta)$, die sich berechnet aus

$$i_1 \cos(\omega t - \varphi) + i_2 \sin \omega t.$$

In bekannter Weise ergibt dies

$$I = \sqrt{\frac{1}{2} P^2 + \frac{1}{2} Q^2},$$

wo

$$P = i_2 + i_1 \sin \varphi; \quad Q = i_1 \cos \varphi; \quad \operatorname{tg} \vartheta = \frac{Q}{P}.$$

Um überhaupt rechnen zu können, machen wir die vereinfachende Annahme, daß der Galvanometerausschlag α dem Stromeffekt, somit I^2 proportional sei. — Strenggenommen kann dies nur bei Verwendung eines Thermoelements oder eines Barretters gelten, während beim Kristalldetektor die Abhängigkeit komplizierter ist. — Es wird somit α dem Ausdrucke

$$(i_1^2 + 2 i_1 i_2 \sin \varphi + i_2^2)$$

proportional sein; dies zeigt, daß durch die direkte Einwirkung des Senders auf den Dektektorkreis prinzipiell eine Deformation der Resonanzkurve und eine Verschiebung der Resonanzlage hervorgerufen wird. Es bleibt noch zu zeigen, in welcher Weise diese Verlagerung mit den Konstanten des Resonanzkreises zusammenhängt.

Wir betrachten wie früher einen Resonanzkreis mit R, L und C, wobei wieder dem Kondensator C noch ein Widerstand W parallelgeschaltet sei, um der Wirkung der Leitfähigkeit Rechnung zu tragen. Dann ist nach Gleichung (1) die Impedanz des Systems

$$\Omega = \sqrt{(R + A)^2 + (\omega L - A B)^2};$$

der Phasenwinkel φ zwischen Strom und Spannung ist gegeben durch

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{(\omega L - A B)}{(R + A)},$$

wo A und B die früher eingeführten Abkürzungen sind. Es ist nun I_1^2 und damit auch i_1^2 proportional

$$\frac{1}{\sqrt{(R + A)^2 + (\omega L - A B)^2}};$$

trägt man daher I_1 als Funktion der in A und B enthaltenen Kapazität C auf, so liefert dies die Resonanzkurve des Stromeffekts, wie man sie mittels eines in den Resonanzkreis eingeschalteten Hitzdrahtamperemeters messen würde. Diese Kurve

ist, bis auf den Maßstab, dann identisch mit derjenigen, welche der magnetisch gekoppelte Detektorkreis liefert, wenn in dem Ausdruck

$$(i_1^2 + 2 i_1 i_2 \sin\varphi + i_2^2)$$

das zweite und dritte Glied neben dem ersten vernachlässigt werden können. Trifft dies nicht zu, so ist die im Detektorkreis erhaltene gegen die im Meßkreis selbst aufgenommene Resonanzkurve verzerrt, und zwar um so mehr, je kleiner i_1/i_2 ist. Da der direkt vom Sender induzierte Stromanteil i_2 konstant bleibt, während der vom Meßkreis herrührende i_1 um so stärker abnimmt, je größer die Dämpfung in diesem Kreise wird, so folgt, daß die Deformation und Verlagerung der Kurve sich mit wachsendem Leitvermögen im Flüssigkeitskondensator immer mehr bemerkbar machen muß.

Bei der Untersuchung isolierender Flüssigkeiten rührt der Resonanzausschlag α' vorwiegend vom Stromanteil i_1 her; es sollen in der Folge die auf den Resonanzfall sich beziehenden Größen durch Strichelung gekennzeichnet werden. Aus dem Verhältnis Resonanzausschlag α': Dissonanzausschlag β (Ausschlag bei vollkommener Verstimmung) findet man das Verhältnis

$$\frac{i_1}{i_2} = \sqrt{\frac{\alpha'}{\beta} - 1}.$$

Denn es ist

$$\alpha' \sim i_1'^2 + 2 i_1' i_2 \sin\varphi + i_2^2,$$

$\beta \sim i_2^2$ und bei $W = \infty$ wird im Resonanzfalle $\varphi = 0$. Indem man i_2 in willkürlichen Stromeinheiten festlegt, ist damit die im Resonanzkreis vom Sender aus induzierte Spannung E_1 relativ bestimmt, da sie $i_1' R$ proportional sein muß; sie sei $= F i_1' R$. Dann ist bei beliebiger Verstimmung die Stromstärke im Meßkreise $I_1 = \frac{F i_1' R}{\Omega}$ und die von ihr im Detektorkreis induzierte $i_1 = \frac{i_1' R}{\Omega}$, denn im Resonanzfalle wird bei $W = \infty$ bekanntlich $\Omega = R$. Wir können also jetzt in der Beziehung

$$\alpha \sim (i_1^2 + 2 i_1 i_2 \sin\varphi + i_2^2)$$

i_1 durch $\frac{i_1' R}{\Omega} = \frac{\mathfrak{C}}{\Omega}$ ersetzen und dadurch die Konstanten des

Resonanzkreises einführen. Schließlich kann man noch $\sin \varphi$ durch $\frac{(\omega L - AB)}{\Omega}$ ersetzen. Indem man nun bei festgehaltenem W, also bei einer bestimmten Leitfähigkeit im Flüssigkeitskondensator, C variiert bzw. die C enthaltenden Größen A und B, so erhält man die Resonanzkurve $\alpha = f(C)$ in ihrem ganzen Verlauf; soll nur die Resonanzkapazität C' selbst bestimmt werden, so erhält man, indem man $\frac{d\alpha}{dC} = 0$ setzt, für C' die Bestimmungsgleichung

$$0 = [-2B(R + A) + (1 - B^2)(AB - \omega L)][\mathfrak{E} + 2i_2(\omega L - AB)] + (1 - B^2) i_2 \Omega^2.$$

Da $B^2 = \omega^2 C^2 W^2$ für die in Betracht kommenden Fälle groß gegen 1 bleibt, kann man bei Werten von $W \geqq 1 \cdot 10^4$ für obige Gleichung schreiben

$$(2) \quad 0 = \left[(\omega L - AB) - \frac{2(R + A)}{B}\right][\mathfrak{E} + 2i_2(\omega L - AB)] - i_2 \Omega^2.$$

Statt C' explizit auszudrücken, verfährt man besser so, daß man mit zwei Werten von C, die C' einschließen, die rechte Seite der Gleichung (2) berechnet und durch erlaubte lineare Interpolation den Wert C' ermittelt, der der Gleichung (2) genügt.

Es soll nun zunächst einmal gezeigt werden, daß sich mit sehr plausiblen Annahmen über das Verhältnis α/β scheinbare Änderungen der DK berechnen, die dem Sinne und der Größe nach den Angaben von Walden, Ulich und Werner entsprechen. Wir legen dabei ein Resonanzsystem zugrunde, das dem früher betrachteten sehr nahe kommt, doch sind mit Rücksicht auf die ziemlich umständlichen Rechnungen die Zahlenwerte der Konstanten etwas bequemer gewählt. Es sei die Kreisfrequenz des Senders $\omega = 4 \cdot 10^8$, der Ohmsche Widerstand des Resonanzkreises $R = 1$ Ohm, seine Induktivität $L = 1{,}25 \cdot 10^{-6}$ Henry. Dann ist die Resonanzkapazität bei vollkommen isolierender Füllung des Kondensators $C = 5 \cdot 10^{12}$ Farad. Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß die gesamte Kapazität C' durch den Flüssigkeitskondensator gebildet werde. Die erforderlichen Änderungen, um nach Einfüllen einer leitenden Lösung der gleichen DK wieder Resonanz zu erhalten — es

handelt sich, wie gezeigt werden wird, um Vergrößerungen der Kapazität —, mögen durch Zuschalten der eben notwendigen verlustfreien Kapazität bewirkt werden. Ist die Resonanzkapazität $C' = 5 \cdot 10^{-12}$ bei Füllung mit destilliertem Wasser, so kann man die Widerstandskapazität des Gefäßes mit

$$\mathfrak{C} = \frac{80 \cdot 1{,}11 \cdot 10^{-12}}{4\pi C'} = 1{,}41$$

ansetzen, d. h. ein Leitvermögen $1{,}41 \cdot 10^{-4}$, das einer $1{,}2 \cdot 10^{-3}$ Normal-KCl- bzw. einer $0{,}39 \cdot 10^{-3}$ Normal-HCl-Lösung zukommt, würde dem Kondensator einen Widerstand $W = 1 \cdot 10^{-4}$ erteilen. Wir machen nun zunächst die Annahme, daß der Galvanometerausschlag, der durch direkte magnetische Einwirkung des Senders auf den Detektorkreis entsteht, einen Skalenteil betrage, während durch den Resonanzkreis, wenn er mit einer nichtleitenden Flüssigkeit beschickt ist, ein Maximalausschlag α' von 901 Skalenteilen über den Detektorkreis bewirkt werde. Somit wird $\frac{i_1'}{i_2} = \sqrt{900}$; setzt man nun willkürlich $i_2 = 1$, so erhält man bei $R = 1$ Ohm $\mathfrak{E} = 30$ in entsprechenden Spannungseinheiten. Die nachstehende Tabelle (2) veranschaulicht, wie sich die Resonanzstromstärke i_1' mit der Größe des C parallel geschalteten Widerstandes W ändert.

Tabelle 2

W	∞	$1 \cdot 10^6$	$1 \cdot 10^5$	$5 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^4$	$1 \cdot 10^4$
i_1'	30	24	8,58	5,00	2,22	1,16
$i_1'^2$	900	576	73,6	25,0	4,93	1,35

Der Größe $i_1'^2$ entsprechen die Resonanzausschläge, die bei gleicher Galvanometerempfindlichkeit erhalten werden, wenn $i_2 = 0$ ist; $i_1'^2 = 576$ stellt ungefähr den Ausschlag dar, der bei Füllung des Kondensators mit gutem destillierten Wasser entstünde.

Für $i_2 = 1$ berechnet sich nach Gl. (2) bei $W = 1 \cdot 10^4$ die Resonanzkapazität $C' = 5.154 \cdot 10^{-12}$; die zugehörigen Resonanzkurven mit $i_2 = 0$ und $i_2 = 1$ sind in Fig. 2 dargestellt. Während die Verschiebung des Resonanzpunktes bei $i_2 = 0$ gegenüber der Resonanzlage bei isolierenden Flüssigkeiten klein

bleibt — $\Delta C = 0{,}0105$ aus Gl. (1) berechnet —, ist sie für $i_2 = 1$ recht beträchtlich; außerdem ist die Kurve durch den Einfluß von i_2 stark verzerrt, da infolge des Phasenumschlags

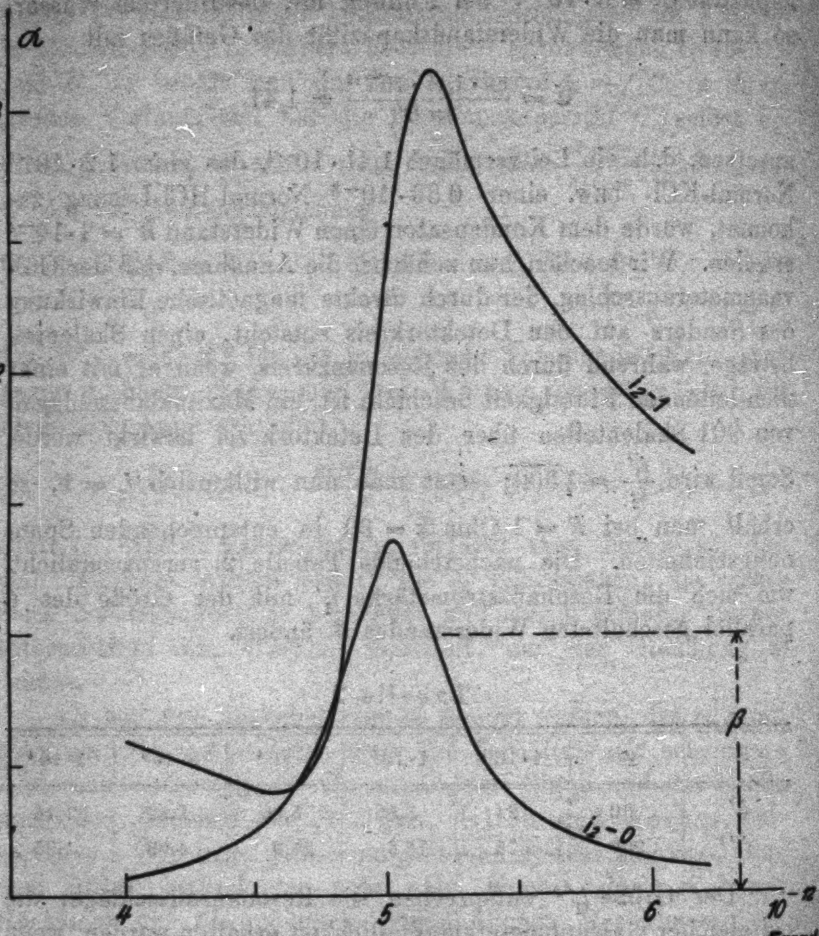


Fig. 2

rechts des Maximums i_1 und i_2 zusammen —, links davon sich entgegenwirken.

Die scheinbare Änderung der DK, der diese Verschiebung entspricht, ist $\Delta\varepsilon = -\frac{\varepsilon \Delta C}{C'} = -\frac{80 \cdot 0{,}154}{5{,}0} = -2{,}46$. Aus den Kurven von Walden, Ulich und Werner entnimmt man für eine $1{,}2 \cdot 10^{-3}$ Normal-KCl-Lösung eine Erniedrigung $\Delta\varepsilon = -2{,}1$

bzw. für eine $0{,}39 \cdot 10^{-3}$ Normal-HCl-Lösung $\Delta\varepsilon = -1{,}8$. Die beobachtete Größenordnung wird also durchaus erhalten.

Berechnet man jedoch die Erniedrigungen für geringere Konzentrationen, also größere Werte von W, so wird die Übereinstimmung wesentlich schlechter. Die gestrichelte Kurve in Fig. 3 zeigt, wie sich ΔC mit $1/W$, welches der Konzentration sehr nahe proportional ist, ändert. Die von Walden, Ulich und Werner gefundene lineare Zunahme von $-\Delta\varepsilon$ wird durch die Berechnung nicht wiedergegeben. Dieser Umstand scheint

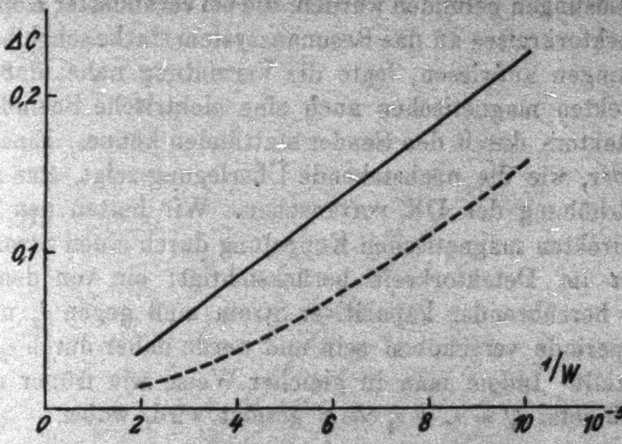


Fig. 3

zunächst schwerwiegende Bedenken gegen unseren Erklärungsversuch hervorzurufen, die indessen bei näherer Betrachtung ohne Schwierigkeiten beseitigt werden können.

Untersucht man zunächst den Einfluß, den die Veränderung von i_2 bei festgehaltenem $\mathfrak{E}$ ausübt, so zeigt sich, daß bei einer Vergrößerung von i_2 die Verschiebungen der Resonanzlage bei höheren Konzentrationen, d. h. den kleineren Werten von W nur unbedeutend zunehmen, bei geringen Konzentrationen dagegen viel stärker. Setzt man in dem gewählten Beispiel $i_2 = 4$ — dies würde bedeuten, daß der Dissonanzausschlag β etwa 1,8 Proz. des Maximalausschlages bei vollkommen isolierendem Dielektrikum betragen würde und etwa 2.8 Proz. desjenigen, der bei Einfüllen von destilliertem Wasser erzielt würde —, so erhält man die ausgezogene Kurve in Fig. 3, bei der die Abweichungen von der Linearität schon stark abgenommen

haben. Je höher i_2 gewählt wird, um so besser wird der lineare Verlauf der Kurve erreicht, wobei die größeren Werte von ΔC nur wenig mehr wachsen, so daß die Größenordnung des Effektes durchaus erhalten bleibt.

Es gibt jedoch noch eine andere Möglichkeit, die Abweichungen von der Linearität auf zwanglose Art zu beseitigen, ohne besonders hohe Werte des Störstromes i_2 annehmen zu müssen. Die experimentell gefundene Tatsache, daß unter Umständen mit derselben Anordnung scheinbare Erhöhungen bei denselben Lösungen gefunden wurden, die bei veränderter Koppelung des Detektorkreises an das Resonanzsystem starke scheinbare Erniedrigungen aufwiesen, legte die Vermutung nahe, daß außer der direkten magnetischen auch eine elektrische Beeinflussung des Detektors durch den Sender stattfinden könne. Eine solche muß aber, wie die nachstehende Überlegung zeigt, eine scheinbare Erhöhung der DK vortäuschen. Wir hatten den Einfluß einer direkten magnetischen Koppelung durch einen Stromanteil $i_2 \sin \omega t$ im Detektorkreis berücksichtigt; ein von demselben Sender herrührender kapazitiver Strom muß gegen i_2 um eine Viertelperiode verschoben sein und werde daher durch $i_3 \cos \omega t$ dargestellt. Indem man in gleicher Weise wie früher rechnet nur daß jetzt $Q = i_3 + i_1 \cos \varphi$ gesetzt wird, wobei

$$\cos \varphi = \frac{R + \Delta}{\Omega}$$

ist, erhält man wieder mit der Vereinfachung, daß 1 gegen B^2 vernachlässigt werden kann, als Resonanzbedingung

$$(3) \quad \begin{cases} O = \left[(\omega L - \Delta B) - \dfrac{2(R + \Delta)}{B}\right] \\ \quad \cdot [\mathfrak{E} + 2 i_2 (\omega L - \Delta B) + i_3 (R + \Delta)] + \Omega^2 \left[\dfrac{2 i_3 \Delta B}{W} - i_2\right]. \end{cases}$$

Man kann zeigen, daß die Wirkung des Stromanteils i_3 sich in einer Verkleinerung der Resonanzkapazität bemerkbar macht, was scheinbar die DK wieder erhöht. Die Diskussion des allgemeinen Falles erfordert die gegenseitige Bewertung der Einzelglieder in Gl. (3) und ist daher etwas umständlich; wir bemerken nur, daß in erster Linie das Glied $i_3 (R + \Delta)$ wirksam ist, während $\frac{2 i_3 \Delta B}{W}$ nur bei höheren Konzentrationen eine wesentliche Rolle spielt. Der Einfluß des Stromanteils i_3

ist durch das Kurvenbild Fig. 4 veranschaulicht, in welchem Kurve I den früher betrachteten Fall mit nur magnetisch induziertem Störstrom $i_2 = 1$ darstellt; bei II ist noch $i_3 = i_2 = 1$ nach Gl. (8) berücksichtigt, während bei III $i_3 = i_2 = 2$ gesetzt ist. In dem letztgenannten Fall ist die Annäherung an die Linearität schon ziemlich gut. Wir geben nur diese beiden Beispiele und bemerken noch, daß es leicht ist, durch passende Wahl von i_2 und i_3, ohne dabei unvernünftige Annahmen über deren Beträge machen zu müssen, eine lineare Abhängigkeit

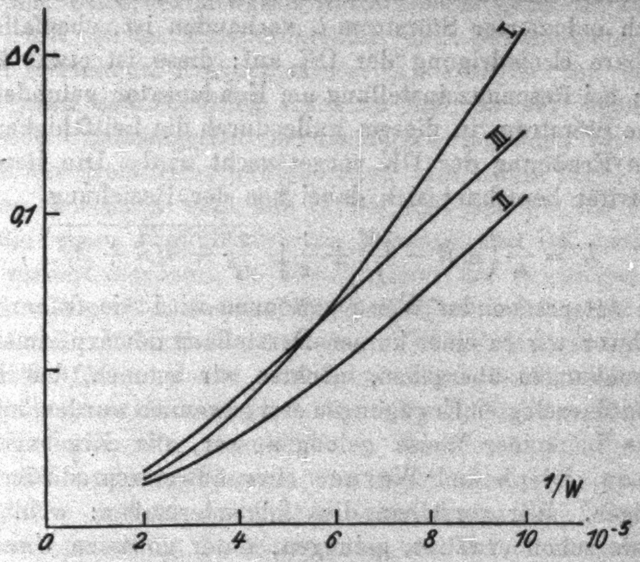


Fig. 4

der DK-Änderung von der Konzentration zu erhalten, die den von Walden, Ulich und Werner angegebenen Werten entspricht. Durch Bevorzugen von i_3 gegenüber i_2 kann man es natürlich erreichen, daß von gewissen Leitfähigkeitsbeträgen an die scheinbare Änderung der DK mit wachsender Konzentration wieder kleiner wird, daß also gewissermaßen die so bestimmte DK durch ein Minimum hindurchläuft und schließlich bei höheren Konzentrationen den Wert für das Lösungsmittel wieder übersteigen kann. Wir begnügen uns, auf diese Möglichkeit hinzuweisen, da bekanntlich Walden, Ulich und Werner bei nichtwäßrigen Lösungen ein derartiges Verhalten

beobachtet haben. Wir möchten jedoch ausdrücklich betonen, daß dieser Hinweis auf eine eventuelle Erklärungsmöglichkeit noch keine Stellungnahme zu diesen Messungen sein soll, da unsere experimentellen Untersuchungen sich bisher nur auf wäßrige Lösungen beschränken und wir mit Folgerungen über das, was die Beobachtungen bestätigten, nicht hinausgehen wollen.

Der Vollständigkeit halber sei noch folgender Fall erwähnt. Nimmt man die Resonanzeinstellung statt an einem Zusatzkondensator an einem Variometer vor, so tritt, wenn ein magnetisch induzierter Störstrom i_2 vorhanden ist, ebenfalls eine scheinbare Erniedrigung der DK auf; diese ist etwas kleiner als die bei Resonanzeinstellung am Kondensator gefundene, da ja ohne Störstrom in diesem Falle durch die Leitfähigkeit eine geringe Erhöhung der DK vorgetäuscht wird. Die Resonanzinduktivität berechnet sich dabei aus der Beziehung

$$L' = \frac{1}{\omega}\left(A\,B - \frac{\frac{1}{2}\mathfrak{E}}{i_2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mathfrak{E}^2}{i_2^2} + 4(R + A)^2}\right),$$

die in entsprechender Weise gewonnen wird wie früher Gl. (2).

Bevor wir zu einer kurzen Darstellung der experimentellen Untersuchungen übergehen, möchten wir betonen, daß die vorstehend dargelegten Erwägungen erst gewonnen wurden, nachdem es uns in keiner Weise gelungen war, die Ergebnisse von Walden, Ulich und Werner einwandfrei reproduzierbar zu bestätigen. Wir verstehen dies folgendermaßen: wohl ist es uns, wie schon erwähnt, gelungen, unter gewissen Umständen bei leitenden Lösungen der in Betracht kommenden Konzentrationen große „Erniedrigungen“ zu finden, wenn darunter solche Verschiebungen der Resonanzlage verstanden werden, wie sie bei *nichtleitenden* Flüssigkeiten tatsächlichen Erniedrigungen der DK entsprechen. Die so gemessenen „Erniedrigungen“ waren aber nicht allein durch die Art der Lösung bestimmt, sie konnten in ihrer Größe auch durch die äußeren Versuchsbedingungen beeinflußt werden, ja sogar in ihrem Sinne, d. h. in Erhöhungen verwandelt werden. *Echte* Erniedrigungen der DK auch bei leitenden Lösungen hingegen — dies sei ausdrücklich betont — wie sie durch Acetonzusatz hervorgebracht wurden, konnten in jeder Versuchsanordnung, unabhängig von den äußeren Bedingungen, im richtigen Sinne und in der rich-

tigen Größe festgestellt werden. Hierbei ist natürlich die Änderung der Resonanzeinstellung gegenüber einer gleichleitenden Lösung ohne Zusatz, nicht die gegenüber einer isolierenden Flüssigkeit zu verstehen.

Über die Versuche selbst sei folgendes mitgeteilt. Stets wurde sorgfältig darauf geachtet, daß keine Rückwirkungen des Meßkreises auf den Sender eintraten. Dies wurde dadurch festgestellt, daß ein mit dem Sender sehr lose gekoppelter Frequenzmesser keine Frequenz- und Intensitätsänderung erkennen ließ, wenn der Meßkreis auf Resonanz gebracht wurde. Da der mit einem Kristalldetektor und Galvanometer als Indikator versehene Frequenzmesser Änderungen von einem Promille noch sehr deutlich erkennen ließ, so war jedenfalls weitgehende Unabhängigkeit der Senderschwingungen von dem Zustande des Meßkreises gewährleistet. Im Laufe der Untersuchungen sind dann wohl alle in Betracht kommenden Parameter, die einen Einfluß auf die Messung der DK besitzen können, variiert worden. So die Frequenz der Schwingungen, die Kondensatorgröße, das Verhältnis zwischen Induktivität und Kapazität, die Induktivität zwischen Flüssigkeits- und Meßkondensator; ferner wurde mit einem Variometer statt mit einem Meßkondensator auf Resonanz eingestellt. Der Einfluß, den die Variation der verschiedenen Parameter auf die gemessene „DK-Änderung“ besaß, war verschieden groß; weitaus den stärksten auf die scheinbare Erniedrigung der DK übte die Art und Intensität der Koppelung des Detektorkreises an das Resonanzsystem aus. Da gegen diese die übrigen erheblich zurücktraten und oft nur schwer rein davon zu trennen waren, wollen wir uns hier auf die Betrachtung ihrer Einwirkung beschränken.

Zweifellos wäre es am besten, die Resonanzeinstellung für den Meßkreis nicht mittels eines irgendwie gekoppelten Detektorkreises zu bestimmen, sondern aus dem Maximalausschlag eines im Meßkreis selbst befindlichen Amperemeters. In diesem Falle wäre zwar die eingangs dieser Untersuchung behandelte scheinbare Erniedrigung der DK. bei vorhandener Leitfähigkeit im Kondensator zu berücksichtigen, aber die ungleich stärkere Wirkung der Verzerrung der Resonanzkurve durch Störströme wäre nicht zu befürchten. Die praktische

Ausführung scheitert an dem Fehlen geeigneter Instrumente; entweder sind diese viel zu unempfindlich oder sie besitzen so hohe Widerstände, daß durch ihr Einschalten die Schwingungen zu stark gedämpft würden. Trotzdem ist es möglich, sich dieser für unseren Fall idealen Art der Resonanzmessung wenigstens sehr weitgehend zu nähern, indem man ein empfindliches Thermoelement oder einen Kristalldetektor parallel zu einem kleinen Teil l der Induktivität des Meßkreises schaltet und zwar so, daß keine in Betracht kommende magnetische Kopplung neben der direkten galvanischen eine Rolle spielt (vgl. Fig. 5 für ein Thermoelement). Die Angaben des zugehörigen Galvanometers sind dann proportional dem Quadrat der Spannung an den Enden der Induktivität, d. h. $\omega^2 l^2 J^2$, und somit ein Maß für die im Meßkreis fließende Stromstärke J. Ein Kriterium dafür, ob die Anordnung hinreichend störstromfrei ist, gewinnt man aus dem Verhältnis des Dissonanzausschlages zu dem Resonanzausschlag; ersterer muß auch bei der Untersuchung relativ gut leitender Lösungen klein gegen den Resonanzausschlag bleiben. Bei Verwendung eines magnetisch an das Resonanzsystem gekoppelten Detektorkreises ist dies bei besser leitenden Lösungen kaum zu erreichen. Was den kapazitiven Störstrom betrifft, so wird dieser in erster Linie durch ungünstig geführte Leitungen, z. B. vom Galvanometer aus zum Detektor gebracht; passende Verlegung derselben, Einschaltung eines Blockkondensators unmittelbar hinter den Detektor sind geeignete Mittel, die Wirkung der kapazitiven Störungen herabzudrücken, was ebenfalls durch Zurücktreten des Dissonanzausschlages erkannt wird. Bei Nichtbeachtung dieser Störungsursache können ebensogut scheinbare Erhöhungen der DK. beobachtet werden wie scheinbare Erniedrigungen bei stärkerem magnetisch induziertem Störstrom.

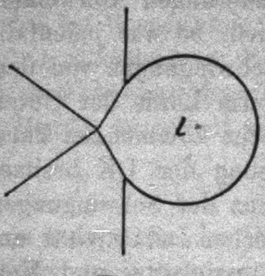


Fig. 5

Im Einverständnis mit Hrn. Rieckhoff zeigen wir in Fig. 6a und 6b je zwei Resonanzkurven[1]), die von ihm für

1) Die ausgezogenen Kurven beziehen sich auf Wasser, die gestrichelten auf die Lösung als Kondensatorflüssigkeit.

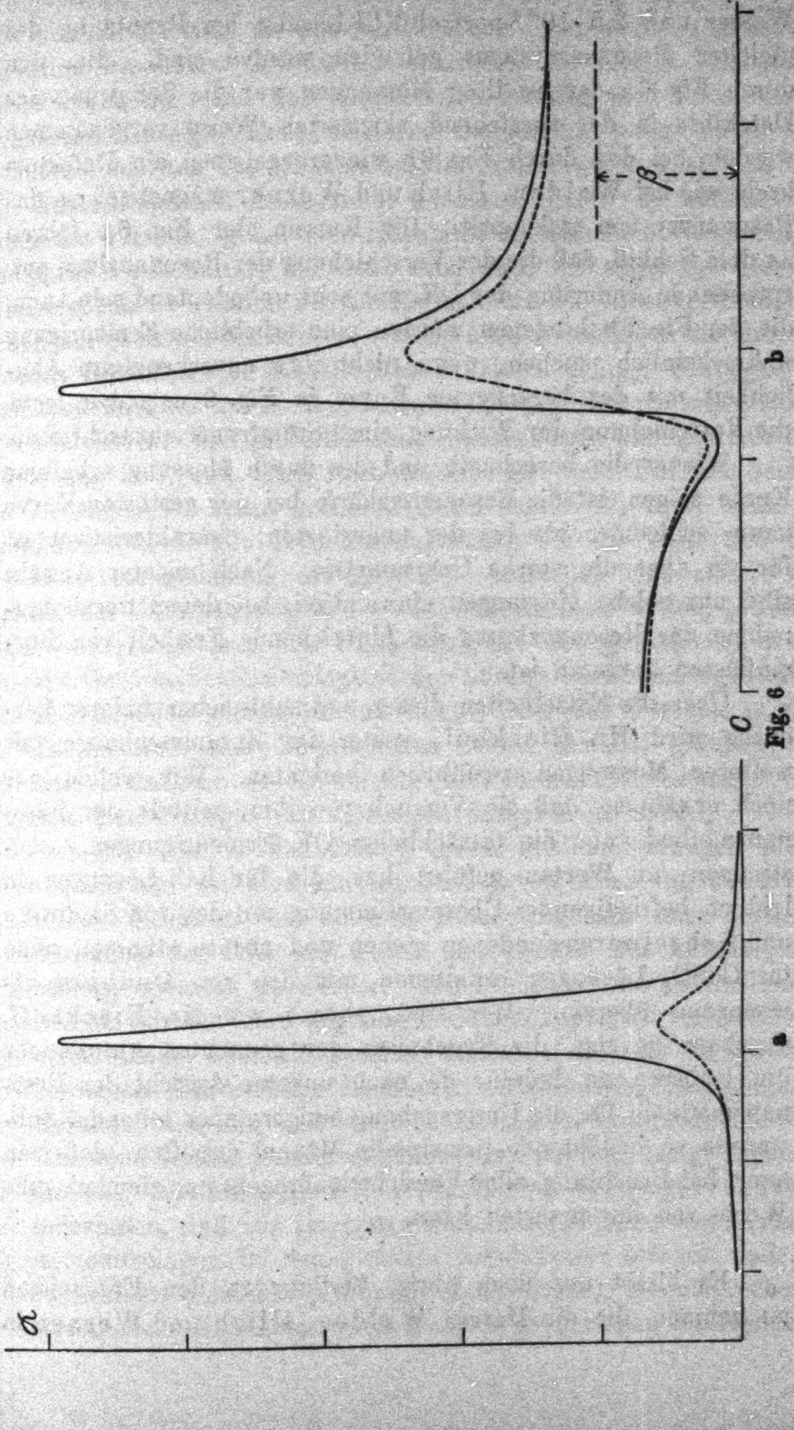


Fig. 6

Wasser und 2,5 · 10^{-4}-normal KCl-Lösung bei Benutzung des gleichen Resonanzsystems gefunden worden sind. Bei den durch Fig. 6a dargestellten Messungen war die Schaltung des Detektors in der vorstehend skizzierten Weise vorgenommen worden, bei den durch Fig. 6b wiedergegebenen ein Detektorkreis wie bei Walden, Ulich und Werner magnetisch an das Resonanzsystem gekoppelt. Die Kurven der Fig. 6a führen zu dem Schluß, daß die der Verschiebung der Resonanzlage entsprechende Änderung der DK. nur sehr unbedeutend sein kann, die der Fig. 6b hingegen würden eine erhebliche Erniedrigung wahrscheinlich machen, wenn nicht ihre unverkennbare Ähnlichkeit mit der berechneten Kurve in Fig. 2 es näher legte, die Verschiebung der Wirkung eines Störstroms zuzuschreiben.

Wie es die berechnete und die durch Messung erhaltene Kurve zeigen, ist die Resonanzschärfe bei der gestörten Kurve kaum schlechter als bei der ungestörten; charakteristisch ist für sie aber die starke Unsymmetrie. Nach unserer Ansicht sind nur solche Messungen einwandfrei, bei denen durch Aufnahme der Resonanzkurve die hinreichende Freiheit von Störeinflüssen dargetan ist.

Über die Einzelheiten dieser und zahlreicher anderer Versuche wird Hr. Rieckhoff später im Zusammenhange mit weiteren Messungen ausführlich berichten. Wir wollen nur noch erwähnen, daß ein Versuch von ihm, mittels der Resonanzmethode nun die tatsächlichen DK.-Erniedrigungen zu bestimmen, zu Werten geführt hat, die für KCl-Lösungen in leidlich befriedigender Übereinstimmung mit den von Skancke und Schreiner gefundenen stehen und ebenso stimmen seine für $CuSO_4$-Lösungen erhaltenen mit den von Deubner gewonnenen überein. Wir sind, ebenso wie Hr. Rieckhoff, durchaus geneigt, die Ergebnisse der genannten Autoren für die besseren zu halten, da nach unserer Ansicht der Resonanzmethode für die Untersuchung einigermaßen leitender Substanzen so bedeutende prinzipielle Mängel anhaften, daß man auch bei Beachtung aller Vorsichtsmaßregeln nur ziemlich rohe Werte von ihr erwarten kann.

Es bleibt uns noch übrig, Stellung zu den Ergebnissen zu nehmen, die die Herren Walden, Ulich und Werner in

ihrer Erwiderung an uns zur Stützung ihrer Methode mitteilen. Eine besondere Beweiskraft schreiben die Herren folgendem Versuch zu. Ein und dieselbe KCl-Lösung wird in verschiedenen Flüssigkeitskondensatoren untersucht, wobei durch Dimensionierung des Meßkondensators dafür gesorgt ist, daß die Gesamtkapazität des Systems konstant bleibt. Es werden also einer konstant gehaltenen Kapazität verschiedene Widerstände parallel geschaltet, die sich, auch nach Annahme der Herren umgekehrt verhalten wie die Kapazitäten der dabei verwendeten Flüssigkeitskondensatoren. Wenn nun, so schließen die Herren, das Einfüllen der KCl-Lösung in einen kleinen Flüssigkeitskondensator *I* am Meßkondensator dieselbe Resonanzeinstellung erfordert wie das Einfüllen einer *a*-prozentigen wäßrigen Acetonlösung in *I*, und wenn auch dasselbe gilt beim Einfüllen beider Lösungen in einen größeren Kondensator *II*, d. h. auch in diesem werde die Resonanzeinstellung für die KCl- und für die Acetongleichung die gleiche — natürlich eine andere als bei der Untersuchung in *I* — so, schreiben sie weiter, „scheint es uns, daß man die Unabhängigkeit des gewonnenen DK.-Wertes von der Leitfähigkeit der Lösung nicht eindrucksvoller und unwiderlegbarer dartun kann“. Da der Versuch in der Tat in dem hier besprochenen Sinne ausfällt, glauben die Herren dadurch die Unabhängigkeit ihrer DK.-Messungen von dem Leitvermögen der Lösungen dargetan zu haben.

Wir können den Zwang dieser Schlußfolgerungen nicht anerkennen; wir sind im Gegenteil davon überzeugt, das beobachtete Resultat von unserem Standpunkt aus ohne jegliche Änderung der DK. nur durch den Einfluß der Leitfähigkeit bedingt erwarten zu dürfen! Denn ebenso, wie es irrelevant ist, ob wir zu einer gegebenen Gesamtkapazität verschiedene Widerstände dadurch parallel schalten, daß wir in ein und denselben Kondensator Lösungen verschiedener Leitfähigkeit einfüllen oder ein und dieselbe Lösung in entsprechend verschiedene Teilkondensatoren, können wir die zugehörige Eichung für die „scheinbaren DK.-Änderungen“ ebensogut dadurch vornehmen, daß wir im ersten Falle entsprechend verschiedene Acetonlösungen in den gleichen Kondensator bringen und im zweiten die gleiche *a*-prozentige Acetonlösung in entsprechend verschiedene Kondensatoren. Denn je größer eben der Konden-

sator, um so größer auch die notwendige Verstellung am Meßkondensator, um beim Einfüllen der Acetonlösung Resonanzeinstellung zu erhalten, um so kleiner auf der anderen Seite der Widerstand beim Einfüllen der KCl-Lösung und dementsprechend wieder um so größer die Verschiebung am Meßkondensator. Wenn wir nur annehmen, daß die scheinbare DK.-Erniedrigung bei ein und demselben Flüssigkeitskondensator proportional der Konzentration ist, und damit natürlich bei verdünnten wäßrigen Lösungen auch dem Leitwert der Füllungen, so ergibt sich das Ergebnis von Walden, Ulich und Werner als zwangsläufige Folgerung unserer Ansicht. Wir dürften mit dem gleichen Recht wie die Herren umgekehrt daraus schließen, daß kein Einfluß der DK. vorhanden sein kann.

In Wirklichkeit kommt dem Versuch keinerlei Beweiskraft zu, weder für die eine noch für die andere Auffassung, denn er stellt im Grunde genommen nur eine andere Ausführungsform der Eichung vor. Die Kardinalfrage, ob bei der Untersuchung leitender Lösungen eine Eichung der Meßanordnung mit nichtleitenden Flüssigkeiten überhaupt statthaft ist, wird durch diese Umgestaltung des Eichverfahrens überhaupt nicht berührt!

Mehr Beachtung darf ein anderer Versuch beanspruchen, durch den die Herren darzulegen suchen, daß die Leitfähigkeit keinen merklichen Einfluß auf ihre DK.-Messungen ausüben soll. Bei diesem war an Stelle des Flüssigkeitskondensators dem Meßkondensator ein Graphitstrich parallelgeschaltet. Das Anbringen des Striches erforderte allerdings schon eine Verschiebung am Meßkondensator, um wieder Resonanz zu erhalten, aber diese Verschiebung blieb angenähert die gleiche, wenn der Widerstand des Striches von $1 \cdot 10^4$ auf 10^7 Ohm vergrößert wurde. Daß überhaupt eine Verschiebung stattfand, erklären die Herren durch die nicht zu vernachlässigende Kapazität des Striches; als beweisend für ihre Ansicht erachten sie den Umstand, daß die Größe des Widerstandes keine merkliche Rolle spielte.

Da der Graphitstrich nicht nur Widerstand, sondern auch Kapazität besitzen soll, wäre der Kondensator C (Flüssigkeits- + Meßkondensator) mit parallelgeschaltetem Widerstand W zu er-

setzen durch eine Leiterkombination, wie sie in Fig. 7 schematisch dargestellt ist, d. h. im Grenzfalle $W = \infty$ wäre C um eine kleine Kapazität $\mathfrak{C} = \frac{n}{c}$ vergrößert, während ohne Kapazität des Striches dem Kondensator C der Widerstand $W = n\,r$ parallelgeschaltet wäre. n sei die Zahl der einzelnen Glieder. Der Operator der Kombination ist gegeben durch

$$|\Omega| = \frac{W}{\sqrt{(P^2 + Q^2)(1 + b^2)}},$$

wobei

$$Q = \frac{\omega C W}{(1 + b^2)}; \quad P = 1 + b\,Q; \quad b = \omega c r = \omega \mathfrak{C} W.$$

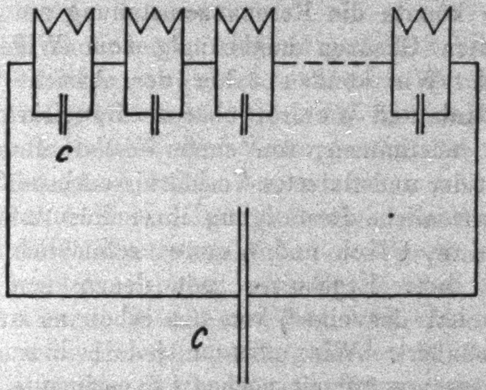


Fig. 7

Nun ist allerdings das vorliegende Zahlenmaterial der Herren Walden, Ulich und Werner für eine genauere Prüfung unzureichend. Die durch die Strichkapazität bedingte Verschiebung am Meßkondensator betrug etwa 0,5 Skalenteile; nimmt man an, daß es sich um den Meßkondensator[1]) handelte, auf den sich die Tab. 3 der Abhandlung I bezieht, so findet man, daß sie etwa 0,05 cm und somit rund 1 Proz. von C entsprach. Die Kapazitätsänderung, welche durch eine Widerstandsverkleinerung von 10^7 auf 10^4 Ohm zur Resonanzabstimmung erfordert würde, ist, nach Gleichung (1) berechnet, viel kleiner, nämlich < 2 Promille. Zieht man jedoch eine Einwirkung von Störströmen in Betracht, wie wir dies vorstehend ausgeführt haben, so käme man dabei auf eine Kapazitäts-

1) Auf Grund der angegebenen Einstellgenauigkeit und der Art der Bezifferung; weitere Anhaltspunkte fehlen.

änderung von 2—3 Proz. Wesentlich ist, daß sich die beiden Effekte entgegenwirken: eine Verkleinerung des Widerstandes *W* wirkt am Meßkondensator wie eine Verkleinerung der DK. im Flüssigkeitskondensator, die Zusatzkapazität des Striches dagegen wie eine Vergrößerung. Nun kann auf Grund der vorliegenden Messungen *nicht* behauptet werden, daß bei Änderung des Widerstandes auch die Kapazität des Striches konstant geblieben wäre, da ja diese nicht gesondert bestimmt worden ist. Vielmehr ist die Annahme ganz plausibel, daß mit der Widerstandsverkleinerung durch Auftragen von mehr Graphit die Kapazität des Striches zugenommen hätte; in diesem Falle könnte die Resonanzeinstellung am Meßkondensator in weiten Grenzen unabhängig vom Widerstande des Striches sein. Wir können daher der Ansicht der Herren Walden, Ulich und Werner über die Beweiskraft ihres Versuches nicht beistimmen; von einer Wiederholung haben wir in Anbetracht der undefinierten Verhältnisse Abstand genommen.

Eine „erfreuliche Bestätigung ihrer Resultate" sehen die Herren Walden, Ulich und Werner schließlich in der Übereinstimmung ihrer Ergebnisse mit denen von Pechhold. Gegen diese hat der eine[1]) von uns schon an anderer Stelle Bedenken geäußert. Wir möchten jedoch hier nicht darauf eingehen, da es uns zurzeit noch an experimentellem Material dazu gebricht. Die von Pechhold verwandte Fürthsche Ellipsoidmethode weicht bekanntlich von der hier besprochenen vollkommen ab; eine Kritik der Ergebnisse erfordert daher eine besondere Nachprüfung. Wir hoffen, in einiger Zeit auch zu dieser Frage Stellung nehmen zu können. Dementsprechend verzichten wir auch darauf, das sonst vorliegende Material, welches, wie schon eingangs erwähnt, zum gleichen Teil auch unsere Messungen bestätigt, zu diskutieren.

Wir möchten jedoch noch kurz darauf hinweisen, daß eine Beseitigung der hier besprochenen Diskrepanzen durch die Dispersion der DK., die schon früher herangezogen wurde und die nach der letzten Veröffentlichung der Herren Debye und Falkenhagen[2]) im Gebiete sehr verdünnter Lösungen bei

1) H. Zahn, Physik. Ztschr. 28. S. 916. 1927.

2) P. Debye u. H. Falkenhagen, Physik. Ztschr. 29. S. 121. 1928.

genauen Messungen auch zu beachten sein wird, hier nicht in Frage kommt. Denn erstens handelt es sich hier ja um Material, das bei gleichen Frequenzen gewonnen ist. Zweitens aber ist die Wirkung der Dispersion an sich schon sehr gering; es würde sich darum handeln, daß die statisch gemessene DK. um einige Zehnteleinheiten höher als die mit Hochfrequenz gemessene wäre. Um diesen Betrag müßten z. B. die Resultate von Pechhold höher sein als die von Walden, Ulich und Werner, wofür sich in dem vorliegenden Material keine Andeutungen finden. Allerdings beanspruchen auch die Pechholdschen Messungen nicht die hierfür erforderliche Genauigkeit.

Ob sich nach der in Aussicht gestellten Vervollständigung der Debye-Falkenhagenschen Theorie durch Berücksichtigung der kataphoretischen Wirkung die zwischen einzelnen Autoren noch bestehenden Widersprüche über die DK. von Elektrolytlösungen beheben lassen werden, muß vorläufig noch unentschieden bleiben. Jedenfalls aber glauben wir im vorstehenden durch Rechnung und Beibringung experimentellen Materials gezeigt zu haben, daß die starken Erniedrigungen, welche die Herren Walden, Ulich und Werner im Gegensatze zu uns bei Hochfrequenz gefunden haben, höchstwahrscheinlich auf die Wirkung von Störungsursachen zurückzuführen sind, die bei der Untersuchung nichtleitender Flüssigkeiten keine Rolle spielen und sich daher leicht der Wahrnehmung entziehen, bei zunehmender Leitfähigkeit aber immer stärker im Sinne einer Herabsetzung der DK. wirken.

Kiel, Physikal. Institut d. Universität und Stuttgart, im Mai 1928.

(Eingegangen 21. Mai 1928)

Nachtrag bei der Korrektur von H. Zahn

Die Tatsache, daß die Herren Walden, Ulich und Werner statt der erzwungenen die Eigenschwingungen in ihrem System betrachtet haben, — vgl. S. 690 der vorstehenden Abhandlung, — war uns früher[1]) entgangen. Das gleiche Ver-

1) H. Hellmann u. H. Zahn, Physik. Ztschr. 27. S. 636. 1926.

sehen findet sich auch in meiner ersten Abhandlung[1]) über die Dekrementsmethode, worauf mich Frl. A. Székely, Graz, durch einen Brief vom 12. Juni 1928 freundlichst hingewiesen hat. Demnach gelten die dort aufgestellten Beziehungen nicht für den betrachteten Fall der Erregung mit ungedämpften Schwingungen, sondern wären nur anzuwenden bei Anstoßen des Systems etwa durch einen Kreis mit Löschfunkenstrecke. Die in meiner Arbeit gezogene Folgerung über die Überlegenheit des Dekrements über die Resonanzmethode wird dadurch nicht wesentlich berührt. Für praktische Anwendung kommen wohl nur Anordnungen mit nicht-quasistationären Verhältnissen in Betracht, etwa der Art, wie sie von Hrn. Hellmann und mir in der zweiten Arbeit[2]) behandelt ist. Die dort aufgestellten Formeln sind aber für den Fall erzwungener Schwingungen abgeleitet und bedürfen keiner Korrektur.

Kiel, den 27. Juni 1928.

---

1) H. Zahn, Ann. d. Phys. 80. S. 182. 1926.
2) H. Hellmann u. H. Zahn, Ann. d. Phys. 80. S. 191. 1926.

3. *Experimentelle Untersuchungen zur W. Ritzschen Theorie der Transversalschwingungen quadratischer Platten;*
von Alice Lemke

§ 1. Einleitung

Das Problem der Transversalschwingungen ebener elastischer Platten mit freiem Rande, das seit den Chladnischen Versuchen von Mathematikern und Physikern behandelt worden ist, erfordert die Integration der Differentialgleichung:

$$(1)\qquad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{E \cdot D^2}{3\,\varrho \cdot (1-\mu^2)} \cdot \Delta\,\Delta w = 0\;^{1)}$$

unter gewissen Randbedingungen. Es bedeutet darin E den Younghschen Elastizitätsmodul, μ die Poissonsche Elastizitätszahl, ϱ die Dichte des Plattenmaterials, $2D$ die Dicke der Platte, w die Verrückung in der zur Plattenebene senkrechten Richtung, die mit der Geschwindigkeit $\partial w/\partial t$ erfolgt. Die Gleichung gilt für quadratische Platten, wobei die Kantenlänge als Einheit eingeführt wurde.

Nach W. Ritz[2]) läßt sich das Problem auf ein Variationsproblem zurückführen, das in Form einer Reihenentwicklung eine Lösung der Differentialgleichung mit theoretisch beliebigem Annäherungsgrad ergibt. Danach läßt sich die Durchbiegung w durch eine konvergente Reihenentwicklung nach an sich beliebigen Funktionen eines Orthogonalsystems darstellen. Die Konvergenz der Reihe und damit der praktische Wert dieser Methode hängen im wesentlichen von der passenden Auswahl der Funktionen ab, wobei durch die Resultate des Experiments die Wahl der Funktionen erleichtert wird. Als geeignete Funktionen benutzt Ritz — nach Analogie der Platte zum elastischen Stabe — die Eigenfunktionen schwingender Stäbe.

---

1) Rayleigh (16), S. 390 (8). Die eingeklammerten Zahlen beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit.

2) Ritz (17) und (18).

Zur experimentellen Bestätigung seiner Methode griff W. Ritz auf die von Chladni beobachteten relativen Tonhöhen und die von Strehlke gemessenen Klangfiguren zurück.[1]) Die von Chladni gemachten Angaben sind in mancher Beziehung unsicher. Offenbar bemüht, eine zahlentheoretische Gesetzmäßigkeit der Schwingungszahlen herauszufinden, übersah Chladni die Abhängigkeit der relativen Tonhöhen vom Material der Platten und machte folglich auch keine Angaben darüber. Auch bleibt unsicher, ob die angegebenen Intervalle sich auf gleichschwebende Temperatur beziehen. Ritz nahm an, daß Chladni Glasplatten benutzt habe — was er übrigens auch als zweckmäßiger als Metallplatten bezeichnet — wählte also einen Mittelwert von verschiedenen, für die einzelnen Glassorten gefundenen μ-Werten, für den er die Rechnung mit 3—6 Gliedern in der Reihenentwicklung durchführte und fand für diesen willkürlich gewählten μ-Wert seine Theorie hinlänglich bestätigt. Dabei sind jedoch nicht Schwingungszahlen angegeben, sondern Tonhöhen in musikalischer Bezeichnung. Ein $+$-Zeichen bedeutet, daß der Ton etwas höher, ein $-$-Zeichen, daß der Ton etwas tiefer war.

Die genauere Untersuchung erfordert außer der Bestimmung der absoluten Tonhöhen die Kenntnis der Elastizitätszahlen E und μ der benutzten Platten. Ritz hat nun selbst bereits auf die Möglichkeit hingewiesen, diese Elastizitätszahlen durch genaue Beobachtung der Schwingungszahlen mehrerer passend gewählter Töne derselben Platte zu bestimmen.[2]) Die Schwingungszahl n ist nämlich gegeben durch

$$(2) \qquad n = \frac{D}{l \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{E}{3\,\varrho \cdot (1 - \mu^2)}} \cdot \sqrt{\lambda(\mu)},$$

wobei außer λ sämtliche Größen Konstanten der Platte sind, während $\lambda(\mu)$ eine für den betreffenden Ton charakteristische Funktion von μ ist, die man nach dem Ritzschen Verfahren numerisch mit beliebiger Annäherung berechnen kann.

Das Verhältnis je zweier Schwingungszahlen einer Platte ist nur abhängig von den λ:

$$(3) \qquad \frac{n_a}{n_b} = \frac{\sqrt{\lambda_a(\mu)}}{\sqrt{\lambda_b(\mu)}} = F(\mu)$$

1) Ritz (18), S. 767, 768.

2) Ritz (18), S. 772.

so daß man daraus die Poissonsche Elastizitätszahl μ bestimmen kann. Die Formel (2) gestattet bei absoluter Bestimmung der Schwingungszahl auch die Berechnung des Elastizitätsmoduls E und durch die bekannte Beziehung

$$\mu = \frac{E - 2F}{2F} \tag{4}$$

könnte man schließlich auch noch den Torsionsmodul F bestimmen.

Die Bestimmung der Elastizitätszahlen kreisförmiger Platten ist nach den von Kirchhoff berechneten Formeln von Hrn. Prof. Kalähne[1]) ausgeführt worden, wobei sich die Elastizitätszahl μ mit 10 Proz. Genauigkeit ergab.

Aufgabe der vorliegenden Untersuchung war

1. die Prüfung des Ritzschen Verfahrens durch Messung der Tonhöhen und der Figurenform für möglichst viele Eigentöne einer Platte und Vergleichung mit den Ergebnissen der Theorie,

2. ein Versuch der Bestimmung der Elastizitätszahlen gegebener Platten aus den beobachteten Tonhöhen.

§ 2. Numerische Durchführung des Ritzschen Rechnungsverfahrens

Es seien u_m und u_n die Normalfunktionen schwingender Stäbe[2]):

$$(5)\quad \begin{cases} u_m(x) = \dfrac{\operatorname{Cof} k_m \cdot \cos k_m x + \cos k_m \cdot \operatorname{Cof} k_m x}{\sqrt{\operatorname{Cof}^2 k_m + \cos^2 k_m}} & \text{für gerade } m, \\[2ex] u_n(x) = \dfrac{\operatorname{Sin} k_n \cdot \sin k_n x + \sin k_n \cdot \operatorname{Sin} k_n x}{\sqrt{\operatorname{Sin}^2 k_n - \sin^2 k_n}} & \text{für ungerade } n, \end{cases}$$

wobei die Stablänge $= 1$ gesetzt wurde. k_m und k_n sind die Wurzeln der Gleichungen

$$(6)\quad \begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{Tg} x = 0 & (\text{Wurzeln } k_m) \\ \operatorname{tg} x - \operatorname{Tg} x = 0 & (\text{Wurzeln } k_n) \end{cases},$$

und haben folgende Werte[3]):

---

1) Kalähne (7).
2) Kalähne (8), S. 239.
3) Vgl. Kalähne (8), S. 124.

m	k_m	n	k_n
0	0	1	0
2	2,36502	3	3,92660
4	5,49780	5	7,06858
6	8,63938	7	10,21017
8	11,78096	9	13,35175
10	14,92255		

Die Funktionen der Reihenentwicklung setzt man gleich den Produkten aus je zwei Normalfunktionen schwingender Stäbe, wobei man zu besserer Unterscheidung diese Funktionen für das Argument x mit u, für das Argument y mit v bezeichnet:

(7) $$\psi_{mn} = u_m(x) \cdot v_n(y).$$

Die Reihenentwicklung hat also für jeden einzelnen Ton die Form:

(8) $$\left\{\begin{aligned} w = A_{00} \cdot u_0(x) \cdot v_0(y) + A_{10} \cdot u_1(x) \cdot v_0(y) + A_{01} \cdot u_0(x) \cdot v_1(y) \\ + A_{11} \cdot u_1(x) \cdot v_1(y) + A_{02} \cdot v_0(x) \cdot v_2(y) \\ + \ldots \end{aligned}\right.$$

wobei die Koeffizienten A_{00} usw. nach dem Ritzschen Verfahren durch eine Minimumsbedingung zu bestimmen sind. Diese erfordert die Auflösung der Gleichungen:

(9) $$\left\{\begin{aligned} 0 &= \left(\alpha_{00}^{00} - \lambda\right) \cdot A_{00} + \alpha_{01}^{00} \cdot A_{01} \\ &\qquad + \alpha_{10}^{00} \cdot A_{10} + \ldots \qquad + \alpha_{ss}^{00} \cdot A_{ss} + \ldots \\ 0 &= \alpha_{00}^{01} \cdot A_{00} + \left(\alpha_{01}^{01} - \lambda\right) \cdot A_{01} + \ldots \qquad + \alpha_{ss}^{01} \cdot A_{ss} + \ldots \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0 &= \alpha_{00}^{ss} \cdot A_{00} + \alpha_{01}^{ss} \cdot A_{C1} \\ &\qquad + \alpha_{10}^{ss} \cdot A_{10} + \ldots + \left(\alpha_{ss}^{ss} - \lambda\right) \cdot A_{ss} + \ldots \\ 0 &= \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{aligned}\right.$$

Die α-Größen dieser Gleichungen haben folgende Bedeutung:

(10) $$\alpha_{mn}^{mn} = k_m^{\,4} + k_n^{\,4} + 2\,\mu \cdot \omega_{mm} \cdot \omega_{nn} + 2\,(1 - \mu) \cdot \gamma_{mn} \cdot \gamma_{nn},$$

(11) $$\alpha_{mn}^{pq} = \mu \cdot (\omega_{mp} \cdot \omega_{qn} + \omega_{pm} \cdot \omega_{nq}) + 2\,(1 - \mu) \cdot \gamma_{nq} \cdot \gamma_{mp},$$

wobei die ω und γ durch die Formel gegeben sind:

(12) $$\omega_{mn} = \frac{2\,k_m^{\,4}\,[u_m' \cdot u_n - u_m \cdot u_n'](x = 1)}{k_m^{\,4} - k_n^{\,4}}, \qquad \omega_{0m} = \omega_{1m} = 0,$$
$(m \neq n)$

(13) $\gamma_{mn} = \frac{2\,[k_m^4 \cdot u_m \cdot u_n' - k_n^4 \cdot u_m' \cdot u_n]\,(x = 1)}{k_m^4 - k_n^4}, \quad \gamma_{0n} = \gamma_{0n} = 0\cdot$
$(m \neq n)$

Dagegen gilt für $m = n$:

a) für gerade m:

$$(14) \qquad \omega_{mm} = \frac{-k_m^2 (\mathfrak{Cos}^2 k_m - \cos^2 k_m)}{\mathfrak{Cos}^2 k_m + \cos^2 k_m} + \frac{2\,k_m \cdot \cos^2 k_m \cdot \mathfrak{Cos}^2 k_m \cdot \mathfrak{Tg}\, k_m}{\mathfrak{Cos}^2 k_m + \cos^2 k_m},$$

$$(15) \qquad \gamma_{mm} = \frac{k_m^2 \cdot (\mathfrak{Cos}^2 k_m - \cos^2 k_m)}{\mathfrak{Cos}^2 k_m + \cos^2 k_m} + \frac{6\,k_m \cdot \cos^2 k_m \cdot \mathfrak{Cos}^2 k_m \cdot \mathfrak{Tg}\, k_m}{\mathfrak{Cos}^2 k_m + \cos^2 k_m};$$

b) für ungerade n:

$$(16) \qquad \omega_{nn} = \frac{-k_n^2 (\mathfrak{Sin}^2 k_n + \sin^2 k_n)}{\mathfrak{Sin}^2 k_n - \sin^2 k_n} + \frac{2\,k_n\, \mathfrak{Sin}^2 k_n \cdot \sin^2 k_n \cdot \mathfrak{Cotg}\, k_n}{\mathfrak{Sin}^2 k_n - \sin^2 k_n},$$

$$(17) \qquad \gamma_{nn} = \frac{k_n^2 \cdot (\mathfrak{Sin}^2 k_n + \sin^2 k_n)}{\mathfrak{Sin}^2 k_n - \sin^2 k_n} + \frac{6\,k_n\, \mathfrak{Sin}^2 k_n \cdot \sin^2 k_n \cdot \mathfrak{Cotg}\, k_n}{\mathfrak{Sin}^2 k_n - \sin^2 k_n}.$$

Die Zusammenstellung der numerisch berechneten ω- und γ-Werte bis zum Index 10 enthalten die Tab. 1 und 2.

Die α-Größen sind linear abhängig von der Poissonschen Zahl μ. Die Tab. 3 und 4 geben die für $\mu = 0{,}36$ berechneten α-Größen, die Tab. 5 und 6 ihre Ableitungen nach μ, so daß aus den in μ linearen Glgg. (10) und (11) die α für jedes μ berechenbar.

Man ist also in der Lage, aus den Tab. 3—6 durch geeignete Interpolation für gegebene μ-Werte die α und damit die Frequenzparameter zu ermitteln, wodurch diese Zahlentabellen einen über diese spezielle Untersuchung hinausgehenden Wert haben.

Die Berechnung der Gleichungssysteme wird dadurch erleichtert, daß sich infolge von Symmetrieeigenschaften der Klangfiguren die Anzahl der Glieder verringert. Man unterscheidet einfache und Doppeltöne. Gehören zu einem Ton zwei verschiedene, nicht zur Deckung zu bringende Klangfiguren, so bezeichnet man diesen Ton als einen Doppelton. Bei einem einfachen Ton, d.h. bei einem solchen, zu dem nur eine einzige Klangfigur gehört, ist $w(-x, +y)$ dem absoluten Betrage nach gleich $w(+x, +y)$; denn wäre dieses nicht der Fall, so könnte man durch Vertauschung von $-x$ mit $+x$ eine andere, mit der ersten nicht zur Deckung zu bringende Figur konstruieren, was der Annahme widerspricht. Es kann also für einfache Töne nur entweder $w(-x, +y) = -w(+x, y)$ oder

Tabelle 1

γ_{mn}

m	γ_{m0}	γ_{m1}	γ_{m2}	γ_{m3}	γ_{m4}	γ_{m5}	γ_{m6}	γ_{m7}	γ_{m8}	γ_{m9}	$\gamma_{m\,10}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	+3	0	− 3,4641	0	+ 3,4641	0	− 3,4641	0	+ 3,4641	0
2	0	0	+ 12,370	0	− 8,8442	0	+ 9,1521	0	− 9,2332	0	+ 9,2628
3	0	− 3,4641	0	+ 27,2316	0	− 14,3966	0	+ 15,1565	0	− 15,4348	0
4	0	0	− 8,8442	0	+ 46,717	0	− 19,5263	0	+ 20,740	0	− 21,284
5	0	+ 3,4641	0	− 14,3966	0	+ 71,1705	0	− 24,526	0	+ 26,131	0
6	0	0	+ 9,1521	0	− 19,5263	0	+ 100,556	0	− 29,444	0	+31,377
7	0	− 3,4641	0	+ 15,1565	0	− 24,526	0	+ 134,88	0	− 34,311	0
8	0	0	− 9,2332	0	+ 20,740	0	− 29,444	0	+ 174,133	0	− 39,142
9	0	+ 3,4641	0	− 15,4348	0	+ 26,131	0	− 34,311	0	+ 218,32	0
10	0	0	+ 9,2628	0	− 21,284	0	+ 31,377	0	− 39,142	0	+ 267,45

Tabelle 2

ω_{mn}

m	ω_{m0}	ω_{m1}	ω_{m2}	ω_{m3}	ω_{m4}	ω_{m5}	ω_{m6}	ω_{m7}	ω_{m8}	ω_{m9}	$\omega_{m\,10}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0		0	0	0	0	0	0	0
2	− 4,6473	0	− 3,0756	0	− 0,4502	0	+ 0,14268	0	− 0,061542	0	+ 0,031816
3	0	− 10,1485	0	− 11,5124	0	− 1,32145	0	+ 0,56186	0	− 0,28405	0
4	+ 10,9953	0	− 13,1468	0	− 24,726	0	− 2,4651	0	+ 1,25135	0	− 0,70765
5	0	+ 21,022	0	− 13,8775	0	− 42,896	0	− 3,7477	0	+ 2,1426	0
6	− 17,2787	0	+ 25,406	0	− 15,0318	0	− 66,00	0	− 5,1129	0	+ 3,1810
7	0	− 31,905	0	+ 25,686	0	− 16,314	0	− 94,037	0	− 6,5303	0
8	+ 23,562	0	− 37,891	0	+ 26,384	0	− 17,6791	0	− 127,01	0	− 7,9829
9	0	+ 42,788	0	− 37,9735	0	+ 27,275	0	− 19,0968	0	− 164,92	0
0	− 29,845	0	+ 50,428	0	− 38,407	0	+ 28,314	0	− 20,5495	0	—

$w(-x, +y) = + w(x, y)$ sein, die Lösung ist also entweder eine gerade oder eine ungerade Funktion. Da man für quadratische Platten beliebig x und y vertauschen kann, so können $w(x, y)$ und $w(y, x)$ sich ebenfalls nur durch das Vorzeichen unterscheiden; es können also die den einfachen Tönen entsprechenden Funktionen nur entweder symmetrisch oder antisymmetrisch sein.

Die Auflösung der Gleichgewichtssysteme nach dem von W. Ritz[1]) ausführlich beschriebenen Verfahren durch sukzessive Korrektionen liefert Näherungswerte λ_s für die Frequenzparameter λ und Näherungswerte für die Koeffizienten A der Reihenentwicklung. Da die Elastizitätszahlen der Platte zu bestimmen waren, mußten die Parameter λ, mit denen die Schwingungszahl durch (2) zusammenhängt, mit möglichster Genauigkeit als Funktionen von μ berechnet werden. Das erfordert für jeden λ-Wert die Auflösung eines Gleichungssystems (9) von s Gleichungen mit s Unbekannten. Die vorliegende Arbeit ging zunächst von dem von Ritz gewählten Werte $\mu = 0{,}225$ aus, wobei die Durchführung der Rechnung einige Differenzen mit den von Ritz berechneten Werten — offenbar infolge dort vorgekommener Rechenfehler — ergab. Bei der folgenden Zusammenstellung der Rechenergebnisse sind daher die von Ritz berechneten Werte zum Vergleich angegeben. Mit welcher Genauigkeit die λ-Werte sich bei Entwicklung mit s Gliedern ergeben, läßt sich nicht ohne weiteres erkennen; auch läßt sich die mit s Gliedern entwickelte Reihe nicht einfach durch weitere Glieder ergänzen, vielmehr ändert sich bei Hinzunahme weiterer Glieder jedes vorhergehende Glied der Reihe. Es wurde deshalb die Reihenentwicklung für 6 tiefe Töne mit 6 Gliedern, dann mit 15 Gliedern durchgeführt für verschiedene μ-Werte, zunächst für $\mu = 0{,}225$. Da jedoch keine Glasplatten, sondern nur Metallplatten zur Verfügung standen, für welche μ viel größer ist, mußten andere μ-Werte für die Berechnung gewählt werden, wie aus der folgenden Zusammenstellung der Rechenergebnisse ersichtlich ist.[2])

---

1) Ritz (18), S. 763.

2) Für die Erlaubnis zur Benutzung der Brunswiga-Rechenmaschine der Königsberger Sternwarte bin ich dem Direktor Hrn. Prof. Przybyllok zu Dank verpflichtet.

Tabelle 3

α-Werte (ungerade)

α^{pq}_{mn}	α^{pq}_{11}	α^{pq}_{13}	α^{pq}_{31}	α^{pq}_{33}	α^{pq}_{15}	α^{pq}_{51}
α^{11}_{mn}	+11,52	−13,302	−13,302	+15,36	+13,302	+13,302
α^{13}_{mn}	−13,302	+342,29	+52,437	−78,689	−55,283	−92,163
α^{31}_{mn}	−13,302	+52,437	+342,29	−78,689	−92,163	−55,283
α^{33}_{mn}	+15,36	−78,689	−78,689	+1520,1	+114,54	+114,5
α^{15}_{mn}	+13,302	−55,28	−92,16	+114,54	+2769,8	+174,46
α^{51}_{mn}	+13,302	−92,16	−55,28	+114,54	+174,46	+2769,8
α^{35}_{mn}	−15,36	+68,66	+33,624	−438,83	−158,85	−168,86
α^{53}_{mn}	−15,36	+33,624	+68,66	−438,83	−168,86	−158,85
α^{55}_{mn}	+15,36	−73,836	−73,836	+278,50	−9,07	−9,07
α^{17}_{mn}	−13,302	+58,201	+131,92	−161,04	−94,18	−256,82
α^{71}_{mn}	−13,302	+131,92	+58,201	−161,04	−256,82	−94,18
α^{37}_{mn}	+15,36	−69,258	+11,479	+419,53	+122,44	+223,23
α^{73}_{mn}	+15,36	+11,479	−69,258	+419,53	+223,23	+122,44
α^{57}_{mn}	−15,36	+71,457	+79,013	−294,33	−137,11	+177,13
α^{75}_{mn}	−15,36	+79,013	+71,457	−294,33	+177,13	−137,11
α^{77}_{mn}	+15,36	−73,658	−73,658	+304,43	+151,8	+151,8
α^{19}_{mn}	+13,302	−59,269	−171,68	+207,17	+100,34	+339,18
α^{91}_{mn}	+13,302	−171,68	−59,269	+207,17	+339,18	+100,34
α^{39}_{mn}	−15,36	+69,476	−56,581	−379,46	−123,70	−277,60
α^{93}_{mn}	−15,36	−56,581	+69,476	−379,46	−277,60	−123,70
α^{59}_{mn}	+15,36	−70,588	−84,190	+303,91	+132,08	−345,18
α^{95}_{mn}	+15,36	−84,190	−70,588	+303,91	−345,18	+132,08
α^{79}_{mn}	−15,36	+71,70	+75,86	−309,75	−140,48	−166,48
α^{97}_{mn}	−15,36	+75,86	+71,70	−309,75	−166,48	−140,48
α^{99}_{mn}	+15,36	−72,813	−72,813	+312,71	+148,87	+148,87

Tabelle 3 (Fortsetzung)

α-Werte (ungerade)

α_{mn}^{pq}	α_{35}^{pq}	α_{53}^{pq}	α_{55}^{pq}	α_{17}^{pq}	α_{71}^{pq}	α_{37}^{pq}
α_{mn}^{11}	−15,36	−15,36	+15,36	−13,302	−13,302	+15,36
α_{mn}^{13}	+68,663	+33,624	−73,836	+58,201	+131,92	−69,258
α_{mn}^{31}	+33,624	+68,663	−73,836	+131,92	+58,201	+11,479
α_{mn}^{33}	−438,83	−438,83	+278,5	−161,04	−161,04	+419,5
α_{mn}^{15}	−158,85	−168,86	−9,07	−94,180	−256,82	+122,44
α_{mn}^{51}	−168,86	−158,85	−9,070	−256,82	−94,180	+223,23
α_{mn}^{35}	+5570,6	+335,26	−1076,8	+168,35	+261,59	−771,77
α_{mn}^{53}	+335,26	+5570,6	−1076,8	+261,59	+168,35	−407,89
α_{mn}^{55}	−1076,8	−1076,8	+12801	−232,21	−232,21	+535,25
α_{mn}^{17}	+168,35	+261,59	−232,21	+11385,5	+381,82	−254,49
α_{mn}^{71}	+261,59	+168,35	−232,21	+381,82	+11385,5	−362,26
α_{mn}^{37}	−771,77	−407,89	+535,25	−254,49	−362,23	+16586
α_{mn}^{73}	−407,89	−771,77	+535,25	−362,23	−254,49	+531,66
α_{mn}^{57}	+478,44	+975,40	−1924,5	−113,62	+296,13	−1971,0
α_{mn}^{75}	+975,40	+478,44	−1924,5	+296,13	−113,62	−627,43
α_{mn}^{77}	−513,77	−513,77	+813,98	+482,04	+482,04	+1728,1
α_{mn}^{19}	−215,5	−355,82	+322,29	−131,75	−506,81	+221,90
α_{mn}^{91}	−355,82	−215,5	+322,29	−506,81	−131,75	+504,59
α_{mn}^{39}	+788,94	+474,28	−618,82	+175,99	+462,86	−1089,8
α_{mn}^{93}	+474,28	+788,94	−618,82	+462,86	+175,99	−650,63
α_{mn}^{59}	−505,22	−815,28	+1926,2	−201,56	−360,04	+673,98
α_{mn}^{95}	−815,28	−505,22	+1926,2	−360,04	−201,56	+707,95
α_{mn}^{79}	+532,29	+537,45	−869,73	+227,14	−850,46	−729,89
α_{mn}^{97}	+537,45	+532,29	−869,73	−850,46	+227,14	−1369,6
α_{mn}^{99}	−548,34	−548,34	+916,12	−252,73	−252,73	+769,08

Tabelle 3 (Fortsetzung)

α-Werte (ungerade)

α_{mn}^{pq}	α_{73}^{pq}	α_{57}^{pq}	α_{75}^{pq}	α_{77}^{pq}	α_{19}^{pq}	α_{91}^{pq}
α_{mn}^{11}	+15,36	−15,36	−15,36	+15,36	+13,302	+13,302
α_{mn}^{13}	+11,479	+71,457	+79,013	−73,658	−59,269	−171,68
α_{mn}^{31}	−69,258	+79,013	+71,457	−73,658	−171,68	−59,269
α_{mn}^{33}	+419,5	−294,33	−294,33	+304,43	+207,17	+207,17
α_{mn}^{15}	+223,23	−137,11	+177,13	+151,8	+100,34	+339,18
α_{mn}^{51}	+122,44	+177,13	−137,11	+151,8	+339,18	+100,34
α_{mn}^{35}	−407,89	+478,44	+975,41	−513,77	−215,52	−355,82
α_{mn}^{53}	−771,77	+975,41	+478,44	−513,77	−355,82	−215,52
α_{mn}^{55}	+535,25	−1924,5	−1924,5	+813,98	+322,29	+322,29
α_{mn}^{17}	−362,26	−113,62	+296,13	+482,04	−131,75	−506,81
α_{mn}^{71}	−254,49	+296,13	−113,62	+482,04	−506,81	−131,75
α_{mn}^{37}	+531,66	−1971,0	−627,43	+1728,2	+221,90	+504,59
α_{mn}^{73}	+16586	−627,43	−1971,0	+1728,2	+504,59	+221,90
α_{mn}^{57}	−627,43	+28555	+870,83	−3555	−296,66	−429,15
α_{mn}^{75}	−1971,0	+870,83	+28555	−3555	−429,15	−296,66
α_{mn}^{77}	+1728,1	−3555,2	−3555,2	+51388	+371,48	+371,48
α_{mn}^{19}	+504,59	−296,66	−429,15	+371,48	+32618	+674,44
α_{mn}^{91}	+221,90	−429,15	−296,66	+371,48	+674,44	+32618
α_{mn}^{39}	−650,63	+730,78	+759,60	−843,54	−365,54	−653,36
α_{mn}^{93}	−1089,8	+759,60	+730,78	−843,54	−653,36	−365,54
α_{mn}^{59}	+707,95	−2729,9	−983,43	+1198,09	−280,04	+536,01
α_{mn}^{95}	+673,98	−983,43	−2729,9	+1198,09	+536,01	−280,04
α_{mn}^{79}	−1369,6	+1141,3	+3515,5	−5055,9	+926,17	−446,30
α_{mn}^{97}	−729,89	+3515,5	+1141,3	−5055,9	−446,30	+926,17
α_{mn}^{99}	+769,08	−1226,5	−1226,5	+1596,6	−1572,3	−1572,3

Tabelle 3 (Fortsetzung)

α-Werte (ungerade)

α_{mn}^{pq}	α_{39}^{pq}	α_{93}^{pq}	α_{59}^{pq}	α_{95}^{pq}	α_{79}^{pq}	α_{97}^{pq}	α_{99}^{pq}
α_{mn}^{11}	−15,36	−15,36	+15,36	+15,36	−15,36	−15,36	+15,36
α_{mn}^{13}	+69,48	−56,58	−70,588	−84,19	+71,70	+75,86	−72,813
α_{mn}^{31}	−56,58	+6948	−84,19	−70,588	+75,86	+71,70	−72,813
α_{mn}^{33}	−379,46	−379,46	+303,91	+303,91	−309,75	−309,75	+312,71
α_{mn}^{15}	−123,69	−277,6	+132,08	−345,18	−140,48	−166,48	+148,87
α_{mn}^{51}	−277,6	−123,69	−345,18	+132,08	−166,48	−140,48	+148,87
α_{mn}^{35}	+788,94	+474,28	−505,22	−815,28	+532,29	+537,45	−548,34
α_{mn}^{53}	+474,28	+788,94	−815,28	−505,22	+537,45	+532,29	−548,34
α_{mn}^{55}	−618,82	−618,82	+1926,2	+1926,2	−869,73	−869,73	+916,12
α_{mn}^{17}	+175,99	+462,86	−201,56	−360,04	+227,14	−850,46	−252,72
α_{mn}^{71}	+462,86	+175,99	−360,04	−201,56	−850,46	+227,14	−252,72
α_{mn}^{37}	−1089,8	−650,63	+673,98	+707,95	−729,89	−1369,6	+769,08
α_{mn}^{73}	−650,63	−1089,8	+707,95	+673,98	−1369,6	−729,89	+769,08
α_{mn}^{57}	+730,78	+759,60	−2729,9	−983,43	+1141,2	+3515,5	−1226,5
α_{mn}^{75}	+759,60	+730,78	−983,43	−2729,9	+3515,5	+1141,2	−1226,5
α_{mn}^{77}	−843,54	−843,54	+1198,1	+1198,1	−5055,9	−5055,9	+1596,6
α_{mn}^{19}	−365,54	−653,36	−280,04	+536,01	+926,17	−446,30	−1572,3
α_{mn}^{91}	−653,36	−365,54	+536,01	−280,04	−446,3	+926,17	−1572,3
α_{mn}^{39}	+40995	+824,08	−3120,84	−889,34	+2677,2	+939,59	−2041,9
α_{mn}^{93}	+824,08	+40995	−889,34	−3120,84	+939,59	+2677,2	−2041,9
α_{mn}^{59}	−3120,8	−889,34	+59259	+1143,5	−5662,8	−1340,2	+5555,9
α_{mn}^{95}	−889,34	−3120,8	+1143,5	+59259	−1340,2	−5662,8	+5555,9
α_{mn}^{79}	+2677,2	+939,59	−5662,8	−1340,2	+91506	+1653,5	−8066,8
α_{mn}^{97}	+939,59	+2677,2	−1340,2	−5662,8	+1653,5	+91506	−8066,8
α_{mn}^{99}	−2041,9	−2041,9	+5555,9	+5555,9	−8066,8	−8066,8	+144154

Tabelle 4

α_{mn}^{pq}	$mn = 02$	α_{20}^{pq}	α_{22}^{pq}	α_{04}^{pq}	α_{40}^{pq}	α_{24}^{pq}
$pq = 02$	+31,285	+7,775	+5,1455	0	−18,395	+0,7532
α_{mn}^{20}	+7,775	+31,285	+5,1455	−18,395	0	−12,174
α_{mn}^{22}	+5,1455	+5,1455	+265,24	+21,995	+21,995	−124,98
α_{mn}^{04}	0	−18,395	+21,995	+913,60	+43,523	+41,367
α_{mn}^{40}	−18,395	0	+21,995	+43,523	+913,60	−52,039
α_{mn}^{24}	+0,7532	−12,174	−124,98	+41,367	−52,039	+1739,3
α_{mn}^{42}	−12,174	+0,7532	−124,98	−52,039	+41,367	+162,42
α_{mn}^{44}	−1,7820	−1,782	+104,38	−97,872	−97,872	−407,83
α_{mn}^{06}	0	+28,907	−42,505	0	−68,394	+25,148
α_{mn}^{60}	+28,907	0	−42,505	−68,394	0	+100,57
α_{mn}^{26}	−0,2387	+19,131	+116,62	+4,1242	+81,777	−289,80
α_{mn}^{62}	+19,131	−0,2387	+116,62	+81,777	+4,1242	−223,87
α_{mn}^{46}	+0,5648	+2,8003	−108,40	−9,7578	+153,80	+235,15
α_{mn}^{64}	+2,8003	+0,5648	−108,40	+153,80	−9,7578	+319,85
α_{mn}^{66}	−0,8875	−0,8875	+109,82	+15,334	+15,334	−252,06
α_{mn}^{08}	0	−39,419	+63,393	0	+93,265	−44,141
α_{mn}^{80}	−39,419	0	+63,393	+93,265	0	−149,99
α_{mn}^{28}	+0,10296	−26,088	−104,17	−2,0935	−111,51	+297,79
α_{mn}^{82}	−26,088	+0,10296	−104,17	−111,51	−2,0935	+283,87
α_{mn}^{48}	−0,2436	−3,8186	+110,96	+4,9533	−209,73	−244,99
α_{mn}^{84}	−3,8186	−0,2436	+110,96	−209,73	+4,9533	−214,29
α_{mn}^{68}	+0,3828	+1,2102	−110,67	−7,7838	−20,910	+255,76
α_{mn}^{86}	+1,2102	+0,3828	−110,67	−20,910	−7,7838	+264,73
α_{mn}^{88}	−0,5220	−0,5220	+110,8	+10,614	+10,614	−262,77
$\alpha_{mn}^{0,10}$	0	+49,931	−84,366	0	−118,14	+64,256
$\alpha_{mn}^{10,0}$	+49,931	0	−84,366	−118,14	0	+199,61

α-Werte (gerade)

α^{pq}_{42}	α^{pq}_{44}	α^{pq}_{06}	α^{pq}_{60}	α^{pq}_{26}	α^{pq}_{62}	α^{pq}_{46}
−12,174	−1,782	0	+28,908	−0,2387	+13,131	+0,5648
+0,7532	−1,782	+28,908	0	+13,131	−0,2387	+2,8003
−124,98	+104,38	−42,505	−42,505	+116,62	+116,62	−108,4
−52,039	−97,872	0	−68,394	+4,1242	+81,777	−9,7578
+41,367	−97,872	−68,394	0	+81,777	+4,1242	+153,80
+162,42	−407,83	+25,148	+100,57	−289,80	−223,87	+235,15
+1739,3	−407,83	+100,57	+25,148	−223,87	−289,80	+319,85
−407,83	+5060,9	−59,50	−59,50	+292,59	+292,59	−1011,9
+100,57	−59,50	+5570,9	+107,48	+110,42	−158,03	−261,25
+25,148	−59,50	+107,48	+5570,9	−158,03	+110,42	+93,502
−223,87	+292,59	+110,42	−158,03	+7340,5	+339,59	−815,30
−289,80	+292,59	−158,03	+110,42	+339,59	+7340,5	−366,36
+319,85	−1011,9	−261,25	+93,502	−815,3	−366,35	+13672,5
+235,15	−1011,9	+93,502	−261,25	−366,35	−815,3	+571,57
−252,06	+514,71	+410,54	+410,54	+570,96	+570,96	−2097,6
−149,99	+104,44	0	−146,56	+29,577	+235,70	−69,979
−44,141	+104,44	−146,56	0	+235,70	+29,577	−164,12
+283,87	−359,86	+8,554	+215,50	−440,97	−454,73	+417,83
+297,79	−359,86	+215,50	+8,554	−454,73	−440,97	+484,34
−214,29	+994,21	−20,239	−127,50	+360,39	+435,87	−1557,8
−244,99	+994,21	−127,50	−20,239	+435,87	+360,39	−662,25
+264,73	−548,56	+31,804	−559,82	−392,60	−286,67	+779,28
+255,76	−548,56	−559,82	+31,804	−286,67	−392,60	+2012,9
−262,77	+574,36	−43,369	−43,369	+418,12	+418,12	−838,19
+199,61	−152,03	0	+185,64	−47,370	−313,68	+112,08
+64,256	−152,03	+185,65	0	−313,68	−47,370	+238,90

Tabelle 4 (Fortsetzung)

α_{mn}^{pq}	α_{64}^{pq}	α_{66}^{pq}	α_{08}^{pq}	α_{80}^{pq}	α_{28}^{pq}	α_{82}^{pq}
$pq = 02$	+2,8003	−0,8875	0	−39,419	+0,10296	−26,088
α_{mn}^{20}	+0,5648	−0,8875	−39,419	0	−26,088	+0,10296
α_{mn}^{22}	−108,4	+109,82	+63,393	+63,393	−104,17	−104,17
α_{mn}^{04}	+153,80	+15,334	0	+93,265	−2,0935	−111,51
α_{mn}^{40}	−9,7578	+15,334	+93,265	0	−111,51	−2,0935
α_{mn}^{24}	+319,85	−252,06	−44,141	−149,98	+297,79	+283,87
α_{mn}^{42}	+235,15	−252,06	−149,98	−44,141	+283,87	+297,79
α_{mn}^{44}	−1011,9	+514,71	+104,44	+104,44	−359,86	−359,86
α_{mn}^{06}	+93,502	+410,54	0	−146,56	+8,554	+215,50
α_{mn}^{60}	−261,25	+410,54	−146,56	0	+215,50	+8,554
α_{mn}^{26}	−366,36	+570,96	+29,577	+235,70	−440,97	−454,73
α_{mn}^{62}	−815,30	+570,96	+235,70	+29,577	−454,73	−440,97
α_{mn}^{46}	+571,57	−2097,6	−69,979	−164,12	+417,83	+484,34
α_{mn}^{64}	+13672,5	−2097,6	−164,12	−69,979	+484,34	+417,83
α_{mn}^{66}	−2097,6	+27221	+109,97	+109,97	−506,89	−506,89
α_{mn}^{08}	−164,12	+109,97	+19263	+199,86	+212,49	−321,40
α_{mn}^{80}	−69,979	+109,97	+199,86	+19263	−321,40	+212,49
α_{mn}^{28}	+484,34	−506,89	+212,49	−321,40	+22332,5	+625,99
α_{mn}^{82}	+417,83	−506,89	−321,40	+212,49	+625,99	+22332,5
α_{mn}^{48}	−662,25	+836,13	−502,75	+223,80	−1349,6	−605,04
α_{mn}^{84}	−1557,8	+836,13	+223,80	−502,75	−605,04	−1349,6
α_{mn}^{68}	+2012,9	−3248,3	+790,04	−149,96	+871,7	+589,25
α_{mn}^{86}	+779,28	−3248,3	−149,96	+790,04	+589,25	+871,7
α_{mn}^{88}	−838,19	+1174,8	−1077,3	−1077,3	−322,64	−322,64
$\alpha_{mn}^{0,10}$	+238,90	−176,12	0	−253,15	+34,38	+427,74
$\alpha_{mn}^{10,0}$	+112,08	−176,12	−253,15	0	+427,74	+34,38

α-Werte (gerade)

α_{48}^{pq}	α_{84}^{pq}	α_{68}^{pq}	α_{86}^{pq}	α_{88}^{pq}	$\alpha_{0,10}^{pq}$	$\alpha_{10,0}^{pq}$
−0,2436	−3,8186	+0,3828	+1,2102	−0,522	0	+49,931
−3,8186	−0,2436	+1,2102	+0,3828	−0,522	+49,931	0
+110,96	+110,96	−110,67	−110,67	+110,80	−84,366	−84,366
+4,9533	−209,73	−7,7838	−20,910	+10,614	0	−118,14
−209,73	+4,9533	−20,910	−7,7838	+10,614	−118,14	0
−244,99	−214,29	+255,76	+264,73	−262,77	+64,256	+199,61
−214,29	−244,99	+264,73	+255,76	−262,77	+199,61	+64,256
+994,21	+994,21	−548,56	−548,56	+574,36	−152,03	−152,03
−20,239	−127,5	+31,804	−559,82	−43,369	0	+185,64
−127,5	−20,239	−559,82	+31,804	−43,369	+185,64	0
+360,39	+435,87	−392,60	−286,67	+418,12	−313,68	−47,370
+435,87	+360,39	−286,67	−392,60	+418,12	−47,370	−313,68
−1557,8	−662,25	+779,28	+2012,9	−838,19	+112,08	+238,90
−662,25	−1557,8	+2012,9	+779,28	−838,19	+238,90	+112,08
+836,13	+836,13	−3248,3	−3248,3	+1174,8	−176,12	−176,12
−502,75	+223,80	+790,04	−149,96	−1077,3	0	−253,15
+223,80	−502,75	−149,96	+790,04	−1077,3	−253,15	0
−1349,6	−605,04	+871,7	+589,25	−322,66	+34,38	+427,74
−605,04	−1349,6	+589,25	+871,7	−322,66	+427,74	+34,38
+32850	+801,75	−3552,2	−951,88	+3359,2	−81,341	−325,78
+801,75	+32850	−951,88	−3552,2	+3359,2	−325,78	−81,341
−3552,2	−951,88	+53282	+1231,6	−5520,7	+127,82	+240,16
−951,88	−3552,2	+1231,6	+53282	−5520,7	+240,16	+127,82
+3359,2	+3359,2	−5520,7	−5520,7	+88952,7	−174,31	−174,31
−81,341	−325,78	+127,82	+240,16	−174,31	+49586	+320,66
−325,78	−81,341	+240,16	+127,82	−174,31	+320,66	+49586

Tabelle 5

α'^{pq}_{mn}	α'^{pq}_{11}	$mn = 13$	$mn = 31$	$mn = 33$	$mn = 15$	$mn = 51$
α^{11}_{mn}	−18	+20,8	+20,8	−24	−20,8	−20,8
$pq = 13$	+20,8	−163,3	+79,0	+305,6	+86,37	−189,3
$pq = 31$	+20,8	+79,0	−163,3	+305,6	−189,3	+86,37
$pq = 33$	−24	+305,6	+305,6	−1219,3	+41,0	+41,0
$pq = 15$	−20,8	+86,37	−189,3	+41,0	−427,3	+417,7
$pq = 51$	−20,8	−189,3	+86,37	+41,0	+417,7	−427,3
$pq = 35$	+24	−86,3	−430,8	+959,3	+928,3	−192
$pq = 53$	+24	−430,8	−86,3	+959,3	−192	+928,3
$pq = 55$	−24	+71,97	+71,97	+378,0	−1394,5	−1394,5
$pq = 17$	+20,8	−90,93	+300	+156,0	+147,2	−646,7
$pq = 71$	+20,8	+300	−90,93	+156,0	−646,7	+147,2
$pq = 37$	−24	+99,33	+556,2	−1127	−132	+343
$pq = 73$	−24	+556,2	+99,33	−1127	+343	−132
$pq = 57$	+24	−93,2	−57,57	+394,8	+91,0	+1862
$pq = 75$	+24	−57,57	−93,2	+394,8	+1862	+91,0
$pq = 77$	−24	+87,08	+87,08	−430,5	−50,7	−50,7
$pq = 19$	−20,8	+92,6	−410,3	−278,7	−156,7	+875,3
$pq = 91$	−20,8	−410,3	+92,6	−278,7	+875,3	−156,7
$pq = 39$	+24	−104,2	−681,5	+1282	+159	−493,3
$pq = 93$	+24	−681,5	−104,2	+1282	−493,3	+159
$pq = 59$	−24	+101	+431,8	−390,3	−136	−2329
$pq = 95$	−24	+431,8	+101	−390,3	−2329	−136
$pq = 79$	+24	−97,83	−81,0	+439,3	+1128	+9,67
$pq = 97$	+24	−81,0	−97,83	+439,3	+9,67	+1128
$pq = 99$	−24	+94,7	+94,7	−455	−89,3	−89,3

Tabelle 5 (Fortsetzung)

α'^{pq}_{mn}	$mn = 73$	$mn = 57$	$mn = 75$	$mn = 77$	$mn = 19$	$mn = 91$
α^{11}_{mn}	−24	+24	+24	−24	−20,8	−20,8
$pq = 13$	+556,2	−93,2	−57,57	+87,08	+92,6	−410,3
$pq = 31$	+99,33	−57,57	−93,2	+87,08	−410,3	+92,6
$pq = 33$	−1127	+394,8	+394,8	−430,5	−278,7	−278,7
$pq = 15$	+343	+91,0	+1862	−50,7	−156,7	+875,3
$pq = 51$	−132	+1862	+91,0	−50,7	+875,3	−156,7
$pq = 35$	+79,3	−632,7	−3284	+638,1	−95,7	−691,3
$pq = 53$	+1568	−3284	−632,7	+638,1	−691,3	−95,7
$pq = 55$	−475	+4353	+4353	−1081	+392	+392
$pq = 17$	−713,3	−2911	+350,7	+3935	+205,7	−1341
$pq = 71$	+1888,7	+350,7	−2911	+3935	−1341	+205,7
$pq = 37$	+201	+5314,7	+322,3	−6560	−43,7	+1104,7
$pq = 73$	−5177	+322,3	+5314,7	−6560	+1104,7	−43,7
$pq = 57$	+322,3	−11110	−923,2	+8500	−163,8	−688,9
$pq = 75$	+5314,7	−923,2	−11110	+8500	−688,9	−163,8
$pq = 77$	−6560	+8500	+8500	−18697	+371,7	+371,7
$pq = 19$	+1104,7	−163,8	−688,9	+371,7	−1300	+1807,3
$pq = 91$	−43,7	−688,9	−163,8	+371,7	+1807,3	−1300
$pq = 39$	−508	−714	−90,7	+545,3	+3187	−1518,3
$pq = 93$	+2167	−90,7	−714	+545,3	−1518,3	+3187
$pq = 59$	−136,3	+5983	+829,3	−1347	−4980	+985,7
$pq = 95$	−872	+829,3	+5983	−1347	+958,7	−4980
$pq = 79$	+7762	−1503	−9817	+11660	+6775	−579,3
$pq = 97$	+861,5	−9817	−1503	+11660	−579,3	+6775
$pq = 99$	−805,3	+1575	+1575	−2103	−8570	−8570

Ableitungen α′ (ungerade).

mn = 35	*mn* = 53	*mn* = 55	*mn* = 17	*mn* = 71	*mn* = 37
+24	+24	−24	+20,8	+20,8	−24
−86,3	−430,8	+71,97	−90,93	+300	+99,33
−430,8	−86,3	+71,97	+300	−90,93	+556,2
+959,3	+959,3	+378,0	+156,0	+156,0	−1127
+928,3	−192	−1394,5	+147,2	−646,7	−132
−192	+928,3	−1394,5	−646,7	+147,2	+343
−2890	−220,3	+2702	−4,30	+435	+1568
−220,3	−2890	+2702	+435	−4,30	+79,3
+2702	+2702	−6440	−173	−173	−475
−4,30	+435	−173	−808,3	+993,7	+1888,7
+435	−4,30	−173	+993,7	−808,3	−713,3
+1568	+79,3	−475	+1888,7	−713,3	−5177
+79,3	+1568	−475	−713,3	+1888,7	+201
−632,7	−3284	+4353	−2911	+350,7	+5314,7
−3284	−632,7	+4353	+350,7	−2911	+322,3
+638,1	+638,1	−1081	+3935	+3935	−6560
−95,7	−691,3	+392	+205,7	−1341	−43,7
−691,3	−95,7	+392	−1341	+205,7	+1104,7
−1763	+82,7	+371,3	−171,3	+994	+2167
+82,7	−1763	+371,3	+994	−171,3	−508
+687	+3835	−4980	+100,7	−528,3	−872
+3835	+687	−4980	−528,3	+100,7	−136,3
−722	−610,2	+1145	−29,3	−4958	+861,5
−610,2	−722	+1145	−4958	−29,3	+7762
+718	+718	−1249,7	−42,0	−42,0	−805,3

Ableitungen α′ (ungerade).

mn = 39	*mn* = 93	*mn* = 59	*mn* = 95	*mn* = 79	*mn* = 97	*mn* = 99
+24	+24	−24	−24	+24	+24	−24
−104,2	−681,5	+101	+431,8	−97,83	−81,0	+94,7
−681,5	−104,2	+431,8	+101	−81,0	−97,83	+94,7
+1282	+1282	−390,3	−390,3	+439,3	+439,3	−455
+159	−493,3	−136	−2329	+1128	+9,67	−89,3
−493,3	+159	−2329	−136	+9,67	+1128	−89,3
−1763	+82,7	+687	+3835	−722	−610,2	+718
+82,7	−1763	+3835	+687	−610,2	−722	+718
+371,3	+371,3	−4980	−4980	+1145	+1145	−1249,7
−171,3	+994	+100,7	−528,3	−29,3	−4958	−42,0
+994	−171,3	−528,3	+100,7	−4958	−29,3	−42,0
+2167	−508	−872	−136,3	+861,5	+7762	−805,3
−508	+2167	−136,3	−872	+7762	+861,5	−805,3
−714	−90,7	+5983	+829,3	−1503	−9817	+1575
−90,7	−714	+829,3	+5983	−9817	−1503	+1575
+545,3	+545,3	−1347	−1347	+11660	+11660	−2103
+3187	−1518,3	−4980	+985,7	+6775	−579,3	−8570
−1518,3	+3187	+985,7	−4980	−579,3	+6775	−8570
−8100	+965,7	+8795,7	−329,7	−10950	−332	+13050
+965,7	−8100	−329,7	+8795,7	−332	−10950	+13050
+8795,7	−329,7	−16937	−617,7	+14020	+1260	−16267
−329,7	+8795,7	−617,7	−16937	+1260	+14020	−16267
−10950	−332	+14020	+1260	−27900	−1946,7	+19211
−332	−10950	+1260	+14020	−1946,7	−27900	+19211
+13050	+13050	−16267	−16267	+19211	+19211	−40966,7

Tabelle 6

α'^{pq}_{mn}	$mn = 02$	$mn = 20$	$mn = 22$	$mn = 04$	$mn = 40$	$mn = 24$
$pq=02$	0	+21,6	+14,295	0	−51,11	+2,092
$pq=20$	+21,6	0	+14,295	−51,11	0	−33,82
$pq=22$	+14,295	+14,295	−287	+61,0	+61,0	+260,7
$pq=04$	0	−51,11	+61,0	0	+120,9	+114,92
$pq=40$	−51,11	0	+61,0	+120,9	0	−144,57
$pq=24$	+2,092	−33,82	+260,7	+114,92	−144,57	−1002,3
$pq=42$	−33,82	+2,092	+260,7	−144,57	+114,92	+16,3
$pq=44$	−4,951	−4,951	−144,3	−271,9	−271,9	+1162,7
$pq=06$	0	+80,29	−118,1	0	−190,0	+69,87
$pq=60$	+80,29	0	−118,1	−190,0	0	+279,17
$pq=26$	−0,663	+253,15	−305	+11,457	+227,18	+537
$pq=62$	+253,15	−0,663	−305	+227,18	+11,457	−172,3
$pq=46$	+1,568	+7,783	+148,7	−27,10	+427,3	−306,17
$pq=64$	+7,783	+1,568	+148,7	+427,3	−27,10	−1486,7
$pq=66$	−2,466	−2,466	−160,17	+42,58	+42,58	+292,7
$pq=08$	0	−109,53	+176,08	0	+259,1	−122,62
$pq=80$	−109,53	0	+176,08	+259,1	0	−416,77
$pq=28$	+0,286	−72,47	+345,07	−5,817	−309,93	−598
$pq=82$	−72,47	+0,286	+345,07	−309,93	−5,817	+334,7
$pq=48$	−0,677	−10,612	−145,53	+13,757	−582,7	+305,3
$pq=84$	−10,612	−0,677	−145,53	−582,7	+13,757	+1801
$pq=68$	+1,063	+3,363	+162	−21,6	−58,07	−344
$pq=86$	+3,363	+1,063	+162	−58,07	−21,6	−266,3
$pq=88$	−1,45	−1,45	−165,7	+29,5	+29,5	+334
$pq=$ 0,10	0	+138,7	−234,4	0	−328,03	+178,5
$pq=$10,0	+138,7	0	−234,4	−328,03	0	+554,3

Tabelle 6 (Fortsetzung)

α'^{pq}_{mn}	$mn = 64$	$mn = 66$	$mn = 08$	$mn = 80$	$mn = 28$	$mn = 82$
$pq=02$	+7,783	−2,466	0	−109,53	+0,286	−72,47
$pq=20$	+1,568	−2,466	−109,53	0	−72,47	+0,286
$pq=22$	+148,7	−160,17	+176,08	+176,08	+345,07	+345,07
$pq=04$	+427,3	+42,58	0	+259,1	−5,817	−309,93
$pq=40$	−27,10	+42,58	+259,1	0	−309,93	−5,817
$pq=24$	−1486,7	+292,7	−122,62	−416,77	−598	+334,7
$pq=42$	−306,17	+292,7	−416,77	−122,62	+334,7	−598
$pq=44$	+2257,3	−688,3	+290	+290	+19,3	+19,3
$pq=06$	+259,8	+1140,3	0	−407,3	+23,77	+598,7
$pq=60$	−725,7	+1140,3	−407,3	0	+598,7	+23,77
$pq=26$	−24,7	−3527,3	+821,7	+654,7	+798,7	−793,7
$pq=62$	+2676,7	−3527,3	+654,7	+821,7	−793,7	+798,7
$pq=46$	−530,7	+5083,3	−194,4	−455,7	−286,3	+291
$pq=64$	−6131,3	+5083,3	−455,7	−194,4	+291	−286,3
$pq=66$	+5083,3	−11513	+305,3	+305,3	+89,0	+89,0
$pq=08$	−455,7	+305,3	0	+555	+590,3	−893
$pq=80$	−194,4	+305,3	+555	0	−893	+590,3
$pq=28$	+291	+89,0	+590,3	−893	−3527	+1265
$pq=82$	−286,3	+89,0	−893	+590,3	+1265	−3527
$pq=48$	+410	−871,7	−1397	+621,7	+4807	−617
$pq=84$	+3313,3	−871,7	+621,7	−1397	−617	+4807
$pq=68$	−5997	+7427	+2194,7	−416,7	−6431,7	+126,7
$pq=86$	−1029,7	+7427	−416,7	+2194,7	+126,7	−6431,7
$pq=88$	+1064,7	−1553	−2993	−2993	+8037	+8037
$pq=$ 0,10	+664	−489,3	0	−703,3	+95,3	+1188
$pq=$10,0	+284,7	−489,3	−703,3	0	+1188	+95.3

α'-Werte (gerade).

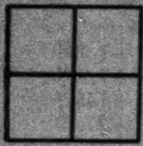
$mn = 42$	$mn = 44$	$mn = 06$	$mn = 60$	$mn = 26$	$mn = 62$	$mn = 46$
−33,82	−4,951	0	+80,29	−0,663	+253,15	+1,568
+2,092	−4,951	+80,29	0	+253,15	−0,663	+7,783
+260,7	−144,3	−118,1	−118,1	−305	−305	+148,7
−144,57	−271,9	0	−190,0	+11,457	+227,18	−27,10
+114,92	−271,9	−190,0	0	+227,18	+11,457	+427,3
+16,3	+1162,7	+69,87	+279,17	+537	−172,3	−306,17
−1002,3	+1162,7	+279,17	+69,87	−172,3	+537	−1486,7
+1162,7	−3142	−165,3	−165,3	−146,7	−146,7	+2257,3
+279,17	−165,3	0	+298,53	+306,7	−439	−725,7
+69,87	−165,3	+298,53	0	−439	+306,7	+259,8
−172,3	−146,7	+306,7	−439	−2081,7	+478	+2676,7
+537	−146,7	−439	+306,7	+478	−2081,7	−24,7
−1486,7	+2257,3	−725,7	+259,8	+2676,7	−24,7	−6131,3
−306,17	+2257,3	+259,8	−725,7	−24,7	+2676,7	−530,7
+292,7	−688,3	+1140,3	+1140,3	−3527,3	−3527,3	+5083,3
−416,77	+290	0	−407,3	+821,7	+654,7	−194,4
−122,62	+290	−407,3	0	+654,7	+821,7	−455,7
+334,7	+19,3	+23,77	+598,7	+798,7	−793,7	−286,3
−598	+19,3	+598,7	+23,77	−793,7	+798,7	+291
+1801	−2621	−56,2	−354,3	−445,7	+209,17	+3313,3
+305,3	−2621	−354,3	−56,2	+209,17	−445,7	+410
−266,3	+726,3	+88,3	−1555,5	+406,7	+4362	−1029,7
−344	+726,3	−1555,5	+88,3	+4362	+406,7	−5997
+334	−794,3	−120,47	−120,47	−349	−349	+1064,7
+554,3	−422,17	0	+315,83	−871,3	−131,6	+284,7
+178,5	−422,17	+315,83	0	−131,6	−871,3	+664

α' = Werte (gerade)

$mn = 48$	$mn = 84$	$mn = 68$	$mn = 86$	$mn = 88$	$mn = 0{,}10$	$mn = 10{,}0$
−0,677	−10,612	+1,063	+3,363	−1,45	0	+138,7
−10,612	−0,677	+3,363	+1,063	−1,45	+138,7	0
−145,53	−145,53	+162	+162	−165,7	−234,4	−234,4
+13,757	−582,7	−21,6	−58,07	+29,5	0	−328,03
−582,7	+13,757	−58,07	−21,6	+29,5	−328,03	0
+305,3	+1801	−344	−266,3	+334	+178,5	+554,3
+1801	+305,3	−266,3	−344	+334	+554,3	+178,5
−2621	−2621	+726,3	+726,3	−794,3	−422,17	−422,17
−56,2	−354,3	+88,3	−1555,5	−120,47	0	+315,83
−354,3	−56,2	−1555,5	+88,3	−120,47	+315,83	0
−445,7	+209,17	+406,7	+4362	−349	−871,3	−131,6
+209,17	−445,7	+4362	+406,7	−349	−131,6	−871,3
+3313,3	+410	−1029,7	−5997	+1064,7	+284,7	+664
+410	+3313,3	−5997	−1029,7	+1064,7	+664	+284,7
−871,7	−871,7	+7427	+7427	−1553	−489,3	−489,3
−1397	+621,7	+2194,7	−416,7	−2993	0	−703,3
+621,7	−1397	−416,7	+2194,7	−2993	−703,3	0
+4807	−617	−6431,7	+126,7	+8037	+95,3	+1188
−617	+4807	+126,7	−6431,7	+8037	+1188	+95,3
−9983,3	−162,3	+9023	+748,3	−10735	−225,97	−905
−162,3	−9983,3	+748,3	+9023	−10735	−905	−225,97
+9023	+748,3	−18247	−1393	+13150	+355,3	+667,3
+748,3	+9023	−1393	−18247	+13150	+667,3	+355,3
−10735	−10735	+13150	+13150	−28380	−484	−484
−225,97	−905	+355,3	+667,3	−484	0	+890,7
−905	−225,97	+667,3	+355,3	−484	+890,7	0

Tabelle 6a

I.



Frequenzparameter	$\mu=0{,}225$	$\mu=0{,}343$	$\mu=0{,}360$	$\mu=0{,}390$
λ mit 6 Gliedern ber.	12,49 12,43 (n. Ritz)	10,73	10,47	—
λ „ 15 „ „	—	10,703	10,445	9,987

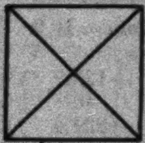
Normalfunktion:

$$w = u_1 v_1 + A_{13} \cdot (u_1 v_3 + u_3 v_1) + A_{33} \cdot u_3 \cdot v_3 + A_{15} \cdot (u_1 v_5 + u_5 v_1) + A_{35} (u_3 v_5 + u_5 v_3) + A_{55} u_5 v_5 + \ldots.$$

Koeffizienten der Reihe:

	$\mu=0{,}225$	$\mu=0{,}343$		$\mu=0{,}360$		$\mu=0{,}360$
A_{13}	+0,0378	+0,0328	+0,0325	+0,0320	+0,0318	+0,0306
A_{33}	−0,00435	−0,00541	−0,0050	−0,00555	−0,00514	−0,00537
A_{15}	−0,0034	−0,00265	−0,00257	−0,00255	−0,00246	−0,002285
A_{35}	+0,00118	+0,00139	+0,00121	+0,00141	+0,001235	+0,001276
A_{55}	−0,00045	−0,000474	−0,000365	−0,00048	−0,000366	−0,000370
A_{17}	—	—	+0,000413	—	+0,000382	+0,000328
A_{37}	—	—	−0,000431	—	−0,000440	−0,000456
A_{57}	—	—	+0,000148	—	+0,000149	+0,000150
A_{77}	—	—	−0,0000703	—	−0,0000701	−0,000070
A_{19}	—	—	−0,0000767	—	−0,0000638	−0,0000413
A_{39}	—	—	+0,000196	—	+0,000201	+0,0002086
A_{59}	—	—	−0,0000720	—	−0,0000727	−0,0000733
A_{79}	—	—	+0,0000382	—	+0,0000382	+0,00003805
A_{99}	—	—	−0,000023	—	−0,0000230	−0,0000228

II.



Frequenzparameter	$\mu=0{,}225$	$\mu=0{,}343$	$\mu=0{,}360$	$\mu=0{,}390$
λ mit 4 Gliedern ber.	26,24 26,40 (n. Ritz)	23,296	22,869	—
λ „ 11 „ „	—	23,115	22,669	21,872

Normalfunktion:

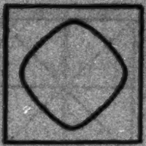
$$w = (u_0 v_2 - u_2 v_0) + A_{04} (u_0 v_4 - u_4 v_0) + A_{24} ({''}_2 v_4 - n_4 v_2) + A_{06} \cdot (u_0 v_6 - u_6 v_0) + A_{26} (u_2 v_6 - u_6 v_2) + \ldots.$$

Koeffizienten der Reihe:

	$\mu=0{,}225$	$\mu=0{,}343$		$\mu=0{,}360$		$\mu=0{,}390$
A_{04}	−0,131	−0,0204	−0,02042	−0,02142	−0,02146	−0,023312
A_{24}	−0,0043	−0,00643	−0,006105	−0,00675	−0,00642	−0,006976
A_{06}	—	+0,00522	+0,00518	+0,00549	+0,00545	+0,005927
A_{26}	—	—	+0,00207	—	+0,00217	+0,00235
A_{46}	—	—	+0,000098	—	+0,0001006	+0,000105
A_{08}	—	—	−0,002042	—	−0,00215	−0,002337
A_{28}	—	—	−0,000929	—	−0,000975	−0,001054
A_{48}	—	—	−0,0000613	—	−0,0000631	−0,0000658
A_{68}	—	—	+0,0000080	—	+0,0000083	+0,0000087
A_{010}	—	—	+0,001008	—	+0,00106	+0,001154

Tabelle 6a (Fortsetzung)

III.



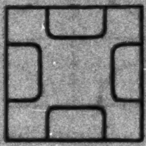
Frequenzparameter	$\mu=0{,}225$	$\mu=0{,}343$	$\mu=0{,}360$	$\mu=0{,}390$
λ ber. mit 6 Gliedern	35,90 35,73 (n. Ritz)	37,93	38,22	—
λ „ „ 15 „	—	37,75	38,01	38,447

Normalfunktion: $w = (u_0\, v_2 + u_2\, v_0) + A_{22}\; u_2\, v_2 + A_{04}\; (u_0\, v_4 + u_4\, v_0)$
$+ A_{24}\,(u_2\, v_4 + u_4\, v_2) + A_{44}\; u_4\, v_4 + \ldots .$

Koeffizienten der Reihe:

	$\mu=0{,}225$	$\mu=0{,}343$		$\mu=0{,}360$		$\mu=0{,}390$
A_{22}	−0,0236	−0,0447	−0,0449	−0,0484	−0,0488	−0,0563
A_{04}	+0,00132	+0,02011	+0,0202	+0,02115	+0,0213	+0,02324
A_{24}	+0,0022	+0,00384	+0,00363	+0,00409	+0,00385	+0,00426
A_{44}	+0,00166	+0,00282	+0,00252	+0,00302	+0,00271	+0,00306
A_{06}	—	−0,00503	−0,00505	−0,00529	−0,00531	−0,00580
A_{26}	—	—	−0,00194	—	−0,00206	−0,00229
A_{08}	—	—	+0,00199	—	+0,00209	+0,00228
A_{46}	—	—	−0,000822	—	−0,000884	−0,000994
A_{28}	—	—	+0,000987	—	+0,00105	+0,001166
$A_{0\,10}$	—	—	−0,000976	—	−0,00103	−0,001121
A_{66}	—	—	+0,000293	—	+0,000316	+0,000353
A_{48}	—	—	+0,000355	—	+0,000382	+0,0004303
A_{68}	—	—	−0,000138	—	−0,000146	−0,000163
A_{88}	—	—	+0,000069	—	+0,000073	+0,000081

IV.



Frequenzparameter	$\mu=0{,}225$	$\mu=0{,}343$	$\mu=0{,}360$	$\mu=0{,}390$
λ ber. mit 6 Gliedern	275,58 266 (n. Ritz)	249,32	245,41	—
λ „ „ 15 „	—	245,51	241,78	235,08

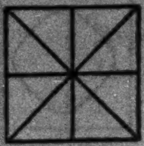
Normalfunktion: $w = A_{02}\; (u_0\, v_2 + u_2\, v_0) + u_2 \cdot v_2 + A_{04}\; (u_0\, v_4 + u_4\, v_0)$
$+ A_{24}\,(u_2\, v_4 + u_4\, v_2) + A_{44}\; u_4\, v_4 + \ldots .$

Koeffizienten der Reihe:

	$\mu=0{,}225$	$\mu=0{,}343$		$\mu=0{,}360$		$\mu=0{,}390$
A_{02}	+0,0118	+0,02266	+0,0228	+0,0246	+0,0248	+0,02864
A_{04}	−0,020	−0,0288	−0,0275	−0,03005	−0,02875	−0,0310
A_{24}	+0,0876	+0,0730	+0,0690	+0,0709	+0,06704	+0,06350
A_{44}	−0,0047	−0,00951	−0,00674	−0,01015	−0,007355	−0,00841
A_{06}	—	+0,00529	+0,00540	+0,00556	+0,00568	+0,00619
A_{26}	—	—	−0,00971	—	−0,00921	−0,00830
A_{46}	—	—	+0,00314	—	+0,00330	+0,003574
A_{66}	—	—	−0,00148	—	−0,00151	−0,00158
A_{08}	—	—	−0,00211	—	−0,00222	−0,002425
A_{28}	—	—	+0,00204	—	+0,00183	+0,00147
A_{48}	—	—	−0,00153	—	−0,00160	−0,00172
A_{68}	—	—	+0,00076	—	+0,000778	+0,000808
A_{88}	—	—	−0,000435	—	−0,000441	−0,000452
$A_{0\,10}$	—	—	+0,001006	—	+0,00106	+0,00116

Tabelle 6a (Fortsetzung)

V.



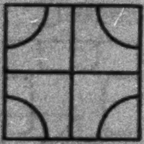
Frequenzparameter	$\mu=0{,}225$	$\mu=0{,}343$	$\mu=0{,}360$	$\mu=0{,}390$
λ ber. mit 3 Gliedern	322,47 316,1 (n. Ritz)	293,3	288,94	—
λ „ „ 10 „	—	291,95	287,34	279,06

Normalfunktion: $w = (u_1 v_3 - u_3 v_1) + A_{15}(u_1 v_5 - u_5 v_1)$
$+ A_{35}(u_3 v_5 - u_5 v_3) + A_{17}(u_1 v_7 - u_7 v_1) + \ldots$

Koeffizienten der Reihe:

	$\mu=0{,}225$	$\mu=0{,}343$		$\mu=0{,}360$		$\mu=0{,}390$
A_{15}	+0,00024	−0,01394	−0,01423	−0,0160	−0,01634	−0,02008
A_{35}	+0,00216	−0,005895	−0,00511	−0,00707	−0,00623	−0,008235
A_{17}	—	—	+0,00643	—	+0,00709	+0,00826
A_{37}	—	—	+0,004255	—	+0,00470	+0,005495
A_{57}	—	—	+0,00031	—	+0,000315	+0,000322
A_{19}	—	—	−0,00338	—	−0,00367	−0,00419
A_{39}	—	—	−0,002713	—	−0,002934	−0,00333
A_{59}	—	—	−0,000232	—	−0,000236	−0,000241
A_{79}	—	—	+0,000415	—	+0,0000421	+0,000043

VI.



Frequenzparameter	$\mu=0{,}225$	$\mu=0{,}343$	$\mu=0{,}360$	$\mu=0{,}390$
λ ber. mit 6 Gliedern	379,09 378 (n. Ritz)	377,62	377,16	—
λ „ „ 15 „	—	374,23	373,54	372,12

Normalfunktion: $w = A_{11} \cdot u_1 \cdot v_1 + (u_1 v_3 + u_3 v_1) + A_{33} \cdot u_3 \cdot v_3$
$+ A_{15} \cdot (u_1 v_5 + u_5 v_1) + A_{35} \cdot (u_3 v_5 + u_5 v_3) + \ldots$

Koeffizienten der Reihe:

	$\mu=0{,}225$	$\mu=0{,}343$		$\mu=0{,}360$		$\mu=0{,}390$
A_{11}	−0,0746	−0,06456	−0,0641	−0,0631	−0,0627	−0,06035
A_{33}	+0,171	+0,1295	+0,1252	+0,1227	+0,1184	+0,10562
A_{15}	+0,0431	+0,05066	+0,0489	+0,0518	+0,0500	+0,05194
A_{35}	−0,0084	−0,00480	−0,00347	−0,00419	−0,00285	−0,00172
A_{55}	+0,00546	+0,00814	+0,00645	+0,00856	+0,00684	+0,00755
A_{17}	—	—	−0,01286	—	−0,01321	−0,01384
A_{37}	—	—	−0,001936	—	−0,00229	−0,00295
A_{57}	—	—	−0,00290	—	−0,003052	−0,00334
A_{77}	—	—	+0,00139	—	+0,00146	+0,001575
A_{19}	—	—	+0,00515	—	+0,00531	+0,00560
A_{39}	—	—	+0,00184	—	+0,002046	+0,00242
A_{59}	—	—	+0,00150	—	+0,00158	+0,001724
A_{79}	—	—	−0,000766	—	−0,000798	−0,000858
A_{99}	—	—	+0,000448	—	+0,000466	+0,000497

Tabelle 7.

Tabelle der λ-Funktionen und ihrer Ableitungen, numerisch berechnet mit 6 Gliedern der Reihenentwicklung

	Normalfunktion	$\lambda\,(\mu_1 = 0{,}225)$	$\lambda\,(\mu_2 = 0{,}343)$	$\lambda\,(\mu_3 = 0{,}360)$	$\varepsilon = \frac{\partial \lambda}{\partial \mu}$ ε zwischen μ_1 und μ_2	ε zwischen μ_2 und μ_3
1	$u_1 v_1 + \ldots$	12,49	10,73	10,47	− 14,9	− 15,3
2	$(u_0 v_2 - u_2 v_0) + \ldots$	26,24	23,296	22,869	− 24,9	− 25,1
3	$(u_0 v_2 + u_2 v_0) + \ldots$	35,90	37,93	38,22	+ 17,2	+ 17,1
4	$u_2 v_2 + \ldots$	275,6	249,3	245,41	−223	−230
5	$u_1 v_3 - u_3 v_1 + \ldots$	322,5	293,3	288,94	−248	−256
6	$u_1 v_3 + u_3 v_1 + \ldots$	379,1	377,6	377,16	− 12,5	− 25,8

Tabelle der λ-Funktion und ihrer Ableitungen, numerisch berechnet mit 15 Gliedern der Reihenentwicklung.

	Normalfunktion	$\lambda\,(\mu_2 = 0{,}343)$	$\lambda\,(\mu_3 = 0{,}360)$	$\lambda\,(\mu_4 = 0{,}390)$	ε zwischen μ_2 und μ_3	ε zwischen μ_3 und μ_4
1	$u_1 v_1 + \ldots$	10,703	10,445	9,987	− 15,18	− 15,27
2	$(u_0 v_2 - u_2 v_0) + \ldots$	23,115	22,669	21,872	− 26,24	− 26,57
3	$(u_0 v_2 + u_2 v_0) + \ldots$	37,75	38,01	38,447	+ 15,29	+ 14,57
4	$u_2 v_2 + \ldots$	245,51	241,78	235,08	−219,4	−223,3
5	$u_1 v_3 - u_3 v_1 + \ldots$	291,95	287,34	279,06	−271,2	−276
6	$u_1 v_3 + n_3 v_1 + \ldots$	374,23	373,54	372,12	− 40,6	−47,33

Da eine graphische Darstellung der $\lambda\,(\mu)$-Funktionen einen fast geradlinigen Verlauf zeigt, kann man ohne großen Fehler die Steigung ε der Kurven zwischen zwei benachbarten μ-Werten als konstant betrachten und durch Kombination von 2 geeigneten Tönen durch lineare Interpolation ein $\mu = \mu_0 + \delta\,\mu$ bestimmen. Aus allen 6 Tönen, für die die Berechnung der λ-Kurven durchgeführt wurde, läßt sich dann durch Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate eine weitere Korrektion für μ bestimmen.

Die Genauigkeit bei der Bestimmung der Elastizitätszahl ist indessen sehr gering. Der Einfluß der zu bestimmenden Zahl μ ist nämlich so klein, daß er nur in den letzten Ziffern zur Geltung kommt; diese können aber infolge nicht genügender Konvergenz der Reihenentwicklung nicht genau genug bestimmt werden, so daß sich bei der Berechnung der Elastizitätszahl nur eine Genauigkeit von etwa 10 Proz. ergibt.

§ 3. Versuche

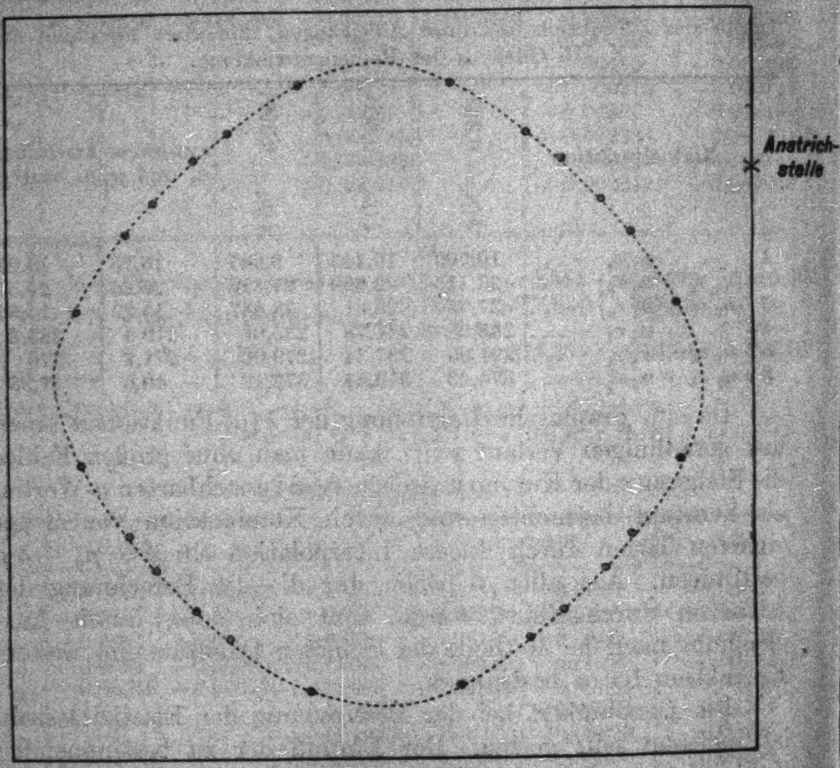
Als Versuchsmaterial dienten zwei quadratische Metallplatten von folgender Beschaffenheit:

1. Aluminiumplatte.

Länge der Quadratseite . . . $l = 198{,}4$ mm ($\pm$ 0,03 mm)
Dicke der Platte . . . . . . $2D =$ 1,97 „ ($\pm$ 0,01 „)
Dichte . . . . $\varrho =$ 2,71

2. Messingplatte.

Länge der Quadratseite . . . $l = 240{,}0$ mm ($\pm$ 0,05 mm)
Dicke der Platte . . . . . . $2D =$ 3,89 „ ($\pm$ 0,045 „)
Dichte . . . . $\varrho =$ 8,48



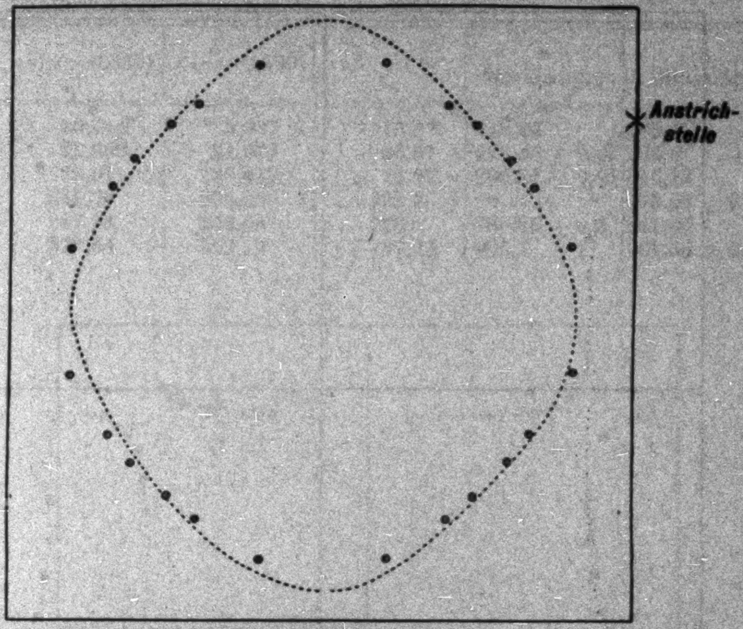
Messingplatte. Fig. A

Normalfunktion:

$$\begin{aligned} w = u_0 v_2 + u_2 v_0 &- 0{,}0563\, u_2 v_2 + 0{,}0232\,(u_0 v_4 + u_4 v_0) \\ &+ 0{,}00426\,(u_2 v_4 + u_4 v_2) + 0{,}00306\, u_4 v_4 - 0{,}0058\,(u_0 v_6 + u_6 v_0) \\ &- 0{,}00229\,(u_2 v_6 + u_6 v_2) - 0{,}00099\,(u_4 v_6 + u_6 v_4) + 0{,}000353\, u_6 v_6 \\ &+ 0{,}00228\,(u_0 v_8 + u_8 v_0) + 0{,}00117\,(u_2 v_8 + u_8 v_2) \\ &+ 0{,}00043\,(u_4 v_8 + u_8 v_4) - 0{,}000168\,(u_6 v_8 + u_8 v_6) + \cdots \end{aligned}$$

Die Versuche wurden schon im Jahre 1924 ausgeführt, zu einer Zeit, als die Beschaffung neuen Versuchsmaterials mit großen Schwierigkeiten verbunden war.

Zur Erzeugung der Klangfiguren wurden die Platten an Punkten der Knotenlinien auf zugespitzte Korke gelegt, an



Aluminiumplatte Fig. A

Normalfunktion:

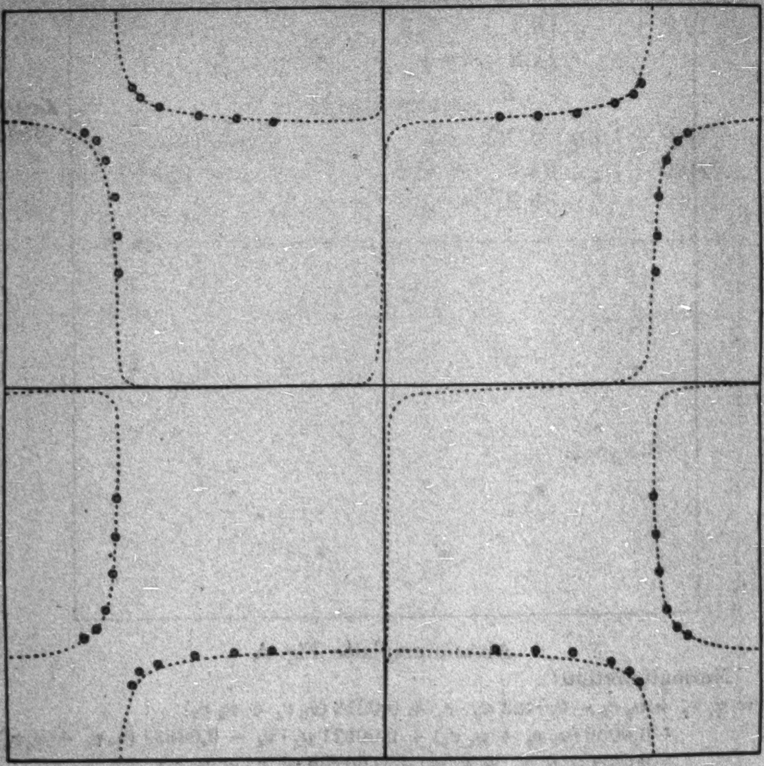
$$\begin{aligned} w = {} & u_0 v_2 + u_2 v_0 - 0{,}0488\, u_2 \cdot v_2 + 0{,}0213\, (u_0 v_4 + u_4 v_0) \\ & + 0{,}0039\, (u_2 v_4 + u_4 v_2) + 0{,}00271\, u_4 \cdot v_4 - 0{,}00531\, (u_0 v_6 + u_6 v_0) \\ & - 0{,}00206\, (u_2 v_6 + u_6 v_2) + 0{,}00209\, (u_0 v_8 + u_8 v_0) \\ & - 0{,}00088\, (u_4 v_6 + u_6 v_4) + 0{,}00105\, (u_2 v_8 + u_8 v_2) \\ & - 0{,}00103\, (u_0 v_{10} + u_{10} v_0) + 0{,}000316\, u_6 \cdot v_6 + 0{,}00038\, (u_4 v_8 + u_8 v_4) \\ & + \dots \end{aligned}$$

seitlicher Verschiebung durch Korkspitzen gehindert, welche den Rand an Schnittpunkten mit Knotenlinien berührten, und mit einem Cellobogen angestrichen. Die erhaltenen Sandfiguren wurden auf gummiertes schwarzes Glanzpapier abgedrückt und mittels Kohlepapier auf Pauspapier übertragen, welches dann auf die theoretisch berechneten Knotenlinienkurven zum Vergleich aufgelegt wurde (vgl. weiter oben Fig. A und B).

Die Schwingungszahlen wurden größtenteils mit einem

Monochord bestimmt als Mittelwert mehrerer Beobachtungen (Genauigkeit 1 Proz.).

Für die Bestimmung der Elastizitätszahl μ reichte die Genauigkeit der mit dem Monochord bestimmten Schwingungszahlen nicht aus. Die zur Berechnung gebrauchten 6 Töne



Messingplatte. Fig. B

Normalfunktion:

$$
\begin{aligned}
w = &+ 0{,}008\, u_1 v_1 - 0{,}0498\,(u_1 v_3 + u_3 v_1) + u_3 v_3 - 0{,}0564\,(u_1 v_5 + u_5 v_1) \\
&+ 0{,}0809\,(u_3 v_5 + u_5 v_3) - 0{,}0068\, u_5 v_5 + 0{,}0102\,(u_1 v_7 + u_7 v_1) \\
&- 0{,}016\,(u_3 v_7 + u_7 v_3) + 0{,}0045\,(u_5 v_7 + u_7 v_5) - 0{,}0027\, u_7 v_7 \\
&- 0{,}004\,(u_1 v_9 + u_9 v_1)
\end{aligned}
$$

jeder Platte (Nr. I—VI der Tabellen auf S. 743, die in den Schlußtabellen S. 744 und 746 mit * gekennzeichnet sind), wurden deshalb auf etwa 1 Promille mittels geeichter Klangstäbchen durch Schwebungsmethode bestimmt.[1]) Die so ge-

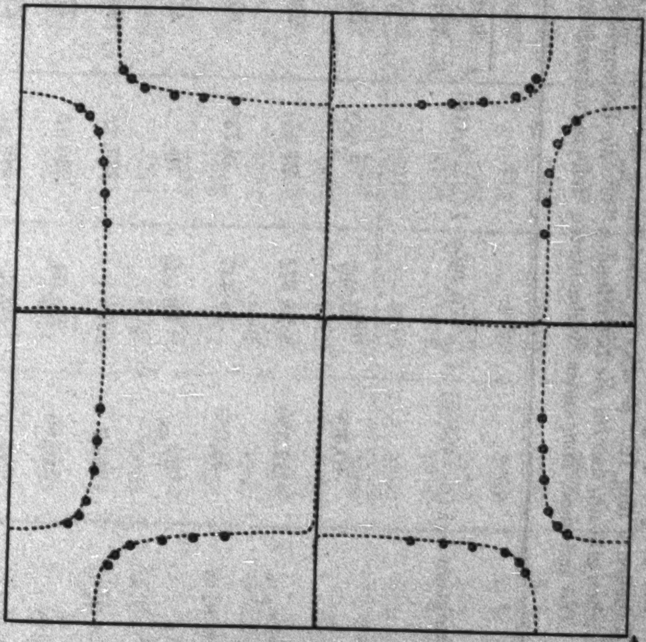
---

1) In der Techn. Hochschule in Danzig, wo Hr. Prof. Kalähne sein Tonometer zur Bestimmung der Schwingungszahlen freundlichst zur Verfügung stellte.

messenen Tonhöhen und die zur interpolatorischen Bestimmung von μ notwendigen Daten sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Tabelle 8

	$\lambda\ (\mu = 0{,}360)$	$\lambda\ (\mu = 0{,}390)$	s	n für Messing	n f. Aluminium
1	10,445	9,987	− 15,27	146,93	175,5
2	22,669	21,872	− 26,57	214,48 ± 0,05	235,8
3	38,01	38,447	+ 14,57	296,85 ± 0,01	315,13
4	241,78	235,08	−223,3	—	773,93 ± 0,04
5	287,34	279,06	−276	780,88 ± 0,6	841,44
6	373,54	372,12	− 47,33	906,7 ± 1	961,66 ± 0,5



Aluminiumplatte. Fig. B

Normalfunktion:

$$
\begin{aligned}
w = & + 0{,}008\, u_1 v_1 - 0{,}0498\, (u_1 v_3 + u_3 v_1) + u_3 v_3 - 0{,}0564\, (u_1 v_5 + u_5 v_1) \\
& + 0{,}0809\, (u_3 v_5 + u_5 v_3) - 0{,}0068\, u_5 v_5 + 0{,}0102\, (u_1 v_7 + u_7 v_1) \\
& - 0{,}016\, (u_3 v_7 + u_7 v_3) + 0{,}0045\, (u_5 v_7 + u_7 v_5) - 0{,}0027\, u_7 v_7 \\
& - 0{,}004\, (u_1 v_9 + u_9 v_1)
\end{aligned}
$$

Tabelle 9

Die Frequenzparameter λ und die Schwingungszahlen n der Aluminiumplatte.
(Bemerkung zu den Tabellen 9 und 10): Zwecks Kennzeichnung der Töne sind nur die Hauptglieder der Reihenentwicklung angegeben, das + - Zeichen gibt an, daß für die betreffenden Töne die Reihenentwicklung noch weiter durchgeführt worden ist. Die mit dem Tonometer beobachteten Schwingungszahlen sind mit * versehen.

	Normalfunktion	λ (μ = 0,365)	λ (μ = 0,390)	λ (μ = 0,410)	n (berechnet)			n beob.
					$\mu=0{,}365$ $E=7147\,\frac{kg}{mm^2}$	$\mu=0{,}390$ $E=7118\,\frac{kg}{mm^2}$	$\mu=0{,}410$ $E=7090\,\frac{kg}{mm^2}$	
1 (I)	$u_1 v_1$ + ...	10,369	9,987	9,682	160,5	158,9	157,7	157,5*
2 (II)	$u_0 v_2 - u_2 v_0$ + ...	22,536	21,872	21,341	236,6	235,24	234,1	235,8*
3 (III)	$u_0 v_2 + u_2 v_0$ + ...	38,083	38,447	38,738	307,6	311,9	315,4	315,1*
4	$u_1 v_2$ + ...	71,66	69,806	68,	421,9	420,2	418,9	420
5	$u_0 v_3 - u_3 v_0$	237,7	237,7	237,72	768,5	775,5	781,3	750
6 (IV)	$u_2 v_2$ + ...	240,66	235,08	230,61	778,8	771,2	769,6	778,9*
7 (V)	$u_1 v_3 - u_3 v_1$ + ...	285,96	279,06	273,54	842,9	840,8	838,18	841,4*
8 (VI)	$u_1 v_3 + u_3 v_1$ + ...	373,3	372,12	371,17	968,1	970,8	976,8	961,7*

9	$u_2 v_3$	722,7	707,6	695,53	1340	1338	1336	1260
10	$u_0 v_4 - u_4 v_0$	869,5	866,45	864,01	1470	1481	1489	1425
11	$u_0 v_4 + u_4 v_0$	957,7	960,75	963,2	1543	1559	1573	1490
12	$u_1 v_4$	1092	1084,6	1079	1647	1656	1664	1600
13	$u_3 v_3$	1418,7	1388	1364	1877	1874	1871	1820
	$+ \ldots$							
14	$u_2 v_4 - u_4 v_2$	1572	1546	1526	1976	1978	1979	1935
15	$u_2 v_4 + u_4 v_2$	1897	1872	1852	2171	2176	2181	2080
16	$u_0 v_5$	2496	2496	2496	2490	2513	2532	2370
17	$u_1 v_5 - u_5 v_1$	2591	2570	2553	2537	2550	2560	2500
18	$u_1 v_5 + u_5 v_1$	2944	2944	2944	2705	2729	2749	2510
19	$u_3 v_4$	2975	2925	2886	2719	2720	2722	2570
20	$u_2 v_5$	3742	3705	3675	3049	3061	3072	2790
21	$u_4 v_4$	5045	4967	4904	3541	3545	3549	3200
22	$u_3 v_5 - u_5 v_3$	5222	5155	5102	3602	3611	3620	3400
23	$u_0 v_6 - u_6 v_0$	5462	5454	5448	3684	3715	3741	3360
24	$u_0 v_6 + u_6 v_0$	5680	5687	5693	3757	3793	3824	3500
25	$u_3 v_5 + u_5 v_3$	5890	5812	5750	3826	3835	3843	3620
26	$u_1 v_6 - u_6 v_1$	5954	5939	5927	3846	3876	3901	3580
27	$u_2 v_6 - u_6 v_2$	6988	6924	6873	4167	4185	4201	3870
28	$u_2 v_6 + u_6 v_2$	7672	7632	7600	4366	4394	4418	4080

Genaue Übereinstimmung ist nur für die fett gedruckten Schwingungszahlen zu erwarten, für die die Reihenentwicklung mit 10—16 Gliedern durchgeführt worden ist. Die übrigen sind nur mit dem Hauptglied approximiert, die berechneten Schwingungszahlen also zu hoch gegenüber den beobachteten.

Tabelle 10

Frequenzparameter und Schwingungszahlen der Messingplatte.

	Normalfunktion	$\lambda\ (\mu=0{,}404)$	$\lambda\ (\mu=0{,}405)$	$\lambda\ (\mu=0{,}420)$	n (berechnet) $\mu=0{,}404$ $E=7212\frac{kg}{mm^2}$	n (berechnet) $\mu=0{,}405$ $E=7210\frac{kg}{mm^2}$	n (berechnet) $\mu=0{,}420$ $E=7180\frac{kg}{mm^2}$	n beob.
1 (I)	$u_1 v_1 + \dots$	9,773	9,758	9,529	147	146,9	146,0	146,9*
2 (II)	$u_0 v_2 - u_2 v_0 + \dots$	21,50	21,473	21,075	218,1	218	217,18	214,5*
3 (III)	$u_0 v_2 + u_2 v_0 + \dots$	38,65	38,666	38,884	292,4	292,5	294,9	296,8*
4	$u_1 v_2 + \dots$	68,77	68,693	67,579	890	889,9	888,8	884
5	$u_0 v_3$	237,72	237,72	237,72	725,1	725,3	729,2	714
6 (IV)	$u_2 v_2 + \dots$	232	231,73	228,4	716,2	716,1	714,7	717
7 (V)	$u_1 v_3 - u_3 v_1 + \dots$	275,2	274,9	270,8	780,1	780	778,8	780,9*
8 (VI)	$u_1 v_3 + u_3 v_1 + \dots$	371,46	371,41	370,7	906,4	906,6	910,6	906,7*
9	$u_2 v_3$	699,1	698,5	689,5	1243	1243	1242	1180
10	$u_0 v_4 - u_4 v_0$	864,8	864,6	862,8	1383	1383	1389	1375
11	$u_0 v_4 + u_4 v_0$	962,4	962,56	964,4	1459	1459	1469	1418
12	$u_1 v_4$	1081	1080	1076	1546	1546	1551	1465
13	$u_3 v_3 + \dots$	1371	1370	1352	1741	1741	1789	1740
14	$u_2 v_4 - u_4 v_2$	1532	1531	1516	1841	1840,7	1841	1840
15	$u_2 v_4 + u_4 v_2$	1858	1857	1842	2027	2027	2030	1890
16	$u_0 v_5$	2496,5	2496,5	2496,5	2350	2350	2363	2020
17	$u_1 v_5 - u_5 v_1$	2558	2557	2545	2378	2379	2386	2290
18	$u_1 v_5 + u_5 v_1$	2944	2944	2944	2551	2552	2566	2365
19	$u_3 v_4$	2899	2896	2866	2531	2531	2532	2390
20	$u_3 v_5 - u_5 v_3$	5118	5115	5075	3364	3365	3369	3020
21	$u_4 v_5$	8230	8226	8158	4266	4267	4272	4000

§ 4. Ergebnisse

In den Tabellen S. 744—746 sind die mit verschiedenen μ-Werten berechneten Schwingungszahlen mit den beobachteten zusammengestellt. Die Bestimmung der Elastizitätszahl μ aus Schwingungszahlen ist nur innerhalb sehr weiter Grenzen möglich. Aus der Tabelle 7 (S. 739) erkennt man, daß besonders bei den höheren Tönen die Konvergenz der Reihenentwicklung nicht ausreicht, um die 3. Dezimale der λ-Werte mit Genauigkeit zu bestimmen, wodurch natürlich der Einfluß von μ auf den betreffenden λ-Wert illusorisch wird. Je höher der Ton ist, um so schlechter konvergiert die Reihe. Die aus dem Verhältnis je zweier Schwingungszahlen berechneten μ-Werte differieren infolgedessen erheblich voneinander. Da sich nicht erkennen läßt, welche Töne zur Bestimmung von μ am geeignetsten sind, wurde aus allen 6 Tönen (I—VI) durch Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate ein μ-Wert bestimmt. Es ergab sich $\mu = 0{,}365$; $E = 7147$ kg/mm² für die Aluminiumplatte und $\mu = 0{,}404$; $E = 7212$ kg/mm² für die Messingplatte. Die Berechnung der Schwingungszahlen zeigt beim Tone III eine entschieden systematische Abweichung bei beiden Platten. Bei Auslassung von III ergibt der Wert $\mu = 0{,}365$ für die Aluminiumplatte ein Minimum des relativen Fehlerquadrates, $\mu = 0{,}404$ für die Messingplatte. Bei größeren μ-Werten wird die Abweichung des Tones III (wie aus den Tabellen ersichtlich ist) beträchtlich kleiner, dafür ergeben sich bei VI größere Differenzen. Außer den Tönen I—VI ist die Berechnung der λ-Werte noch für die Töne (4) und (13) mit größerer Genauigkeit, (4) mit 16 Gliedern, (13) mit 10 Gliedern in der Reihenentwicklung durchgeführt worden; (4) liefert befriedigende Übereinstimmung, (13) zeigt schon größere Abweichung, da hier die Konvergenz der Reihe erheblich schlechter wird. Für noch höhere Töne wird die Konvergenz immer schlechter, so daß eine genügende Genauigkeit der Rechnung praktisch nicht mehr erreichbar ist.

Die Berechnung der Knotenlinien wurde für 2 Fälle durchgeführt. Im einen Falle — Normalfunktion $u_3 v_3 + \ldots$ (13 der Tabelle S. 745 und 746) — zeigt sich für beide Platten sehr gute Übereinstimmung der berechneten mit den beobachteten Knotenlinien. Im zweiten Falle — Normalfunktion $w = u_0 v_2 + u_2 v_0 + \ldots$ (III der Tabelle) — zeigt die beobachtete Figur

Tabelle 11

x	0,18	0,2	0,21	0,4	0,46	0,5
$u_0(x)$	+0,70711	+0,70711	+0,70711	+0,70711	+0,70711	+0,70711
$u_2(x)$	+0,75907	+0,73582	+0,72325	+0,38469	+0,24266	+0,14029
$u_4(x)$	+0,55789	+0,46360	+0,41444	−0,56131	−0,78152	−0,87840
$u_6(x)$	+0,01509	−0,157156	−0,24186	−0,95502	−0,67963	−0,39206
$u_8(x)$	−0,52247	−0,70707	−0,78518	+0,000602	+0,65061	+0,92581
$u_{10}(x)$	−0,89805	−0,98764	−1,0000	+0,95096	+0,83557	+0,38224

Tabelle 11 (Fortsetzung)

x	0,6	0,65	0,68	0,8	0,82
$u_0(x)$	+0,70711	+0,70711	+0,70711	+0,70711	+0,70711
$u_2(x)$	−0,13823	−0,28725	−0,37911	−0,75968	−0,8245
$u_4(x)$	−0,90910	−0,80480	−0,70516	−0,07351	+0,06011
$u_6(x)$	+0,43163	+0,75086	+0,87318	+0,68346	+0,54666
$u_8(x)$	+0,71348	+0,20652	−0,14012	−0,93296	−0,88746
$u_{10}(x)$	−0,89286	−0,96632	−0,75603	+0,77334	+0,89782

Tabelle 11 (Fortsetzung)

x	0,3	0,4	0,5	0,6	0,65	0,67
$u_1(x)$	+0,36743	+0,4899	+0,61238	+0,73486	+0,79609	+0,82058
$u_3(x)$	+0,88128	+0,93625	+0,82693	+0,56166	+0,37805	+0,296415
$u_5(x)$	+0,85245	+0,31917	−0,36204	−0,84941	−0,93343	−0,9312
$u_7(x)$	+0,07766	−0,81065	−0,92814	−0,16754	+0,32628	+0,50484
$u_9(x)$	−0,76043	−0,80886	+0,38354	+0,99104	+0,68541	+0,45231

Tabelle 11 (Fortsetzung)

x	0,7	0,71	0,72	0,725	0,74	0,75
$u_1(x)$	+0,85733	+0,86958	+0,88182	+0,88795	+0,90632	+0,91857
$u_3(x)$	+0,16589	+0,120815	+0,074379	+0,051149	−0,020372	−0,06917
$u_5(x)$	−0,88859	−0,86242	−0,83190	−0,81501	−0,75582	−0,71079
$u_7(x)$	+0,72765	+0,7860	+0,83609	+0,85704	+0,90636	+0,93019
$u_9(x)$	+0,09063	−0,04022	−0,17089	−0,23451	−0,43836	−0,53106

Tabelle 11 (Fortsetzung)

x	0,76	0,78	0,8	0,82	0,86	0,88
$u_1(x)$	+0,93081	+0,95530	+0,97981	+1,00430	+1,0533	+1,07778
$u_3(x)$	−0,118196	−0,21882	−0,3216	−0,42648	−0,64096	−0,74996
$u_5(x)$	−0,6605	−0,54668	−0,41577	−0,26984	+0,06008	+0,23998
$u_7(x)$	+0,93465	+0,91922	+0,85929	+0,75605	+0,43117	+0,21812
$u_9(x)$	−0,6326	−0,79831	−0,90209	−0,93491	−0,77461	−0,58652

bei der Aluminiumplatte eine eigentümliche Unsymmetrie, die je nach der Lage der Anstreichstelle wechselt, und die wohl auf die relativ stärkere Belastung der leichten Aluminiumplatte durch den Bogen zurückzuführen ist. Bei der Messingplatte ist die Verzerrung unmerklich.

Die zur Berechnung der Knotenlinien gebrauchten u-Funktionen enthält Tab. 11. Die Reihenentwicklung für w ist unter den ausgemessenen Figuren angegeben. Die Nullstellen von w sind mit Hilfe der Tab. 11 durch Ausprobieren und nach genügender Einengung durch Interpolation bestimmt. Die so berechneten Punkte sind durch kleine Kreise gekennzeichnet. Die punktierten Kurven sind genaue Kopien der Pauspapierabdrücke von den fixierten Klangfiguren.

Legt man den Koordinatenanfangspunkt in den Mittelpunkt der Platte und bezeichnet die halbe Länge der Quadratseite mit 1, so erhält man folgende Wertepaare:

Fig. A.		Fig. B.	
x	y	x	y
0,2	0,804	0,3	0,709
0,4	0,675	0,4	0,714
0,6	0,49	0,5	0,721
0,8	0,209	0,6	0,7425
		0,65	0,769
		0,67	0,798

Bei Fig. B sind außerdem die Koordinatenachsen selbst Knotenlinien.

Die Übereinstimmung der Kurvenform mit der Theorie ist wohl als befriedigend zu bezeichnen mit Ausnahme

1. der obenerwähnten Verzerrung,

2. der hyperbolischen Ausweichungen an den Stellen, wo nach der Theorie zwei Knotenlinien sich schneiden.

Ritz versuchte die hyperbolischen Abweichungen dadurch zu erklären, daß zur „Überwindung der Reibung die Schwingungsamplitude ein gewisses Minimum überschreiten muß, der Sand also innerhalb eines von den Hyperbeln begrenzten Gebietes in indifferentem Gleichgewicht bleibt.“[1]) Die Beobachtung zeigt, daß die Ausbildung der Hyperbeln stets in bestimmten Quadranten erfolgt, deren Lage bei Wiederholung stets dieselbe bezüglich der Anstrichstelle ist, also mit dieser sich ändert.

1) Ritz (18), S. 771.

Für die Anregung zu dieser Arbeit danke ich Hrn. Prof. Kaufmann, Königsberg i. Pr., sowie Hrn. Prof. Kalähne, Danzig, für die Erlaubnis zur Benutzung des Tonometers.

Königsbergi. Pr., den 15. Mai 1928, I. Physikal. Institut.

Literaturverzeichnis

1) Chladni, Entdeckungen über die Theorie des Klanges. Leipzig 1787.

2) Derselbe, Die Akustik. Leipzig 1802.

3) Derselbe, Neue Beiträge zur Akustik. Leipzig 1817.

4) S. Germain, Recherches sur la théorie des surfaces élastiques. Paris 1821.

5) Derselbe, Remarques sur la nature, les bornes et l'étendue de la question des surfaces élastiques et l'équation générale de ces surfaces. Paris 1826.

6) Kalähne, Grundzüge der math.-physikalischen Akustik. Berlin 1913.

7) Derselbe, Eine akustische Methode zur Bestimmung der Elastizitätszahlen (Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 1915).

8) Derselbe, Schallerzeugung mit mechanischen Mitteln (Handbuch der Physik, Bd. VIII).

9) Kirchhoff, Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe (Crelles Journ. **40.** 1850).

10) Derselbe, Über die Schwingungen einer kreisförmigen elastischen Scheibe (Pogg. Ann. **81.** 1850).

11) König, Pogg. Ann. **122.** S. 238.

12) Kundt, Pogg. Ann. **128.** S. 610.

13) H. Lamb, Proceedings of the London Math. Soc. **21.** S. 78. 1891.

14) Melde, Akustik. Leipzig 1883.

15) Poisson, Sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques (Mém. de l'Acad. d. Sc. à Paris 1829).

16) Rayleigh, Theorie des Schalls (übers. v. Neesen, Br. 1879).

17) W. Ritz, Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik (Journ. f. reine u. ang. Meth. **135.** S. 1. 1908).

18) W. Ritz, Theorie der Transversalschwingungen einer quadratischen Platte mit freien Rändern [Ann. d. Phys. (4) **28.** 1909].

19) Reinstein, Ann. d. Phys. (4) **35.** 1911.

20) v. Schaik, Wellenlehre und Schall. Braunschweig 1902.

21) Strehlke, Verschiedene Arbeiten. Pogg. Ann. **4.** S. 205—218; **18.** S. 118—225; **95.** S. 577—602; **146.**

22) Zellner, Vorträge über Akustik. Leipzig 1892.

23) Zeisig, Ein einfacher Fall der Transversalschwingungen einer rechteckigen Platte (Wied. Ann. **64.** 1898).

(Eingegangen 22. Mai 1928)

---

4. Probleme der Brownschen Molekularbewegung;
von Frida Stadie

Inhaltsverzeichnis: Einleitung: Ziel der Arbeit. — Erstes Kapitel: Die Translationsbewegung. — § 1. Das mittlere Verschiebungsquadrat; § 2. Die Differentialgleichung, die für Probleme der Verweilzeit benötigt wird, nebst Grenz- und Anfangsbedingungen; § 3. Die Nochverweilzeit; § 4. Die Verweilzeit; § 5. Die Begrenzung des Raums durch eine Ebene; § 6. Früher behandelte Probleme; § 7. Das Parallelepiped; § 8. Der endliche Zylinder; § 9. Die Bestimmung von λ und τ; § 10. Nachtrag. — Zweites Kapitel: Die Rotationsbewegung. — § 11. Die Differentialgleichung für die Rotationsbewegung; § 12. Der Siedentopfsche Azimuteffekt; § 13. Die Bestimmung der Form eines Beleuchtungskegels, der die Integration der Differentialgleichung vereinfacht; § 14. Die Integration der Differentialgleichung; § 15. Die mittlere Funkelzeit.

Einleitung

Ziel der Arbeit

Zur mathematischen Behandlung spezieller Probleme der Brownschen Molekularbewegung ist es zweckmäßig, ihren komplizierten Mechanismus durch einen ihm äquivalenten, wesentlich einfacheren zu ersetzen. Smoluchowski gelangt nämlich auf Grund seiner Untersuchungen zu dem Resultat[1]): „Derselbe kommt nach Analogie mit einem Glücksspiel zustande, indem das Teilchen vollständig unregelmäßig gerichtete, annähernd geradlinige Wegstücke in großer Anzahl zurücklegt und die schließliche Verschiebung die geometrische Resultante derselben bildet.“ So wollen wir auch in der vorliegenden Arbeit mit Smoluchowski die Annahme machen, daß ein Teilchen in der Elementarzeit τ einen Elementarschritt λ von konstanter Größe macht. Die Richtungen der

1) M. v. Smoluchowski, Ann. d. Phys. 21. S. 756. 1906; „Vorträge über die kinetische Theorie der Materie und der Elektrizität“. S. 101. Leipzig und Berlin 1914.

einzelnen Schritte sind vollkommen unabhängig voneinander, d. h. alle Richtungen im Raume sind gleich wahrscheinlich.

Dieselbe Annahme kommt bereits bei einem von Einstein[1]) behandelten Probleme zur Geltung, auf das wir einleitend in § 1 noch einmal kurz eingehen wollen. Dabei zeigt sich, daß das Resultat bei dieser Frage wie bei einigen anderen später zu behandelnden nur von dem Quotienten λ^2/τ, aber nicht von λ und τ einzeln abhängt.

Unsere Hauptaufgabe soll es aber sein, die Wahrscheinlichkeit der Verweilzeit von Teilchen in einem bestimmt umgrenzten Raumgebiet und daraus die mittlere Verweilzeit zu berechnen und die Rotationsbewegung linearer Teilchen zu studieren, weil sie die Erklärung für gewisse Funkelerscheinungen gibt, die an ultramikroskopischen Teilchen beobachtet worden sind.

Erstes Kapitel

Die Translationsbewegung

§ 1. Das mittlere Verschiebungsquadrat

Einstein hat sich die Frage gestellt, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, daß ein Teilchen, welches zur Zeit $t = 0$ an der Stelle $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ liegt, zur Zeit t eine bestimmte x-Koordinate hat.

Wir wollen das analoge Problem für drei Koordinaten entwickeln, d. h. wir suchen die Wahrscheinlichkeit

$$f(x y z t)\, dx\, dy\, dz = f\, dv$$

dafür, daß ein Teilchen, welches zur Zeit $t = 0$ an der Stelle $x = y = z = 0$ liegt, sich zur Zeit t zwischen x und $x + dx$, y und $y + dy$, z und $z + dz$ befindet.

Dann ist

$$f(x + \xi,\ y + \eta,\ z + \zeta,\ t - \tau)\, dv$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Teilchen zur Zeit $t - \tau$ im Volumenelement dv bei $x + \xi$, $y + \eta$, $z + \zeta$ gelegen hat, wo $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \lambda^2$ ist, und auf Grund der Elementarregeln über Zusammensetzung voneinander unabhängiger Wahrscheinlichkeiten gilt dann

$$f(x y z t) = \int f(x + \xi,\ y + \eta,\ z + \zeta,\ t - \tau)\, \frac{d\omega}{4\pi},$$

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. 17. S. 549. 1905.

wo $d\omega$ das Element des körperlichen Winkels ist, dessen Spitze in x, y, z liegt. Entwickelt man nach dem Taylorschen Satz und berücksichtigt, daß

$$\text{(1)}\quad \begin{cases} \int \xi \, d\omega = \int \eta \, d\omega = \int \zeta \, d\omega = 0; \\ \int \xi \eta \, d\omega = \int \eta \zeta \, d\omega = \int \zeta \xi \, d\omega = 0; \\ \frac{1}{4\pi} \int \xi^2 \, d\omega = \frac{1}{4\pi} \int \eta^2 \, d\omega = \frac{1}{4\pi} \int \zeta^2 \, d\omega = \frac{\lambda^2}{3} \end{cases}$$

ist, so erhält man

$$\text{(2)}\quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\lambda^2}{6\tau} \Delta f = a^2 \Delta f,$$

wenn

$$\text{(3)}\quad \frac{\lambda^2}{6\tau} = a^2.$$

Gleichung (2) ist zu integrieren unter folgenden Nebenbedingungen:

$$\text{(I)}\quad r \neq 0 \qquad f(x, y, z, 0) = 0$$

$$\text{(II)}\quad \int f(x, y, z, t) = 1$$

Die Lösung ist[1]):

$$f = \left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\right)^3 e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}}$$

und somit

$$\text{(4)}\quad f\,dx\,dy\,dz = \left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\right)^3 e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}}\,dx\,dy\,dz.$$

Soll die Wahrscheinlichkeit nur für die Projektion der Verschiebungen in einer Koordinatenrichtung berechnet werden, so müssen wir über $dy\,dz$ integrieren und erhalten

$$\varphi(x)\,dx = dx \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f\,dy\,dz = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}\,dx,$$

d. i. das Einsteinsche Resultat.[2])

---

1) Vgl. Riemann-Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik, II. Bd. (3), § 50. Braunschweig 1901.

2) A. Einstein, Ann. d. Phys. 17. S. 538. 1905.

Das Quadrat des mittleren Abstandes vom Nullpunkt ergibt sich als

$$\overline{r}^2 = \int r^2 f\,d v = 6 a^2 t, \tag{5}$$

so daß

$$\frac{\overline{r}^2}{6t} = a^2 = \frac{\lambda^2}{6\tau}, \quad \text{[nach (2)]},$$

wodurch bewiesen ist, daß $\overline{r}^2/t$, wie wir vorher erwähnten, in der Tat invariant ist.

Eine Statistik über mittlere Verschiebungsquadrate erlaubt also, wie bekannt, λ^2/τ zu bestimmen. Diese Statistik bezieht sich auf die in vorgeschriebenen Zeiten zurückgelegten Wege. Die im folgenden behandelten Probleme beschäftigen sich dagegen mit den Zeiten, in denen vorher gegebene Wege durchlaufen werden.

§ 2. Die Differentialgleichung, die für Probleme der Verweilzeit benötigt wird, nebst Grenz- und Anfangsbedingungen

Jetzt soll die mittlere Zeit berechnet werden, die ein Teilchen in einem Raume mit gegebener Oberfläche bleibt.

Zur Zeit 0 liege das Teilchen an der Stelle x, y, z. Wir suchen die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Teilchen irgendwann bis zur Zeit t an den Rand des Gebietes kommt, und nennen sie $w(x y z t)$.

Zur Zeit τ liegt das Teilchen an der Stelle

$$x + \xi,\ y + \eta,\ z + \zeta,$$

wo

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \lambda^2$$

ist. Das Element des körperlichen Winkels, dessen Spitze in x, y, z liegt, sei $d\omega$.

Nach dem Satz der Zusammensetzung von Wahrscheinlichkeiten ist

$$w(x, y, z, t) = \int w(x + \xi, y + \eta, z + \zeta, t - \tau) \frac{d\omega}{4\pi}.$$

Entwickelt man nach Taylor und berücksichtigt die Gleichungen (1), so erhält man

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\lambda^2}{6\tau}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) = a^2 \Delta w. \tag{6}$$

Bei der Integration müssen folgende Grenz- und Anfangsbedingungen beachtet werden:

Wenn $p(x, y, z)$ nicht auf der Oberfläche σ liegt, wird für $t = 0$ $w = 0$.

Für alle Punkte p, die auf σ liegen, wird $w = 1$ für alle Zeiten bis zur Zeit t.

Machen wir die Substitution:

$$u = 1 - w,$$

so erhalten wir

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u, \tag{7}$$

und die Anfangs- und Grenzbedingungen sind dann folgende:

(I) für $t = 0$: $u = 1$ im Innern

(II) für alle Zeiten: $u = 0$ auf σ.

Wir sind so auf ein bekanntes Problem der Wärmeleitung, oder besser, der Diffusion gekommen.

§ 3. Die Nochverweilzeit

Unter der mittleren „Nochverweilzeit" eines Teilchens wollen wir die mittlere Zeit verstehen, die verstreicht, bis ein Teilchen, welches zur Zeit 0 im Punkte $p(xyz)$ liegt, aus dem Gebiet heraustritt, also den Mittelwert aller t.

Da $w(t + dt) - w(t) = \frac{\partial w}{\partial t} dt$ die Wahrscheinlichkeit ist, daß das Teilchen zwischen t und $t + dt$ auf die Oberfläche kommt, so wird die mittlere Nochverweilzeit für den bestimmten Punkt xyz

$$\Gamma(x, y, z) = \int_0^\infty t \frac{\partial w}{\partial t} dt. \tag{8}$$

Die mittlere Nochverweilzeit für *irgendeinen* Punkt des betrachteten Raumes ist

$$\Theta = \frac{\int \Gamma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz}{\int dx\, dy\, dz}. \tag{9}$$

Wir können die Mittelungen über Zeit und Raum auch in umgekehrter Reihenfolge vornehmen und erhalten für die Wahrscheinlichkeit, daß irgendein Teilchen des betrachteten Raums bis zur Zeit t an den Rand kommt,

$$W(t) = \frac{\int w\, dv}{\int dv}. \tag{10}$$

Dann bestimmt sich Θ durch

$$\Theta = \int_0^\infty t \frac{\partial W}{\partial t} dt. \tag{11}$$

§ 4. Die Verweilzeit

Von der Nochverweilzeit unterscheiden wir die mittlere Verweilzeit, d. i. die mittlere Zeit vom Eintritt eines Teilchens in das betrachtete Gebiet bis zum darauffolgenden Austritt aus demselben. Diese soll jetzt berechnet werden.

ξ und x mögen die äußere und innere Normale der Oberfläche σ des betrachteten Gebietes sein, vgl. Fig. 1.

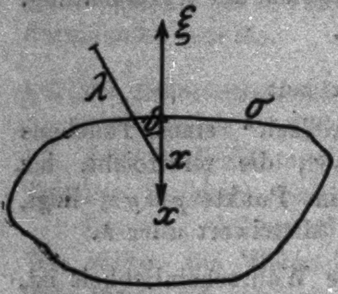


Fig. 1

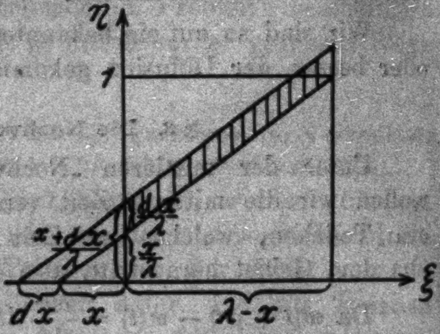


Fig. 2

Es kommen nur die Teilchen in Betracht, die mit dem Elementarschritt λ durch die Oberfläche in das Innere des Gebiets gelangen.

Geht ein Teilchen von einem Orte mit der Koordinate ξ aus, und zwar unter einem Winkel ϑ gegen die Normale, und gelangt es mit dem Elementarschritt λ zu einem Orte mit der Koordinate x, so gilt die Beziehung

$$x + \xi = \lambda \cos \vartheta = \lambda \eta, \tag{12}$$

wenn wir

$$\cos \vartheta = \eta$$

setzen.

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Teilchen mit dem ersten Elementarschritt durch die Einheit der Oberfläche hindurch an eine Stelle mit der Koordinate zwischen x und $x + dx$ gelangt, heiße $\varphi(x)\,dx$. Dieses Teilchen kann nach (12) von

allen Punkten der $\xi\eta$-Ebene stammen, die zwischen den untereinander parallelen Geraden

$$(13) \qquad \begin{cases} \lambda\eta - \xi = x; \\ \lambda\eta - \xi = x + dx \end{cases}$$

liegen. Sie sind durch die Fig. 2 dargestellt.

Da nun die Wahrscheinlichkeit, daß ein Teilchen seinen Ausgangspunkt zwischen ξ und $\xi + d\xi$ hat und seine Ausgangsrichtung zwischen ϑ und $\vartheta + d\vartheta$, proportional

$$d\xi \sin\vartheta \, d\vartheta = d\xi \, d\eta$$

ist, so gilt

$$(14) \qquad \varphi(x)\,dx = b\iint d\xi\,d\eta\,,$$

wo b eine Konstante ist und die Integration in der $\xi\eta$-Ebene sich auf den Streifen zwischen den Geraden (13) erstreckt, der einerseits durch den kleinsten Wert von ξ, nämlich $\xi = 0$, andererseits durch den größtmöglichen Wert von ξ, nämlich $\xi = \lambda - x$ begrenzt wird; denn nur die Teilchen können nach x gelangen, die nicht weiter als $\lambda - x$ von der Oberfläche ihren Ausgangspunkt haben, da sie ja mit dem Elementarschritt λ nach x gelangen sollen. Wir haben also über das in Fig. 2 schraffierte Stück des Streifens zu integrieren, d. h. über ein Parallelogramm der Grundfläche dx/λ und der Höhe $\lambda - x$. Wir erhalten also aus (14)

$$(15) \qquad \varphi(x)\,dx = b\left(1 - \frac{x}{\lambda}\right)dx.$$

Da wir nur Teilchen betrachten, die mit einem Elementarschritt λ wirklich in unser Gebiet eintreten, und da alle eintretenden Teilchen notwendigerweise mit dem ersten Elementarschritt zu Punkten x zwischen 0 und λ gelangen müssen, so ist

$$(16) \qquad \int_0^\lambda \varphi(x)\,dx = 1\,.$$

Hieraus bestimmt sich $b = \frac{2}{\lambda}$, und es ist also

$$(17) \qquad \varphi(x) = \frac{2}{\lambda}\left(1 - \frac{x}{\lambda}\right).$$

Da nun $\varphi(x)\,d\,x$ die Wahrscheinlichkeit dafür ist, daß ein Teilchen mit dem ersten Schritt an den Ort zwischen x und $x + d\,x$ gelangt, und Γ [vgl. Formel (8)] die Nochverweilzeit für ein Teilchen, das an der Stelle x liegt, bedeutet, so ist

$$P' = \int_0^\lambda \Gamma\,\varphi(x)\,d\,x \tag{18}$$

die Verweilzeit. Hier ist allerdings die Zeit vernachlässigt, die das Teilchen braucht, um von der Oberfläche zum Punkte x zu kommen, d. h. eine Größe der Größenordnung τ. Da P' aber, wie wir sehen werden, von der Größenordnung $\tau\frac{c}{\lambda}$ ist, wo c die Lineardimension des betrachteten Gebiets bedeutet, und da immer $c \gg \lambda$ ist, so ist diese Vernachlässigung berechtigt.

x ist, um es zu wiederholen, die innere Normalenrichtung der Oberfläche σ. Da Γ im allgemeinen von allen 3 Raumkoordinaten abhängt, so ist P' noch Funktion der Koordinaten der Oberfläche, durch die das Teilchen hindurchgetreten ist, und

$$P = \frac{\int P'\,d\,\sigma}{\int d\,\sigma} \tag{18'}$$

würde die Verweilzeit für ein beliebiges Teilchen bedeuten. Ist Γ nur Funktion von x, so hat $P' = P$ für alle Punkte der Oberfläche denselben Wert.

Nachdem wir gesehen haben, wie die Nochverweilzeit und die Verweilzeit allgemein berechnet werden, sollen diese Größen für besondere Begrenzungen des Raums ermittelt werden.

§ 5. Die Begrenzung des Raumes durch eine Ebene

Das betrachtete Gebiet sei der unendliche Halbraum, der durch die Ebene $x = 0$ begrenzt wird.

Die Differentialgleichung (7) lautet

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Die Anfangs- und Grenzbedingungen sind folgende:

$$u = 0 \text{ für } x = 0, \tag{I}$$

$$u = 1 \text{ für } t = 0. \tag{II}$$

Dazu kommt in diesem besonderen Falle noch die Bedingung für das Unendliche, daß für alle endlichen Werte von t

(III) $$u = 1 \text{ für } x = +\infty,$$

weil die Wahrscheinlichkeit $w = 1 - u$, daß ein unendlich weit von der Oberfläche entferntes Teilchen in endlicher Zeit an die Oberfläche gelangt, Null ist.

Folgende Lösung der Differentialgleichung befriedigt die Bedingungen

$$u = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\xi^2} d\xi.$$

Also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

(19) $$w = 1 - u = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi.$$

Zu demselben Resultat wären wir gekommen, wenn wir die Aufgabe nach Analogie eines Spielerproblems, das Bertrand behandelt hat[1]), gelöst hätten. Diese Art der Lösung, die auf einer geistreichen Ableitung von André basiert[2]), hat aber den Nachteil, daß sie nicht verallgemeinerungsfähig ist. Die Nochverweil- und Verweilzeit können bei diesem Problem nicht bestimmt werden, da beide unendlich groß sind.

§ 6. Früher behandelte Probleme

Für verschiedene Raumbegrenzungen sind von Smoluchowski[3]) und Buchwald[4]) die Nochverweil- und Verweilzeit — sie nennen sie etwas anders — schon früher bestimmt worden.

a) Zwei parallele Ebenen

Buchwald findet bei Begrenzung des Raums durch zwei parallele Ebenen, die den Abstand c voneinander haben [vgl. (10)]

$$W(t) = 1 - 8 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2 \pi^2} e^{-a^2 \left[\frac{(2m+1)\pi}{c}\right]^2 t},$$

---

1) Vgl. J. Bertrand, Calcul des probabilités 98. S. 122. Paris 1889.
2) Vgl. J. Bertrand, a. a. O. S. 18.
3) M. v. Smoluchowski, Wiener Sitzungsber. 124. S. 339. 1915.
4) E. Buchwald, Ann. d. Phys. 66. S. 1. 1921.

also beträgt die mittlere Nochverweilzeit nach (11)

$$\Theta = \int_0^\infty t \frac{\partial W}{\partial t} dt = \frac{8c^2}{a^2\pi^4} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^4} = \frac{c^2}{12a^2}. \tag{20}$$

Da die Reihe für $W(t)$ für kleine t schlecht konvergiert, so behandeln wir sie in der folgenden Weise.

Es ist

$$U = \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{8a^2}{c^2} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-a^2\left[\frac{(2m+1)\pi}{c}\right]^2 t}. \tag{21}$$

$U\,dt$ ist also die Wahrscheinlichkeit, daß ein Teilchen zwischen t und $t + dt$ an die Oberfläche gelangt.

Setzen wir

$$e^{-\frac{a^2\pi^2}{c^2}t} = q^{\frac{1}{4}} \quad \text{und} \quad q = e^{\pi i \omega},$$

so wird

$$U = \frac{4a^2}{c^2} \vartheta_{10}(0, \omega),$$

wo ϑ_{10} die ϑ-Funktion

$$\vartheta_{10}(0, \omega) = 2\left[q^{\frac{1}{4}} + q^{\frac{9}{4}} + \cdots\right]$$

ist.

Mit Hilfe der Transformationsformel[1])

$$\sqrt{-i\omega}\, \vartheta_{10}(0, \omega) = \vartheta_{01}\left(0, -\frac{1}{\omega}\right),$$

erhalten wir

$$U = \frac{2a}{c\sqrt{\pi t}} \vartheta_{01}\left(0, -\frac{1}{\omega}\right),$$

wo

$$\vartheta_{01}\left(0, -\frac{1}{\omega}\right) = 1 - 2q' + 2q'^4 - 2q'^9 + \cdots$$

und

$$q' = e^{-\frac{c^2}{4a^2 t}}$$

bedeutet.

Wir haben also die für kleine t schnell konvergente Entwicklung

$$U = \frac{2a}{c\sqrt{\pi t}} (1 - 2q' + 2q'^4 - 2q'^9 + \cdots). \tag{22}$$

---

1) Vgl. z. B. H. Weber, Elliptische Funktionen S. 77. Formel (11). Braunschweig 1891.

Ein Unterschied besteht aber zwischen **Buchwalds** sogenannter durchschnittlicher Austrittserwartungszeit und meiner Verweilzeit, obgleich die Definition für beide die gleiche ist. Darauf soll am Schluß dieses Kapitels noch einmal eingegangen werden; ebenfalls findet dort eine Auseinandersetzung mit **Smoluchowski** in bezug auf seine Verweilzeit statt.

Jetzt wollen wir bei dem vorher erwähnten Problem die mittlere Verweilzeit auf die in § 4 besprochene Art bestimmen.

Die Nochverweilzeit eines Teilchens in ihrer Abhängigkeit von den Raumkoordinaten lautet nach (8):

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t \frac{\partial w}{\partial t} dt = -\int_0^\infty t \frac{\partial u}{\partial t} dt$$

$$= -\Big| t u \Big|_0^\infty + \int_0^\infty u\, dt = \int_0^\infty u\, dt,$$

da tu für $t = \infty$ verschwindet.

Es ist also

$$\Gamma(x) = \frac{4c^2}{a^2\pi^3} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^3} \sin \frac{(2m+1)\pi}{c} x. \tag{23}$$

Dieser Ausdruck läßt sich in endlicher Form darstellen.

Entwickeln wir $\pi x/c$ in die Reihe

$$\frac{\pi x}{c} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{c} x, \tag{24}$$

so erhalten wir für die

$$B_n = \frac{2}{c} \int_0^c \frac{\pi x}{c} \sin \frac{n\pi}{c} x\, dx = (-1)^{n+1} \frac{2}{n}.$$

Entwickeln wir ferner $\frac{\pi^2 x^2}{c^2}$ in die Reihe

$$\frac{\pi^2 x^2}{c^2} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{c} x, \tag{25}$$

so finden wir für die

$$C_n = \frac{2}{c}\int_0^c \frac{\pi^2 x^2}{c^2} \sin\frac{n\pi}{c} x\, dx = (-1)^{n+1}\frac{2\pi}{n} + \frac{4}{\pi n^3}[(-1)^n - 1].$$

So ergibt sich schließlich aus (24) und (25) für

$$\pi^2\left(\frac{x}{c} - \frac{x^2}{c^2}\right) = \frac{8}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^3}\sin\frac{(2m+1)\pi x}{c}, \tag{26}$$

so daß aus (23) und (26)

$$\Gamma(x) = \frac{1}{2a^2} x(c-x) \tag{27}$$

folgt.

Die mittlere Verweilzeit beträgt nach (17) und (18)

$$P = \int_0^\lambda \Gamma(x)\varphi(x)\,dx = \int_0^\lambda \frac{1}{2a^2} x(c-x)\cdot\frac{2}{\lambda}\left(1-\frac{x}{\lambda}\right)dx$$

$$= \frac{\lambda}{12a^2}(2c-\lambda).$$

Ist $\lambda \ll c$, so gilt genähert

$$\underline{P = \frac{\lambda c}{6a^2}}.$$

b) Der unendliche Zylinder

Auch beim unendlichen Zylinder findet **Buchwald**

$$W(t) = 1 - 4\sum_\nu e^{-a^2\frac{p_\nu^2}{\varrho^2}t}\cdot\frac{1}{p_\nu^2} \tag{28}$$

und als mittlere Nochverweilzeit nach (11)

$$\underline{\Theta = \frac{4\varrho^2}{a^2}\sum_\nu \frac{1}{p_\nu^4} = 0{,}1246\cdot\frac{\varrho^2}{a^2}}, \tag{29}$$

wo die p_ν die Wurzeln der **Besselschen** Funktion $J_0(x) = 0$ sind.

Die Nochverweilzeit in ihrer Abhängigkeit vom Radius lautet nach (8)

$$\Gamma(r) = \frac{2\varrho^2}{a^2}\sum_\nu \frac{J_0\left(p_\nu \frac{r}{\varrho}\right)}{p_\nu^3 J_1(p_\nu)}. \tag{30}$$

Auch hier läßt sich dieser Ausdruck in endlicher Form darstellen.

Es ist

(30') $$1 = \sum A_\nu J_0\left(p_\nu \frac{r}{\varrho}\right) = \sum_\nu \frac{2}{p_\nu J_1(p_\nu)} J_0\left(p_\nu \frac{r}{\varrho}\right).$$

Entwickeln wir ferner r^2/ϱ^2 in die Reihe

$$\frac{r^2}{\varrho^2} = \sum_\nu B_\nu J_0\left(p_\nu \frac{r}{\varrho}\right),$$

so erhalten wir für

$$B_\nu = \frac{2\int\limits_0^1 \frac{r^3}{\varrho^3} J_0\left(p_\nu \frac{r}{\varrho}\right) d\left(\frac{r}{\varrho}\right)}{J_1^2(p_\nu)}.$$

Durch partielle Integration und Beachtung derselben Beziehungen wie bei der Bestimmung der A_ν in (30') folgt daraus

$$B_\nu = \frac{2(p_\nu^2 - 4)}{p_\nu^3 J_1(p_\nu)},$$

und wir bekommen für

$$1 - \frac{r^2}{\varrho^2} = 8 \sum_\nu \frac{1}{p_\nu^3 J_1(p_\nu)} J_0\left(p_\nu \frac{r}{\varrho}\right).$$

Es ist also

(31) $$\Gamma(r) = \frac{\varrho^2 - r^2}{4a^2}.$$

Wir bestimmen jetzt die mittlere Verweilzeit.

In Gleichung (17) bedeutet $x = \varrho - r$, so daß nach (31)

$$\Gamma(r) = \frac{2\varrho x - x^2}{4a^2}$$

ist.

Dann folgt nach (18)

$$P = \int\limits_0^\lambda \frac{(2\varrho x - x^2)}{4a^2} \cdot \frac{2}{\lambda}\left(1 - \frac{x}{\lambda}\right) dx = \frac{\lambda}{24a^2}(4\varrho - \lambda).$$

Die mittlere Verweilzeit beträgt also, da wir λ gegen 4ϱ vernachlässigen,

(32) $$\underline{P = \frac{\lambda\varrho}{6a^2}}.$$

c) Die Kugel

Beim Problem der Begrenzung des Raums durch eine Kugelfläche ergibt sich nach Smoluchowski

$$W(t) = 1 - 6 \sum_n e^{-a^2 \frac{n^2 \pi^2}{\varrho^2} t} \cdot \frac{1}{n^2 \pi^2},$$

und nach (11) beträgt die mittlere Nochverweilzeit

$$(33) \qquad \underline{\Theta = \frac{6 \varrho^2}{a^2 \pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\varrho^2}{15 a^2}}\,.$$

Die Nochverweilzeit als Funktion von r bestimmt sich nach (8) zu

$$(34) \qquad \Gamma(r) = -\frac{2 \varrho^2}{a^2} \sum_n \frac{(-1)^n}{n^2 \pi^2} R\left(\varkappa_n \frac{r}{\varrho}\right).$$

Um diesen Ausdruck wieder in endlicher Form darzustellen, benutzen wir einerseits

$$(34') \qquad 1 = \sum D_n R\left(\varkappa_n \frac{r}{\varrho}\right) = -2 \sum_n (-1)^n R\left(\varkappa_n \frac{r}{\varrho}\right)$$

Andererseits entwickeln wir r^2/ϱ^2 in die Reihe

$$\frac{r^2}{\varrho^2} = \sum_n F_n R\left(\varkappa_n \frac{r}{\varrho}\right)$$

und finden

$$F_n = \frac{2 \int_0^1 R\left(\varkappa_n \frac{r}{\varrho}\right) \frac{r^4}{\varrho^4}\, d\left(\frac{r}{\varrho}\right)}{R'(\varkappa_n)^2}\,.$$

Durch partielle Integration und Benutzung derselben Beziehungen wie vorher bei der Bestimmung der D_n in (34') bekommen wir

$$F_n = \frac{(-1)^n\, 2(6 - n^2 \pi^2)}{n^2 \pi^2},$$

so daß

$$1 - \frac{r^2}{\varrho^2} = -12 \sum_n \frac{(-1)^n}{n^2 \pi^2} R\left(\varkappa_n \frac{r}{\varrho}\right)$$

ist. Wir erhalten also

$$(35) \qquad \Gamma(r) = \frac{\varrho^2 - r^2}{6 a^2}\,.$$

Um die mittlere Verweilzeit nach (17) und (18) zu ermitteln, haben wir $r = \varrho - x$ zu setzen, so daß

$$\Gamma(r) = \frac{2\varrho x - x^2}{6a^2}$$

wird, und finden nach (18)

$$P = \int_0^\lambda \frac{(2\varrho x - x^2)}{6a^2} \cdot \frac{2}{\lambda}\left(1 - \frac{x}{\lambda}\right) dx = \frac{\lambda}{36\,a^2}(4\varrho - \lambda),$$

d. h. mit Vernachlässigung von λ gegen 4ϱ

(36) $$\underline{P = \frac{\lambda\varrho}{9a^2}}\,.$$

§ 7. Das Parallelepiped

Ein Teilchen liege zur Zeit $t = 0$ in einem Raum, der durch zwei Paar parallele Ebenen begrenzt wird, die den Abstand α bzw. β haben. Die Differentialgleichung lautet nach (7)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right).$$

Die Gleichung ist unter folgenden Nebenbedingungen zu integrieren:

(I) $u = 1$ für $t = 0$

(II) $u = 0$ „ $x = 0$ und für $y = 0$

(III) $u = 0$ „ $x = \alpha$ „ „ $y = \beta$.

Die allgemeine Lösung, die (II) und (III) genügt, ist

(37) $$u = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} e^{-a^2\left[\frac{m^2\pi^2}{\alpha^2} + \frac{n^2\pi^2}{\beta^2}\right]t} \sin\frac{m\pi}{\alpha}x \sin\frac{n\pi}{\beta}y.$$

Die Koeffizienten A_{mn} müssen so bestimmt werden, daß (I) befriedigt wird. $u = 1$ wird dazu in eine Fourierreihe entwickelt.

$$u = 1 = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\frac{m\pi}{\alpha}x \sin\frac{n\pi}{\beta};$$

$$A_{mn} = \frac{4}{\alpha\beta}\int_0^\alpha\int_0^\beta \sin\frac{m\pi}{\alpha}x' \sin\frac{n\pi}{\beta}y'\,dx'\,dy'.$$

Daraus folgt

$$(38)\quad \begin{cases} w = 1 - u = 1 - 16 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-a^2\left[\frac{(2m+1)^2\pi^2}{\alpha^2} + \frac{(2n+1)^2\pi^2}{\beta^2}\right]t} \\ \cdot \frac{1}{(2m+1)(2n+1)\pi^2} \cdot \sin \frac{(2m+1)\pi}{\alpha} x \sin \frac{(2n+1)\pi}{\beta} y. \end{cases}$$

Mitteln wir über den Raum, so erhalten wir nach (10):

$$W(t) = \int_0^\alpha \int_0^\beta w \frac{dx\,dy}{\alpha \cdot \beta}$$

$$= 1 - 64 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2 (2n+1)^2 \pi^4} e^{-a^2\left[\frac{(2m+1)^2\pi^2}{\alpha^2} + \frac{(2n+1)^2\pi^2}{\beta^2}\right]t}.$$

Die mittlere Nochverweilzeit ist nach (11)

$$\Theta = \int_0^\infty t \frac{\partial W}{\partial t} dt = \frac{64}{a^2 \pi^6} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\frac{(2m+1)^4 (2n+1)^2}{\alpha^2} + \frac{(2n+1)^4 (2m+1)^2}{\beta^2}}$$

$$(39)\qquad \Theta = \frac{\alpha^2}{a^2} F(\zeta),$$

wo

$$\zeta = \frac{\alpha^2}{\beta^2}; \quad F(\zeta) = \frac{64}{\pi^6} \sum_{m=0} \sum_{n=0} \frac{1}{(2m+1)^4 (2n+1)^2 + (2n+1)^4 (2m+1)^2 \zeta}.$$

Die folgende Tabelle gibt $F(\zeta) = \Theta \frac{a^2}{\alpha^2}$ als Funktion von ζ, und Fig. 3 stellt den Verlauf dieser Funktion dar.

ζ	$\Theta = \frac{a^2}{\alpha^2}$
0	0,08333
0,04	0,07295
0,25	0,05726
1	0,03549
4	0,01429
∞	0

Die Nochverweilzeit eines Teilchens in ihrer Abhängigkeit von den Raumkoordinaten lautet nach (8)

$$(40)\quad \begin{cases} \Gamma(x,y) = \dfrac{16}{\alpha^2\pi^4}\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2m+1)(2n+1)\left[\dfrac{(2m+1)^2}{\alpha^2}+\dfrac{(2n+1)^2}{\beta^2}\right]} \\ \quad\cdot\ \sin\dfrac{(2m+1)\pi}{\alpha}x\,\sin\dfrac{(2n+1)\pi}{\beta}y\,. \end{cases}$$

Wir brauchen diese einmal in der Nähe von $x = 0$ und erhalten

$$\Gamma(x) = \frac{16x}{\alpha^2\pi^3}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\dfrac{(2m+1)^2(2n+1)}{\alpha}+\dfrac{(2n+1)^3\alpha}{\beta^2}}\sin\frac{(2n+1)\pi}{\beta}y\,.$$

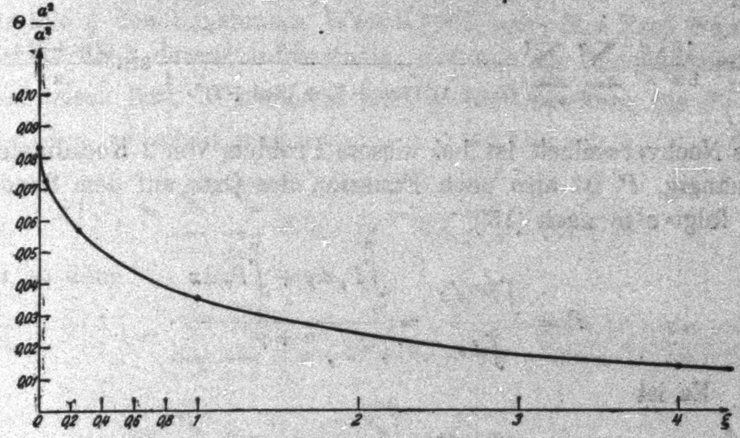


Fig. 3

Dann ist nach (17) und (18)

$$P_1 = \frac{16\lambda}{3\alpha^2\pi^3}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\dfrac{(2m+1)^2(2n+1)}{\alpha}+\dfrac{(2n+1)^3\alpha}{\beta^2}}\sin\frac{(2n+1)\pi}{\beta}y\,.$$

P_1 ändert sich also mit y.

Zweitens brauchen wir die Nochverweilzeit in der Nähe von $y = 0$.

Wir erhalten

$$\Gamma(y) = \frac{16y}{\alpha^2\pi^3}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\dfrac{(2m+1)^3\beta}{\alpha^2}+\dfrac{(2n+1)^2(2m+1)}{\beta}}\sin\frac{(2m+1)\pi}{\alpha}x\,.$$

Hieraus folgt nach (17) und (18)

$$P_2 = \frac{16\lambda}{8\alpha^2\pi^3}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\frac{(2n+1)^2(2m+1)}{\beta}+\frac{(2m+1)^3\beta}{\alpha^2}}\sin\frac{(2m+1)\pi}{\alpha}x.$$

P_2 ist also von x abhängig.

Setzen wir $\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \zeta$ und $\frac{\beta^2}{\alpha^2} = \frac{1}{\zeta}$, so erhalten wir

$$P_1 = \frac{16\lambda\alpha}{8\alpha^2\pi^3}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2(2n+1)+(2n+1)^3\zeta}\sin\frac{(2n+1)\pi}{\beta}y,$$

und

$$P_2 = \frac{16\lambda\beta}{8\alpha^2\pi^3}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2(2m+1)+(2m+1)^3\cdot\frac{1}{\zeta}}\sin\frac{(2m+1)\pi}{\alpha}x.$$

Die Nochverweilzeit ist bei diesem Problem von 2 Koordinaten abhängig, P' ist also noch Funktion des Orts auf dem Rande. Es folgt also nach (18')

$$P = \frac{\int P'\,ds}{\int ds} = \frac{\int_0^\beta P_1\,dy + \int_0^\alpha P_2\,dx}{\alpha+\beta}.$$

Es ist

$$\int_0^\beta P_1\,dy = \frac{32\lambda\alpha\beta}{8\alpha^2\pi^4}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2+(2n+1)^2\zeta}\cdot\left(\frac{1}{(2n+1)}\right)^2$$

und

$$\int_0^\alpha P_2\,dx = \frac{32\lambda\alpha\beta}{8\alpha^2\pi^4}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2+(2m+1)^2\cdot\frac{1}{\zeta}}\cdot\left(\frac{1}{(2m+1)}\right)^2.$$

Vertauschen wir in der letzten Gleichung m und n, so ergibt sich

$$\int_0^\alpha P_2\,dx = \frac{32\lambda\alpha\beta}{8\alpha^2\pi^4}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2+(2n+1)^2\cdot\frac{1}{\zeta}}\cdot\left(\frac{1}{(2n+1)}\right)^2.$$

Wir erhalten somit für die mittlere Verweilzeit

(41) $$P = \frac{32\lambda\alpha\beta}{8\alpha^2\pi^4(\alpha+\beta)}\left[F(\zeta)+F\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right],$$

wo

$$F(\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n+1)}\right)^2 \frac{1}{(2m+1)^2 + (2n+1)^2\zeta}$$

und

$$F\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n+1)}\right)^2 \frac{1}{(2m+1)^2 + (2n+1)^2\cdot\frac{1}{\zeta}}$$

ist.

Durch numerische Rechnung fand ich, daß

$$\frac{32}{3\pi^4}\left[F(\zeta) + F\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right]$$

für alle ζ den konstanten Wert 0,1667 hat. Hr. Prof. Szegö machte mich darauf aufmerksam, daß sich das folgendermaßen nachweisen läßt. Vertauscht man in der Gleichung für $F\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ m und n, so erhält man

$$F\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2}\cdot\frac{\zeta}{(2m+1)^2+(2n+1)^2\zeta}.$$

Es ist dann

$$F(\zeta) + F\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2+(2n+1)^2\zeta}\cdot\frac{(2m+1)^2+(2n+1)^2\zeta}{(2m+1)^2(2n+1)^2}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

$$= \left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2}\right)^2 = \frac{\pi^4}{64},$$

was mit meinem induktiv gefundenen Resultat übereinstimmt. Es ergibt sich also aus (41)

$$P = \frac{\lambda\alpha\beta}{6a^2(\alpha+\beta)} = 0{,}1667\cdot\frac{\lambda\alpha\beta}{a^2(\alpha+\beta)}. \tag{41a}$$

§ 8. Der endliche Zylinder

Hat der Zylinder die endliche Höhe h, so ist das Problem außer von r noch von z abhängig, und die Differentialgleichung (7) lautet:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right].$$

Die Grenz- und Anfangsbedingungen sind

(I) $u = 1$ für $t = 0,\ r < \varrho$

(II) $u = 0$ für $r = \varrho$

(III) $u = 0$ für $z = \pm \frac{h}{2}$.

Wir setzen eine partikulare Lösung in der Form

$$u = TRZ$$

an und haben die Gleichung

$$\frac{1}{T}\frac{dT}{dt} = a^2\left[\frac{1}{R}\left(\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}\right] = -a^2\alpha^2.$$

Daraus folgt

$$T = e^{-a^2\alpha^2 t},$$

und aus der Gleichung

$$a^2\left[\frac{1}{R}\left(\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr}\right)\right] = -a^2\alpha^2 - a^2\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = -\frac{p_\nu^2}{\varrho^2}$$

bekommen wir

$$R = J_0\left(\frac{p_\nu}{\varrho} r\right),$$

wo die p_ν wieder die Wurzeln von $J_0(p_\nu) = 0$ sind.

Es ergibt sich ferner

$$Z = \cos\sqrt{\alpha^2 - \frac{p_\nu^2}{\varrho^2}}\, z.$$

Wegen (III) bestimmen sich die α durch die Beziehung

$$Z = \cos\sqrt{\alpha^2 - \frac{p_\nu^2}{\varrho^2}}\,\frac{h}{2} = 0$$

als

$$\alpha^2 = \frac{(2n+1)^2\pi^2}{h^2} + \frac{p_\nu^2}{\varrho^2},$$

so daß die Lösung wird

$$(42)\quad u = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} C_{n\nu}\, e^{-a^2\left[\frac{(2n+1)^2\pi^2}{h^2} + \frac{p_\nu^2}{\varrho^2}\right]t} J_0\left(p_\nu \frac{r}{\varrho}\right)\cos\frac{(2n+1)\pi}{h} z.$$

Die $C_{n\nu}$ bestimmen sich nach (I) durch die Entwicklung

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} C_{n\nu} J_0\left(p_\nu \frac{r}{\varrho}\right)\cos\frac{(2n+1)\pi}{h} z.$$

Wir erhalten

$$C_{n\nu} = \frac{8(-1)^n}{(2n+1)\pi p_\nu J_1(p_\nu)}$$

und haben also endgültig

$$(43)\quad \begin{cases} w = 1 - u = 1 - 8 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-a^2\left[\frac{(2n+1)^2\pi^2}{h^2} + \frac{p_\nu^2}{\varrho^2}\right]t} \\ \quad \cdot J_0\left(p_\nu \frac{r}{\varrho}\right) \cos\frac{(2n+1)\pi}{h} z \frac{(-1)^n}{(2n+1)\pi p_\nu J_1(p_\nu)}. \end{cases}$$

Nach (10) ist

$$W(t) = \int_0^{\varrho} \int_{-h/2}^{+h/2} w \frac{2\pi r\, dr\, dz}{\pi \varrho^2 h}$$

$$= 1 - \frac{32}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{p_\nu^2 (2n+1)^2} e^{-a^2\left[\frac{(2n+1)^2\pi^2}{h^2} + \frac{p_\nu^2}{\varrho^2}\right]t}$$

und nach (11) die mittlere Nochverweilzeit

$$(44)\quad \Theta = \frac{32 h^2 \varrho^2}{a^2 \pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{p_\nu^2 \pi^2 \varrho^2 (2n+1)^4 + p_\nu^4 h^2 (2n+1)^2}.$$

Bringt man h^2 wieder unter die Summenzeichen und läßt es dann unendlich groß werden, so erhält man

$$\Theta = \frac{32 \varrho^2}{a^2 \pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{p_\nu^4 (2n+1)^2} = 0{,}1246 \cdot \frac{\varrho^2}{a^2}$$

in Übereinstimmung mit (29), wie das ja auch sein muß.

Bringt man andererseits in (44) ϱ^2 unter die Summenzeichen und läßt es dann unendlich groß werden, so muß man auf das Problem der Begrenzung durch zwei Ebenen kommen.

Man erhält

$$\Theta = \frac{32 h^2}{a^2 \pi^4} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{p_\nu^2 (2n+1)^4},$$

und da

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

ist, so folgt

$$\Theta = \frac{h^2}{8 a^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{p_\nu^2}.$$

Es handelt sich also um die Auswertung der Summe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{p_\nu^2}$. Dazu verfahren wir folgendermaßen.

Durch numerische Rechnung ergibt sich

$$\sum_{\nu=1}^{11} \frac{1}{p_\nu^2} = 0{,}2411;$$

also bleibt noch der Rest $\sum_{\nu=12}^{\infty} \frac{1}{p_\nu^2}$ abzuschätzen. Dazu gebrauche ich folgende Annäherung für große ν: $p_\nu = \nu\pi - 0{,}7820$. Somit ist

$$\sum_{\nu=12}^{\infty} \frac{1}{p_\nu^2} = \frac{1}{\pi^2} \sum_{\nu=12}^{\infty} \frac{1}{(\nu - a)^2},$$

wenn $a = \frac{0{,}7820}{\pi}$ ist.

Und da ν erstens schon ziemlich groß und zweitens $\Delta\nu = 1$ für zwei aufeinanderfolgende Glieder der Reihe ist, darf man genähert schreiben

$$\sum_{\nu=12}^{\infty} \frac{\Delta\nu}{(\nu - a)^2} = \int_{12}^{\infty} \frac{d\nu}{(\nu - a)^2} = 0{,}007948,$$

so daß

$$\Theta = \frac{32 h^2 \pi^4}{a^2 \pi^4 96} \cdot 0{,}241905 = 0{,}08064 \cdot \frac{h^2}{a^2}$$

wird anstatt des genauen Wertes 0,08333, wie aus (20) folgt.

Wir können diese Reihe auch mit Hilfe der Gammafunktionen abschätzen.

Es ist

$$\int_0^{\infty} e^{-(x+n)y}\, dy = \frac{1}{x+n}$$

und

$$\sum_{n+0}^{\infty} \frac{1}{x+n} = \int_0^{\infty} e^{-xy}\, dy (1 + e^{-y} + e^{-2y} + \cdots) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-xy}}{1-e^{-y}}\, dy.$$

Daraus folgt durch Differentiation nach x

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-xy}}{1-e^{-y}}\, y\, dy.$$

Nun ist die logarithmische Ableitung der Gammafunktion

$$\Psi(x) = \frac{d \lg \Gamma(x)}{d x} = \int_0^\infty \frac{e^{-y} - e^{-xy}}{1 - e^{-y}} d y - C,$$

wo $C = \ln 1{,}781070$ (Eulersche Konstante) ist.

Daraus folgt für die zweite Ableitung

$$\Psi'(x) = \frac{d^2 \lg \Gamma(x)}{d x^2} = \int_0^\infty \frac{e^{-xy}}{1 - e^{-y}} y \, d y.$$

Das ist dasselbe, was wir oben für $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2}$ erhielten.

Somit ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2} = \Psi'(x).$$

Setzen wir $n + 1 = n'$, so ergibt sich

$$\sum_{n'=1}^{\infty} \frac{1}{[n' - (1-x)]^2} = \Psi'(x).$$

Es ist nun

$$\Psi(x+1) = \Psi(x) + \frac{1}{x},$$

$$\Psi'(x+1) = \Psi'(x) - \frac{1}{x^2}.$$

Daraus finden wir

$$\Psi'(x) = \Psi'(x+1) + \frac{1}{x^2}.$$

Für

$$x = 1 - a = 1 - \frac{0{,}7820}{\pi}$$

ergibt sich

$$x = 0{,}7511.$$

Hierfür ist

$$\Psi'(x+1) = 0{,}7634.^{1)}$$

Setzen wir $n' = \nu$, so haben wir

$$\Psi'(x) = \Psi'(x+1) + \frac{1}{x^2} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(\nu - a)^2} = 2{,}5359.$$

---

1) Vgl. Jahnke-Emde, Funktionentafeln S. 31. Leipzig u. Berlin 1923.

Die numerische Berechnung ergibt

$$\sum_{\nu=1}^{11} \frac{1}{(\nu - a)^2} = 2{,}4073\,.$$

Dann bleibt für

$$\sum_{\nu=12}^{\infty} \frac{1}{(\nu - a)^2} = 0{,}1286\,.$$

Es ist also

$$\frac{1}{\pi^2} \sum_{\nu=12}^{\infty} \frac{1}{(\nu - a)^2} = \sum_{\nu=12}^{\infty} \frac{1}{p_\nu^2} = 0{,}013032\,.$$

Wir erhalten also

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{p_\nu^2} = 0{,}254132\,,$$

so daß

$$\Theta = \frac{32 h^2 \pi^4}{a^2 \pi^4 96} \cdot 0{,}254132 = 0{,}08471 \cdot \frac{h^2}{a^2}\,.$$

Mit der vorhergehenden Restabschätzung erhielten wir

$$\Theta = 0{,}08064 \cdot \frac{h^2}{a^2}\,.$$

Wir kommen also mit $\Theta = 0{,}08471 \cdot \frac{h^2}{a^2}$ dem genauen Wert, den wir bei dem Problem der zwei Ebenen errechneten, näher; dort hatten wir nämlich

$$\Theta = 0{,}0833 \cdot \frac{c^2}{a^2}\,.$$

gefunden.

Wir kommen zur numerischen Auswertung von (44).

Wir setzen einerseits

$$\Theta = \frac{h^2}{a^2} \cdot F(\zeta), \tag{45}$$

wo $\zeta = \frac{h^2}{\varrho^2}$ und

$$F(\zeta) = \frac{32}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(p_\nu \pi)^2 (2n+1)^4 + p_\nu^4 (2n+1)^2 \zeta}$$

ist, andrerseits

$$\Theta = \frac{\varrho^2}{a^2} F_1(\zeta_1), \tag{46}$$

wo $\zeta_1 = \frac{\varrho^2}{h^2}$ und

$$F_1(\zeta_1) = \frac{32}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(p_\nu \pi)^2 (2n+1)^4 \zeta_1 + p_\nu^4 (2n+1)^2}$$

ist. Dann besteht natürlich die Beziehung

$$\zeta F(\zeta) = F_1(\zeta_1) = F\left(\frac{1}{\zeta}\right),$$

die einem erlaubt, die Berechnung auf Argumente zu beschränken, die kleiner als 1 sind.

Wir erhalten folgende Tabellen:

ζ	$\Theta \cdot \frac{a^2}{h^2}$
0	0,0830
0,04	0,0730
0,25	0,0591
1	0,0448
4	0,0187
25	0,0042
∞	0

ζ_1	$\Theta \cdot \frac{a^2}{\varrho^2}$
0	0,1214
0,04	0,1021
0,25	0,0767
1	0,0448
4	0,0148
25	0,0029
∞	0

Figg. 4 und 5 stellen den Verlauf der Funktionen $F(\zeta)$ und $F_1(\zeta_1)$ dar.

Die Nochverweilzeit lautet nach (8)

$$(47) \quad \begin{cases} \Gamma(r, z) = \dfrac{8}{\pi a^2} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n J_0\left(p_\nu \dfrac{r}{\varrho}\right)}{\left[\dfrac{(2n+1)^3 \pi^2 p_\nu}{h^2} + \dfrac{(2n+1) p_\nu^3}{\varrho^2}\right] J_1(p_\nu)} \\ \qquad \cdot \cos \dfrac{(2n+1)\pi}{h} z \,. \end{cases}$$

Wir brauchen die Nochverweilzeit einmal in der Nähe $z = \frac{h}{2}$. Da $z = \frac{h}{2} - x$, ist die Nochverweilzeit in der Nähe von $x = 0$ nach (47)

$$\Gamma(z) = \frac{8x}{a^2 h} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{J_0\left(p_\nu \frac{r}{\varrho}\right)}{\left[\frac{(2n+1)^2 \pi^2 p_\nu}{h^2} + \frac{p_\nu^3}{\varrho^2}\right] J_1(p_\nu)} .$$

Dann ist nach (17) und (18)

$$P_1 = \frac{8\lambda}{3 a^2 h} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{J_0\left(p_\nu \frac{r}{\varrho}\right)}{\left[\frac{(2n+1)^2 \pi^2 p_\nu}{h^2} + \frac{p_\nu^3}{\varrho^2}\right] J_1(p_\nu)} .$$

Wir brauchen zweitens die Nochverweilzeit in der Nähe von $r = \varrho$. Wir erhalten, da $r = \varrho - x$, aus (47)

$$\Gamma(r) = \frac{8x}{\pi \varrho a^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\left[\frac{(2n+1)^3 \pi^2}{h^2} + \frac{(2n+1) p_\nu^2}{\varrho^2}\right]} \cos \frac{(2n+1)\pi}{h} z .$$

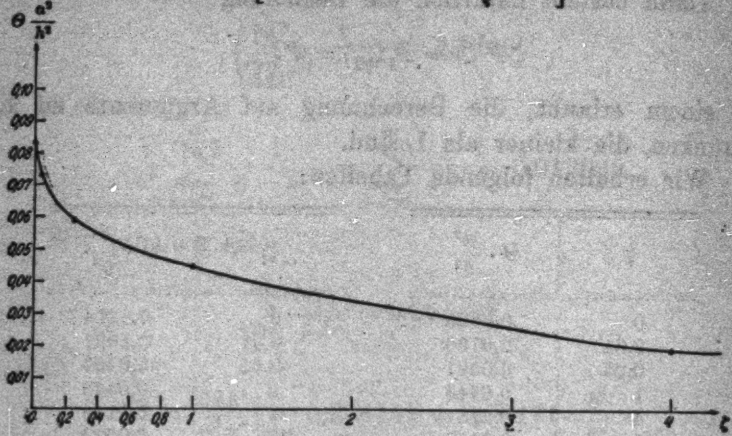


Fig. 4

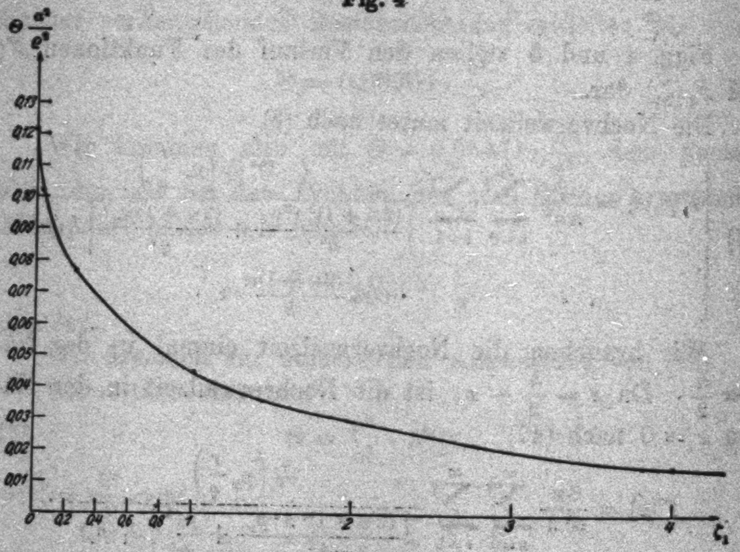


Fig. 5

Nach (17) und (18) ist dann

$$P_3 = \frac{8\lambda}{8\pi \varrho a^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\left[\frac{(2n+1)^3 \pi^2}{h^2} + \frac{(2n+1) p_\nu^2}{\varrho^2}\right]} \cos \frac{(2n+1)\pi}{h} z .$$

Die Nochverweilzeit ist hier von r und z abhängig, P' ist also noch eine Funktion des Orts auf der Oberfläche.

Es wird also nach (18')

$$P = \frac{\int P' d\sigma}{\int d\sigma} = \frac{\int P_1 d\sigma_1 + \int P_2 d\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} = \frac{\int\limits_0^{\varrho} P_1 2\pi r\, dr + \int\limits_{-h/2}^{+h/2} P_2 2\pi\varrho\, dz}{\pi\varrho^2 + 2\pi\varrho h}.$$

Es ist dann

$$\int\limits_0^{\varrho} P_1 2\pi r\, dr = \frac{16\pi\lambda\varrho^2}{3a^2 h}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\left[\frac{(2n+1)^2\pi^2 p_\nu^2}{h^2} + \frac{p_\nu^4}{\varrho^2}\right]}$$

und

$$\int\limits_{-h/2}^{+h/2} P_2 2\pi\varrho\, dz = \frac{32\lambda h}{3a^2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\left[\frac{(2n+1)^4\pi^2}{h^2} + \frac{(2n+1)^2 p_\nu^2}{\varrho^2}\right]}.$$

Setzen wir $\frac{\varrho^2}{h^2} = \zeta$, so erhalten wir für die mittlere Verweilzeit

$$(48)\quad \left\{\begin{aligned} P = \frac{16\lambda\varrho}{(\varrho+2h)3a^2}&\left[\frac{\varrho^2}{h}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2\pi^2 p_\nu^2\zeta + p_\nu^4}\right. \\ &\left. + \frac{2h}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4\pi^2\zeta + (2n+1)^2 p_\nu^2}\right]. \end{aligned}\right.$$

---

§ 9. Die Bestimmung von λ und τ

In den vorhergehenden Paragraphen sind die mittlere Nochverweil- und Verweilzeit bei verschiedenen Begrenzungen des Raums bestimmt worden. Mit Hilfe der ersteren können wir λ^2/τ und damit den Radius r des Teilchens bestimmen.

Es beträgt z. B. die mittlere Nochverweilzeit bei dem Problem der Begrenzung durch zwei Ebenen

$$\Theta = \frac{c^2}{12a^2} = \frac{c^2\tau}{2\lambda^2}.$$

Daraus bestimmt sich

$$(49)\qquad \frac{\lambda^2}{\tau} = \frac{c^2}{2\Theta}.$$

Andererseits gilt nach Einstein[1])

$$\frac{\lambda^2}{\tau} = \frac{kT}{\pi\zeta r}, \tag{50}$$

wo T die absolute Temperatur, ζ den Reibungskoeffizienten bedeutet.

Aus (49) und (50) ergibt sich dann für

$$r = \frac{2kT}{\pi\zeta c^2}\Theta. \tag{51}$$

Bei derselben Begrenzung durch zwei parallele Ebenen fanden wir für die mittlere Verweilzeit

$$P = \frac{\lambda c}{6a^2} = \frac{c\tau}{\lambda}.$$

Leider ist es nicht möglich, diese Verweilzeit zu beobachten; denn, wie wir bei der folgenden Abschätzung der Größenordnung von λ sehen werden, ist der Elementarschritt λ kleiner als der Radius des Teilchens. Im anderen Falle könnten wir daraus λ/τ bestimmen.

Da außerdem nach dem Gleichverteilungsgesetz

$$\frac{\lambda^2}{\tau^2} = \frac{3kT}{M} \tag{52}$$

gilt, wären wir dann imstande, mit Hilfe der Verweilzeit die Masse des Teilchens und mittels der Nochverweil- und Verweilzeit λ und τ einzeln zu ermitteln.

Kennen wir umgekehrt die Masse, so können wir λ und τ einzeln berechnen. Das wollen wir in einem speziellen Falle tun. Goldkügelchen vom Radius $r = 3 \cdot 10^{-7}$ cm befinden sich in Wasser von 18°. Der Reibungskoeffizient ist

$$\zeta = 1055 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{cm^{-1}\ g\ sec^{-1}},$$

die Dichte des Goldes $d = 19{,}3\ \mathrm{cm^{-3}\ g}$ und die Boltzmannsche Konstante $k = 1{,}37 \cdot 10^{-16}\ \mathrm{cm^2\ g\ sec^{-2}\ grad^{-1}}$.

Unter Benutzung von (50) und (52) ergibt sich

$$\lambda = \frac{2}{3\zeta}\sqrt{\frac{kTdr}{\pi}} = 0{,}171 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{cm}, \tag{53}$$

$$\tau = \frac{4dr^2}{9\zeta} = 0{,}72 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{sec}. \tag{54}$$

---

1) Es heißt eigentlich bei Einstein $\frac{\lambda^2}{\tau} = \frac{kT}{3\pi\zeta r}$; aber da sein λ unser λ_x ist, muß es hier wie oben lauten.

§ 10. Nachtrag

Wir wollen nun hier noch etwas näher auf den Unterschied zwischen Buchwalds sogenannter durchschnittlicher Austrittserwartungszeit[1]) und meiner Verweilzeit eingehen, die, wie gesagt, gleich definiert sind. Er berechnet nämlich in Wirklichkeit, und zwar bewußt, nicht die Verweilzeit, sondern (im Falle der Kugel) die Nochverweilzeit für eine etwas kleinere Kugel des Radius $a-\delta$, wobei die Größe von δ physiologisch bedingt sein wird. Die von ihm berechnete Größe entspricht wohl, wie auch die von ihm angestellten Experimente zeigen, den Verhältnissen der tatsächlichen Beobachtbarkeit, während die von mir ermittelte, der strengen Definition entsprechende Verweilzeit wohl kaum praktisch zu ermitteln sein wird. Das liegt an zweierlei. Einmal ist es schwer zu entscheiden, wann das als Beugungsfigur erscheinende Teilchen auf dem Rand des Gebietes liegt, zweitens sind die Elementarschritte λ kleiner als die Teilchendurchmesser [vgl. (59)], so daß die beobachtete Zickzacklinie gar nicht der eigentlichen Bewegung mit allen ihren Einzelheiten gleichgesetzt werden darf, worauf schon Smoluchowski hinwies.

Ähnlich liegt es bei den Rotationsbewegungen. Wie Gans[2]) gezeigt hat, springt die Intensität beleuchteter linearer Teilchen, die nicht unendlich lang gegen die Wellenlänge sind, gar nicht plötzlich von Null auf einen endlichen Wert oder umgekehrt, so daß auch hier die beobachtete Verweilzeit von physiologischen Einflüssen abhängen muß.

Wie schon erwähnt, hat auch Smoluchowski[3]) die Verweilzeit berechnet, und zwar nach zwei verschiedenen Methoden. Erstens ist sie nach ihm gleich der mittleren Stoßzeit der im Gebiet befindlichen Teilchen, wenn die Grenze des Gebiets für diese Überlegungen durch eine starre Wand ersetzt wird. Zweitens berechnet er die Verweilzeit direkt durch die Mittelwerte der im Innern des Gebiets vom Eintritt bis zum Austritt zurückgelegten Strecken, und zwar unter der Annahme, daß die „mittlere Weglänge" λ groß gegen die Lineardimension a des Gebiets ist. Er glaubt

1) E. Buchwald, Ann. d. Phys. (4) 66. S. 16, 17. 1921.
2) R. Gans, Ann. d. Phys. (4) 78. S. 17—20. 1925.
3) M. v. Smoluchowski, Wiener Sitzungsberichte 124. S. 362. 1915.

aber, daß das Resultat von dem Verhältnis λ/a unabhängig sein muß, und wendet es deshalb auf den ihn interessierenden Fall $\lambda \ll a$ an. Beide Methoden führen zu demselben Ergebnis. Smoluchowskis Resultat ist nicht ohne weiteres mit meinem vergleichbar, da er Maxwellsche Verteilung der Geschwindigkeiten annimmt, ich aber der Einfachheit halber Gleichheit ihrer absoluten Größe für alle Teilchen vorausgesetzt habe.

Jedoch läßt sich natürlich die Smoluchowskische Methode leicht unter meiner Annahme durchführen, und da zeigt sich, daß sich dann bei ihm doppelt so große Werte der Verweilzeit ergeben als bei mir, d. h. also, daß die Verweilzeit doppelt so groß ist, wenn $\lambda \gg a$, als wenn $\lambda \ll a$ ist. Der Grund des Widerspruchs ist, daß die Verweilzeit tatsächlich nicht von λ/a unabhängig ist. Man muß also bei Betrachtungen über Brownsche Molekularbewegung, bei der es sich um Gebiete handelt, die groß gegen den Elementarschritt λ sind, auf meine Formeln zurückgreifen.

Zweites Kapitel
Die Rotationsbewegung

§ 11. Die Differentialgleichung für die Rotationsbewegung

Nachdem wir die Translationsbewegung der Teilchen behandelt haben, wollen wir uns der Rotationsbewegung zuwenden; denn auf die Weise werden wir die Erscheinung des Funkelns ultramikroskopisch kleiner, nicht kugelförmiger Teilchen unter Hinzuziehung des Siedentopfschen Azimuteffekts erklären können.[1])

Das mehr oder weniger lineare Teilchen rotiere unter dem Einfluß der Stöße der Molekeln der Flüssigkeit. λ sei jetzt der Elementarwinkel, den es in der Elementarzeit τ zurücklege. Zunächst wollen wir die Differentialgleichung, die wir zur Berechnung der Funkelzeit brauchen, aufstellen.

Wir bestimmen die augenblickliche Orientierung des Teilchens durch den Ort, den der Durchstoßpunkt seiner Achse auf der Einheitskugel hat und fragen uns nach der Wahrscheinlichkeit, daß dieser Punkt, der zur Zeit $t = 0$ in O liege, und die Koordinaten ϑ und φ habe, zwischen $t = 0$

1) J. Traube und P. Klein, Phys. Ztschr. 23. S. 171. 1922.

und $t = t$ eine den Punkt O umgebende Kurve auf der Einheitskugel, den Rand des von uns betrachteten Gebiets, erreiche. Diese Wahrscheinlichkeit nennen wir $w(t)$. Dann liegt der Durchstoßpunkt P zur Zeit τ auf einem Kreise um O mit dem Radius λ und hat die Koordinaten ϑ' und φ'; die betrachtete Wahrscheinlichkeit ist $\bar{w}(t-\tau)$, wo $\bar{w}$ die betrachtete Wahrscheinlichkeit auf dem Kreise vom Radius λ ist, und es gilt auf Grund der Gesetze über Zusammensetzung von Wahrscheinlichkeiten

$$w(t) = \int \bar{w}(t-\tau)\frac{d\alpha}{2\pi}$$

oder, was dasselbe ist,

$$(55) \qquad w(t+\tau) = \int \bar{w}(t)\frac{d\alpha}{2\pi},$$

wo $d\alpha$ der zum Bogenelement ds des Kreises gehörige Zentriwinkel ist.

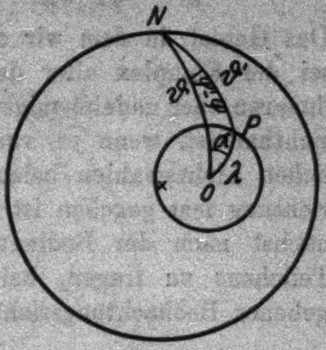


Fig. 6

Es bestehen nun folgende Beziehungen (vgl. Fig. 6):

$$\cos\vartheta' = \cos\vartheta\cos\lambda + \sin\vartheta\sin\lambda\cos\alpha$$

und

$$\sin(\varphi'-\varphi) = \frac{\sin\lambda\sin\alpha}{\sin\vartheta'}.$$

Daraus ergibt sich, wenn wir bis auf Glieder zweiten Grades in λ entwickeln,

$$\cos\vartheta' = \cos\vartheta + \sin\vartheta\cos\alpha\cdot\lambda - \frac{\lambda^2}{2}\cos\vartheta,$$

$$\varphi' = \varphi + \frac{\sin\alpha}{\sin\vartheta}\lambda + \frac{\sin\alpha\cos\alpha\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}\lambda^2.$$

Der Wert von w auf einem Punkte des Kreises mit dem Radius λ um 0 als Mittelpunkt ist, wenn wir $\cos\vartheta = x$ setzen und nach Taylor entwickeln

$$w(x,\varphi) + \frac{\partial w}{\partial x}\left[\sin\vartheta\cos\alpha\cdot\lambda - \frac{\lambda^2}{2}\cos\vartheta\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\sin^2\vartheta\cos^2\alpha\cdot\lambda^2$$
$$+ \frac{\partial w}{\partial\varphi}\left[\frac{\sin\alpha}{\sin\vartheta}\cdot\lambda + \frac{\sin\alpha\cos\alpha\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}\lambda^2\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\vartheta}\lambda^2.$$

Mitteln wir über α, so erhalten wir

$$w(x,\varphi) - \frac{\lambda^2}{2}x\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\lambda^2}{4}(1-x^2)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\lambda^2}{4}\frac{1}{1-x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2},$$

und da dies nach (55)

$$\text{gleich } w + \frac{\partial w}{\partial t}\tau$$

ist, so ergibt sich

$$\frac{\partial w}{\partial t}\tau = \frac{\lambda^2}{4}\left[(1-x^2)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2x\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{1-x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right]$$

oder

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\lambda^2}{4\tau}\left[\frac{\partial}{\partial x}(1-x^2)\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{1-x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right]. \tag{56}$$

Das Gebiet, in dem wir ein Integral dieser Gleichung suchen, sei der Komplex aller derjenigen Richtungen der Achse des linearen oder nadelförmigen Teilchens, unter denen das Teilchen sichtbar ist, wenn es von den in einem Kreiskegel befindlichen Lichtstrahlen beleuchtet wird und die Beobachtungsrichtung fest gegeben ist. Zu dem Zweck haben wir uns zunächst nach der Bedingung der Sichtbarkeit eines linearen Teilchens zu fragen, bei gegebener Beleuchtungs- und gegebener Beobachtungsrichtung.

§ 12. Der Siedentopfsche Azimuteffekt[1])

Zu dem Zweck muß die Beugung einer ebenen Welle an einer Nadel behandelt werden.

AC sei das nadelförmige Teilchen (vgl. Fig. 7). Es werde von einem Bündel paralleler Lichtstrahlen beleuchtet, die mit der Teilchenachse den Winkel α bilden. In Punkt *A* kommt das Licht zuerst an, und der getroffene Punkt der Nadel sendet eine Kugelwelle in den Raum, die zu einem bestimmten Zeitmoment den Radius a hat. In Punkt *B* kommt das Licht um so viel später an, als es Zeit gebraucht, um die Strecke *EB* zu durcheilen. In dem Augenblick, wo das von *A* abgebeugte Licht eine Kugel vom Radius a erreicht hat, hat der Punkt *C* erst eine Kugelwelle mit dem Radius $a - \overline{BE}$ erzeugt. Ist *A* der Ursprung eines Koordinatensystems, dessen z-Achse mit der Achse *AC* des Teilchens zusammenfällt, und sei p der Abstand irgendeines Punktes *B* der Nadel von ihrem Endpunkte *A*, so lautet die Gleichung für die Schar der Kugelwellen

$$x^2 + y^2 + (z-p)^2 = (a - p\cos\alpha)^2. \tag{57}$$

1) H. Siedentopf, Ultramikroskopische Abbildung linearer Objekte, Ztschr. f. wissensch. Mikroskopie 29. S. 10. Leipzig 1912.

Um die einhüllende Fläche dieser Schar zu erhalten, müssen wir (57) nach p differenzieren und mittels der so erhaltenen Gleichung p aus (57) eliminieren.

Die Differentiation ergibt

$$p = \frac{z - a \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}$$

und die Elimination

(58) $$x^2 + y^2 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}(a - z \cos \alpha)^2.$$

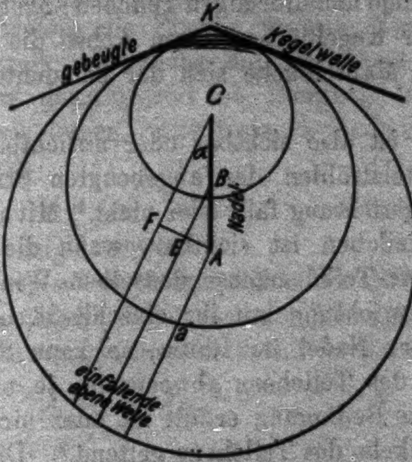


Fig. 7

Diese Gleichung der einhüllenden Fläche wollen wir transformieren durch Parallelverschiebung des Koordinatensystems nach einem Punkte K (vgl. Fig. 8) auf der Verlängerung der Nadel und setzen $AK = p_0$. K sei so gewählt, daß die einfallende Welle gerade in K ankommt, wenn sich um A bereits eine Kugelwelle vom Radius a gebildet hat.

Es ist also

$$p_0 \cos \alpha = a.$$

Wir haben also zu setzen

$$x' = x,$$
$$y' = y,$$
$$z' = z - \frac{a}{\cos \alpha}.$$

und erhalten

(59) $$x'^2 + y'^2 = \operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot z'^2.$$

Durch Abbeugung an einer Nadel entsteht also eine Kegelwelle. Die Achse des Kegels ist die Nadelachse, und sein Öffnungswinkel ist $\frac{\pi}{2} - \alpha$.

Der Normalenkegel auf diesem Kegel ist also der Komplex der abgebeugten Strahlen. Da dieselben alle denselben Winkel α mit der Nadelachse bilden, den der Primärstrahl mit ihr einschließt, so erhalten wir den von Siedentopf (a. a. O.) gefundenen Satz:

Die von einem nadelförmigen Teilchen abgebeugten Strahlen liegen auf einer Kegelfläche, deren Achse die Nadelachse ist, und auf deren Mantelfläche sich der beleuchtende Strahl befindet.

Die Nadel ist also sichtbar oder unsichtbar, je nachdem einer der Mantelstrahlen des abgebeugten Strahlenkegels in die Beobachtungsrichtung fällt oder nicht.[1]) Mit anderen Worten: Ein lineares Teilchen ist sichtbar, wenn die Beobachtungsrichtung mit der Teilchenachse denselben Winkel bildet, den die Beleuchtungsrichtung mit ihr einschließt. Ändert sich die Orientierung der Nadel im Raum, so kann Sichtbarkeit mit Unsichtbarkeit des Teilchens abwechseln, je nachdem die soeben formulierte Bedingung erfüllt ist oder nicht. Das macht sich durch Funkeln des Teilchens geltend.[2]) Die Siedentopfsche Sichtbarkeitsbedingung gilt in der oben gegebenen Form aber nur, wenn das Teilchen unendlich lang gegen die Wellenlänge ist. Nur dann wird das Teilchen ganz plötzlich unsichtbar, wenn die Nadelrichtung auch noch so wenig von derjenigen Richtung abweicht, die die Sichtbarkeitsbedingung in der obigen Form verlangt.

Ist die Länge des Teilchens nicht unendlich lang gegenüber der Wellenlänge, so nimmt die Intensität des in die Beobachtungsrichtung abgebeugten Lichts stetig auf Null ab, wie Gans[3]) durch eine genauere Analyse des Beugungsvorgangs gezeigt hat.

Wir wollen in folgendem aber stets an der einfachen Siedentopfschen Sichtbarkeitsbedingung festhalten.

1) H. Siedentopf, Ztschr. f. wissensch. Mikrosk. 29. S. 19. Leipzig 1912.

2) Vgl. wieder H. Siedentopf, S. 87.

3) R. Gans, Ann. d. Phys. (4) 78. S. 17—20. 1925.

Bei festgehaltener Beleuchtungs- und Beobachtungsrichtung muß die Nadel, um sichtbar zu sein, also in der Ebene liegen, welche mit diesen beiden Richtungen gleiche Winkel einschließt.

Nun wollen wir aber annehmen, daß nicht nur *ein* beleuchtender Strahl existiere, sondern ein ganzes Bündel beleuchtender Strahlen, das einen Kreiskegel vom Öffnungswinkel α erfülle. Dann findet man die Sichtbarkeitsbedingung für das Teilchen folgendermaßen.

Man konstruiere die Ebenen für alle Mantelstrahlen des Beleuchtungskegels und suche die Enveloppe dieser Ebenen. Die Nadel darf dann irgend ine Richtung innerhalb dieses Enveloppenkegels haben. Die feste Beobachtungsrichtung sei durch den Punkt

(60) $$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 1$$

auf der Einheitskugel gegeben.

Die Richtung eines Mantelstrahls des Beleuchtungskegels sei x_1, y_1, z_1, während die Achse des Beleuchtungskegels, die auf der Beobachtungsrichtung senkrecht stehe, die Koordinaten

(61) $$x_{10} = 1, \quad y_{10} = 0, \quad z_{10} = 0$$

habe.

Dann ist

$$x_1 x_{10} + y_1 y_{10} + z_1 z_{10} = \cos\alpha$$

oder wegen (61)

$$x_1 = \cos\alpha .$$

Wir dürfen also setzen

(62) $$\begin{cases} x_1 = \cos\alpha , \\ y_1 = \sin\alpha\cos\beta , \\ z_1 = \sin\alpha\sin\beta . \end{cases}$$

Nennen wir die Achsenrichtung der Nadel x_2, y_2, z_2, so ist die Bedingung für die Sichtbarkeit

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = x x_2 + y y_2 + z z_2 ,$$

oder wegen (60)

(63) $$x_1 x_2 + y_1 y_2 + (z_1 - 1) z_2 = 0 .$$

Setzen wir die Werte (62) für x_1, y_1, z_1 ein, so erhalten wir

(64) $$x_2 \cos\alpha + y_2 \sin\alpha\cos\beta + z_2(\sin\alpha\sin\beta - 1) = 0 .$$

Um die Einhüllende zu erhalten, müssen wir nach β differenzieren und dann β eliminieren. Es ergibt sich

$$-y_2 \sin\alpha \sin\beta + z_2 \sin\alpha \cos\beta = 0,$$

oder

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{z_2}{y_2},$$

und führen wir diesen Wert in (64) ein, so erhalten wir für den Enveloppenkegel

$$y_2^2 \sin^2\alpha = (z_2^2 + x_2^2)\cos^2\alpha - 2x_2 z_2 \cos\alpha. \tag{65}$$

Dagegen ist die Sichtbarkeitsbedingung für den Achsenstrahl des Beleuchtungskegels ($\alpha = 0$)

$$z_2 - x_2 = 0,$$

d. h. die Nadel muß dann in der Ebene liegen, die den Achsenstrahl des Beleuchtungskegels und die Beobachtungsrichtung halbiert. Das veranlaßt uns, das Koordinatenkreuz $x_2 y_2 z_2$ durch die Transformation

$$x_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}(z_2 + x_2),$$
$$y_2' = y_2,$$
$$z_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}(z_2 - x_2)$$

um 45° um die y_2-Achse zu drehen, und wir erhalten so aus (65)

$$y_2'^2 \sin^2\alpha = (x_2'^2 + z_2'^2)\cos^2\alpha - (x_2'^2 - z_2'^2)\cos\alpha.$$

Ist speziell α sehr klein und lassen wir an den x_2', y_2', z_2', da jetzt keine Mißverständnisse mehr vorkommen können, die Akzente sowie die Indizes fort, so ergibt sich

$$z^2 = \frac{\alpha^2}{4}(x^2 + 2y^2). \tag{66}$$

Setzen wir

$$x = \cos\eta \cos\varphi,$$
$$y = \cos\eta \sin\varphi,$$
$$z = \sin\eta,$$

dann wird aus (66), da η sehr klein ist,

$$\frac{\eta^2}{\alpha^2} = \frac{1}{4}(\cos^2\varphi + 2\sin^2\varphi). \tag{67}$$

Das Gebiet, in dem die Nadel sichtbar ist, ist also ein schmaler Gürtel zu beiden Seiten des Äquators, dessen Ränder wellenförmig verlaufen, wie Fig. 8 es darstellt. Vorausgesetzt ist hier, daß das Teilchen durch ein kreiskegelförmiges Strahlenbündel beleuchtet wird. Das ist z. B. der Fall, wenn man es

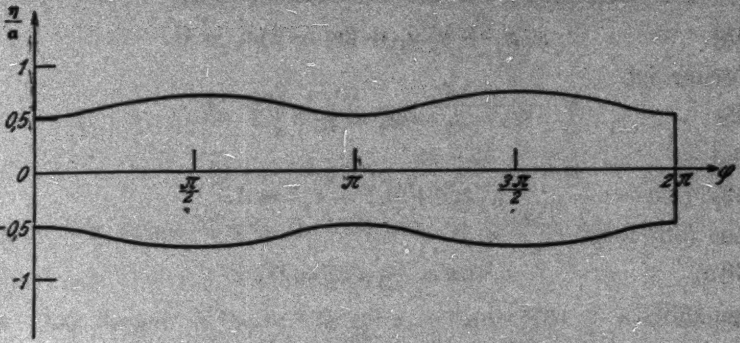


Fig. 8

mit Sonnenlicht beleuchtet, da die Sonne ein solches Strahlenbündel zur Erde sendet.

§ 13. Die Bestimmung der Form eines Beleuchtungskegels, der die Integration der Differentialgleichung vereinfacht

Es dürfte recht schwierig sein, die Differentialgleichung (56) in dem durch Fig. 8 dargestellten Gebiet auf der Kugel zu integrieren, derart, daß am Rande dieses Gebietes die Funktion w verschwindet.[1])

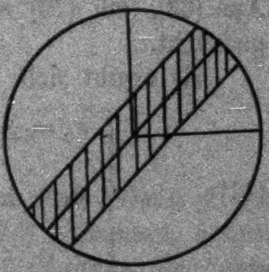


Fig. 9

Deshalb wollen wir jetzt die Frage stellen, wie der Beleuchtungskegel begrenzt sein muß, damit das Sichtbarkeitsgebiet ein Streifen um den Äquator herum wird, der durch die beiden Parallelkreise $\vartheta = \vartheta_0$ und $\pi - \vartheta_0$ begrenzt ist.

1) Die Winkel ϑ in § 11 und η in (67) stehen in der Beziehung $\vartheta = \frac{\pi}{2} - \eta$.

Die Beobachtungsrichtung bleibt fest. Wir lassen die Achsenrichtung den Rand des Gebietes, d. h. die Kreise $\frac{1}{\sqrt{2}}(z_2 - x_2) = \pm b$ durchlaufen, wo $b = \cos\vartheta_0$ ist. Der in Frage kommende Streifen ist in Fig. 9 dargestellt.

Die Bedingung für die Sichtbarkeit war

(63) $$x_1 x_2 + y_1 y_2 + (z_1 - 1) z_2 = 0\,.$$

Ferner ist

(68) $$z_2 - x_2 = \pm b\sqrt{2}$$

und

(69) $$x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = 1.$$

Aus (68) folgt

(68a) $$d x_2 - d z_2 = 0\,,$$

aus (63)

(63a) $$x_1\, d x_2 + y_1\, d y_2 + (z_1 - 1)\, d z_2 = 0\,,$$

aus (69)

(69a) $$x_2\, d x_2 + y_2\, d y_2 + z_2\, d z_2 = 0\,.$$

Aus (68a), (63a), (69a) ergibt sich demnach

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ x_1 & y_1 & z_1 - 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0$$

oder

(70) $$y_1 z_2 - y_2 (z_1 - 1) = x_1 y_2 - x_2 y_1\,.$$

Aus (63), (68), (70) werden jetzt x_2, y_2, z_2 durch x_1, y_1, z_1 ausgedrückt.

Es ergibt sich

(71) $$\begin{cases} x_2 = \pm b\sqrt{2}\,\dfrac{y_1^2 + (z_1 - 1)(x_1 + z_1 - 1)}{2y_1^2 + (x_1 + z_1 - 1)^2} \\[2ex] y_2 = \pm b\sqrt{2}\,\dfrac{(z_1 - x_1 - 1)\,y_1}{2y_1^2 + (x_1 + z_1 - 1)^2} \\[2ex] z_2 = \mp b\sqrt{2}\,\dfrac{y_1^2 + x_1 (x_1 + z_1 - 1)}{2y_1^2 + (x_1 + z_1 - 1)^2}\,. \end{cases}$$

Setzen wir diese Werte in (69) ein, so erhalten wir für die Mantelfläche des Beleuchtungskegels

(72) $$\begin{cases} [2y_1^2 + (x_1 + z_1 - 1)^2]^2 = 2b^2\{[y_1^2 + (z_1 - 1)(x_1 + z_1 - 1)]^2 \\ \qquad + [(z_1 - x_1 - 1)y_1]^2 + [y_1^2 + x_1(x_1 + z_1 - 1)]^2\}. \end{cases}$$

Nehmen wir b sehr klein an, so daß

(73) $$\begin{cases} x_1 = 1 - \xi, \\ y_1 = \eta, \\ z_1 = \zeta \end{cases}$$

mit sehr kleinen ξ, η, ζ, so folgt aus (71)

$$x_2 = \mp b\sqrt{2}\,\frac{(\zeta - \xi)}{2\eta^2 + (\zeta - \xi)^2}$$

$$y_2 = \mp b\sqrt{2}\,\frac{2\eta}{2\eta^2 + (\zeta - \xi)^2}$$

$$z_2 = \mp b\sqrt{2}\,\frac{(\zeta - \xi)}{2\eta^2 + (\zeta - \xi)^2}\,.$$

Setzen wir diese Werte in (69) ein, so finden wir

(74) $$2\eta^2 + (\zeta - \xi)^2 = 4b^2.$$

Da aber wegen $x_1{}^2 + y_1{}^2 + z_1{}^2 = 1$ und (73) ξ von höherer Ordnung unendlich klein ist, so wird aus (74)

(75) $$\eta^2 + \frac{\zeta^2}{2} = 2b^2.$$

Setzen wir

$$x_1 = \cos\alpha,$$
$$y_1 = \sin\alpha\cos\beta,$$
$$z_1 = \sin\alpha\sin\beta,$$

also

$$\xi = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha^2}{2},$$
$$\eta = \alpha\cos\beta,$$
$$\zeta = \alpha\sin\beta,$$

so wird aus (75)

(76) $$\alpha^2\left(\cos^2\beta + \frac{\sin^2\beta}{2}\right) = 2b^2.$$

Einen solchen Strahlenkegel, der für das Azimut β den Öffnungswinkel α hat, wo α sich aus (76) berechnet, könnte man z. B. folgendermaßen realisieren. Man bilde die Sonne durch ein Objektiv O_1 in dessen Brennebene F ab und blende von ihr in dieser Ebene durch eine geeignete Blende einen Teil ab. Dann setze man das Objektiv O_2 in den Abstand seiner Brennweite f von der Ebene F. Es handelt sich also

darum, die Blende zu berechnen. Nennen wir ihren radius vector ϱ, so ist

$$\frac{\varrho}{f} = \operatorname{tg} \alpha = \alpha,$$

also

$$\varrho = f \alpha.$$

Somit ergibt sich aus (76)

$$\varrho^2 \left(\cos^2 \beta + \frac{\sin^2 \beta}{2}\right) = 2 f^2 b^2. \tag{77}$$

§ 14. Die Integration der Differentialgleichung

Die zu integrierende Gleichung lautet [vgl. (56)]

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\lambda^2}{4 \tau} \left(\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \frac{\partial w}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right).$$

Die Grenz- und Anfangsbedingungen sind

$$w = 0 \quad \text{für} \quad t = 0,$$
$$w = 1 \quad \text{für} \quad \cos \vartheta = x = \pm b.$$

Da das Problem von φ unabhängig ist, vereinfacht sich die Differentialgleichung folgendermaßen

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{a^2}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \frac{\partial w}{\partial \vartheta}, \tag{78}$$

wo $a^2 = \frac{\lambda^2}{4 \tau}$ ist.

Wir machen die Substitution $w = 1 - u$ und haben dann folgende Nebenbedingungen

$$u = 1 \quad \text{für} \quad t = 0,$$
$$u = 0 \quad \text{für} \quad \cos \vartheta = x = \pm b.$$

Setzen wir in (78) $\cos \vartheta = x$, so ergibt sich, nachdem wir noch die oben erwähnte Substitution ausgeführt haben

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial}{\partial x} (1 - x^2) \frac{\partial u}{\partial x}. \tag{79}$$

Die Lösung kann in der Form angesetzt werden

$$u_n = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-a^2 k^2 t} X_n, \tag{80}$$

wo die X_n der Gleichung

(81) $$\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{dX_n}{dx} + k^2 X_n = 0$$

zu genügen haben.

Das ist die Differentialgleichung der Kugelfunktionen, da für kleine b — und auf diesen Fall wollen wir uns beschränken — zwei Knoten der Funktionen X_n sehr nahe beieinander liegen ($x = +b$ und $x = -b$), so kommen nur Kugelfunktionen sehr hoher Ordnungszahl in Frage, und zwar eine lineare Kombination der Kugelfunktionen erster und zweiter Art P_n bzw. Q_n.

Für diese Funktionen lauten die Näherungen für große n[1])

$$P_n(x) = \sqrt{\frac{2}{n\pi \sin\vartheta}}\left[\left(1-\frac{1}{4n}\right)\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{8n}\operatorname{cotg}\vartheta \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta - \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$Q_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2n\sin\vartheta}}\left[\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{4n}\sin\frac{\pi}{4}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta + \frac{1}{8n}\operatorname{cotg}\vartheta\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta + \frac{\pi}{4}\right)\right].$$

In der Kombination $X_n = A P_n(x) + B Q_n(x)$ wäre demnach die Ordnungszahl n sowie das Verhältnis B/A derart zu bestimmen, daß $X_n(b) = 0$ und $X_n(-b) = 0$.

Wir ziehen jedoch eine andere Integrationsmethode vor und schreiben (82) folgendermaßen:

(82) $$\frac{d^2 X_n}{dx^2} + k^2 X_n = \frac{d}{dx}\left(x^2 \frac{dX_n}{dx}\right).$$

In erster Annäherung[2]) setzen wir die rechte Seite $= 0$, also

$$\frac{d^2 X_n}{dx^2} + k^2 X_n = 0$$

und erhalten, da die Funktion wegen der Randbedingungen gerade sein muß,

$$X_n = \cos kx.$$

---

1) E. Heine, Theorie der Kugelfunktionen, Berlin 1878, S. 178, 182.

2) Diese Annäherung kommt auf Vernachlässigung der Krümmung des Streifens heraus.

Setzen wir diesen Wert in die rechte Seite von (82) ein, und schreiben wir

$$k x = \xi ,$$

so wird

$$\frac{d^2 X_n}{d \xi^2} + X_n = - \frac{1}{k^2} (2 \xi \sin \xi + \xi^2 \cos \xi).$$

Wir setzen X_n in der Form an

$$X_n = \cos \xi + \frac{1}{k^2} (A \xi \sin \xi + B \xi^2 \cos \xi + C \xi^3 \sin \xi)$$

und bestimmen A, B und C so, daß der Differentialgleichung genügt wird.

So erhalten wir

$$X_n = \cos \xi - \frac{1}{k^2} \left(\frac{1}{4} \xi \sin \xi - \frac{1}{4} \xi^2 \cos \xi + \frac{1}{6} \xi^3 \sin \xi \right).$$

Wegen der Randbedingung ist in erster Annäherung

$$k = \bar{k} = \frac{(2n+1)\pi}{2b}.$$

Daraus folgt, wenn wir für den Augenblick

$$X_n = \cos k x + f(k x)$$

schreiben und

$$k = \bar{k} + \Delta k$$

setzen,

$$\Delta k = \frac{f(\bar{k} b)}{b \sin \bar{k} b}.$$

Da nun

$$f(\bar{k} b) = - \frac{1}{\bar{k}^2} \left(\frac{1}{4} \bar{k} b \sin \bar{k} b + \bar{k}^3 b^3 \sin \bar{k} b) \right)$$

ist, ergibt sich für

$$\Delta k = - \left(\frac{1}{4 \bar{k}} + \frac{\bar{k} b^2}{6} \right),$$

d. h.

$$k = k + \Delta k = \frac{(2n+1)\pi}{2b} (1 - \beta b^2),$$

wo

$$\beta = \frac{1}{6} + \frac{1}{(2n+1)^2 \pi^2}$$

gesetzt ist.

Die Koeffizienten A_n der Gleichung (91) bestimmen sich aus

$$1 = \sum_n^\infty A_n X_n .$$

Da die Funktionen X_n als Lösungen der Differentialgleichung der Kugelfunktionen bekanntlich orthogonal sind, so erhalten wir

$$A_n = \frac{\int\limits_{-b}^{+b} X_n\,dx}{\int\limits_{-b}^{+b} X_n^2\,dx}.$$

Setzen wir $k_n x = \xi$ und $k_n b = a_n$, so ergibt sich

$$A_n = \frac{\int\limits_{0}^{a_n} X_n\,d\xi}{\int\limits_{0}^{a_n} X_n^2\,d\xi}.$$

Mit Vernachlässigung von b^4 wird

$$A_n = \frac{(-1)^n\,4}{(2n+1)\pi}(1 - \alpha b^2),$$

wo $\alpha = \frac{1}{4} - \frac{2}{(2n+1)^2\pi^2}$ ist.

Wir erhalten als endgültige Lösung

$$(83)\quad \left\{\begin{aligned} w &= 1 - u \\ &= 1 - 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\pi}(1-\alpha b^2)\,e^{-a^2\left[\frac{(2n+1)\pi}{2b}(1-\beta b^2)\right]^2 t}\,X_n. \end{aligned}\right.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß irgendein Teilchen innerhalb der Zeit t an den Rand kommt, ist [vgl. (10)]

$$(84)\quad \left\{\begin{aligned} W(t) &= \int\limits_{-b}^{+b} w\,\frac{dx}{2b} \\ &= 1 - 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\pi}(1 - \alpha b^2)\,e^{-a^2\left[\frac{(2n+1)\pi}{2b}(1-\beta b^2)\right]^2 t} \\ &\quad\cdot \frac{1}{a_n}\int\limits_{0}^{a_n} X_n\,d\xi \\ &= 1 - 8\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2\pi^2}\,e^{-a^2\left[\frac{(2n+1)\pi}{2b}(1-\beta b^2)\right]^2 t}(1-\gamma b^2), \end{aligned}\right.$$

wo $\gamma = \frac{1}{8} - \frac{4}{(2n+1)^2\pi^2}$ ist.

Die mittlere Nochfunkelzeit ist [vgl. (11)]

$$\Theta = \frac{32 b^2}{a^2 \pi^4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} \left(1 + \frac{6 b^2}{(2n+1)^2 \pi^2}\right). \tag{85}$$

Benutzen wir die Relationen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

und

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{\pi^6}{960},$$

so erhalten wir schließlich für die Nochfunkelzeit

$$\underline{\Theta = \frac{b^2}{3 a^2}\left(1 + \frac{3 b^2}{5}\right)}. \tag{86}$$

Die Nochfunkelzeit als Funktion der Achsenrichtung des Teilchens, die durch x gegeben ist, ist [vgl. (8)]

$$\Gamma(x) = \frac{16 b^2}{a^2 \pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} (1 + \delta b^2) X_n,$$

wo $\delta = \frac{1}{12} + \frac{4}{(2n+1)^2 \pi^2}$ ist.

Zur Berechnung der mittleren Funkelzeit brauchen wir im nächsten Paragraphen die Nochfunkelzeit nur in der Nähe von $x = b$; darum setzen wir in X_n $x = b - \zeta$ und erhalten

$$\Gamma(x) = \frac{b \zeta}{a^2} (1 + b^2). \tag{87}$$

§ 15. Die mittlere Funkelzeit

Jetzt soll die mittlere Funkelzeit bestimmt werden, ähnlich wie bei der Translationsbewegung. Da es sich bei diesen Betrachtungen nur um einen sehr schmalen Streifen zu beiden Seiten der Randlinie handelt, so dürfen wir ihn als eben auffassen. Es gelten dieselben Voraussetzungen wie damals.

Wir berechnen zunächst die Wahrscheinlichkeit $W(\vartheta)\, d\vartheta$ dafür, daß der Durchstoßpunkt der Achse eines Teilchens durch die Einheitskugel, der infolge eines Elementarschritts λ den Rand des von uns betrachteten Gebiets überschreitet, durch diesen

Elementarschritt von P an einen Ort Q kommt, dessen Koordinaten zwischen ϑ und $\vartheta + d\vartheta$ liegen, wo ϑ der Abstand vom Nordpol O der Kugel sei (vgl. Fig. 10). Die Wahrscheinlichkeit, daß dieser Elementarschritt seinen Anfangspunkt zwischen den Poldistanzen σ und $\sigma + d\sigma$ hat und mit dem Meridian OP einen Winkel zwischen β und $\beta + d\beta$ bildet, ist proportional

$$d\sigma\, d\beta = d\sigma \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}},$$

wenn wir $\cos\beta = \eta$ setzen.

Zwischen ϑ, σ und η gilt die Beziehung

$$\vartheta - \sigma = \lambda\eta.$$

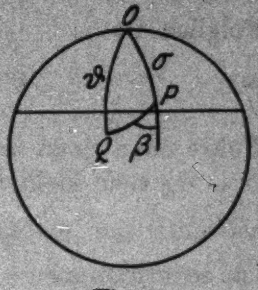


Fig. 10

Damit der Endpunkt des Elementarschritts λ zwischen ϑ und $\vartheta + d\vartheta$ liegt, muß also die Ungleichheit gelten

$$\vartheta \leq \sigma + \lambda\eta \leq \vartheta + d\vartheta,$$

d. h. die Lage des Anfangspunktes und die Richtung des Elementarschritts, die durch σ und η bestimmt sind, müssen in der $\sigma\eta$-Ebene in dem Streifen zwischen den beiden Geraden

$$(88) \qquad \begin{cases} \sigma + \lambda\eta = \vartheta \\ \sigma + \lambda\eta = \vartheta + d\vartheta \end{cases}$$

liegen.

Somit wird

$$W(\vartheta)\,d\vartheta \text{ proportional} \iint d\sigma \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} = \iint d\sigma\, d\beta,$$

wo die Integration sich über den Teil des Streifens erstreckt, der durch $\beta = \pm\beta_0$ begrenzt ist, und wo $\cos\beta_0 = \frac{\vartheta - \vartheta_0}{\lambda}$ ist, unter ϑ_0 die Poldistanz des Randes unseres Gebiets verstanden.

Somit folgt

$$(89) \qquad W(\vartheta)\,d\vartheta = K\,d\vartheta \int \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} = K\,d\vartheta \cdot 2 \arccos \frac{\vartheta - \vartheta_0}{\lambda}.$$

Der Proportionalitätsfaktor K bestimmt sich [vgl. (16)] aus der Bedingung

(90) $$\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+\lambda} W(\vartheta)\, d\vartheta = 1$$

zu

$$K = \frac{1}{2\lambda}\,.$$

Folglich ist

(91) $$W(\vartheta) = \frac{1}{\lambda} \arccos \frac{\vartheta - \vartheta_0}{\lambda}.$$

Führt man jetzt $x = \cos\vartheta$; $x_0 = \cos\vartheta_0$ ein, so daß, da $\vartheta - \vartheta_0$ sehr klein ist,

$$x_0 - x = \sin\vartheta_0 \cdot (\vartheta - \vartheta_0)$$

ist, so erhält man

(92) $$W(\vartheta) = \frac{1}{\lambda} \arccos \frac{x_0 - x}{\lambda\sqrt{1 - x_0^2}}$$

und

(93) $$W(\vartheta)\, d\vartheta = w(x)\, dx^{1)} = \frac{1}{\lambda\sqrt{1 - x_0^2}} \arccos \frac{x_0 - x}{\lambda\sqrt{1 - x_0^2}}\, dx.$$

Die mittlere Funkelzeit bestimmt sich nun analog (18) durch

$$P = \int_{x_0 - \lambda\sqrt{1 - x_0^2}}^{x_0} w(x)\, \Gamma(x)\, dx,$$

oder, wenn wir wieder $x = x_0 - \zeta = b - \zeta$ setzen,

(94) $$\begin{cases} \underline{P} = \dfrac{b}{a^2 \lambda \sqrt{1 - b^2}} \displaystyle\int_0^{\lambda\sqrt{1-b^2}} \arccos \frac{\zeta}{\lambda\sqrt{1 - b^2}}\, \zeta (1 + b^2)\, d\zeta \\ \quad = \dfrac{b\lambda}{a^2}\sqrt{1 - b^2}\left(\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi}{8} b^2\right) = \underline{\dfrac{b\lambda\pi}{8a^2}\left(1 + \dfrac{b^2}{2}\right)}. \end{cases}$$

Durch Beobachtung der Nochfunkelzeit bestimmt sich $\frac{\lambda^2}{4\tau}$, und dieser Wert ist nach Einstein gleich kTG, unter G die Beweglichkeit der Nadel für Rotationen um eine zur Figurenachse senkrechte Drehachse verstanden.

---

1) $w(x)\,dx$ sei die Wahrscheinlichkeit, daß der Durchstoßpunkt der Achse eines Teilchens an eine Stelle mit den Werten zwischen x und $x + dx$ gelangt.

Faßt man die Nadel als Rotationsellipsoid der Halbachsen a und c auf, wo $c \gg a$ ist, so folgt nach einer von Edwardes[1]) abgeleiteten Formel

$$G = \frac{3\left(\ln \frac{c}{a} + 0{,}1931\right)}{8\pi \zeta c^3}, \tag{95}$$

so daß

$$\frac{\lambda^2}{4\tau} = \frac{3kT\left(\ln \frac{c}{a} + 0{,}1931\right)}{8\pi \zeta c^3}. \tag{96}$$

Es ist aber in diesem Falle nicht möglich, mit Hilfe der für die mittlere Nochfunkelzeit gefundenen Formel, die $\frac{\lambda^2}{\tau}$ gibt, die Dimensionen des linearen Teilchens zu bestimmen, wie man etwa bei der Translationsbewegung den Radius der Kugelteilchen ermitteln kann; denn es sind hier zwei Unbekannte, nämlich c und a, in der Gleichung. Hier würde jedoch die Kombination der Beobachtung von Nochverweilzeiten bei der Translationsbewegung und von Nochfunkelzeiten bei der Rotationsbewegung zum Ziele führen.[2])

Königsberg, II. physikalisches Institut.

---

1) D. Edwardes, The quaterly journal of math. 26. S. 77. 1893. In der Formel für das Drehmoment ist bei D. Edwardes ein Fehler, den R. Gans, Ann. d. Phys. 86. S. 628. 1928 verbessert hat.

2) Vgl. R. Gans (a. a. O.).

(Eingegangen 4. Juni 1928)

5. *Über magnetische Eigenschaften des Kobalts;*
von Margarete Samuel

§ 1. Einleitung

Da über die magnetischen Eigenschaften des Kobalts bisher nur sehr wenig bekannt ist, soll in der vorliegenden Arbeit versucht werden, an zwei verschiedenen Kobaltsorten spezifische magnetische Materialeigenschaften festzustellen, und zwar beziehen sich die Untersuchungen auf folgende charakteristische Kurven: die gewöhnliche und die ideale Magnetisierungskurve, die reversible Permeabilität auf der gewöhnlichen und auf der idealen Magnetisierungskurve und schließlich die Koerzitivkraft als Funktion der Temperatur.

Die beiden zu den Messungen verwandten Stäbe, von denen der eine von der Fa. Krupp-Essen, der andere von dem Kaiser-Wilhelm-Institut für Eisenforschung in Düsseldorf hergestellt war, hatten nach einer Analyse, die Hr. Privatdozent Dr. Berg im hiesigen Chemischen Institut freundlicherweise ausführte, 1,33 Proz. bzw. 1,5 Proz. Eisen. Die Verunreinigungen durch die Elemente C, Mn, Ni, Si waren bei beiden Stäben unterhalb 0,1 Proz. Es war leider nicht möglich, die Untersuchungen an eisenfreiem Kobalt auszuführen, da ein Versuch des Kaiser-Wilhelm-Instituts in Düsseldorf, aus eisen- und nickelfreiem Kobalt „Kahlbaum"-Pulver der Fa. Kahlbaum einen homogenen Stab zu gießen, mißglückt war, weil der gegossene Körper bei der Erstarrung porös wurde. Im folgenden will ich den Stab der Fa. Krupp mit *K*, den Stab des Kaiser-Wilhelm-Instituts mit Stab *H* bezeichnen.

Im Laufe der Messungen ergab sich, daß die beiden Stäbe sowohl voneinander als auch von den Materialien von Fleming, Ashton und Tomlinson[1]) und Ewing[2]) in ihrem magnetischen

1) J. A. Fleming, Ashton, Tomlinson, Phil. Mag. 48. S. 276. 1899.

2 J. A. Ewing, Magnetische Induktion. Berlin 1892. S. 87

Verhalten stark abwichen. Auch die gleiche thermische Behandlung konnte nicht, wie bei den anderen ferromagnetischen Materialien Eisen, Stahl und Nickel, magnetische Übereinstimmung der beiden Stäbe hervorrufen. Stab K erwies sich als magnetisch hart, Stab H dagegen als sehr weich. Diese Eigenschaft hatte für Stab H zur Folge, daß er sich während der Messung der Koerzitivkraft zwischen -185° C und $+420^{\circ}$ C härtete, was sich in einer Vergrößerung der Koerzitivkraft bei gewöhnlicher Temperatur bemerkbar machte.

Schließlich gaben die Meßresultate die Möglichkeit, die Anwendbarkeit der von R. Gans angegebenen quantitativen Gesetze für den Zusammenhang zwischen der reversiblen Suszeptibilität und der Magnetisierung[1]) und zwischen der Koerzitivkraft und der Temperatur[2]) zu prüfen, deren Gültigkeit für Eisen, Stahl und Nickel durch die Beobachtungen feststand. In einem späteren Kapitel sind die hierauf bezüglichen Ergebnisse mitgeteilt.

§ 2. Allgemeines

Die Messungen der Magnetisierung und der Koerzitivkraft erfolgten nach der magnetometrischen Methode, und zwar wurde ein im hiesigen Institut konstruiertes störungsfreies Magnetometer nach Kohlrausch und Holborn[3]) benutzt.[4]) Zur Vermeidung von Nullpunktsänderungen wurde es im magnetischen Meridian justiert; der Stab wirkte in erster Hauptlage auf den oberen Magneten des astatischen Nadelpaares, das mit einem ausgeglühten Platin–Iridiumdraht von 0,15 mm Dicke am Torsionskopf aufgehängt war. Die Magnete des Instruments waren 6 cm lang, ihre Entfernung voneinander betrug 1,05 m.

Die zu den Messungen benutzten Stäbe hatten folgende Dimensionen:

---

1) R. Gans, Ann. d. Phys. **33**. S. 1065. 1910; Verhdl. d. D. Phys. Ges. **12**. S. 802. 1910; Phys. Ztschr. **12**. S. 1053. 1911; Ann. d. Phys. **61**. S. 380. 1920.

2) R. Gans, Ann. d. Phys. **42**. S. 1076. 1913; **48**. S. 514. 1915.

3) F. Kohlrausch u. L. Holborn, Ann. d. Phys. **10**. S. 287. 1903; vgl. auch E. Gumlich, Magnetische Messungen, S. 47.

4) Vgl. U. Adelsberger, Ann. d. Phys. **83**. S. 186. 1927.

Stab K	Stab H
l = 18,09 cm	l = 18,02 cm
d = 0,802 „	d = 0,790 „
V = 9,120 cm^3	V = 8,833 cm^3

wobei l die Länge, d den Durchmesser und V das Volumen bedeutet.

Die Volumina wurden aus den geometrischen Dimensionen berechnet. Für die Stäbe ergab sich aus den Daten für l und d

$$\frac{l}{d} = 22{,}56\,, \qquad \frac{l}{d} = 22{,}81\,.$$

Wegen der technischen Schwierigkeit einer exakten Ellipsoidherstellung wurde die Stabform vorgezogen. Die dadurch entstehende Unsicherheit des Entmagnetisierungskoeffizienten erscheint für die ballistischen Messungen durch die neueren Untersuchungen von Steinhaus[1]) nur gering. Die für Stab K und Stab H nach den Angaben von Steinhaus berechneten Entmagnetisierungskoeffizienten hatten die Werte 0,0543 bzw. 0,0533. Für die magnetometrischen Messungen dagegen wurden die für Ellipsoide desselben Dimensionsverhältnisses gültigen Entmagnetisierungskoeffizienten benutzt, die die Werte 0,0696 bzw. 0,0683 hatten.

Beide Stäbe wurden vor den Messungen ausgeglüht und langsam abgekühlt.

§ 3. Die Magnetisierungskurven

Die Magnetisierungskurven wurden in üblicher Weise aufgenommen. Zur Ablesung der Stromstärke diente ein Präzisionsamperemeter von Siemens & Halske, die Änderung des Magnetisierungsstromes wurde durch induktionsfreie Ruhstratschiebewiderstände bewirkt. Alle Zuleitungen waren gut verdrillt, um eine Fernwirkung auf das Magnetometer und Amperemeter auszuschließen. Die Messungen wurden nach den Angaben von Gumlich[2]) ausgewertet. Der Einfluß der Torsion des Aufhängefadens konnte unberücksichtigt bleiben, dagegen wurde die Korrektion der Ausschläge auf Bogen berücksichtigt.

---

1) W. Steinhaus, Ztschr. f. techn. Phys. 7. Nr. 10. S. 497. 1926.
2) E. Gumlich, a. a. O., S. 47.

Die wahre Feldstärke berechnete sich nach der Formel

$$H = H_0 - NM,$$

wobei $H_0 = 0{,}4\,\pi\,n\,i$ die scheinbare Feldstärke, M die Magnetisierung und N den Entmagnetisierungskoeffizienten bedeutet.

Die Magnetometerkonstante C wurde mit Hilfe einer Flachspule von zwei Lagen mit $r = 11{,}52$ cm Radius und $n = 20$ Windungen bestimmt, dadurch, daß ein gemessener Strom die Flachspule allein in bekannter Entfernung durchfloß und eine bestimmte Ablenkung der Magnetometernadel hervorrief. Die ebengenannte Spule diente gleichzeitig als Kompensationsspule zur Aufhebung der Wirkung des Magnetisierungsstromes auf das Magnetometer.

Das magnetisierende Feld wurde bei der Messung an Stab K von einer Spule von $l = 30$ cm Länge und $d = 2{,}65$ cm mittlerem Durchmesser erzeugt. Sie bestand aus 8 Lagen Kupferdraht von 1 mm Dicke, der auf Glasrohr mit Holzstirnflächen gewickelt war. Die durch Auszählung des mittleren Teils ermittelte Spulenkonstante betrug

$$H_0 = 0{,}4\,\pi\,n\,i = 82{,}6\,\frac{\text{Gauss}}{\text{Amp.}}.$$

Da dieser Wert streng nur für eine unendlich lange Spule gilt, mußte noch wegen der entmagnetisierenden Wirkung der Spulenendflächen eine Korrektion eingeführt werden.[1]) Diese ergab bei einer Stablänge von $\lambda = 18$ cm, einer Spulenlänge von $l = 30$ cm und dem inneren Radius $r_i = 0{,}94$ cm, dem äußeren Radius $r_a = 1{,}75$ cm für H_0 den Wert

$$H_0 = 0{,}4\,\pi\,n\,i\left[1 - \frac{2}{3}\,\frac{r_i^2 + r_i r_a + r_a^2}{l^2 - \lambda^2}\right]$$

$$= 82{,}6\,[1 - 0{,}0064]\,i = 82{,}1\,\frac{\text{Gauss}}{\text{Amp.}}\,.$$

Zur Magnetisierung von Stab H diente eine wassergekühlte Spule von 8 Lagen Kupferdraht von 1 mm Durchmesser, die auf ineinandergeschobene Glasrohre mit Messingstirnflächen gewickelt war. Ihre Länge betrug $l = 36{,}5$ cm, ihr mittlerer Durchmesser $d = 3{,}5$ cm. Die Spulenkonstante war

$$H_0 = 0{,}4\,\pi\,n\,i = 94{,}5\,\frac{\text{Gauss}}{\text{Amp.}}\,.$$

1) Vgl. U. Adelsberger, a. a. O., S. 187.

Dieser errechnete Wert des Spulenkonstanten wich nur um 2 Promille von dem experimentell durch eine ballistische Messung kontrollierten Wert ab.

Im folgenden sind die Messungsergebnisse mitgeteilt.

Nach Gumlich berechnet sich C aus

$$C = \frac{2 r^2 \pi n i}{10 (r^2 + a_1^2)^{3/2}} \, \frac{1 - \dfrac{\frac{3}{4} l^2}{a_1^2 + \frac{l^2}{4}} + \psi_1\left(\frac{a_1}{h}\right)}{\dfrac{e}{2A}\left(1 - \frac{5}{6}\left(\frac{e}{2A}\right)^2\right)}$$

und die Magnetisierung M aus

$$M = \frac{C a^3}{2 V\left(1 + \dfrac{\frac{1}{2} L^2 - \frac{3}{4} l^2}{a^2} + \psi\left(\frac{a}{h}\right)\right)} \, \frac{e}{2A}\left(1 - \frac{5}{6}\left(\frac{e}{2A}\right)^2\right).$$

Dabei bedeutet:

- r Radius der Kompensationsspule,
- n Anzahl der Windungen auf der Kompensationsspule,
- a_1 Abstand der Eichspule vom Magnetometer,
- e_1 Eichausschlag (in Doppelmm),
- i_1 dazugehörige Stromstärke in Amp.,
- A Skalenabstand,
- ψ_1 Korrektion wegen der Astasierungsnadel,
- l Abstand der Pole des Instrumentmagneten (= $^5/_6$ der Nadellänge),
- a Abstand des Stabes vom Magnetometer,
- V Volumen des Stabes,
- L Abstand der Pole beim Stab,
- ψ Korrektion wegen der Astasierungsnadel.

Tabellen

Magnetisierungskurve Stab K

Skalenabstand	A =	179,4 cm
Abstand der Eichspule . .	a_1 =	67,09 cm
Abstand des Stabes . . .	a =	76,33 cm
Volumen des Stabes . . .	V =	9,120 cm³
Magnetometerkonstante . .	C =	$2{,}90\ \mathrm{cm} \cdot 10^{-1}$
Magnetisierung	M =	$3{,}892 \cdot e_{\mathrm{korr.}}$
Scheinbare Feldstärke . .	H_s =	82,1 i (i in Amp.)

Um kleine einseitige Fehler auszuschalten, wurden die Hysteresisschleifen selbstverständlich nach beiden Seiten aufgenommen.

Nullkurve

e (Doppelmm)	*i* (Amp.)	H_0	M	NM	H
2,4	0,057	4,680	9,341	0,650	4,030
27,1	0,367	30,13	105,4	7,33	22,80
57,5	0,820	67,32	223,6	15,56	51,76
102,2	2,01	165,0	396,6	27,61	137,4
113,2	2,24	183,9	429,0	30,56	153,3
138,5	3,60	295,6	536,3	37,33	258,3
159,2	4,50	369,5	606,3	42,82	326,7
167,7	5,50	451,6	648,1	45,08	406,5
201,3	8,00	656,8	773,0	53,80	603,0

Absteigender Hysteresisast

e (Doppelmm)	*i* (Amp.)	H_0	M	NM	H
189,0	7,00	574,7	729,0	50,73	524,0
167,1	5,00	410,5	645,7	44,94	365,6
160,3	4,62	379,3	619,6	43,12	336,2
133,0	3,00	246,3	515,0	35,84	210,5
111,8	2,02	165,8	434,9	30,25	135,5
80,7	1,00	82,1	313,5	21,82	60,3
24,9	0	0	96,81	−6,74	− 6,74
−0,4	−0,220	−18,06	−1,557	−0,108	−17,95

Aufsteigender Hysteresisast

e (Doppelmm)	*i* (Amp.)	H_0	M	NM	H
64,4	1,00	82,1	250,3	17,42	64,7
108,0	2,25	184,7	419,1	29,17	155,5
145,1	4,00	328,4	561,3	39,07	289,3
171,4	5,82	477,8	667,1	46,08	431,7
188,9	7,00	574,7	728,5	50,70	524,0
201,3	8,00	656,8	773,0	53,80	603,0

Magnetisierungskurve Stab *H*

Skalenabstand . . . . . A = 179,4 cm
Abstand Eichspule . . . a_1 = 54,77 cm
Abstand Stab . . . . . a = 83,62 cm
Volumen . . . . . . V = 8,833 cm³
Magnetometerkonstante . . C = $2{,}886 \cdot 10^{-1}$
Magnetisierung . . . . . M = $5{,}357 \cdot e_{\text{korr.}}$
Scheinbare Feldstärke . . H_0 = $94{,}5\, i$ (*i* in Amp.)

Nullkurve

e (Doppelmm)	*i* (Amp.)	H_0	*M*	*NM*	*H*
4,0	0,090	8,505	21,48	1,462	7,043
25,8	0,200	18,90	138,2	9,44	9,46
42,1	0,301	28,35	225,5	15,41	12,94
69,8	0,500	47,25	370,8	25,33	21,92
88,1	0,680	64,26	471,0	32,17	32,09
107,7	0,98	92,61	575,1	39,29	53,32
126,7	1,40	132,3	675,9	46,18	86,1
146,1	2,09	197,5	788,8	55,14	142,4
175,8	3,71	350,6	934,2	63,82	286,8
192,3	5,49	518,8	1015	69,73	449,1
205,0	8,08	763,6	1086	74,14	689,5

Absteigender Hysteresisast

e (Doppelmm)	*i* (Amp.)	H_0	*M*	*NM*	*H*
196,5	5,93	560,4	1042	71,18	489,2
189,5	4,98	470,6	1006	68,73	401,9
179,9	3,92	370,4	955,8	65,29	305,1
158,2	2,40	226,8	841,8	57,51	169,3
131,9	1,40	132,3	703,2	48,04	84,3
114,2	0,98	92,61	609,7	41,65	50,96
84,1	0,50	47,25	449,7	30,72	16,53
56,0	0,28	26,46	299,7	20,47	5,99
35,3	0,14	13,23	189,1	12,92	0,31
12,0	0	0	64,28	4,391	– 4,391

Aufsteigender Hysteresisast

e (Doppelmm)	*i* (Amp.)	H_0	*M*	*NM*	*H*
– 4,0	– 0,090	– 8,505	– 21,48	– 1,461	– 7,044
34,3	0,260	24,57	183,7	12,55	12,02
68,9	0,500	47,25	368,6	25,18	22,07
91,0	0,730	68,99	486,4	33,22	35,77
107,2	0,98	92,61	574,1	39,22	53,39
125,3	1,40	132,3	668,5	45,66	86,6
145,0	2,02	190,9	772,5	52,77	138,1
163,2	2,94	277,8	868,0	59,30	218,5
184,2	4,78	451,7	978,2	66,82	384,9
197,3	6,59	622,8	1046	71,44	551,4
205,0	8,08	763,6	1086	74,14	689,5

Den Verlauf der Kurven zeigen Figg. 1 und 2.

Wie aus den Resultaten ersichtlich ist, sind beide Stäbe außerordentlich magnetisch verschieden. Es ist nicht anzunehmen, daß die Abweichung der beiden Stäbe voneinander auf den Eisengehalt zurückzuführen ist, da dieser annähernd

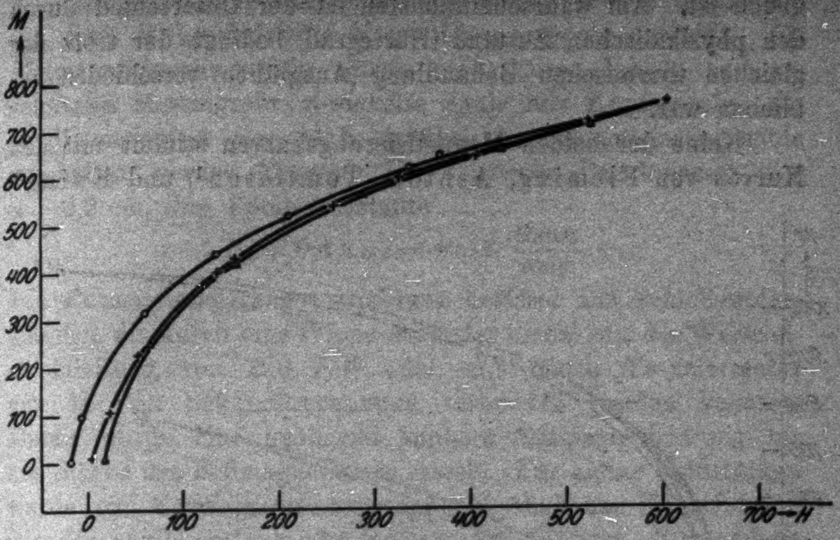

M
800
700
600
500
400
300
200
100
0
0
100
200
300
400
500
600
700 → H

Fig. 1

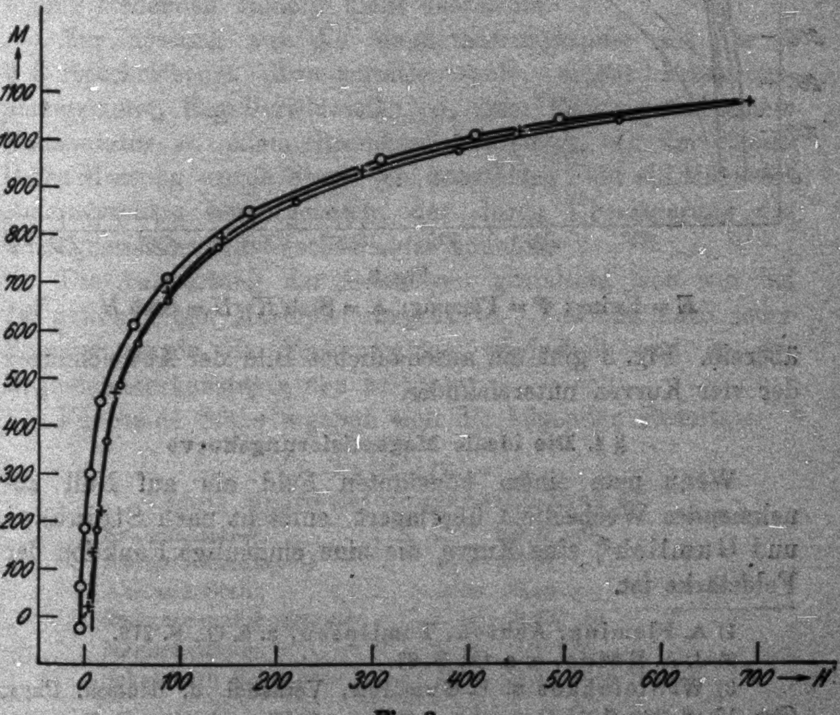

M
1100
1000
900
800
700
600
500
400
300
200
100
0
0
100
200
300
400
500
600
700 → H

Fig. 2

gleich ist. Am wahrscheinlichsten ist der Unterschied durch den physikalischen Zustand (Härtegrad) bedingt, der trotz der gleichen thermischen Behandlung (Ausglühen) verschieden geblieben war.

Keine der beiden Magnetisierungskurven stimmt mit den Kurven von Fleming, Ashton, Tomlinson[1]) und Ewing[2])

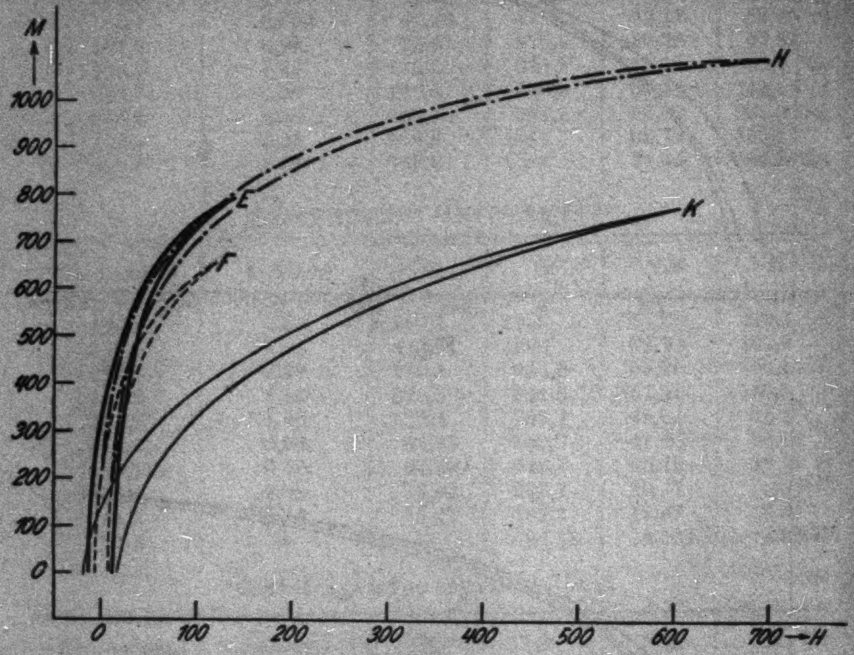


Fig. 3

E = Ewing; *F* = Fleming; *K* = Stab *K*; *H* = Stab *H*

überein. Fig. 3 gibt ein anschauliches Bild der Abweichungen der vier Kurven untereinander.

§ 4. Die ideale Magnetisierungskurve

Wenn man einem konstanten Feld ein auf Null abnehmendes Wechselfeld überlagert, entsteht nach Steinhaus und Gumlich[3]) eine Kurve, die eine eindeutige Funktion der Feldstärke ist.

1) A. Fleming, Ashton, Tomlinson, a. a. O., S. 276.

2) J. A. Ewing, a. a. O., S. 87.

3) W. Steinhaus u. E. Gumlich, Verhandl. d. deutsch. Phys. Ges. 17. S. 369. 1915.

Zur Erzeugung des konstanten Feldes wurde die in § 3 für Stab *H* beschriebene Magnetisierungsspule gewählt. Als Entmagnetisierungsspule diente eine 40 cm lange, auf geschlitztes Messingrohr gewickelte Spule aus Kupferdraht, die so dimensioniert war, daß sie über die Magnetisierungsspule geschoben werden konnte. Ihr mittlerer Durchmesser war $d = 6{,}2$ cm, ihre Spulenkonstante

$$H_0 = 0{,}4\,\pi\,n\,i = 40{,}16\ \frac{\text{Gauss}}{\text{Amp.}}\,.$$

Die Entmagnetisierungsvorrichtung bestand aus Schiebewiderständen, die durch eine Wippe entweder direkt mit der Wechselstromleitung von 220 Volt oder mit einem Transformator von 16 Volt Sekundärspannung verbunden werden konnten. Damit wurde eine genügend saubere Entmagnetisierung bis zur Stärke des Erdmagnetismus erzielt. Für kleine Feldstärken wurde ein Entmagnetisierungsapparat ähnlicher Konstruktion wie der von Gumlich und Rogowski[1]) benutzt. Für größere kam dieser nicht in Frage, da die Leistung des mir zur Verfügung stehenden Modells nicht ausreichte.

Zur Messung war die Magnetisierungsspule mit der in § 3 beschriebenen Kompensationsspule, einem Präzisionsamperemeter, Regulierwiderständen, einer Batterie und einem Kommutator zu einem Stromkreise vereinigt. In der eigentlichen Messung wurde durch ein konstantes Feld ein Magnetometerausschlag hervorgerufen, der durch Überlagerung des entmagnetisierenden Wechselfeldes zunahm.

Die Auswertung der Messungen gestaltete sich wie bei der gewöhnlichen Magnetisierungskurve. Vor und nach jeder Messung wurde der Eichausschlag wiederholt und so die Magnetometerkonstante neu bestimmt.

Für beide Stäbe ergaben sich die folgenden Resultate:

Tabellen

Ideale Magnetisierungskurve Stab *K*

Skalenabstand	$A =$	179,4 cm
Abstand Eichsspule . . .	$a_1 =$	59,23 „
Abstand Stab	$a =$	92,48 „
Magnetometerkonstante . .	$C =$	$2{,}905 \cdot 10^{-1}$
Magnetisierung	$M =$	$7{,}263 \cdot e_{\text{korr.}}$
Scheinbare Feldstärke . .	$H_0 =$	$94{,}5\,i$ (i in Amp.)

1) E. Gumlich u. W. Rogowski, Ann. d. Phys. 34. S. 245. 1911.

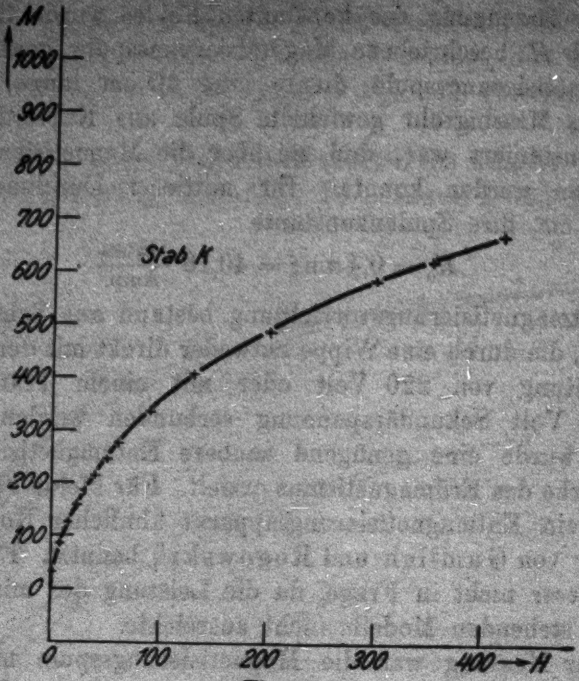

M
1000
900
800
700
600
500
400
300
200
100
0
Stab K
0
100
200
300
400 → H

Fig. 4

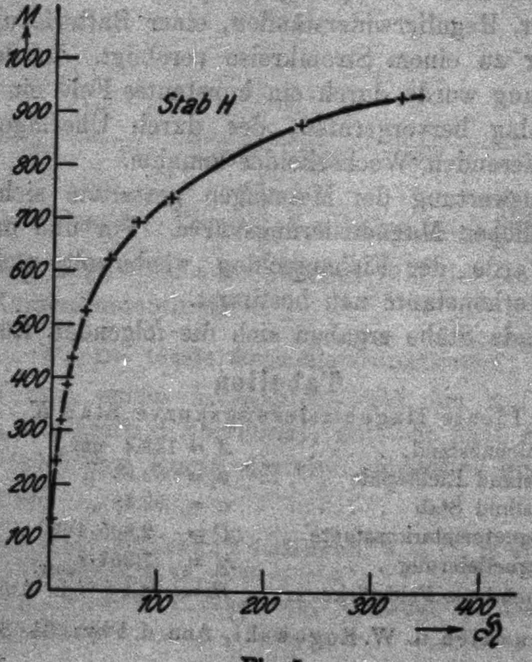

M
1000
900
800
700
600
500
400
300
200
100
0
Stab H
100
200
300
400
→ $\mathfrak{H}$

Fig. 5

e (Doppelmm)	*i* (Amp.)	H_0	*NM*	*M*	*H*
4,8	0,050	4,725	2,427	34,8	2,298
11,8	0,149	14,08	5,97	85,7	8,11
17,1	0,251	23,72	8,64	124,2	15,08
21,5	0,344	32,51	10,87	156,2	21,64
25,5	0,450	42,53	12,89	185,2	29,64
29,2	0,559	52,83	14,76	212,1	38,07
33,9	0,720	68,04	17,14	246,2	50,90
37,7	0,851	80,42	19,06	273,8	61,36
46,1	1,20	113,4	23,31	334,8	90,09
55,3	1,69	159,7	27,93	401,3	131,8
67,0	2,49	235,3	33,83	486,1	201,5
80,0	3,60	340,2	40,37	580,0	299,8
85,2	4,19	395,9	42,93	617,6	353,0
92,0	4,94	466,8	46,40	666,7	420,4

Ideale Magnetisierungskurve Stab *H*

Abstand Eichspule . . . $a_1 = 54{,}77$ cm
Abstand Stab . . . . . . $a = 83{,}82$ „
Magnetometerkonstante . . $C = 2{,}81 \cdot 10^{-1}$
Magnetisierung . . . . . $M = 5{,}257 \cdot e_{\text{korr.}}$
Scheinbare Feldstärke . . $H_0 = 94{,}5\, i$ (*i* in Amp.)

e (Doppelmm)	*i* (Amp.)	H_0	*NM*	*M*	*H*
25,2	0,120	11,34	9,050	132,5	2,29
46,1	0,230	21,74	16,54	242,2	5,20
60,5	0,320	30,24	21,71	317,8	8,53
73,6	0,430	40,64	26,40	386,5	14,24
83,6	0,520	49,14	29,96	438,7	19,18
99,8	0,700	66,15	35,75	523,4	30,40
108,6	0,850	80,33	38,88	569,3	41,45
119,0	1,02	96,39	42,58	623,4	53,81
132,8	1,30	122,8	47,47	695,0	75,33
141,4	1,68	158,8	50,51	739,5	108,3
167,9	3,05	288,2	59,84	876,2	228,4
178,9	4,07	384,6	63,45	929,0	321,2

Den Verlauf der Kurven veranschaulichen Figg. 4 und 5.

§ 5. Die reversible Permeabilität

R. Gans[1]) definiert die reversible Permeabilität folgendermaßen: Ändert man auf irgendeinem Punkt der Magnetisierungskurve die Feldstärke um ein genügend kleines Stück ΔH in entgegengesetzter Richtung wie die vorhergehende Änderung

1) R. Gans, Ann. d. Phys. 27. S. 2. 1908.

von H, so tritt eine Induktionsänderung ΔB ein, die reversibel ist. Der Quotient $\frac{\Delta B}{\Delta H} = \mu_r$ heißt reversible Permeabilität.

Dementsprechend ist das Prinzip der Messung folgendes: Durch die Magnetisierungsspule wird ein konstantes Feld erzeugt, in einer zweiten mit ihr koaxialen Spule wird eine Feldänderung ΔH hervorgerufen. Dadurch tritt mittels einer auf den Stab gewickelten Induktionsspule von bekannter Windungszahl ein Ausschlag des mit ihr verbundenen ballistischen Galvanometers ein.

Zur Erzeugung des Zusatzfeldes ΔH bei der Messung der reversiblen Permeabilität waren zwei Lagen Kupferdraht von 0,5 mm Durchmesser direkt auf die in §§ 3 und 4 erwähnte Magnetisierungsspule gewickelt. Der mittlere Durchmesser der Zusatzspule war 4,6 cm und die Spulenkonstante hatte den Wert

$$H_0 = 0{,}4 \pi n i = 32{,}97 \frac{\text{Gauss}}{\text{Amp.}} .$$

Diese Spule war mit einem Akkumulator, einem Stöpselrheostaten und einem Kommutator verbunden. Zur ballistischen Aufnahme der Induktionsänderung waren unmittelbar auf die Kobaltstäbe Spulen von 5 cm Länge gewickelt. Stab K hatte 827 Windungen Kupferdraht von 0,07 mm Durchmesser, Stab H hatte 1400 Windungen Kupferdraht von 0,05 mm Durchmesser. Die Induktionsspule war mit einem ballistischen Galvanometer von Hartmann und Braun unter Zwischenschaltung der Sekundärspule eines Normals der wechselseitigen Induktion von Siemens und Halske verbunden. Die Primärspule des Induktionsnormals diente in Verbindung mit einem Akkumulator und einem Widerstand dazu, das Galvanometer zu eichen. Die Einführung einer Beruhigungseinrichtung, die nach einer Bemerkung von Gans[1]) angeordnet wurde[2]), um die Stromschwankungen des Magnetisierungsstromes unwirksam zu machen, erübrigte sich, da die Kontakte der Ruhstratwiderstände gut

1) R. Gans, Ann. d. Phys. 61. S. 390. 1920, oben.

2) Zwei gleiche Kobaltstäbe, jeder in seiner Magnetisierungsspule und Zusatzfeldspule und jeder mit seiner Induktionsspule in derartiger Schaltung, daß die Induktionen durch den Strom in den Zusatzfeldspulen sich addieren, dagegen die durch Stromschwankungen in den Magnetisierungsspulen sich aufheben.

genug waren und eine Hausbatterie für diese Messungen reserviert wurde.

Die Messungen gingen so vor sich, daß zuerst der Magnetisierungsstrom erzeugt, dann das Zusatzfeld ΔH einige Male kommutiert und schließlich der zu einem ΔH gehörige Galvanometerausschlag abgelesen wurde.

Die Auswertung erfolgte nach den Angaben von Gans.[1])

Meßresultate

Reversible Permeabilität Stab K

Abstand Eichspule . . . . . . a_1 = 60,11 cm
Abstand Stab . . . . a = 92,27 „
Magnetometerkonstante . . . . C = $2{,}905 \cdot 10^{-1}$
Magnetisierung . . . . M = $7{,}207 \cdot e_{korr.}$
Wechselseitige Induktion . . . p = 0,01 Henry
Widerstand im Zusatzkreis . . w = 223,37 Ohm
Anzahl der Windungen . . . Z = 827
Querschnitt der Induktionsspule Q = 50,53 mm²
Widerstand im Eichkreis . . . W = 1003 Ohm
Anzahl der Windungen/cm auf Zusatzspule . . . . n' = 26,25
Eichausschlag Galvanometer . . α_0 = 35,9

Auf der gewöhnlichen Magnetisierungskurve

Mg-Ausschlag e (Doppelmm)	Galvanometer-ausschlag α	$\mathfrak{M}$	$\Delta\mathfrak{B}/\Delta\mathfrak{H}_0$	$\Delta\mathfrak{B}/\Delta\mathfrak{H} = \mu_r$
0	50,6	0	22,77	25,14
1,3	49,1	9,37	22,10	24,32
6,0	48,8	43,3	21,16	24,16
17,4	43,6	125,4	19,62	21,35
22,3	41,6	160,7	18,72	20,28
26,3	39,5	189,6	17,78	19,17
30,1	37,8	216,9	17,01	18,28
33,2	36,3	239,3	16,34	17,51
36,5	35,0	263,1	15,75	16,83
38,8	33,4	279,7	15,03	16,01
44,5	31,1	320,5	13,96	14,79
58,3	26,1	419,8	11,72	12,29
75,6	19,9	544,0	8,934	9,252
67,7	22,5	487,3	10,10	10,52
50,0	29,0	368,4	13,05	13,77
13,3	47,8	95,85	21,46	23,19
2,4	49,0	17,30	22,00	24,25
58,7	26,0	422,6	11,67	12,24
81,1	18,1	583,5	8,126	8,355
13,5	47,1	97,30	21,15	23,19

1) R. Gans, Ann. d. Phys. 27. S. 17, 18. 1908.

Aus den vorstehenden und folgenden Meßresultaten ist ersichtlich, daß die *reversible Permeabilität eine eindeutige Funktion der Magnetisierung* sowohl auf der gewöhnlichen, als auch auf der idealen Magnetisierungskurve ist.

Auf der idealen Magnetisierungskurve war der Gang der Messung bis auf die Überlagerung des Wechselfeldes, die selbstverständlich bei geöffnetem Galvanometerkreis erfolgte, derselbe.

Auf der idealen Magnetisierungskurve

Die für die gewöhnliche Magnetisierungskurve angegebenen Daten behalten bis auf α_0 ihre Gültigkeit. — Da bei der folgenden Meßreihe die oben angegebene Beruhigungseinrichtung eingeführt wurde, ist statt der Windungszahl Z $2Z$ in die für $\Delta\mathfrak{B}/\Delta\mathfrak{H}_0$ gültige Formel einzuführen.

Galvanometereichausschlag $\alpha_0 = 33,2$

e (Doppelmm)	α	$\mathfrak{M}$	$\Delta\mathfrak{B}/\Delta\mathfrak{H}_0$	$\Delta\mathfrak{B}/\Delta\mathfrak{H} = \mu_r$
2,1	90,0	15,14	21,90	24,09
5,5	88,8	39,60	21,58	23,69
9,2	86,8	66,3	21,09	23,10
14,8	83,0	106,7	20,17	21,97
20,9	77,6	150,3	18,86	20,45
23,9	75,0	172,3	18,23	19,70
28,0	71,7	201,8	17,42	18,75
31,1	68,4	224,2	16,62	17,94
34,2	65,9	246,5	16,02	17,14
36,8	63,1	265,2	15,33	16,34
39,2	61,0	282,5	14,82	15,77
44,0	57,7	316,9	14,02	14,86
55,0	48,8	396,0	11,86	12,45
66,2	41,8	476,6	10,16	10,48
79,2	34,1	569,9	8,287	8,549
83,7	32,8	602,1	7,971	9,221

Reversible Permeabilität Stab *H*

Wechselseitige Induktion . . . . $p = 0,01$ Henry
Widerstand im Eichkreis . . . . $W = 1003$ Ohm
Anzahl der Windungen . . . . $Z = 1400$
Querschnitt der Induktionsspule . $Q = 49,02\ \mathrm{mm}^2$
Anzahl der Windungen/cm auf Zusatzspule . . . . $n' = 26,25$

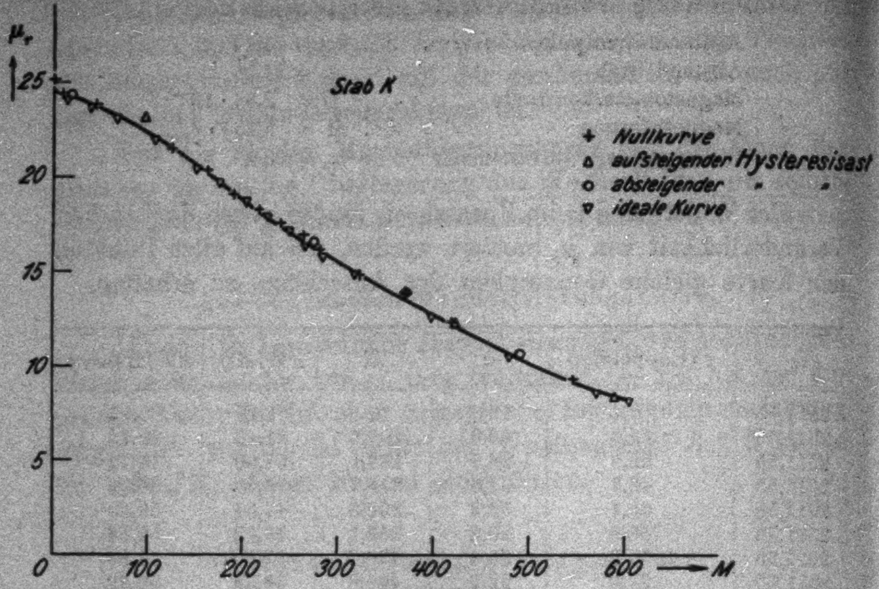
Auf der gewöhnlichen Magnetisierungskurve:

Abstand Eichspule . . . . $a_1 = 54,77$ cm
Abstand Stab . . . . $a = 84,26$ „
Magnetometerkonstante . . . . . $C = 2,87 \cdot 10^{-1}$
Magnetisierung . . . . $M = 5,454 \cdot e_{\text{korr.}}$
Eichausschlag Galvanometer . . $\alpha_0 = 60,0$

Der Widerstand w im Zusatzkreis mußte wegen der starken Veränderlichkeit von μ_r variiert werden, um auf allen Punkten der Kurve gleiche Genauigkeit der Ausschläge zu erhalten.

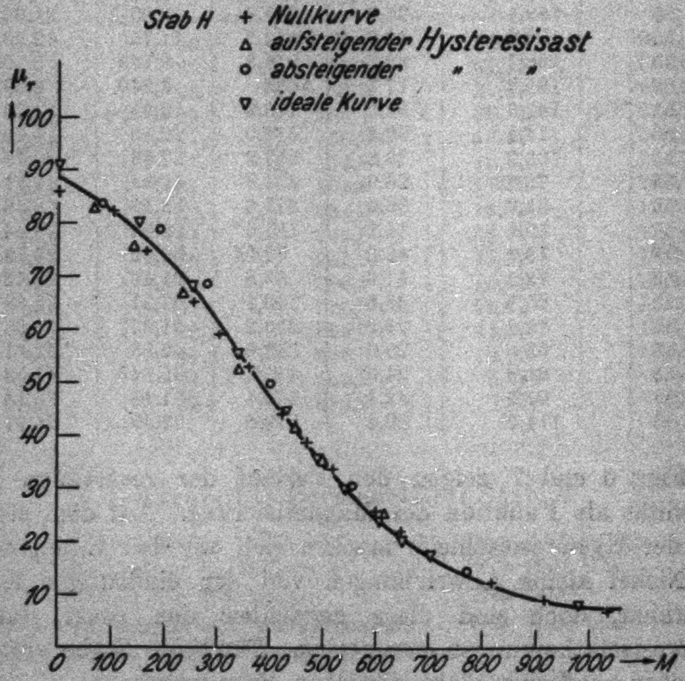
w	e (Doppelmm)	α	$\mathfrak{M}$	$\Delta\mathfrak{B}/\Delta\mathfrak{H}_0$	$\Delta\mathfrak{B}/\Delta\mathfrak{H} = \mu_r$
2011,55	0	42,8	0	68,20	85,97
2011,55	19,0	40,6	102,6	61,43	82,72
2011,55	29,9	28,7	163,1	57,00	74,72
2011,55	46,7	34,6	254,7	51,09	64,93
2011,55	56,1	32,3	306,0	47,54	59,30
2011,55	66,5	29,2	359,1	43,12	52,54
2011,55	77,2	25,6	420,7	37,80	44,83
2011,55	87,0	22,6	469,8	33,38	38,72
1011,55	95,2	40,0	518,0	29,70	33,83
1011,55	110,7	21,3	600,4	23,32	25,77
1011,55	119,1	26,8	645,8	19,90	21,65
511,55	153,0	32,0	814,7	11,75	12,30
511,55	168,7	22,2	916,3	8,148	8,403
511,55	191,3	17,1	1038	6,240	6,383
511,55	142,6	38,0	773,9	13,95	14,76
1011,55	114,2	30,2	619,0	22,48	24,79
1011,55	103,2	36,8	557,2	27,33	30,78
2011,55	73,9	28,0	401,9	41,34	49,91
2011,55	51,3	36,0	277,6	53,16	68,33
2011,55	40,1	41,2	187,0	59,04	78,44
2011,55	13,3	42,0	72,54	62,02	83,79
2011,55	12,8	41,6	69,8	61,43	82,72
2011,55	25,7	38,8	140,1	57,31	75,38
2011,55	42,9	35,2	233,2	51,97	66,38
2011,55	63,0	29,0	342,6	42,83	52,11
2011,55	81,9	24,0	445,6	35,44	41,53
1011,55	91,9	42,4	500,1	31,48	36,18
1011,55	114,2	30,4	619,0	22,49	24,81

Figg. 6 und 7 zeigen den Verlauf der reversiblen Permeabilität als Funktion der Magnetisierung. Auf dem steilen Teil der Hysteresisschleife machen sich wie bei Eisen, Stahl und Nickel kleine Abweichungen von der eindeutigen Kurve bemerkbar, doch sind diese gegenüber den sonst starken Hysteresiserscheinungen nur gering. Für beide Stäbe ergaben sich aber wiederum nicht dieselben Resultate.



μ_r
Stab K
+ Nullkurve
Δ aufsteigender Hysteresisast
o absteigender " "
∇ ideale Kurve
25
20
15
10
5
0
100
200
300
400
500
600
M

Fig. 6



Stab H
+ Nullkurve
Δ aufsteigender Hysteresisast
o absteigender " "
∇ ideale Kurve
μ_r
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000
M

Fig. 7

Auf der idealen Magnetisierungskurve

Abstand Eichspule . . . . . . $a_1 = 54{,}77$ cm
Abstand Stab . . . . $a = 83{,}81$ „
Magnetometerkonstante . . . . $C = 2{,}79 \cdot 10^{-1}$
Magnetisierung . . . . $M = 5{,}218 \cdot e_{\text{korr.}}$
Eichausschlag . . . . $\alpha_0 = 58{,}5$

w	e (Doppelmm)	α	$\mathfrak{M}$	$\Delta\mathfrak{B}/\Delta\mathfrak{H}_0$	$\Delta\mathfrak{B}/\Delta\mathfrak{H} = \mu$
2011,55	0	44,0	0	66,04	91,36
2011,55	29,0	40,0	151,3	60,03	80,20
2011,55	49,3	35,4	257,0	53,14	68,81
2011,55	65,9	30,0	343,5	45,03	55,44
2011,55	80,6	25,0	419,9	37,53	44,43
2011,55	93,8	20,6	488,6	30,91	35,42
1011,55	104,8	35,4	545,4	26,72	30,01
1011,55	116,7	28,8	606,9	21,74	23,85
1011,55	124,9	24,7	649,8	18,81	20,35
1011,55	135,0	21,4	701,1	16,15	17,21
511,55	189,5	20,7	980,4	7,792	8,034
1011,55	115,5	29,6	600,4	22,34	24,58
1011,55	96,4	40,0	501,9	30,18	34,45

§ 6. Magnetisch-korrespondierende Zustände

Der eindeutige Zusammenhang der reversiblen Permeabilität mit der Magnetisierung legte es nahe, die Anwendbarkeit des von R. Gans[1]) angegebenen quantitativen Gesetzes der magnetisch korrespondierenden Zustände auf die Meßresultate nachzuprüfen.

Nach Gans ist die reversible Suszeptibilität K_r in jedem Punkte der Magnetisierungsebene bestimmt durch die Parametergleichungen

$$\frac{K_r}{3K_0} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\mathfrak{Sin}^2 x},$$

$$\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_\infty} = \mathfrak{Ctg}\, x - \frac{1}{x},$$

wobei K_0 die Anfangssuszeptibilität, $\mathfrak{M}_\infty$ die Sättigungsmagnetisierung bedeutet. D. h. also, daß man die reversible Suszeptibilität aus der Anfangssuszeptibilität und der Sättigungsmagnetisierung berechnen kann. Als nun die aus den Messungen der reversiblen Permeabilität ermittelten Werte für K_r/K_0 als Funktion der jeweiligen $\mathfrak{M}/\mathfrak{M}_\infty$ aufgetragen wurden, wobei

1) Vgl. Fußnote § 1.

für $\mathfrak{M}_\infty$ nach P. Weiß[1]) $\mathfrak{M}_\infty = 1412$ gesetzt war, ergab sich keine Übereinstimmung mit der aus obigen Gleichungen errechneten Kurve. Auch zeigten die beiden Stäbe untereinander durchaus verschiedene Gesetzmäßigkeit in der Annäherung an den Wert der Sättigungsmagnetisierung, die nach dem Verlauf der Kurven $\frac{K_r}{K_0} = f\left(\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_\infty}\right)$ für beide Stäbe die-

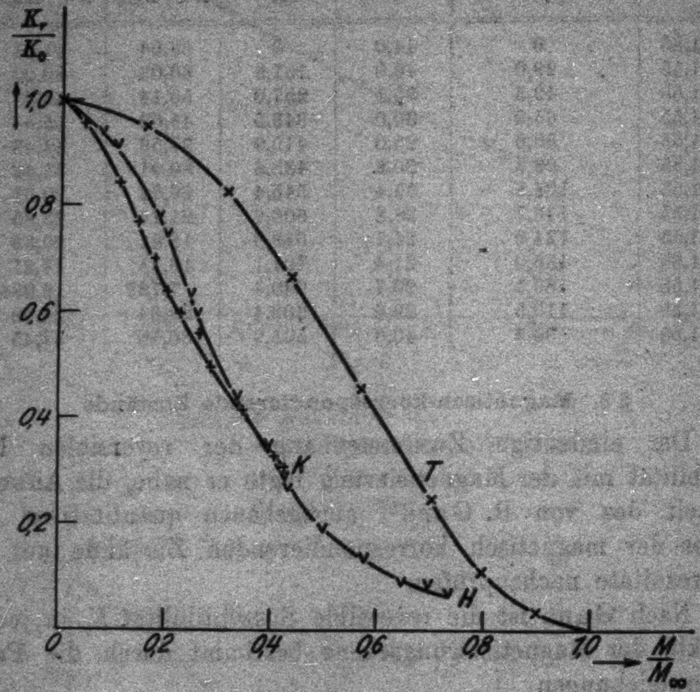


Fig. 8

selbe zu sein scheint. Dies stimmt mit dem von Weiss[1]) gefundenen Resultat überein, daß bei Kobalt derselbe Wert der Sättigungsmagnetisierung erreicht, aber die Art der Annäherung an den Sättigungswert für verschieden hartes Material verschieden ist. Aus den folgenden Tabellen und den Kurven Fig. 8 ist die Abweichung von der theoretischen Kurve *T*, die der Funktionentabelle[2]) entnommen wurde, ersichtlich.

1) P. Weiss, Journ. d. Phys. Mai 1910, Separatabdruck S. 18.
2) Vgl. R. Gans, Göttinger Nachr. 1911, S. 45.

Tabellen

Stab *K*

$\mu_0 = 24{,}10$ $\mathfrak{M}_\infty = 1412$
$\mu_0 - 1 = 23{,}10$

$\mu_r - 1$	$\mathfrak{M}$	$\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_\infty}$	$\frac{K_r}{K_0}$
23,09	15,14	0,0107	0,9996
22,10	66,31	0,0470	0,9567
19,45	150,3	0,1064	0,8420
17,75	206,8	0,1429	0,7684
16,14	246,5	0,1746	0,6987
14,77	282,5	0,2001	0,6344
13,79	320,5	0,2270	0,5968
12,77	368,4	0,2609	0,5528
11,45	396,0	0,2805	0,4957
9,52	487,3	0,3451	0,4121
7,549	569,9	0,4036	0,3268
7,221	602,1	0,4264	0,3126

Stab *H*

$\mu_0 = 88{,}00$ $\mathfrak{M}_\infty = 1412$ $\mu_0 - 1 = 87{,}00$

$\mu_r - 1$	$\mathfrak{M}$	$\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_\infty}$	$\frac{K_r}{K_0}$
81,72	102,6	0,0727	0,9393
79,20	151,3	0,10715	0,9103
67,31	257,0	0,1820	0,7737
64,33	277,6	0,1966	0,7394
54,44	343,5	0,2433	0,6257
51,54	359,1	0,2543	0,5924
37,72	469,8	0,3327	0,4336
34,42	488,6	0,3460	0,3956
24,67	600,4	0,4252	0,2836
22,85	606,9	0,4298	0,2626
16,27	701,1	0,4965	0,1870
11,30	814,7	0,5770	0,1299
7,403	916,3	0,6489	0,0851
7,034	980,4	0,6943	0,0809
5,383	1038	0,7351	0,0619

§ 7. Die Koerzitivkraft als Funktion der Temperatur

Schließlich wurde die Koerzitivkraft als Funktion der Temperatur gemessen, und zwar in dem Bereich von -185° bis $+420^{\circ}$ C.

Für die Messung bei Temperaturen über Zimmertemperatur war die magnetometrische Justierung im Prinzip dieselbe wie bei der Aufnahme der Hysteresisschleifen, nur die

Empfindlichkeit wurde gesteigert durch Verringerung des Stababstandes vom Magnetometer. Die Magnetisierungsspule war eine wassergekühlte, auf Messingrohr gewickelte Spule von $l = 33$ cm Länge und $d = 6{,}1$ cm mittlerem Durchmesser aus 8 Lagen Kupferdraht. Der innere freie Durchmesser der Spule war so bemessen, daß der zur Erzeugung der hohen Temperaturen notwendige elektrische Ofen hineingeschoben werden konnte.

Die Spulenkonstante betrug

$$H_0 = 0{,}4\,\pi\, n\, i = 79{,}6\,\frac{\text{Gauss}}{\text{Amp.}}$$

unter Annahme einer unendlichen Länge der Spule. Die Korrektion wegen der entmagnetisierenden Wirkung der Endflächen ergab bei der auf 12 cm reduzierten Stablänge für H_0 den Wert

$$H_0 = 79{,}6\, i (1 - 0{,}020) = 78{,}0\, i \qquad (i \text{ in Amp.}).$$

Nach den Messungen an Stab K war die Wasserkühlung undicht geworden, so daß die Spule neu gewickelt werden mußte. Die neue Spulenkonstante war

$$H_0 = 80{,}3\, i (1 - 0{,}020) = 78{,}7\, i \qquad (i \text{ in Amp.}).$$

Zur Erzeugung der hohen Temperaturen wurde ein elektrischer Ofen konstruiert von 22 cm Länge und 2 cm lichtem Durchmesser. Die bifilare Wicklung war nach innen frei, um eine möglichst hohe Wärmewirkung zu erzielen, nach außen mit Wasserglas und Marquardtscher Masse isoliert. Als Heizdraht wurde zunächst Chromnickeldraht genommen. Dieser bewährte sich jedoch nicht, da durch kleine Unregelmäßigkeiten in der Drahtdicke einige Stellen höher erhitzt wurden, als es der Durchschnittstemperatur entsprach, so daß der Ofen durchbrannte. Deshalb wurde der endgültige zu den Messungen verwandte Ofen aus Platindraht von 0,3 mm Dicke hergestellt. Die örtlichen Temperaturdifferenzen im Ofen waren so klein, daß sie durch Einführung des Stabes infolge seiner Wärmeleitung fast völlig ausgeglichen wurden. Näheres ist aus der Ofencharakteristik Fig. 9 zu ersehen, die in Abständen von 2 cm auf 12 cm Länge in der Mitte ohne den Stab aufgenommen wurde. Abszisse ist dabei der Abstand von der Ofenmitte in Zentimetern, Ordinate die Temperatur.

Der Ofen wurde mit Wechselstrom aus dem Stadtnetz geheizt. Die Temperaturmessung erfolgte mit einem von der PTR. geeichten Thermoelement Const.-Cu; die Lötstelle konstanter Temperatur befand sich auf 0°.

Die Messung ging folgendermaßen vor sich: Nachdem die Temperatur des Stabes, die nach der Kompensationsmethode gemessen wurde, konstant war, wurde die Hysteresisschleife bis zu einer genau festgelegten Spitze von 900 Gauss einige Male durchlaufen. Bei $H_0 = 0$, d. h. bei der scheinbaren

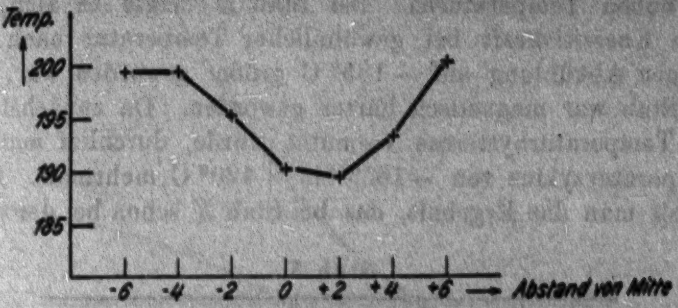


Fig. 9

Remanenz wurde durch einen Umschalter eine geringere Spannung an den Magnetisierungsstromkreis gelegt, das Amperemeter auf einen empfindlicheren Bereich eingestellt und das Feld so lange verändert, bis das Magnetometer auf Null einstand. Die dazugehörige Stromstärke wurde am Amperemeter abgelesen. Selbstverständlich wurde die Koerzitivkraft auf beiden Seiten der Hysterisschleife gemessen. Die Abweichungen der beiden Seiten betrugen maximal 1 Proz.

Für tiefe Temperaturen mußte die magnetometrische Anordnung verändert werden, und zwar erfolgte die Justierung in ähnlicher Weise, wie sie R. Gans[1]) bei seinen Messungen der Koerzitivkraft an Nickel, Eisen und Stahl benutzt hat. Die Magnetisierungsspule, die auch zu den Messungen bei höheren Temperaturen verwendet worden war, wurde in geringer Entfernung vom Magneten vertikal auf die Magnetometerschiene gestellt. Ihre Horizontalkomponente an der Stelle des oberen Magnetometermagneten wurde mit der in § 3 erwähnten Flachspule kompensiert. In die Magnetisierungsspule

1) R. Gans, Ann. d. Phys. 42. S. 1073. 1913.

paßte ein Dewargefäß, das den Stab und den Kohlensäureschnee mit Äther bzw. die flüssige Luft aufnahm. Der Stab befand sich in der Spule in solcher Höhe, daß im wesentlichen nur ein Pol auf die Magnetometernadel wirkte, d. h. der Pol lag genau in Höhe der Magnetometernadel. Als Kontrolle für die Justierung wurde festgestellt, daß die Koerzitivkraft bei Zimmertemperatur sowohl in der vertikalen als auch in der horizontalen Anordnung dieselbe war.

Die Messung vollzog sich in genau derselben Weise wie bei hohen Temperaturen. Bei Stab *H* zeigte es sich, daß seine Koerzitivkraft bei gewöhnlicher Temperatur nach erstmaliger Abkühlung auf −185° C größer geworden war, d. h. der Stab war magnetisch härter geworden. Da zunächst eine Art Temperaturhysterese vermutet wurde, durchlief man den Temperaturzyklus von −185° bis +420° C mehrmals. Dabei erhielt man das Ergebnis, das bei Stab *K* schon bei der ersten

Stab *K*

i (Amp.)	Temp. C	H_c
0,355	−185	27,7
0,309	− 79	24,1
0,231	+ 16,1	18,0
0,198	+ 65,4	15,4
0,181	96,8	14,1
0,141	190	10,90
0,132	210	10,30
0,107	284	8,35
0,794	420	6,19

Stab *H*(1)
vor der Abkühlung

i (Amp.)	Temp. C	H_c
0,0865	+ 15,0	6,81
0,0822	64,1	6,47
0,0771	111	6,07
0,0726	173	5,71
0,0689	211	5,42
0,0655	265	5,15
0,0615	330	4,84

Stab *H*(2)
nach der Abkühlung

i (Amp.)	Temp. C	H_c
0,1835	−185	14,4
0,168	− 79	13,2
0,147	+ 14,8	11,56
0,126	+ 82,0	10,07
0,115	131	9,05
0,1045	167	8,22
0,0871	238	6,85
0,0760	300	5,98
0,0645	353	5,00
0,0609	396	4,79
0,0562	436	4,42

Messung galt, *daß die Koerzitivkraft eine eindeutige Funktion der Temperatur ist.*

Aus den vorstehenden Tabellen und Fig. 10 ist die Temperaturabhängigkeit der Koerzitivkraft zu entnehmen.

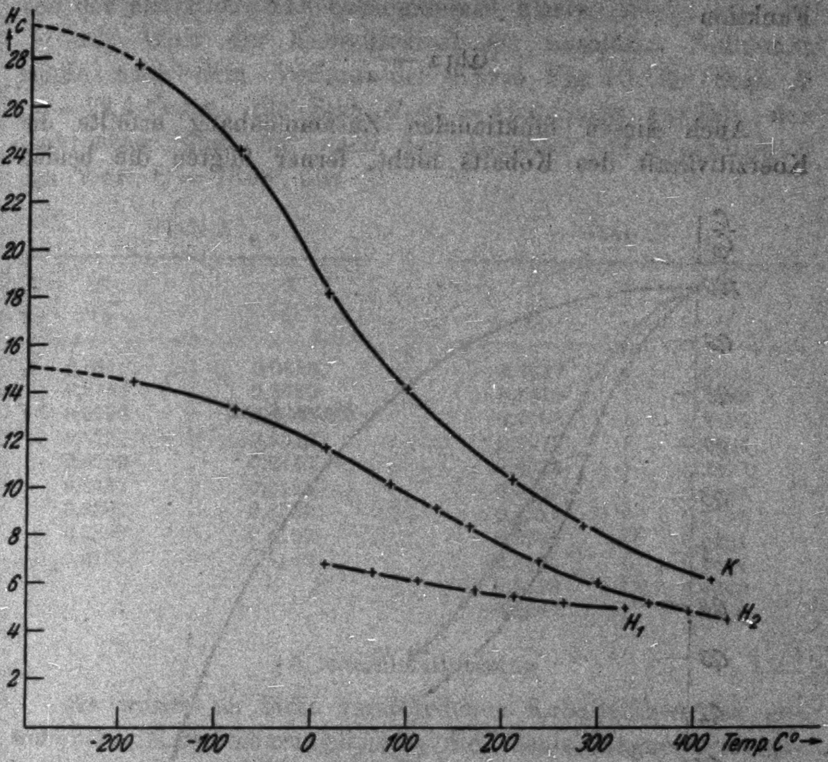


Fig. 10

§ 8. Das quantitative Gesetz der Temperaturabhängigkeit der Koerzitivkraft

Nach den Untersuchungen von R. Gans an Eisen, Stahl und Nickel[1]) läßt sich auch für den Zusammenhang zwischen Koerzitivkraft und absoluter Temperatur eine Funktion angeben, die durch die Parametergleichungen

$$\frac{C}{C_0} = \frac{3L(x)}{x},$$

$$\frac{T}{\Theta} = L(x)$$

1) R. Gans, Ann. d. Phys. 42. S. 1076. 1913; 48. S. 518. 1915.

bestimmt ist, wobei C die jeweilige Koerzitivkraft, C_0 die Koerzitivkraft im absoluten Nullpunkt, T die jeweilige absolute Temperatur, Θ die absolute Temperatur des Curieschen Punktes bedeutet. $L(x)$ ist wieder die Langevinsche Funktion

$$\mathfrak{Ctg}\, x - \frac{1}{x}\,.$$

Auch diesen funktionalen Zusammenhang erfüllte die Koerzitivkraft des Kobalts nicht, ferner folgten die beiden

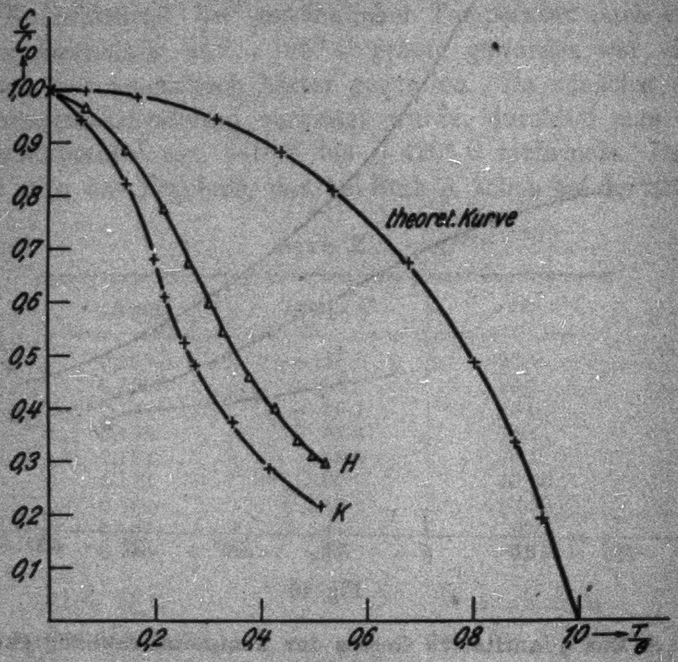


Fig. 11

Stäbe untereinander durchaus verschiedenen Gesetzmäßigkeiten in der Annäherung an den Curieschen Punkt. Es scheint dies ein Analogon zu der in § 6 erwähnten Beobachtung von Pierre Weiss für die Sättigungsmagnetisierung zu sein, da die Kurven der Temperaturabhängigkeit für Stab K und Stab H auf verschiedenen Wegen demselben Wert des Curieschen Punktes zuzustreben scheinen.

Die folgenden Tabellen und Fig. 11 zeigen die Ab-

weichung der aus den experimentellen Daten ermittelten Funktion

$$\frac{C}{C_0} = f\left(\frac{T}{\Theta}\right)$$

von der aus R. Gans[1]) entnommenen Kurve.

Als Wert der Koerzitivkraft am absoluten Nullpunkt wurde nach dem Verlauf der Kurve Fig. 10 für Stab K $C_0 = 29{,}4$ Gauss, für Stab H $C_0 = 15{,}0$ Gauss gewählt, der Curiesche Punkt hat nach den Angaben von Steinhaus[2]) den Wert $\Theta = 1348^0$ abs. T.

Stab K $\frac{C}{C_0}$	Stab K $\frac{T}{\Theta}$	Stab H $\frac{C}{C_0}$	Stab H $\frac{T}{\Theta}$
0,9418	0,0653	0,9627	0,0653
0,8194	0,1439	0,8813	0,1439
0,6120	0,2145	0,7707	0,2135
0,5250	0,2510	0,6713	0,2684
0,4798	0,2743	0,6033	0,2997
0,3737	0,3435	0,5480	0,3264
0,3502	0,3583	0,4567	0,3791
0,2839	0,4132	0,3987	0,4251
0,2105	0,5141	0,3333	0,4644
		0,3193	0,4970
		0,2947	0,5260

§ 9. Zusammenfassung

Es wurde an zwei verschiedenen Kobaltstäben die gewöhnliche Magnetisierungskurve, die ideale Magnetisierungskurve, die reversible Permeabilität und die Koerzitivkraft als Funktion der Temperatur gemessen.

Es zeigte sich, daß trotz gleicher thermischer Vorbehandlung (Ausglühen und langsames Abkühlen) keine Übereinstimmung der Resultate an den beiden Stäben gewonnen werden konnte.

Ich habe in Widerspruch mit den Angaben von O. Bloch[3]), der bei seinen Messungen gefunden hat, daß das Kobalt nach

1) R. Gans, Göttinger Nachrichten S. 45. 1911.

2) W. Steinhaus, Handb. d. Phys. 15. S. 191. 1927. (Geiger u. Scheel).

3) O. Bloch, Über die magnetischen Eigenschaften der Ni-Co-Legierungen. Diss. Zürich S. 35. 1912.

einer Erwärmung auf über 700° härter wird, nicht beobachtet, daß die magnetischen Eigenschaften sich durch Erhitzung auf ungefähr 1000° merklich geändert haben. Bei dem von mir gemessenen Stab *H* konnte erst eine Abkühlung auf −185° C eine magnetische Härtung bewirken, aber dennoch keine Übereinstimmung mit Stab *K* hervorrufen. Auch die Ergebnisse der Messungen anderer Beobachter wichen sowohl von meinen als auch untereinander ab.

Die reversible Suszeptibilität ist wie bei Eisen, Stahl und Nickel eine eindeutige Funktion der Magnetisierung, aber das Gans sche Gesetz der magnetisch korrespondierenden Zustände gilt nicht.

Die Koerzitivkraft ist zwischen −185° und +400° C eine eindeutige Funktion der Temperatur, aber es ist nicht dieselbe Funktion wie die von R. Gans bei Eisen, Stahl und Nickel gefundene.

Hrn. Prof. Dr. Gans bin ich für die Anregung zu dieser Arbeit, sein dauerndes Interesse und seine ständige Unterstützung zu großem Danke verpflichtet.

Ferner möchte ich Hrn. Privatdozent Dr. Berg für die Analysen meiner Materialien, und dem Kaiser-Wilhelm-Institut für Eisenforschung in Düsseldorf für die kostenlose Herstellung des einen Stabes bestens danken.

Königsberg i. Pr., 8. Juni 1928, II. Physik. Institut.

(Eingegangen 14. Juni 1928)

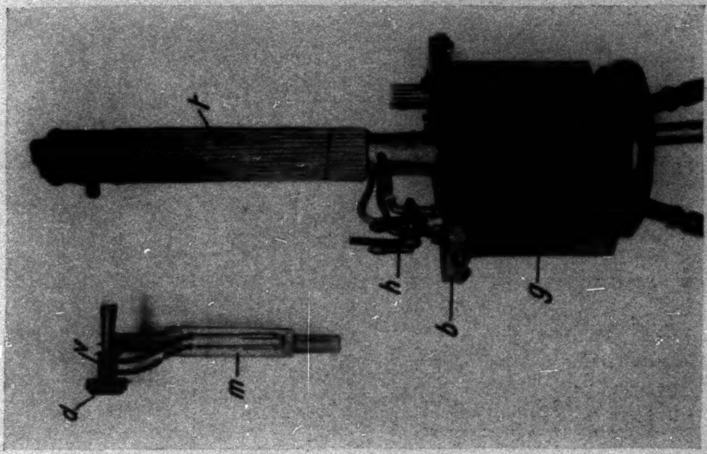


Fig. 2
Flugzeug-Kondensor für Radium-Emanation, mit Kühlgefäß. Links oben Staudüse mit Manometer

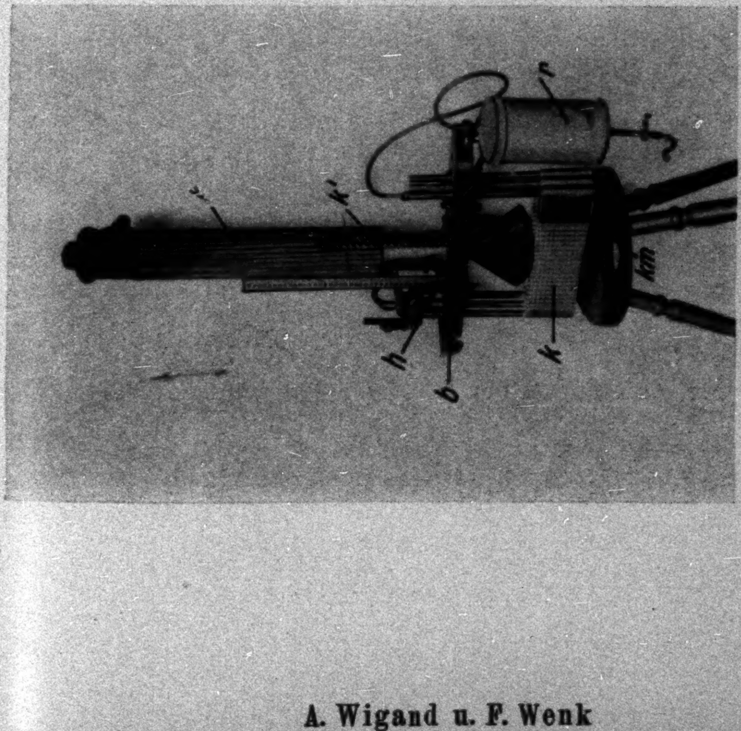


Fig. 1
Flugzeug-Kondensor für Radium-Emanation, ohne Kühlgefäß

A. Wigand u. F. Wenk

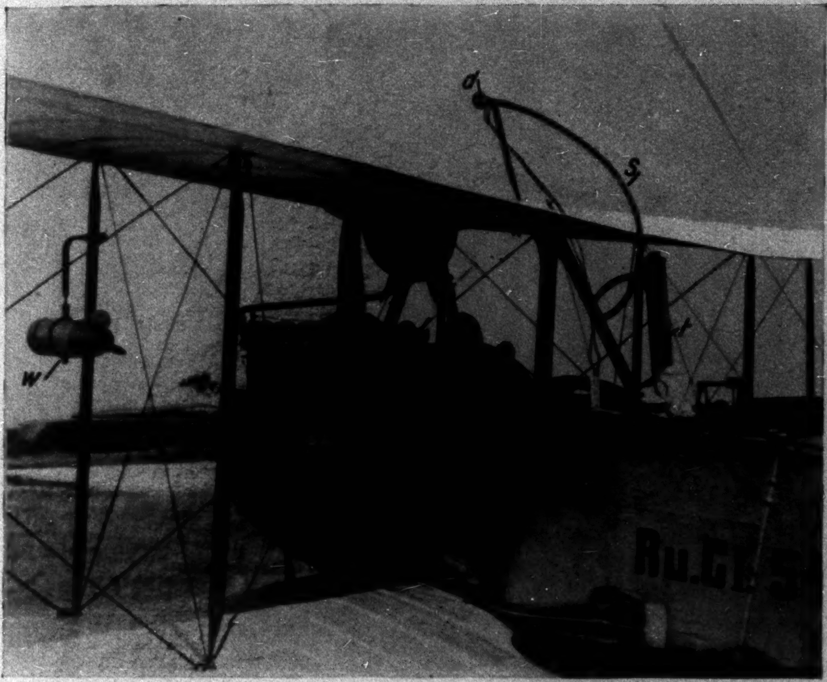


Fig. 3
Anordnung der Apparatur zur Messung der Radium-Emanation im Flugzeuge

A. Wigand u. F. Wenk

1928 № 14

ANNALEN DER PHYSIK

VIERTE FOLGE. BAND 86

1. *Über Rückdiffusion und Sekundärstrahlung mittelschneller Kathodenstrahlen an Metallen*[1]);

von K. H. Stehberger

Einleitung

Wenn Kathodenstrahlen einheitlicher Geschwindigkeit auf eine Metalloberfläche auftreffen, so wird diese ihrerseits zum Ausgangspunkt von Kathodenstrahlung höchst uneinheitlicher Geschwindigkeit. In seiner im Jahre 1905 erschienenen Arbeit hat Hr. Becker[2]) bereits zeigen können, daß die Elektronenemission einer mit Kathodenstrahlen von $^1/_3$ Lg bestrahlten Metallplatte zwar z. T. an der äußersten Oberfläche vor sich geht, z. T. aber auf der Mitwirkung einer ziemlich großen Schichtdicke („Rückdiffusionsdicke") beruht.

1. Auf der Grundlage der in der erwähnten Arbeit unter weitgehender Variation der Versuchsbedingungen gewonnenen Ergebnisse gelang es später Hrn. Lenard[3]), unter Hinzunahme neuerer Kenntnis eine vollständige quantitative Darstellung des gesamten in Betracht kommenden Erscheinungskomplexes zu finden. Ursache der aus tieferen Schichten stammenden Strahlen ist danach *Rückdiffusion* von Primärelektronen. Die Rückdiffusion ist das Endergebnis vieler kleiner Ablenkungen, die das schnelle Primärelektron bei seinen Atomdurchquerungen im Innern des Metalles erfährt. Die Ablenkung muß bei senkrechtem Einfall im ganzen über 90° nach einer Seite hin betragen, damit Rückdiffusion eintritt. Ausgeschlossen ist es nicht, daß *echte Reflexion* aus dem Molekülbereich der Rückdiffusionsdicke je nach der Stoffart wesentlich an dem Vorgang beteiligt ist.[4]) Als echte Reflexion be-

1) Für die Annalen bearbeitete Dissertation aus dem Radiologischen Institut, Heidelberg, der Naturw.-Math. Fak. vorgelegt 16. Mai 1928.

2) A. Becker, Ann. d. Phys. 17. S. 381. 1905.

3) P. Lenard, Quantitatives über Kathodenstrahlen. S. 226.

4) Es sind Übergänge von Rückdiffusion in echte Reflexion nach Beobachtungen von Hrn. Holtzmann wahrscheinlich geworden (Ann. d. Phys. 86. S. 214. 1928); vgl. auch über solche Übergänge P. Lenard, Ann. d. Phys. 80. S. 26. 1926.

zeichnen wir die beliebig große Ablenkung eines Primärelektrons bei einem *einzigen* Zusammentreffen mit einem Atom.

2. Im deutlichen Gegensatz hierzu erscheint die *Sekundärstrahlung*, deren Geschwindigkeit ausnahmslos sehr gering ist und durch Änderung der Primärgeschwindigkeit wesentlich unbeeinflußbar bleibt.[1]) Diese Eigenschaft kann zum mindesten für langsame und mittelschnelle Primärstrahlen als feststehend betrachtet werden.[2]) Außerdem zeigt die Sekundärstrahlung hinsichtlich ihrer Geschwindigkeitsverteilung, soweit bis jetzt untersucht, keinerlei Abhängigkeit von der Schichtdicke.

Mit dem gleichen Gegenstand befassen sich in neuerer Zeit zahlreiche Arbeiten. In diesen Arbeiten ist fast durchweg von einer „Sekundärstrahlung" schlechthin die Rede, worunter das Gemisch aus wirklicher Sekundärstrahlung[3]) und Rückdiffusion verstanden wird. Dabei wird das charakteristische Nebeneinander der beiden sowohl hinsichtlich ihrer Entstehungsweise als auch ihrer Erscheinungsform so verschiedenen Arten von Elektronenemission ignoriert und damit die Möglichkeit, in die tieferen Zusammenhänge des Mechanismus der Sekundärstrahlung einzudringen, achtlos beiseite gesetzt.

3. Nachdem Hrn. Becker[4]) eine weitgehende Zerlegung der Gesamterscheinung in ihre drei Einzelbestandteile, Sekundärstrahlung, Rückdiffusion und Reflexion, im Gebiet langsamer Primärstrahlen ($V_p = 10-1100$ Volt) gelungen ist, hat sich die vorliegende Arbeit die Aufgabe gestellt, in analoger Weise das Gebiet der mittelschnellen Primärstrahlen zu erforschen.

Auf diesem Gebiet liegt bereits die Arbeit von M. Baltruschat u. H. Starke[5]) vor, die aber nicht als zweifelfreie Beantwortung der in Betracht kommenden Fragen gelten kann. Die Verfasser sprechen zwar von Sekundärstrahlung

1) Für sehr große V_p vgl. jedoch P. Lenard u. A. Becker, Kathodenstrahlen S. 280.

2) P. Lenard, Quantitatives über Kathodenstrahlen. S. 158.

3) Über deren Definition vgl. P. Lenard, Quantitatives über Kathodenstrahlen. S. 133.

4) A. Becker, Ann. d. Phys. 78. S. 253. 1925.

5) M. Baltruschat u. H. Starke, Phys. Ztschr. 23. S. 403. 1922.

und Rückdiffusion, ohne aber eine zutreffende Trennung durchzuführen, woran sie auch infolge teilweiser Entstellung ihrer Meßergebnisse durch Versuchsfehler (Wandstrahlenwirkung) verhindert sind, und sie gelangen zu Schlüssen, die z. T. mit den eingangs dargelegten hauptsächlichen Erfahrungstatsachen über Auftreten und Natur beider Strahlenarten in Widerspruch stehen. So finden sie z. B., daß Rückdiffusion bei Primärgeschwindigkeiten unter 6000 Volt überhaupt nicht in merklichem Maße vorkomme; ferner, daß die maximale Geschwindigkeit der Sekundärelektronen bei $V_p = 3000$ Volt etwa 40 Volt betrage, bei $V_p = 6000$ Volt dagegen etwa 200 Volt erreiche, also einen sehr erheblichen Gang mit der Primärgeschwindigkeit besitze.

Wenn es nun die vorliegende Arbeit unternehmen will, die Verhältnisse der Elektronenemission im Gebiet mittelschneller Primärstrahlen klar zu stellen, so kann dies nur so geschehen, daß Rückdiffusion und Sekundärstrahlung einwandfrei getrennt und jedes für sich untersucht werden. Die Trennung läßt sich in unserem Falle, wie man leicht einsieht, mit größerer Genauigkeit durchführen als bei kleinen V_p, da sich die rückdiffundierenden Elektronen über ein weit ausgedehnteres Geschwindigkeitsintervall verteilen und daher innerhalb jedes engen Intervalls nur in verhältnismäßig geringer Zahl auftreten, während die Sekundärelektronen ihrerseits nur auf kleine Geschwindigkeiten beschränkt sind und sich also lediglich in diesem Gebiet den rückdiffundierenden Elektronen überlagern. Eine dementsprechende Geschwindigkeitsverteilung ist nach Beseitigung der Wandstrahlung auch tatsächlich beobachtet worden.

4. Wie Hr. Lenard bereits 1918 betont hat[1]), wird die Eintrittssekundärstrahlung zum Teil von den auf die Metalloberfläche auftreffenden Primärelektronen, zum Teil aber von den aus der Metallschicht rückkehrenden Primärelektronen hervorgerufen. Es wurde in der vorliegenden Arbeit versucht, ein Urteil auch darüber zu gewinnen, in welchem Maße die jeweils beobachtete Sekundärmenge als durch rückkehrende Elektronen hervorgerufen zu betrachten ist.

Zur weitgehendsten Sicherstellung der Ergebnisse schien es erforderlich, die Beantwortung der einzelnen Fragen unter

---

1) P. Lenard, Quantitatives über Kathodenstrahlen. S. 226.

Zuhilfenahme teilweise verschiedener Anordnungen zu bewerkstelligen, um dadurch nach Möglichkeit nur die Vorteile jeder solchen Anordnung zur Geltung kommen zu lassen. Dies Verfahren legt natürlich die Verpflichtung auf, die Vergleichbarkeit mit verschiedenen Anordnungen gewonnener Ergebnisse in jedem einzelnen Falle einer besonderen Kritik zu unterziehen.

5. In einer analogen Arbeit von Hrn. Becker, auf die wir bereits Bezug genommen haben, wird noch ein dritter Anteil von Elektronen abgetrennt, der sich dadurch auszeichnet, daß seine Geschwindigkeit nahezu diejenige der Primärstrahlung ist. Es lag nahe, diesen Teil als echt reflektierte Strahlung anzusehen, da er sich durch eine besondere Mengenstufe von dem verlangsamten Anteil abhebt.[1]) Dieser Anteil tritt, wie jene Messungen zeigten, bei den höheren Primärgeschwindigkeiten unserer Untersuchungen vollkommen zurück.

Es wird sich bei der Besprechung unserer Ergebnisse erweisen, daß die an mittelschnellen Primärstrahlen beobachteten Erscheinungen sich denjenigen, die im Gebiet langsamer Primärstrahlen bereits festgestellt wurden, unmittelbar anschließen. Die allmählichen Veränderungen, denen beim Übergang zu den gegenwärtig benutzten höheren Primärgeschwindigkeiten das Gesamtbild des Elektronenemissionsvorganges unterworfen ist, liegen in der Richtung, daß die Rückdiffusion und die von ihr ausgelöste Sekundärstrahlung immer mehr in den Vordergrund treten.

Hauptteil

A. Die Hochspannungsquelle

6. Zur Erzeugung der benötigten Primärgeschwindigkeiten zwischen 1000 und 12000 Volt diente bei sämtlichen Versuchen folgende Hochspannungsanlage (Fig. 1).

An die Gleichspannung einer 220-Voltbatterie ist ein Wechselstromaggregat angeschlossen, das einen Wechselstrom von 110 Volt und 40 Wechsel in der Sek. liefert. Dieser durchfließt den Primärkreis eines kleinen Öltransformators T. Von dessen Sekundärspule ist der eine Pol geerdet, der andere zur Kathode einer Gleichrichterröhre geführt. Deren Heizbatterie

1) A. Becker, Ann. d. Phys. 78. S. 253. 1925.

(7 Akkumulatoren) und Regulierwiderstand sind isoliert aufgestellt. Die Anode des Gleichrichters ist mit der inneren Belegung einer Batterie aus 4 großen Leidener Flaschen verbunden. Wie die Prüfung mittels Braunscher Röhre und Drehspiegel zeigte, war die beschriebene Anordnung, da die Spannung statisch gemessen wurde und der Betrieb der Versuchsröhren nur sehr geringe Strommengen erforderte, sehr wohl imstande, eine Gleichspannung von befriedigender Kon-

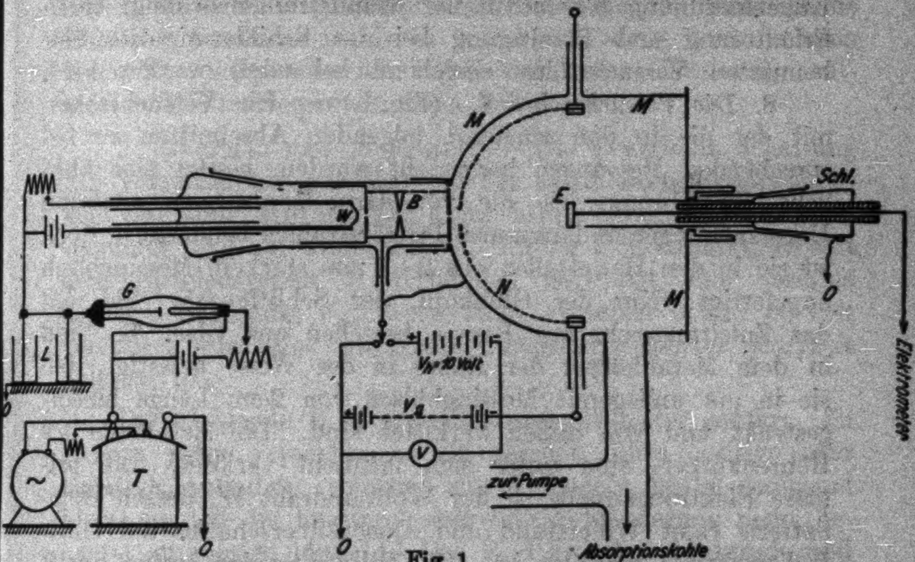


Fig. 1

stanz zu liefern. Da außerdem die Isolation der gesamten Anlage vorzüglich war, konnte ein kleiner Teil der Messungen sogar in der Weise durchgeführt werden, daß die Wechselstrommaschine immer nur in den Meßpausen lief und die Messung dann mit Hilfe des Spannungsvorrates in der Leidener Batterie vor sich ging, wobei die Spannung jedesmal um weniger als 3 v. H. des Anfangswertes abnahm. Reguliert wurde die Hochspannung mittels eines in den Primärkreis des Transformators eingeschalteten Schieberwiderstandes.

B. Messungen der Geschwindigkeitsverteilung des langsamen Anteils der austretenden Strahlung im Kugelfeld

7. Zur Messung von Geschwindigkeitsverteilungen wird im folgenden ausschließlich die Gegenfeldmethode angewandt. Und zwar muß zur von Raumladungseffekten unbeeinflußten,

einwandfreien Messung der kleinen Sekundärgeschwindigkeiten derjenigen Anordnung der Vorzug gegeben werden, die mit einer möglichst geringen Primärintensität auszukommen gestattet. In dieser Hinsicht liegen die Verhältnisse bei der *Kugelfeldanordnung* besonders günstig, da hierbei die gesamte allseitige Ausstrahlung der Metalloberfläche gemessen wird. Unter dem gleichen Gesichtspunkt wird auch die elektrometrische Meßweise gewählt. Eine erhebliche Fehlerquelle der Kugelanordnung besteht in der Wandstrahlenwirkung, deren Erläuterung und Beseitigung bei der Schilderung der hier benutzten Versuchsröhre eingehend behandelt werden wird.

8. *Die Versuchsröhre I.* (Fig. 1.) — Die Versuchsröhre, mit der die in den zunächst folgenden Abschnitten zu besprechenden Messungen hergestellt wurden, besitzt eine ähnliche Einrichtung, wie die von Hrn. Becker zu analogen Untersuchungen an langsamen Primärstrahlen benutzte.[1]) Doch ist sie in den Hauptteilen aus 2—4 mm starkem Messingblech angefertigt. Nur der Glühkopf, der Schliffansatz *Schl* und das Zuleitungsrohr zur Pumpe bestehen aus Glas. Sie sind in dem Metallkörper der Röhre in der Weise befestigt, daß sie in gut anliegende Messinghülsen von 2 cm Länge hineingesteckt und von außen verkittet sind. Die Metallteile des Röhrenkörpers sind unter sich luftdicht verlötet. Die primäre Elektronenquelle ist der Wolframdraht *W*, dessen Heizbatterie samt Widerstand und Quecksilberschalter auf einen Isolierschemel montiert ist. Die Primärstrahlen treten durch ein Blendensystem *B*, das aus 3 konzentrischen Einzelblenden (Durchmesser 1 mm) besteht, in den Meßraum *M* ein und treffen normal auf die Meßelektrode *E* auf, an deren Oberfläche sich der zu untersuchende Sekundärstrahlungsprozeß abspielt. Diese Meßelektrode ist eine Metallscheibe, deren Durchmesser 1 cm, d. i. $^1/_{10}$ des Durchmessers der Halbkugel *M* beträgt, so daß der Charakter des Zentralfeldes innerhalb des Meßraumes genügend gewahrt ist. Der Stiel der Elektrode ist von einem geerdeten Messingschutzrohr umgeben und führt, durch Flintglas isoliert, durch einen Metallschliff aus der Röhre heraus. Die Elektrodenscheibe ist auf den Stiel aufgeschraubt und kann nach Herausnehmen des Schliffes ausgewechselt werden.

---

1) A. Becker, Ann. d. Phys. 78. S. 232. 1925.

Zu den Messungen wurde ein ausgezeichnetes Hochvakuum benötigt. Als Pumpe diente eine rotierende Quecksilberpumpe mit einer Kapselpumpe als Vorpumpe. Das eigentliche Hochvakuum wurde dann durch Anwendung einer beträchtlichen Menge von Absorptionskohle erzielt, die vor jeder Versuchsreihe eine Stunde lang bis nahe an den Erweichungspunkt des Glasgefäßes erhitzt und unter ständigem Laufen der Pumpen entgast wurde. Dann wurde längere Zeit mit flüssiger Luft gekühlt. Als Kriterium für hinreichende Güte des Vakuums wurde es betrachtet, wenn beim Anlegen hoher Spannungen an die Röhre sich keine Unruhe des entgerdeten Elektrometers erkennen ließ.

9. *Schaltung und Meßweise.* — Die elektrische Schaltung der Versuchsröhre zur Messung der sekundären Geschwindigkeitsverteilung wird aus Fig. 1 ersichtlich. Die negative Hochspannung liegt am Glühdraht W. An der Röhrenwand, die mit dem Blendensystem B verbunden ist, liegt eine variable negative Spannung V_g, deren Höhe zwischen 0 und 50 Volt verändert wird und an einem Präzisionsvoltmeter jederzeit ablesbar ist.

Die Elektrode E ist zum Binantelektrometer geführt. Zu Beginn jedes Versuches ist sie geerdet. Ihre positive oder negative Aufladung während des Versuches bleibt genügend klein, so daß die hierdurch bewirkte Feldänderung nicht beachtet zu werden braucht. Das Feld zwischen Elektrode und Röhrenwand (von dem dazwischenliegenden Netz N ist hier vorläufig abgesehen; Näheres hierüber folgt weiter unten) bestimmt die maximale Austrittsgeschwindigkeit derjenigen Elektronen, die noch eben auf der Elektrode zurückgehalten werden und also zur Messung gelangen. Das sind dann 1. die in der Auffangeplatte echt absorbierten Primärelektronen, 2. die bis auf eine Geschwindigkeit $< V_g$ verlangsamten rückkehrenden Primärelektronen und 3. die Sekundärelektronen mit Geschwindigkeiten $< V_g$. Die daraus resultierende Gesamtaufladung der Elektrode während einer bestimmten Meßzeit und bei konstant gehaltenem Primärstrom kann so bei variiertem V_g gemessen werden. Die Vereinigung einer Anzahl solcher Messungen ergibt als Funktion von V_g graphisch dargestellt die Integralkurve der Geschwindigkeitsverteilung in dem betreffenden Intervall von V_g.

Die Wandstrahlen

10. In der bisher besprochenen Versuchsanordnung ist noch eine Fehlerquelle enthalten, deren Einfluß auf die Meßergebnisse zum Gegenstand besonderer Untersuchungen gemacht wurde. Es handelt sich hierbei um die Wirkung der „*Wandstrahlen*“. Das sind solche Sekundärelektronen, die durch an den Wänden des Meßraumes auftreffende Kathodenstrahlen dort ausgelöst werden und daher die Messung fälschen.

Die Frage nach dem Maße der Beeinträchtigung der Ergebnisse durch Wandstrahlenwirkung muß immer dann einer eingehenden Prüfung unterzogen werden, wenn bei der benutzten Anordnung Erzeugungsraum der zu messenden Strahlen und Meßraum identisch sind.

Und zwar läßt sich über den Umfang der Wirkung allgemein sagen, daß er stark anwächst, wenn man zu schnelleren und daher der Rückdiffusion in höherem Grade unterworfenen Primärstrahlen übergeht, und ferner, daß er von der Größe der Meßelektrode im Verhältnis zu den Dimensionen des Meßraumes und von der Größe des nach der Elektrode hin gerichteten Feldes abhängt.

Man kann diese Fehlerquelle nicht mittels einer Korrektionsrechnung eliminieren. Vielmehr muß die experimentelle Beseitigung der Wandstrahlen durch besondere Einrichtung des Meßraumes als der einzige aussichtsreiche Weg betrachtet werden.

11. *Netz und Hilfsfeld.* — Die Wandstrahlenwirkung zu vermeiden oder doch auf einen sehr kleinen Betrag abzuschwächen ist dann möglich, wenn es gelingt, die erzeugenden Wände außerhalb des Meßfeldes anzubringen. Zu diesem Zweck wurde in die Halbkugel M hinein eine zweite N konzentrisch eingebaut, die aus einem Drahtgerüst mit darübergespanntem, sehr feindrähtigem Messingnetz besteht. Der Radius dieser Netzkugel N (Fig. 1) ist um 4 mm kleiner als der innere Radius der Kugelschale M gewählt. Beide voneinander isolierte Halbkugeln stellen also einen halben Kugelkondensator dar. Darin kann ein Feld bestehen, das von dem Meßfeld unabhängig ist.

12. Es kam nun darauf an, für die Hilfsfeldanordnung die günstigste Schaltweise zu finden, so daß die damit erhaltenen Geschwindigkeitsverteilungskurven die tatsächlichen Verhält-

nisse der Sekundärstrahlung möglichst einwandfrei wiedergeben. Um hierüber Klarheit zu gewinnen, wurden Vergleichsmessungen mit vier verschiedenen Schaltungen angestellt. Deren Ergebnis ist in Fig. 2 graphisch dargestellt und soll im folgenden erläutert werden.

a) Es wurden sowohl das Netz als auch die Röhrenwand auf die Meßspannung $-V_g$ gebracht. Dann bestand zwischen

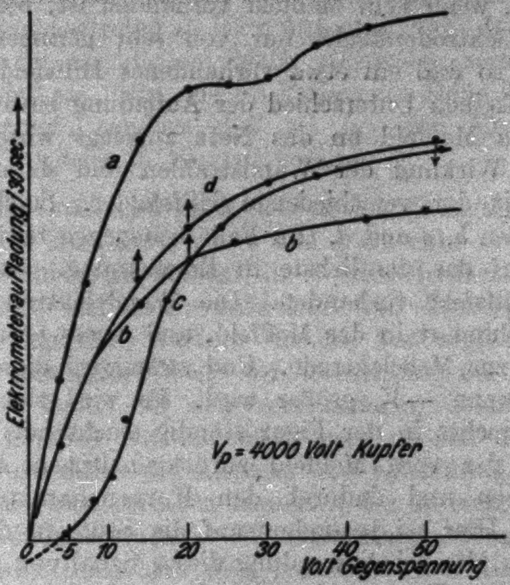


Fig. 2

Netz und Wand kein Hilfsfeld. Mit dieser Schaltung wurde die Kurve *a* aufgenommen.

b) Das Netz erhielt wieder die Spannung $-V_g$, die Wand blieb durchweg geerdet. Dann befand sich zwischen Netz und Wand ein Hilfsfeld, das dem Meßfeld stets gleich und entgegengerichtet war. Auf diese Weise ergab sich die Kurve *b*.

c) Am Netz lag wieder $-V_g$, an der Wand die Spannung $-V_g + 20$. In diesem Falle behielt das Hilfsfeld den konstanten Wert von 10 Volt und war wieder dem Meßfeld entgegengerichtet. So entstand die Vergleichskurve *c*.

d) Es wurde eine Kombination der unter b) und c) aufgeführten Schaltmethoden angewandt. Das Netz befand sich wieder auf $-V_g$. Die Wand blieb für alle V_g unter 10 Volt ge-

erdet; für alle V_g über 10 Volt erhielt sie die Spannung $-V_g +$ 10 Volt. Das Hilfsfeld wuchs also von 0 auf 10 Volt an und blieb dann konstant. Diese Schaltweise ergab die Kurve *d*.

Mit der Beseitigung der Wandwirkung bei den vier Schaltungen verhält es sich folgendermaßen:

Die Anfangspunkte aller vier Kurven in Fig. 2 fallen zusammen. Das bedeutet, daß die Wandstrahlung, die die Elektrode trifft, wenn kein Meßfeld vorhanden ist, bei der Kleinheit der Elektrodenfläche nur von sehr geringer Intensität sein kann, so daß ein etwa vorhandenes Hilfsfeld — wie im Falle *c* — keinen Unterschied der Aufladung bewirkt. Sobald dagegen ein Meßfeld an das Netz angelegt wird, zeigt sich sofort die Wirkung der Wandstrahlen und damit auch die Wirksamkeit der verschiedenen Hilfsfelder. Solche bestehen in den Fällen *b*, *c* und *d*. Im Falle *a* dagegen tritt die Wandwirkung auf das deutlichste in Erscheinung. Denn hier ist ja kein Hilfsfeld vorhanden. Die Wandelektronen gelangen daher ungehindert in das Meßfeld, und dieses leitet einen Teil von ihnen zur Meßelektrode. Und zwar wird dieser Bruchteil wachsen, wenn $-V_g$ größer wird. Es wird sich demgemäß eine nach rechts in der Figur ständig wachsende Elektronenmenge zu der vom Meßfeld zurückgehaltenen Ausstrahlung hinzuaddieren und dadurch den Kurvencharakter erheblich entstellen. Hier sei besonders auf die Stufe in der Kurve *a* hingewiesen, die bei Anwendung dieser Schaltung und in noch ausgeprägterer Form, wenn das Netz überhaupt nicht vorhanden war, regelmäßig auftrat und leicht zu falscher Deutung Anlaß geben könnte. Offenbar genügen etwa 20 Volt Meßspannung dazu, die meiste Wandstrahlung der Messung zuzuführen. Die geringe Steigung der Kurve bei größeren V_g rührt dann von Sekundärelektronen und von schnelleren Wandelektronen (aus der Wand rückdiffundierten Primärstrahlen) her.

Die Kurve *a* weicht von den übrigen Kurven der gleichen Figur besonders stark ab. Es ist ja leicht einzusehen, daß, wenn ein Hilfsfeld zwischen Netz und Wand vorhanden ist, dieses gar nicht groß sein muß, um so gut wie alle Wandelektronen vom Meßraum fernzuhalten. Denn erstens ist die Geschwindigkeit der weitaus meisten Sekundärelektronen und also auch der Wandelektronen nur gering, und zudem kommt hier nur deren Normalkomponente in Betracht. Man

kann daher sicher sein, daß bei den Kurven *b*, *c* und *d* die Wandstrahlung allgemein eine nur unbedeutende Rolle spielt. Besonders zu betrachten ist in dieser Hinsicht nur der Anfangsteil der Kurven *b* und *d*, der beiden Kurven gemein ist. Hier ist das Hilfsfeld dem Meßfeld entgegengesetzt gleich, also zunächst recht klein. Dann kann noch ein Teil der Wandelektronen in den Meßraum gelangen; aber da auch das Meßfeld hier sehr klein ist, dürfte wohl auch hier nicht viel mehr Wandwirkung auftreten als beim Anfangspunkt. Sollte trotzdem eine solche in merklichem Maße vorhanden sein, so ist zu beachten, daß sie nicht wie im Falle *a* zur Höhe der gesamten Kurve beiträgt, sondern daß sie bei den Messungen mit größeren V_s wieder in Wegfall kommt.

13. Darf man also nach dem soeben Gesagten die Wandstrahlung bei den Kurven *b*, *c* und *d* als nahe vollständig beseitigt betrachten, so müssen die Verschiedenheiten, die diese Kurven unter sich noch aufweisen, auf Störungen anderer Natur zurückgeführt werden. In der Tat ergibt sich deren Ursache in zwangloser Weise bei Betrachtung der Feldverhältnisse in der Röhre bei den verschiedenen Schaltungen. Es muß hier nämlich berücksichtigt werden, daß das benutzte Netz außerordentlich weitmaschig und feindrähtig war, damit es selbst nur einen geringen Bruchteil der an einer homogenen Halbkugel hervorgerufenen Wandstrahlung, etwa 2 v. H., liefern konnte. Beachtet man nun noch den Umstand, daß dieses weitmaschige Netz verhältnismäßig sehr nahe an der Röhrenwand lag, so wird es verständlich, daß ein Durchgriff des Hilfsfeldes nach dem Meßraum hinüber stattfinden muß, wenn das Hilfsfeld nicht wesentlich kleiner ist als das Meßfeld. Und zwar wird die Durchgriffswirkung immer eine Schwächung des Meßfeldes herbeiführen. Auf die Geschwindigkeitsverteilungskurven bezogen, bedeutet das eine tiefere Lage der Beobachtungspunkte gegenüber solchen, die ohne Störung gewonnen wurden. Die Durchgriffswirkung tritt z. B. besonders deutlich bei dem Anfangsteil der Kurve *c* in Erscheinung. Hier befand sich, wenn das Netz die Spannung 0 hatte, die Wand auf der Spannung +20 Volt. Die Kurve zeigt nun, daß der Durchgriff des Hilfsfeldes so stark war, daß ein Meßfeld von etwa 5 Volt nötig war, um seine Wirkung aufzuheben und die langsamsten Sekundärelektronen auf der Elektrode

zurückzuhalten. Wenn dann das Meßfeld wächst, während das Hilfsfeld konstant bleibt, so tritt die Störung immer mehr zurück. Anders liegt der Fall bei der Kurve *b*. Hier wird, da das Hilfsfeld dem Meßfeld immer gleich und entgegengerichtet ist, das letztere immer um einen gleichbleibenden Bruchteil geschwächt. Es resultiert so eine Kurve, die ständig und gleichmäßig unter der Kurve der reinen Sekundärstrahlung bleiben muß.

Die an den betrachteten Kurven *a*, *b* und *c* gewonnene Erfahrung zeigt, daß man, um eine möglichst fehlerfreie Darstellung der Geschwindigkeitsverteilung zu erzielen, die Schaltung der Hilfsfeldanordnung so wählen muß, daß einerseits stets ein genügendes Hilfsfeld vorhanden ist, das die Wandstrahlen vom Meßraum fernhält, daß aber andererseits das Hilfsfeld nach Möglichkeit kleiner, niemals jedenfalls größer ist als das Meßfeld. Beide Störungen, Wandwirkung und Durchgriff, beeinflussen die Ordinate des gemessenen Kurvenpunktes in entgegengesetzter Richtung.

14. Unter diesen Umständen schien es am vorteilhaftesten, die Schaltungen *b* und *c* in geeigneter Weise zu kombinieren. Und zwar wurde folgendermaßen verfahren: Für alle $V_g < -10$ Volt wurde Schaltung *b* angewandt. Daher ist die Kurve *d* mit *b* im Anfangsteil identisch. Wie wir oben sahen, ist bei diesem Kurventeil eine Mitwirkung von Wandstrahlung in kleinem Maße wahrscheinlich. Es wird aber zugleich eine Durchgriffswirkung sich in entgegengesetzter Richtung geltend machen. Da bei der verhältnismäßig großen Steilheit der Kurve eine geringe Verschiebung der Ordinate keine bedeutende Änderung der Kurvenform zur Folge hat, so kann man wohl sagen, daß dieser Anfangsteil der Kurven *b* und *d* der reinen Ausstrahlungskurve sehr nahe kommt. Immerhin ist anzunehmen, daß diese ein wenig höher liegt. Von $V_g = -10$ Volt an behielt das Hilfsfeld im Falle *d* den konstanten Wert $+10$ Volt. Wenn jetzt V_g wächst, so tritt die Durchgriffswirkung sehr zurück. Da ferner das Hilfsfeld von 10 Volt die Wandstrahlung nahezu vollständig fernhält, so muß die Kurve *d* auch in ihrem weiteren Verlaufe, und hier in noch besserer Annäherung, als getreues Abbild der reinen Ausstrahlungskurve gelten. Im Intervall der größten benutzten V_g wäre höchstens noch zu beachten, daß ein so großes Meßfeld wohl

auch einige der langsameren Primär-Wandelektronen zur Elektrode zu leiten vermag. Dementsprechend dürfte dann dieser Kurventeil ein wenig zu hoch liegen. Die Richtung, in der die einzelnen Kurventeile zu verschieben wären, um mit der mutmaßlichen unverfälschten Kurve zur Deckung zu gelangen, ist in der Fig. 2 jeweils durch kleine Pfeile angedeutet. Diese Korrekturen der Kurve *d* werden aber nur von geringem Umfang sein.

Da sich somit als Ergebnis der Untersuchungen mit verschiedenen Schaltweisen des Hilfsfeldes die Schaltung *d* zur Darstellung der wirklichen Geschwindigkeitsverteilung am vorteilhaftesten erwies, wurde sie bei den sämtlichen im folgenden Abschnitt der Arbeit zu besprechenden Messungen angewandt. Eine zugehörige Schaltskizze findet sich in der Fig. 1.

Die Geschwindigkeitsverteilung der langsamen austretenden Strahlung

15. Mit Hilfe der beschriebenen Versuchsanordnung wurde nun eine große Anzahl von Kurven der Geschwindigkeitsverteilung bei senkrechter Inzidenz aufgenommen. Dabei wurden die Primärgeschwindigkeit V_p und die strahlenden Metalle variiert. Bei der Ausmessung jeder einzelnen Kurve wurde das Gegenfeld jeweils von 2 zu 2 Volt verändert. Der Einfluß eines etwaigen Ganges in der Primärintensität konnte dadurch eliminiert werden, daß von Zeit zu Zeit der 0-Punkt der Kurve (d. i. die Aufladung bei geerdetem Netz) festgestellt und jede zwischenliegende Messung darauf bezogen wurde. Nach größeren Geschwindigkeiten wurden die Kurven so weit verfolgt, bis ihre Steigung konstant erschien.

Ein Beispiel einer so erhaltenen Kurvenserie zeigt Fig. 3. In ihr sind Meßreihen für drei verschiedene Primärgeschwindigkeiten dargestellt. Der Strahler war in diesem Falle eine gewalzte Goldfolie ($d = 0{,}3\,\mu$). Die Ordinate jedes Kurvenpunktes bedeutet die Aufladung der Elektrode in 30 Sek. Und zwar ist oberhalb der Abszissenachse negative, unterhalb positive Aufladung aufgetragen. In der Figur sind die einzelnen Kurven in der Weise auf einen gemeinsamen Maßstab gebracht worden, daß die geradlinigen Kurventeile (etwa von $V_g = 40$ Volt an) zur Deckung kommen. So tritt die Verschiedenheit der Wirkung verschiedener V_p am deutlichsten zutage. Man sieht z. B., daß positive Aufladung der Elek-

trode überhaupt nur bei V_p unter 7000 Volt vorkommt. Bei Al findet die Zeichenumkehr bei 2600 Volt statt. Selbstverständlich besitzen diese Zahlen nur für normale Einstrahlung und für fein polierte Oberflächen Geltung.

Sämtliche Kurven besitzen ihre größte Steilheit im ersten Anstiegsteil. Eine Inflexion, wie sie Hr. Becker am Anfang

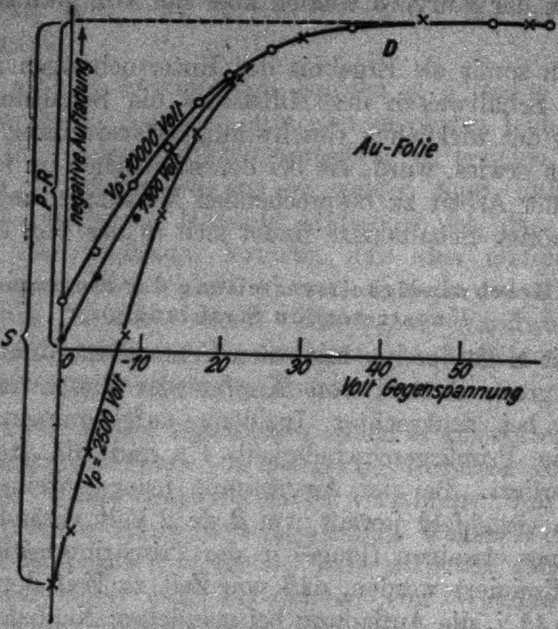


Fig. 8

seiner entsprechenden Kurven beobachtete, ist hier nicht zu erkennen. Man hätte dazu um kleinere Intervalle von V_s vorgehen müssen. Es wäre aber auch dann nach jenen Messungen kein sehr deutliches Hervortreten derselben zu erwarten gewesen, da eine wahrscheinlichste Geschwindigkeit bei zunehmender Primärgeschwindigkeit immer weniger ausgeprägt vorhanden ist.

16. Der lineare Anstieg der Kurven im Gebiet $V_g > 40$ Volt, der sich weit über das in der Figur dargestellte Intervall hinaus fortsetzt, muß als eine Wirkung der Rückdiffusion angesprochen werden. Verlängert man diesen Kurventeil etwa geradlinig bis zum Schnitt mit der Ordinatenachse, so stellt die Ordinate des Schnittpunktes diejenige Aufladung dar, die

die Elektrode erhielte, wenn sie keine Sekundärstrahlung aussenden würde. Sie entspricht also der aufgetroffenen Primärmenge, vermindert um die rückdiffundierte Menge, d. i. der *absorbierten* Primärmenge.

Weder die Primärmenge noch die rückdiffundierte Menge lassen sich für sich aus den Kurven entnehmen. Dagegen ist das Ordinatenstück vom Anfangspunkt der Kurve bis zu dem Schnittpunkt D ohne weiteres als die emittierte Sekundärmenge zu deuten. Die Extrapolation gestattet demnach nunmehr die Geschwindigkeitsverteilung der Sekundärstrahlung rein darzustellen und auf ihre Abhängigkeit von der Primärgeschwindigkeit einerseits und von dem strahlenden Metall andererseits zu prüfen. Dagegen kann mit der in Rede stehenden Versuchsanordnung die Frage nach dem Sekundärstrahlungsvermögen des Strahlers nicht in einwandfreier Weise beantwortet werden, da dies ja die Kenntnis der auslösenden Primärintensität voraussetzen würde.

17. Wichtig ist nun vor allem, die Form der sekundären Geschwindigkeitsverteilung bei verschiedenen V_p sowie bei verschiedenen Strahlern einem sorgfältigen Vergleich zu unterziehen. Zu diesem Zwecke müssen die in Fig. 3 dargestellten Kurven derart umgeformt werden, daß die Sekundärmenge jeweils gleich eins gesetzt wird, wobei zugleich unter Benutzung der oben erwähnten Extrapolation der Einfluß der Rückdiffusion zu eliminieren ist. Hierbei ist zu beachten, daß die verschiedene Höhe der umzuformenden Kurven eine etwas verschiedene Genauigkeit der Reduktion bedingt.

18. In der Fig. 4 sind die in Fig. 3 bereits dargestellten Geschwindigkeitsverteilungen für Gold bei verschiedenen V_p nochmals nach der erläuterten Umformung zur Anschauung gebracht. Die beiden ausgezogenen Kurven entsprechen den Extremwerten von V_p, nämlich 2500 und 10000 Volt. Die Kurve für $V_p = 7300$ Volt ist durch einzelne Punkte angedeutet.

Die Zusammenstellung läßt keinerlei Abhängigkeit der *maximalen* Sekundärgeschwindigkeit von der Primärgeschwindigkeit in unserem V_p-Gebiet erkennen. Vielmehr beträgt sie in allen Fällen etwa 36 Volt.[1]) Einen gewissen, wenn auch

1) Die Geschwindigkeit von 36 Volt, die in den Verteilungskurven als etwa die höchste noch vorkommende Sekundärgeschwindigkeit er-

nicht sehr großen Unterschied zeigt für die verschiedenen V_p jedoch die *Form* der Geschwindigkeitsverteilungskurve. Hier erhebt sich zunächst die Frage, ob diese Abweichung nicht als eine Folge der im vorhergehenden Abschnitt behandelten Fehlerquellen anzusprechen sind. Aber die Wirksamkeit dieser Fehlerquellen ist der jeweiligen Sekundärmenge proportional, was bei der Durchgriffswirkung unmittelbar einleuchtet, bei der Wandwirkung sich aus dem weiter unten zu besprechenden Zusammenhang von Sekundärstrahlung und Rückdiffusion ergeben wird. Dann vermag hieraus der Unterschied der Kurven in Fig. 4 nicht erklärt zu werden. Man muß vielmehr annehmen, daß es sich um eine reelle Erscheinung der Geschwindigkeitsverteilung handelt. Und zwar kann dies auf zweierlei Arten gedeutet werden: Entweder liegt eine geringe Beeinflussung der *sekundären* Geschwindigkeitsverteilung vor, derart, daß bei größeren V_p auch größere Sekundärgeschwindigkeiten bevorzugt werden, wobei die maximale Geschwindigkeit jedoch dieselbe bleibt, oder aber, es ist die Ursache der Kurvenabweichungen darin zu suchen, daß bei verschiedenen V_p eine verschiedene Anhäufung langsamster *Rückkehrelektronen* im Gebiet der Sekundärgeschwindigkeiten stattfindet. Eine solche würde durch die oben vollzogene Extrapolation nicht von vornherein erfaßbar sein. Die bisher gewonnene Kenntnis reicht nicht aus, zwischen diesen beiden Möglichkeiten endgültig zu entscheiden. Immerhin verleiht der Umstand, daß die maximale Sekundärgeschwindigkeit sich nicht mit der Geschwindigkeitsverteilung ändert, der zuletzt erwähnten Möglichkeit eine größere Wahrscheinlichkeit.

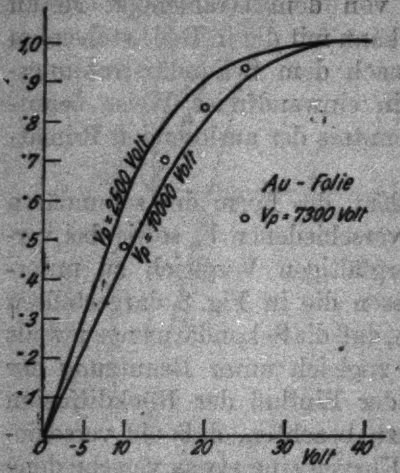


Fig. 4

sichtlich wird, entspricht übrigens gerade dem anderweitig ermittelten Durchschnittswert des Energieverbrauches bei der Auslösung eines Sekundärelektrons. Vgl. darüber P. Lenard, Ann. d. Phys. 80. S. 23. 1926, sowie Lenard-Becker, Handbuch d. Exp.-Phys. 14. S. 259. 1927.

19. Endlich zeigt Fig. 5 eine in analoger Weise hergestellte Vergleichsdarstellung für *verschiedene Strahler* bei festgehaltenem V_p (10000 Volt). Auch hier zeigt sich im wesentlichen das entsprechende Bild. Die Maximalgeschwindigkeit erweist sich als vom Strahler ebenfalls unabhängig. Dagegen treten wieder Unterschiede in der Geschwindigkeits-

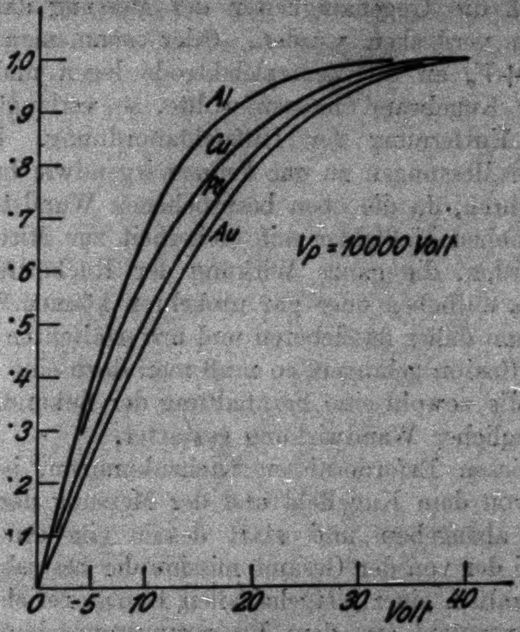


Fig. 5

verteilung auf. Und zwar in der Weise, daß in der Reihenfolge Al, Cu, Pb, Au die größeren Geschwindigkeiten mehr bevorzugt erscheinen. Wir werden in einem späteren Teil der Arbeit zeigen können, daß diese Abhängigkeit der Geschwindigkeitsverteilung vom Strahler sich auf die zuerst behandelte von der Primärgeschwindigkeit zurückführen läßt. (39.)

C. Messungen der Geschwindigkeitsverteilung des schnelleren Anteils der austretenden Strahlung in der Normalrichtung

20. Während die Versuchsanordnung mit dem Kugelfeld zur Messung sekundärer Geschwindigkeitsverteilungen als besonders günstig erschien, eignet sie sich weniger zu solchen Beobachtungen, die sich im besonderen auf die Verhältnisse

der Rückdiffusion beziehen. Man müßte nämlich, um hier die Geschwindigkeitsverteilung der Rückdiffusion zu finden, die Kurven der Fig. 3 in so vergrößertem Maßstabe aufnehmen, daß man die Steigung in ihrem hinteren Teile und noch über das dort dargestellte Intervall weit hinaus fein verfolgen könnte. Dann würden aber die Ausschläge so groß werden, daß die Ungenauigkeiten der Messung das Ergebnis vollkommen verdecken würden. Oder wenn man die Meßspannung $+V_g$ an die Zentralelektrode legen und die Aufladung der Kugelwand messen wollte, so verlangte die Isolation die Entfernung der Hilfsfeldanordnung. Dann aber könnten die Messungen zu gar keinem irgendwie brauchbaren Resultat führen, da die oben besprochenen Wandstrahlen, die durch die hohen Meßfelder mit Sicherheit zur Mittelelektrode geleitet werden, die ganze Wirkung der Rückdiffusion stark vermindern, aufheben oder gar umkehren können.[1])

Will man daher zu sicheren und unverfälschten Messungen der Rückdiffusion gelangen, so muß man dazu eine Anordnung benutzen, die sowohl eine Fernhaltung der Sekundärstrahlung als auch jeglicher Wandwirkung gestattet.

Um diesen Erfordernissen nachzukommen, ist man gezwungen, von dem Kugelfeld und der Messung der allseitigen Strahlung abzugehen und statt dessen eine Anordnung zu wählen, bei der von der Gesamtemission der bestrahlten Fläche nur die Strahlen einer festgehaltenen Emissionsrichtung durch ein Blendensystem aus dem Erzeugungsraum herausgelangen und nach Passieren eines variablen Gegenfeldes in einem Faradaykäfig aufgefangen und gemessen werden.

Mit einer Versuchsanordnung, die auf diesem Prinzip beruht, hat Hr. Becker[2]) bereits teilweise analoge Messungen mit langsamen Primärstrahlen ausgeführt. Eine ähnliche Anordnung wird nun auch bei den im folgenden Teil dieser Arbeit zu besprechenden Versuchen zur Anwendung gebracht.

21. Versuchsanordnung II. — Die benutzte Versuchsröhre zeigt in den Hauptteilen Fig. 6. Das Metallblech, in

1) Mit einer derartigen Anordnung arbeiten M. Baltruschat u. H. Starke. Die Verfasser finden bei V_g von 2200—6800 Volt keinerlei Rückdiffusion, konstatieren dagegen in einigen Fällen positiven „Netzstrom", d. h. die Wandwirkung (Fehlerquelle) überwiegt die Wirkung der Rückdiffusion. Phys. Ztschr. 23. S. 414f. 1922.

2) A. Becker, Ann. d. Phys. 78. S. 253. 1925.

dem die Rückdiffusion untersucht werden sollte, wurde in die Messingkapsel *K* eingesetzt. Die von dem Glühkopf *G* gelieferten Primärstrahlen, die ihre Geschwindigkeit in dem Feld zwischen dem Glühdraht und der gegenüberliegenden Blende erhalten, treffen nach Passieren des Blendensystems B_1 unter einem Winkel von 50° gegen die Flächennormale auf die Mitte des Metallbleches auf. Als Emissionsrichtung der zu untersuchenden Rückdiffusion wird die Normalenrichtung

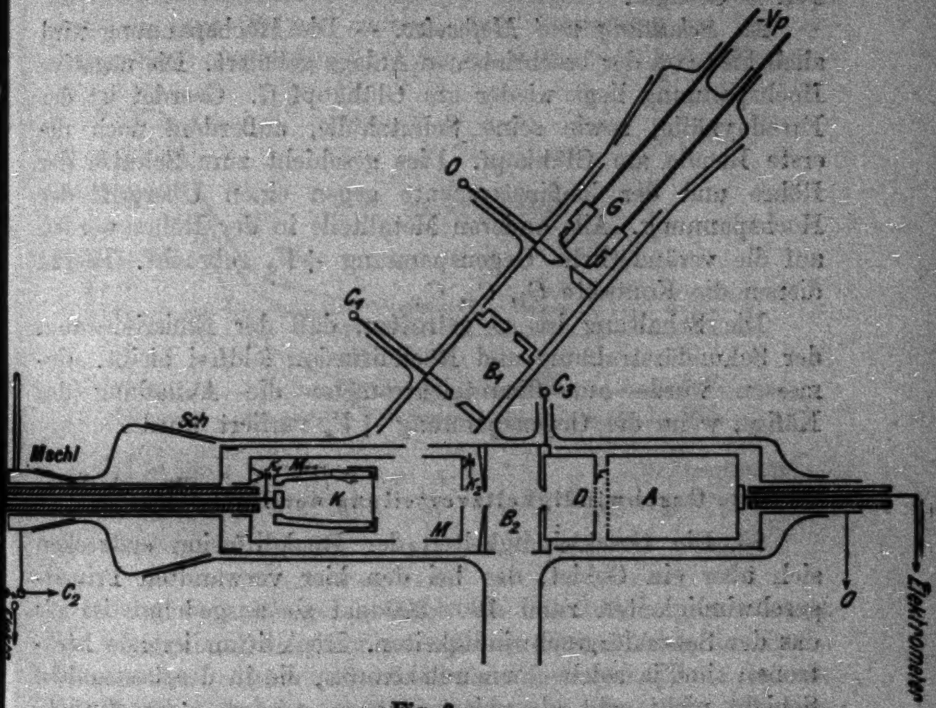


Fig. 6

selbst gewählt. Die Elektronen treten durch die Blenden B_2 (Durchmesser 5 mm) über das entgegengerichtete, durch zwei feindrähtige Platinnetze begrenzte Meßfeld *F* in den Käfig *A* ein, der mit dem Binantelektrometer verbunden ist. Das Platinnetz über der Öffnung des Käfigs ist einfach, das über der gegenüberliegenden Blende ist doppelt gelegt. Beide Grenzflächen des Meßfeldes sind, um Nebenwirkungen möglichst zu vermeiden, mit einer dünnen Rußschicht überzogen. Die zur Aufnahme des zu untersuchenden Metallbleches be-

stimmte Kapsel *K* ist von einer mit passenden Öffnungen versehenen Messinghülle *M* umgeben, die einem weiter unten zu besprechenden Zweck dient. Zur Auswechslung des Strahlers kann der ganze linke Teil des Apparates mittels eines genügend weiten Schliffes *Sch* aus der Röhre herausgenommen werden. Durch genaues Zentrieren wurde erreicht, daß der Strahler beim Wiedereinsetzen jedesmal an die gleiche Stelle kam.

Über die Vakuumverhältnisse gilt unverändert das im Teil B Gesagte.

22. *Schaltung und Meßweise.* — Die Hochspannung wird auch hier von der beschriebenen Anlage geliefert. Die negative Hochspannung liegt wieder am Glühkopf *G*. Geerdet ist der Faradaykäfig, sowie seine Schutzhülle, außerdem noch die erste Blende am Glühkopf. Dies geschieht zum Schutze der Röhre und der Meßinstrumente gegen einen Übergriff der Hochspannung. Alle anderen Metallteile in der Röhre werden auf die veränderliche Gegenspannung $+V_g$ gebracht. Hierzu dienen die Kontakte C_1, C_2, C_3.

Die Schaltung ist so getroffen, daß der Emissionsraum der Sekundärstrahlung und Rückdiffusion feldfrei bleibt. Gemessen wurde am Binantelektrometer die Aufladung des Käfigs, wenn die Gegenspannung $+V_g$ variiert wurde.

Die Geschwindigkeitsverteilung der Rückdiffusion

23. Die Geschwindigkeiten der Rückdiffusion erstrecken sich über ein Gebiet, das bei den hier verwandten Primärgeschwindigkeiten rund 100—300 mal so ausgedehnt ist als das der Sekundärgeschwindigkeiten. Rückdiffundierende Elektronen sind ja solche Primärelektronen, die in der bestrahlten Schicht nicht echt absorbiert wurden, sondern nach Zurücklegung verschieden langer Wege im Innern des Metalles wieder dessen Oberfläche verlassen. Es kommen daher Austrittsgeschwindigkeiten von 0 bis V_p vor, also auch solche, wie sie die Sekundärelektronen besitzen. Da beide Strahlenarten in diesem Intervall durch Geschwindigkeitsanalyse nicht getrennt werden können, so muß zur Vervollständigung der Rückdiffusionskurve wieder das Verfahren der Extrapolation zu Hilfe genommen werden.

24. *Geschwindigkeitsverteilungsmessungen.* Zu diesem Zwecke wurden mit der oben beschriebenen Anordnung nochmals die

die Integralkurven der Geschwindigkeitsverteilung für Gold bei verschiedenen V_p aufgenommen. Sie sind in Fig. 7 zur Darstellung gebracht. Die verzögernden Spannungen $+V_g$ sind als Abszissenwerte nach rechts, die zugehörigen Beträge der negativen Aufladung des Käfigs nach oben aufgetragen. Die Gegenspannungen wurden zwischen 0 und +70 Volt variiert. Der linke Teil der Figur zeigt also wieder die Geschwindigkeitsverteilung in ähnlicher Weise wie die Kurven der Fig. 3. Aber infolge unvermeidlicher Fehler, die durch die Feldanordnung zwischen zwei Netzen bedingt sind, erscheinen die hier erzielten Kurven zum Studium der sekundären Geschwindigkeits-

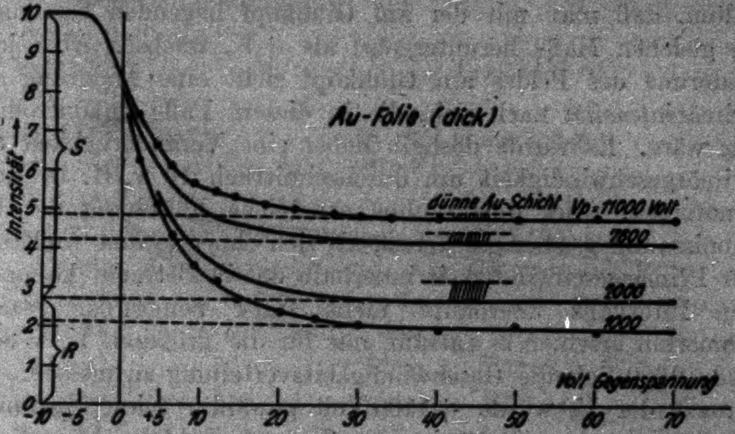


Fig. 7

verteilung weit weniger geeignet als die früher besprochenen. Wir wenden uns vielmehr sogleich der Betrachtung der Rückdiffusion zu. Es zeigt sich hier beim ersten Blick, daß die Extrapolation nach der Ordinatenachse hin sich mit sehr großer Sicherheit vollziehen läßt, wofern man nur annimmt, daß im Gebiet der Sekundärstrahlung keine besondere Häufung von rückkehrenden Elektronen stattfindet. Die Frage, ob dies zu Recht geschieht, muß freilich dabei offen bleiben. Die weiter oben mitgeteilten geringen Abweichungen der Sekundärstrahlungskurven können ja, wie wir sahen, gerade durch die Annahme einer derartigen Häufung langsamster Rückkehrelektronen gedeutet werden.

Das in der Fig. 7 dargestellte V_g-Intervall ist viel zu klein, als daß man etwas über die Geschwindigkeitsverteilung der

Rückdiffusion als Ganzes daraus entnehmen könnte. Soll dieses Ziel angestrebt werden, so müssen die Kurven nach größeren Geschwindigkeiten hin fortgesetzt werden, wobei natürlich der Abszissenmaßstab bedeutend zu verkleinern ist.

25. Zu diesem Zweck wurden besondere Meßreihen durchgeführt, bei denen die Gegenspannung $+V_g$ von 100 zu 100 Volt geändert wurde. Da sich jedoch bei der benutzten Versuchsanordnung das Gegenfeld zu dem die Primärelektronen beschleunigenden Feld hinzuaddiert, so ist für die Höhe der anzuwendenden Gegenfelder eine obere Grenze gesetzt. Man könnte zwar die Primärgeschwindigkeit dadurch aufrecht erhalten, daß man mit der am Glühkopf liegenden Spannung im gleichen Maße heruntergeht, als $+V_g$ wächst. Aber jede Änderung des Feldes am Glühkopf zieht eine Änderung der Primär*intensität* nach sich, die in diesem Falle unkontrollierbar wäre. Es wurde deshalb lieber eine Veränderlichkeit der Primärgeschwindigkeit um durchschnittlich 10 v. H. in Kauf genommen. Dies durfte ohne erhebliche Fälschung der Ergebnisse um so eher geschehen, als sich ohnedies eine Änderung der Primärgeschwindigkeit innerhalb des in Betracht kommenden Intervalls überhaupt nicht stark bemerkbar macht. Immerhin erschien es ratsam, nur für die größeren $V_p = 8000$ und 12000 Volt die Geschwindigkeitsverteilung zu messen. Als Grenze der V_g wurde $+1100$ Volt gewählt. Diese Spannung wurde von einer Batterie von Spannungsakkumulatoren geliefert. Andere Spannungsquellen kamen nicht in Frage, da die geringsten Schwankungen sich auf das Elektrometer durch Influenz übertrugen.

26. Das Ergebnis dieser Messungen ist in Fig. 8 dargestellt. Als Strahler sind hier Gold und Kupfer gewählt. Die ebenfalls dort eingezeichneten Geraden verdeutlichen den Sachverhalt. Wäre nämlich die Geschwindigkeitsverteilung der Rückdiffusion zwischen 0 und V_p eine streng lineare, so müßten sich die gemessenen Kurven mit jenen Geraden decken. Besitzen die (aus geringen Schichttiefen rückkehrenden) relativ schnelleren Elektronen eine größere Häufigkeit als die langsameren, so muß die Kurve in dem dargestellten Gebiet *über* der zugehörigen Geraden verlaufen. Sind dagegen die (aus größeren Schichttiefen rückkehrenden) relativ langsameren Elektronen häufiger, so muß die Kurve im untersuchten An-

fangsteil steiler abfallen als die betreffende Gerade. Wie man sieht, ist das letztere in ausgeprägtem Maße der Fall.

27. Hinsichtlich der größeren Häufigkeit langsamster Elektronen ist die Geschwindigkeitsverteilung der Rückdiffusion derjenigen der Sekundärstrahlung nicht unähnlich. Man könnte sogar den Gedanken in Erwägung ziehen, ob es sich nicht bei den häufiger vorkommenden Elektronen der Geschwindigkeiten von 50—1000 Volt um Sekundärelektronen handeln könnte. Zeichnet man aber die früher gefundene Sekundär-

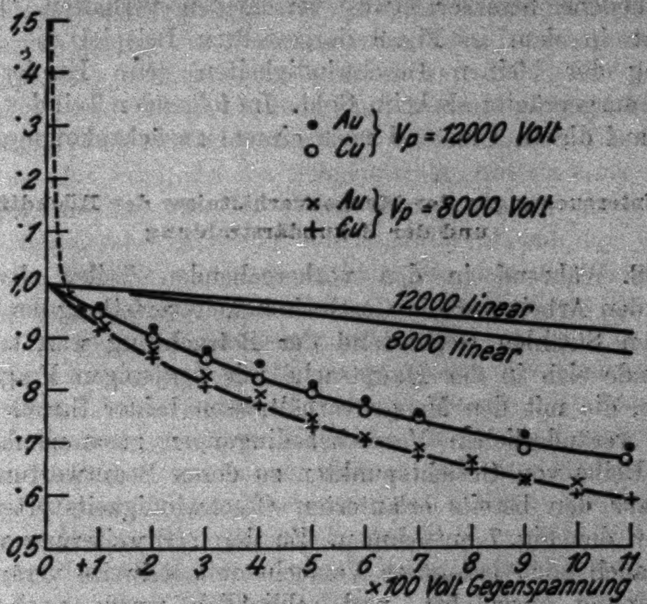


Fig. 8

strahlungskurve (Fig. 7) im richtigen Maßstabe in Fig. 8 ein (gestrichelt), so gewinnt man den deutlichen Eindruck, daß es zwei verschiedene Vorgänge sind, die sich im Kurvenbild überlagern.

Von Interesse wäre es noch gewesen, die Geschwindigkeitsverteilung der Rückdiffusion von dem Ende der schnellsten Elektronen her messend zu verfolgen. Ein solches Vorhaben ließe sich in der Weise durchführen, daß man das gesamte Blendensystem auf die Hochspannung $+V_p$ bringt, während der Käfig geerdet bleibt. Die Primärgeschwindigkeit wird in kleinen Grenzen dadurch variiert, daß man an den zunächst

geerdeten Glühkopf kleine negative Spannungen anlegt. Diese bestimmen dann die zu variierende Differenz zwischen Primärfeld und Gegenfeld. Auf die Ausführung derartiger Messungen mußte verzichtet werden, da eine völlig konstante Hochspannungsquelle hierzu benötigt würde. Die kleinsten Schwankungen rufen im Käfig Influenzerscheinungen hervor und vereiteln jede Messung.

Schließlich wäre noch darauf hinzuweisen, daß auch hinsichtlich der Geschwindigkeitsverteilung der Rückdiffusion sich verschiedene Strahler etwas verschieden verhalten. So erscheint in dem in Fig. 8 dargestellten Beispiel die Bevorzugung der kleinen Geschwindigkeiten beim Kupfer noch etwas ausgeprägter als beim Gold. Im folgenden Teil der Arbeit wird auf diesen Umstand noch einmal zurückzukommen sein.

D. Untersuchungen der Mengenverhältnisse der Rückdiffusion und der Sekundärstrahlung

28. Während in den vorhergehenden Teilen der vorliegenden Arbeit nur die Geschwindigkeitsverteilung der untersuchten Strahlen Gegenstand der Betrachtung war, soll das Folgende sich in der Hauptsache mit denjenigen Fragen befassen, die mit den Mengenverhältnissen beider Strahlenarten unter veränderlichen Versuchsbedingungen zusammenhängen. Eine Reihe von Gesichtspunkten zu deren Beantwortung läßt sich aus den bereits erläuterten Geschwindigkeitsverteilungskurven der Fig. 7 entnehmen. Zu deren Erweiterung wurden aber auch noch besondere Versuche mit teilweise veränderter Anordnung ausgeführt, und schließlich wurde noch unternommen, die hieraus gezogenen Schlüsse an Vergleichsmessungen an dünnen Metallschichten zu prüfen.

Das „Gesamtstrahlungsvermögen"

29. Unter dem Gesamtstrahlungsvermögen eines Strahlers bei einem bestimmten V_p verstehen wir das Verhältnis seiner gesamten Ausstrahlung zu der auslösenden Primärstrahlung.

$$G = \frac{R + S}{P}.$$

Hierin bedeutet R die Intensität der rückkehrenden Elektronen, S die der Sekundärelektronen und P die Intensität der Primärstrahlung. Was die hier zu besprechenden Mes-

sungen der Absolutwerte von G angeht, so möge vor Augen gehalten werden, daß sie sämtlich bei einem Einfall der Primärstrahlen unter 50° gegen die Flächennormale des bestrahlten Metallbleches zu verstehen sind.

30. *Die Versuchsanordnung zur G-Bestimmung.* — Zur Messung des Gesamtstrahlungsvermögens diente eine besondere Versuchsanordnung, die in die in Fig. 6 dargestellte Röhre eingebaut war, so daß man an ein und derselben Schicht, ohne sie herausnehmen und das Vakuum erneuern zu müssen, die Geschwindigkeitsverteilung und die Größe G ermitteln konnte. Der zur Erfüllung der letztgenannten Aufgabe geeignete Teil des Apparates befindet sich in der linken Hälfte der Röhre. Gemessen wird die Aufladung der bestrahlten Schicht, die mit dem Elektrometer verbunden werden kann. Zu diesem Zweck ist der Stiel, der die Schicht trägt, mittels eines Flintglasrohres isoliert aus der Röhre herausgeführt. Außen auf dem Flintglasrohr sitzt eine Messinghülle M auf, die in der Mitte des Deckels ein Loch enthält, das den zur Geschwindigkeitsmessung bestimmten Elektronen den Weg zum Blendensystem B_2 freigibt. Außerdem sind noch, wie in Fig. 6 ersichtlich, an zwei passend gelegenen Stellen der cylindrischen Seitenwand Löcher angebracht, durch die die Primärstrahlen auf die Schicht gelangen können. Alle drei Öffnungen zusammen betragen nur einen kleinen Teil des Raumwinkels über dem bestrahlten Flächenelement. Diese Messinghülle kann mit Hilfe zweier Schwerekontakte K_1 und K_2 entweder mit der äußeren Metallwand oder mit der Meßelektrode leitend verbunden werden. Und zwar bewirkt ein Drehen des dünnen und daher leicht drehbaren Metallschliffes *Mschl* um 180° eine Umschaltung.

31. *Meßweise zur G-Bestimmung.* — Jede Bestimmung *eines* Wertes von G erfordert zwei einzelne Beobachtungen, nämlich eine der Größe $R + S$ und eine der Größe P. Die beiden Messungen gehen folgendermaßen vor sich:

1. Messinghülle M und Schicht sind mit dem Elektrometer verbunden. Da das Ganze jetzt einen Faradaykäfig vorstellt, wird die gesamte eingestrahlte Elektronenmenge darin festgehalten. Auch die Sekundärstrahlung kann nicht herausgelangen. Die Elektrometeraufladung in einer festgehaltenen Zeit ist immer negativ und entspricht der

eingestrahlten Primärmenge, die wir mit P bezeichnet haben.

2. Drehung von *Mschl* um 180°. Jetzt ist *M* mit der Außenwand verbunden und kann somit auf dem Wege über den Kontakt C_3 auf irgendeine Spannung gebracht werden. Und zwar wird die Spannung + 50 Volt gewählt. Mit dieser Schaltung wird wieder die Aufladung der bestrahlten Schicht gemessen, die in diesem Falle positiv oder negativ sein kann.

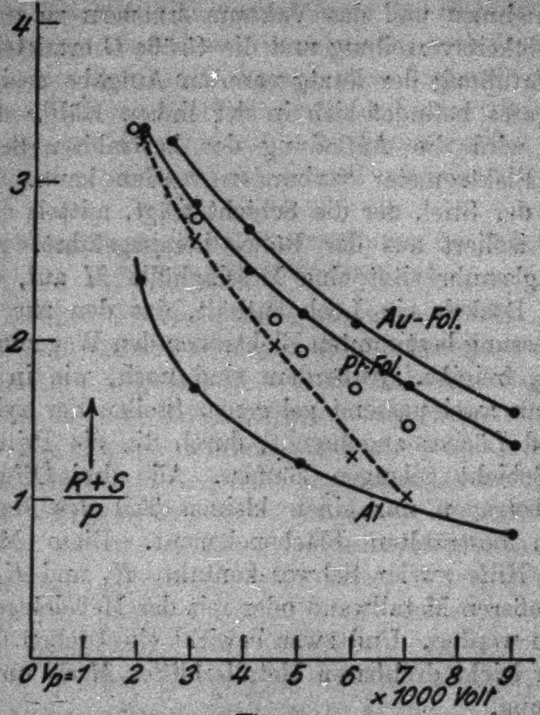


Fig. 9

Diese Aufladung rührt wieder von P her, wovon sich aber diesmal die zugehörige Sekundärmenge S und die rückkehrende Menge R subtrahieren. Das an die Hülle gelegte positive Potential verhindert die Wandstrahlung. Der (negative) Ausschlag des Elektrometers mißt also die Größe $P - (R + S)$. Da nun P aus der Messung 1. bekannt ist, berechnet man daraus leicht $R + S$. Dieser Wert ins Verhältnis zu P gesetzt, ergibt endlich das Gesamtstrahlungsvermögen G.

32. Die Ergebnisse der G-Bestimmungen. — Nach der angegebenen Methode wurden für verschiedene Metalle Meß-

reihen hergestellt, die das Gesamtstrahlungsvermögen als Funktion der Primärgeschwindigkeit darstellen. In Fig. 9 sind die Ergebnisse für Al, Au und Pt eingezeichnet. Die Kurven zeigen in einwandfreier Weise das wesentlich größere Gesamtstrahlungsvermögen des Goldes gegenüber dem des Aluminiums. Das Verhältnis G_{Au}/G_{Al} beträgt für alle untersuchten V_p rund 2. Außerdem lassen die Kurven den Abfall von G mit wachsender Primärgeschwindigkeit deutlich erkennen. Dies entspricht der bekannten Tatsache des Vorhandenseins einer optimal wirksamen Primärgeschwindigkeit bei etwa 500 Volt. Da diese Geschwindigkeit links außerhalb des hier untersuchten Gebietes liegt, muß die G-Kurve in dieser Richtung ansteigen. Nach rechts hin wird der Abfall immer flacher.

Das Verhältnis S/R

33. Im vorigen wurden die Sekundärstrahlung und die Rückdiffusion unter dem Begriff der Gesamtstrahlung zusammengefaßt. Dabei blieb es unbeachtet, in welchem Verhältnis beide Komponenten gemischt sind, und in welchem Maße jede von ihnen bei einer Änderung der Gesamtstrahlung beteiligt ist. Da aber beide Arten von Elektronenemission ihrer Ursache und ihren Eigenschaften nach (Geschwindigkeitsverteilung!) verschieden und daher grundsätzlich auseinanderzuhalten sind, so müssen sie auch hinsichtlich der Mengenverhältnisse getrennt werden.

Diesem Zweck vermag die weiter oben besprochene Extrapolation in Fig. 7 zu dienen. Denn durch sie wird die Menge der Gesamtstrahlung, dargestellt durch die Ordinate 1, in zwei Abschnitte zerlegt, deren oberer die Sekundärmenge S, und deren unterer die rückkehrende Menge R bedeutet. Diese Darstellung läßt auf den ersten Blick die Rückdiffusion als wesentlichen Bestandteil der Gesamtstrahlung bei sämtlichen hier untersuchten V_p erkennen. Bereits bei $V_p = 1000$ Volt beträgt sie in der Normalenrichtung 17 v. H. der Gesamtstrahlung, ist also keinesfalls zu vernachlässigen. Bei $V_p = 8000$ Volt ist ihr Anteil bereits auf 30 v. H. gewachsen, um endlich bei der höchsten hier benutzten Primärgeschwindigkeit von 12000 Volt bis auf 50 v. H. anzusteigen. Die angegebenen Zahlenwerte gelten im Mittel für die untersuchten Metalle Gold, Platin, Kupfer und Aluminium. Die Extrem-

werte für Gold und Aluminium sind aus der Fig. 10 zu entnehmen. Die Punkte der dort wiedergegebenen Kurven bedeuten das aus Geschwindigkeitsverteilungen (analog Fig. 7) in besprochener Weise berechnete Verhältnis S/R, wie es aus den Messungen mit verschiedenen V_p resultiert. Die Kurven als Ganzes betrachtet, zeigen seinen Gang mit veränderter Primärgeschwindigkeit.

Der Zusammenhang zwischen rückkehrender und sekundärer Menge

34. Zu wertvollen Schlüssen über das Zustandekommen der Sekundärstrahlung können wir nunmehr gelangen, wenn wir versuchen, das soeben besprochene Ergebnis zu dem vorher behandelten über die Gesamtstrahlung in Beziehung zu setzen.

Betrachten wir die S/R-Kurven für Gold und Aluminium, so fällt es auf, daß die beiden Kurven nur wenig voneinander entfernt sind, obwohl zwei Vergleichsmetalle gewählt wurden, die, wie wir bisher bemerkten, sich stets extrem verhielten. Das galt im besonderen von ihren G-Kurven. Also selbst bei diesen Metallen erweist sich *das Verhältnis* S/R bei einem festgehaltenen V_p als *eine vom Strahler nahezu unabhängige Konstante.* Diese überraschende Erscheinung kann wohl nur so gedeutet werden, daß in unserem V_p-Gebiet Rückdiffusion und Sekundärstrahlung in einem ursächlichen Zusammenhang stehen. Und dieser Schluß zieht den weiteren nach sich:

„Innerhalb des untersuchten Primärgeschwindigkeitsintervalles ($V_p = 2000-11000$ Volt) sind an der Auslösung der Eintrittssekundärstrahlung in der Hauptsache nur aus dem Innern des Strahlers *rückkehrende* Primärelektronen beteiligt."

Daß daneben die *auffallenden* Primärelektronen ebenfalls eine, wenn auch viel weniger intensive Sekundärstrahlung hervorrufen, zeigt die immerhin vorhandene Abweichung der S/R-Kurven in Fig. 10 für verschiedene Strahler. Diese läßt sich auch der Richtung nach aus den entwickelten Anschauungen heraus verstehen. Bezeichnen wir nämlich die Sekundärstrahlung der auffallenden Primärelektronen mit S_p, die der Rückkehrelektronen mit S_r, so daß $S = S_p + S_r$ gilt, dann ist statt S/R der Ausdruck $\frac{S_p + S_r}{R}$ zu setzen. Nehmen wir jetzt den Bruch S_r/R bei festgehaltenem V_p als streng konstant an, so muß der gemessene Quotient $\frac{S_p + S_r}{R}$ desto

größer ausfallen, je mehr der Summand S_p im Zähler ins Gewicht fällt. Das wird aber um so mehr der Fall sein, je weniger Rückdiffusion im Vergleich zur Primärmenge vorhanden ist, je kleiner also $\frac{S + R}{P}$. Tatsächlich liegt in Fig. 10 die Kurve des Aluminiums *über* der des Goldes.

35. Der oben gezogene Schluß über die Rückdiffusion als Ursache der *Eintritts*sekundärstrahlung erfährt außerdem eine Bestätigung, wenn man unsere Ergebnisse mit denjenigen

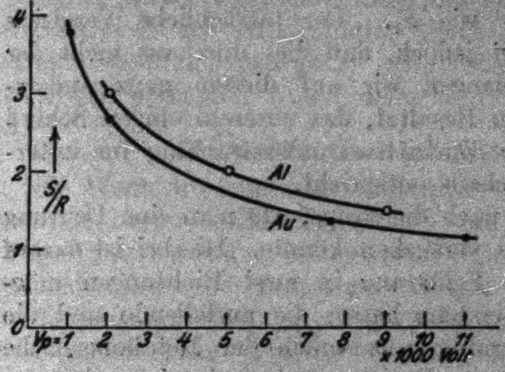


Fig. 10

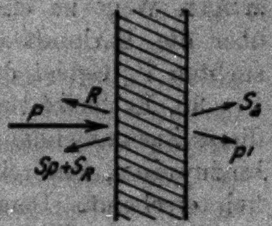


Fig. 11

vergleicht, die anläßlich ähnlicher Untersuchungen über die Geschwindigkeitsverteilung der *Austritts*sekundärstrahlung an dünnen durchstrahlten Metallschichten gefunden wurden. Solche Messungen sind von Hrn. Becker[1]) ausgeführt worden.

Die dort erhaltenen Kurven entsprechen durchaus den hier in der Fig. 7 dargestellten. Auch dort kann man einen Ausdruck bilden, der unserem S/R entspricht, und den wir S_a/P' nennen wollen. S_a bedeutet hierin die Austrittssekundärstrahlung, P' die die Schicht an der Rückseite verlassende Primärstrahlung mit einer Geschwindigkeitsverteilung zwischen 0 und $V_p - X$, wobei X den kleinsten vorkommenden Geschwindigkeitsverlust bedeutet. Wie man sich durch einen Blick auf die obenstehende Übersichtsskizze (Fig. 11) überzeugt, kann die Auslösung von S_a nur durch P' erfolgen. Da nun die Strahlung P' nach Geschwindigkeitsverteilung und Richtung gegen die Oberfläche etwa der Rückdiffusion R an der

1) A. Becker, Ann. d. Phys. 84. S. 790. 1927.

Eintrittsseite entspricht, so darf man erwarten, daß die Beziehung gilt:

$$\frac{S_a}{P'} = \frac{S_r}{R} \, .$$

Jedenfalls trifft diese Gleichung so genau zu, als es die vorhandenen Verschiedenheiten in der Geschwindigkeitsverteilung von P' und R zulassen. Da wir bei unseren Untersuchungen nun stets die Größe $\frac{S_p + S_r}{R}$ gemessen haben, so müßte diese wesentlich größer ausfallen als S_a/P', wenn S_p von ähnlicher Bedeutung wäre wie S_r. Der tatsächliche Vergleich der Meßergebnisse zeigt jedoch, daß dies durchaus nicht der Fall ist.[1]) Somit gelangen wir auf diesem ganz andersartigen Wege zu einem Resultat, das unserem obigen Schluß über die Herkunft der Eintrittssekundärstrahlung im untersuchten V_p-Gebiet durchaus entspricht.

86. Es bleibt nun noch die Frage, wie man eine Deutung dieses Zusammenhanges versuchen könnte. Hierbei ist darauf hinzuweisen, daß eine Erklärung in zwei Richtungen möglich erscheint. Denn erstens haben die auffallende und die rückkehrende Primärstrahlung bezüglich der Metalloberfläche entgegengesetzte Richtung, zweitens haben sie eine sehr verschiedene Geschwindigkeitsverteilung.

Was den zuerst genannten Unterschied angeht, so hat man wohl bei anderen Elektronenbefreiungsvorgängen Andeutungen dafür gefunden, daß eine Bevorzugung der Primärrichtung stattfindet.[2]) Es liegen jedoch hierüber keine genügend exakten Messungen vor, die darüber Aufschluß geben könnten, ob dies bei der Sekundärstrahlungserzeugung der Fall ist.

Bestimmteres läßt sich über den Einfluß des zweiten Unterschiedes zwischen Einstrahlung und Rückdiffusion aussagen. Denn es besteht kein Zweifel darüber, daß die Geschwindigkeit der auslösenden Strahlen auf die Sekundärmenge von größtem Einfluß ist. Man weiß ja, daß mit wachsendem V_p die Sekundärmenge zunächst schnell zunimmt, um bei $V_p = 500$ Volt etwa ein Maximum zu erreichen und

1) Bei größeren V_p zeigt sich eine starke Bevorzugung der Austrittssekundärstrahlung gegenüber der Eintrittssekundärstrahlung. Vgl. P. Lenard, Quantitatives über Kathodenstrahlen. S. 153.

2) P. Lenard u. A. Becker, Kathodenstrahlen. S. 274.

bei weiterem Wachsen von V_p wieder langsam abzusinken. Dieses Verhalten kann man nun so verstehen, daß die Sekundärstrahlungswirkung der auffallenden Primärelektronen nach Überschreitung des Maximums verhältnismäßig schneller abnimmt als die der Rückdiffusion. Denn deren Geschwindigkeitsverteilung wird ja auch bei beliebig wachsendem V_p noch immer das optimal wirksame Geschwindigkeitsgebiet umfassen und wie wir oben sahen, sind die langsamen Rückkehrelektronen relativ häufiger als die schnellen. Wenn sich dann V_p immer weiter von der Optimalgeschwindigkeit entfernt, so wird der von der Einstrahlung direkt ausgelöste Anteil der Sekundärstrahlung gegenüber dem von den rückkehrenden Elektronen erzeugten Anteil mehr und mehr zurücktreten.

Die Rückdiffusionskonstante p

37. Wenn wir nun nach derjenigen Größe fragen, die im Sinne der vorstehenden Ergebnisse und Betrachtungen wohl am geeignetsten wäre, in unserem V_p-Gebiete die Fähigkeit eines Metalles zur Elektronenemission zu kennzeichnen, so kommen wir zu dem Schluß, daß dies jedenfalls die „Rückdiffusionskonstante“ p ist.[1]) Denn da, wie wir oben sahen, die Sekundärmenge in bei allen Strahlern gleichartiger Weise mit der rückkehrenden Menge zusammenhängt, so kann die für die einzelnen Metalle charakteristische Eigenschaft nur darin zu suchen sein, daß sie das Eintreten der Rückdiffusion in verschiedenem Maße begünstigen. Dieses Maß gibt eben die Rückdiffusionskonstante p, die als das Verhältnis R/P gemäß unserer bisherigen Schreibweise definiert ist. Dabei hängt die Materialkonstante natürlich noch außerdem von V_p ab, bzw. muß für ein bestimmtes V_p ausdrücklich erklärt sein.

38. Wir wollen nun versuchen, aus unseren Meßergebnissen die Konstante p zu gewinnen und für Gold und Aluminium bei einigen V_p darzustellen. Dies gelingt uns wiederum durch Kombination der Größen G und S/R. Aus der Gleichung $G = \frac{R}{P} + \frac{S}{P}$ und der weiteren Beziehung, daß S/R dem gemessenen Wert gleich zu setzen ist, ergibt sich nämlich sofort

$$p = \frac{R}{P} = \frac{G}{\frac{S}{R} + 1}.$$

1) P. Lenard, Quantitatives über Kathodenstrahlen. S. 225ff.

Die so errechneten Werte für p sind in hervorragendem Maße geeignet, das relative Verhalten verschiedener Strahler bei verschiedenen Primärgeschwindigkeiten aufzuzeigen. Hinsichtlich der Gültigkeit der Absolutwerte ist jedoch eine Einschränkung zu machen. Wir haben nämlich bei der Rechnung vernachlässigt, daß die G-Messungen bei allseitiger Ausstrahlung, die S/R-Messungen bei normaler Ausstrahlung erhalten wurden. Daher besitzen die absoluten p-Werte nur dann Gültigkeit, wenn das Verhältnis S/R in der Normalenrichtung dem mittleren Wert der gesamten Ausstrahlung entspricht. Nun liegen bei der benutzten Anordnung die geometrischen Verhältnisse so, daß diese Bedingung annähernd erfüllt sein dürfte. Dennoch besteht hier eine Unsicherheit, die sich jedoch auf die Relativwerte von p nicht erstreckt. Deshalb mögen die in den drei ersten Spalten der folgenden Tabelle vereinigten p-Werte in erster Linie als solche betrachtet werden.

Tabelle

Rückdiffusionskonstanten p

	Einstrahlung unter 50°			normal[1])	
V_p =	2000	5000	9000	34000 Volt	800000[2]) Volt
Au	0,85	0,80	0,75	0,68	0,56
Al	0,60	0,42	0,32	0,28	0,23

In der vorletzten Kolonne der Tabelle sind solche p-Werte aufgenommen, die bei größerem V_p und normaler Einstrahlung Hr. Becker[1]) gelegentlich einer früheren Arbeit gefunden hatte; die letzte Spalte enthält Messungen von H. W. Schmidt[2]) an sehr schnellen Strahlen. Ein Vergleich aller Ergebnisse läßt erkennen, daß die hier berechneten p für Au und Al mit der früheren Erfahrung gut übereinstimmen. Dem Gold kommt also im Vergleich zum Aluminium ein wesentlich höheres Rückdiffusionsvermögen zu, welcher Unterschied mit wachsendem V_p sich vergrößert. Die p-Werte beider Strahler

1) A. Becker, Ann. d. Phys. 17. S. 381. 1905. Vgl. auch P. Lenard, Quantitatives über Kathodenstrahlen. S. 233.

2) Messungen von H. W. Schmidt, Ann. d. Phys. 23. S. 671. 1907. Die hier angegebenen Werte sind mit den von Hrn. Lenard durchgeführten Korrektionen versehen. Vgl. P. Lenard, Quantitatives über Kathodenstrahlen, S. 229.

nehmen ferner mit wachsendem V_p ab, offenbar deshalb, weil die echte Absorption desto mehr ins Spiel tritt, je länger die Wege der Primärelektronen im Innern des Metalls werden.

Auffallend sind die hohen Werte von p bei kleinen Geschwindigkeiten. Es gibt $p = 0{,}8$ den Umwegfaktor[1]) $B = (1+p):(1-p) = 9$, und dies zeigt an, daß die Elektronenbahn im Medium sehr vielfach geknickt sein muß. Es ist möglich, daß bei den langsamen Strahlen viele Übergänge der Diffusion in echte Reflexion vorkommen, wie überhaupt die echte Reflexion bei langsamen Strahlen in den Vordergrund tritt.[2])

39. *Zur sekundären Geschwindigkeitsverteilung.* — Im Anschluß an die Betrachtungen der letzten Abschnitte soll an dieser Stelle eine Andeutung, die im Teil *B* dieser Arbeit (19) gemacht wurde, vervollständigt werden. Es handelte sich darum, daß die Geschwindigkeitsverteilung der Sekundärstrahlung sich nicht nur mit V_p, sondern auch mit dem Strahler, und zwar in ganz entsprechender Weise ändert. Nun haben wir gefunden, daß sich die Verteilung der Rückdiffusionsgeschwindigkeiten für Cu von der für Au durch etwas größere Häufigkeit der langsamen Elektronen unterscheidet (Fig. 8). Die Häufigkeit der langsamen Rückkehrelektronen wird aber gleichfalls größer, wenn V_p kleiner wird. Da aber, wie wir jetzt wissen, im Gebiet der hier untersuchten V_p gerade die Rückdiffusion maßgebend ist für die Erzeugung der Sekundärstrahlung, so sind damit die Abhängigkeiten der sekundären Geschwindigkeitsverteilung von V_p einerseits und vom Strahler andererseits auf dieselbe Ursache zurückgeführt.

Messungen an dünnen Schichten

40. Im folgenden soll noch über einige Versuchsreihen berichtet werden, bei denen an Stelle der bisher verwandten, praktisch unendlich dick zu nennenden Metallbleche bzw. Folien besonders hergestellte dünne Folien benutzt wurden. Dies geschah zum Teil in der Absicht, nochmals auf ganz andersartigem Wege eine Prüfung der im vorhergehenden gezogenen Schlüsse vorzunehmen. Außerdem sollte aber auch eine weitere Konstante der Rückdiffusion, die „Rückdiffusions-

1) P. Lenard, Quantitatives über Kathodenstrahlen. S. 45 u. 215.
2) Lenard-Becker, Kathodenstrahlen. S. 386.

dicke" in den Bereich der Messungen einbezogen werden. Denn derartige Messungen liegen in unserem V_p-Gebiet überhaupt noch nicht vor.

Sämtliche im folgenden verwandten Folien wurden durch Kathodenzerstäubung hergestellt. Als Material dienten Gold und Platin. Die Schichten waren zum Teil auf einer Quarzplatte als Unterlage aufgestäubt, zum Teil wurden sie auch als freie Schichten hergestellt. Hierzu diente ein Verfahren mit Zuhilfenahme von polierten Steinsalzplatten, das von den Herren Lauch u. Ruppert[1]) angegeben wurde. Wenn es darauf ankam, die Dicke der Schichten zu messen, so mußten zwei verschiedene Verfahren angewandt werden, je nachdem die Folien durchsichtig waren oder nicht. Im ersten Falle wurde eine optische Methode[2]) benutzt, im andern Falle geschah die Dickenmessung durch feine Wägung.

S/R-Messungen an dünnen Schichten

41. An Stelle der früher benutzten dicken Goldfolie wurde jetzt eine frei aufgespannte, hellgrün und klar durchsichtige Goldhaut auf die Kapsel K (Fig. 6) aufgesetzt und die Geschwindigkeitsverteilungskurve analog den in Fig. 7 wiedergegebenen Kurven aufgenommen. Das Ergebnis war folgendes: Die Kurvenform, also auch die sekundäre Geschwindigkeitsverteilung blieb unverändert gegen die an der dicken Schicht gemachten Messungen. Dagegen zeigte sich eine etwas höhere Lage des horizontalen Astes, und zwar bei allen V_p. In Fig. 7 ist diese Verschiebung durch gestrichelte Kurvenstücke angedeutet. Das bedeutet ein etwas geringeres S/R der dünnen Schicht. Würde man nun die Sekundärstrahlung als hauptsächlich durch die auffallende Primärstrahlung hervorgerufen betrachten, so ließe sich dieses Ergebnis nicht verstehen. Im Gegenteil müßte bei der dünnen Schicht das Fehlen der aus der größten Tiefe kommenden langsamen Rückdiffusion ein Hervortreten der Sekundäremission bewirken. Betrachtet man jedoch die Sekundäremission als vorwiegend durch rückkehrende Elektronen ausgelöst, so muß ja beim Übergang zu dünnen Schichten S/R im wesentlichen ungeändert bleiben.

---

1) K. Lauch u. W. Ruppert, Phys. Ztschr. 27. S. 452. 1926.
2) H. Goldschmidt u. H. Dember, Ztschr. f. techn. Phys. 7. S. 141. 1926.

Eine kleine Verschiebung nach geringeren Werten ist deshalb zu erwarten, weil gerade die langsamen Rückkehrelektronen die größte Sekundärwirkung besitzen. Und solche kommen in erster Linie in Wegfall. Unsere Vorstellungen über die Ursache der Sekundärstrahlung erfahren also durch den Versuch an dünnen Schichten eine erneute Bestätigung.

Die Rückdiffusionsdicke x_{III}

42. Die Rückdiffusionsdicke x_{III} eines Metalles für eine bestimmte Primärgeschwindigkeit ist bekanntlich die Dicke der Schicht, aus der noch merklich Primärelektronen zurückkehren können.[1]) Ihrer Natur nach ist die Größe x_{III} stets unscharf begrenzt und daher experimentell nur bei Angabe eines bestimmten rückdiffundierenden Bruchteiles der vollen Rückdiffusion exakt zu ermitteln.

In der vorliegenden Arbeit wurde der Versuch gemacht, für das auch sonst hier untersuchte Geschwindigkeitsgebiet die Rückdiffusionsdicke einer Zerstäubungsschicht aus Platin zu bestimmen. Die Schichten befanden sich diesmal auf einer Quarzunterlage. Auf diese Weise konnte man die Schichtdicke am feinsten variieren und messen. Das Verhalten der Unterlage hinsichtlich Elektronenemission spielt bei den Messungen keine Rolle. Es muß nur von dem des zu untersuchenden Materiales deutlich verschieden sein. Beobachtet kann sowohl eine Änderung der rückkehrenden Menge, als auch der Geschwindigkeitsverteilung der Rückdiffusion werden, wenn bei abnehmender Schichtdicke dieselbe eine gewisse Grenze erreicht. Diese betrachten wir dann als die Rückdiffusionsdicke.

43. Für die rückkehrende *Menge* ist die Gesamtstrahlung ein gutes Maß, da, wie wir sahen, auch die sekundäre Menge mit der rückkehrenden Menge nahezu proportional abnimmt. Es wurden deshalb in bekannter Weise G-Bestimmungen an Platinschichten verschiedener Dicke angestellt. Und zwar zunächst an einer sehr dicken Bestäubungsschicht. Diese Messung lieferte in Übereinstimmung mit der bereits erwähnten an einer dicken gewalzten Pt-Folie die in Fig. 9 eingezeichnete Pt-Kurve. Weiter wurde eine entsprechende Meßreihe an einer hellgrau durchsichtigen Schicht von 15 $\mu\mu$ Dicke ausgeführt.

---

1) P. Lenard, Quantitatives über Kathodenstrahlen. S. 45 u. 214.

Sie ergab die gestrichelte Kurve in der gleichen Figur. Damit war erwiesen, daß tatsächlich eine Dickenabhängigkeit der Größe G besteht, und damit auch, daß diese sich zur Feststellung der Rückdiffusionsdicke eignet. Nun galt es noch, den Dickenbereich zu ermitteln, in dem sich ein erstes Abweichen der G-Kurve von der normalen Lage erkennen ließ. Eine größere Anzahl von Meßreihen mit verschieden dicken Schichten ergab, daß eine Schicht von 120 $\mu\mu$ sich noch wie eine dicke Folie verhielt, eine Schicht von 80 $\mu\mu$ dagegen die in der Fig. 9 eingetragenen Punkte (○) lieferte. Zwischen beiden Dicken befindet sich demnach die etwa auf 90 v. H. sich beziehende Rückdiffusionsdicke.

44. Im gleichen Dickenbereich trat auch eine Veränderung der Geschwindigkeitsverteilung der Rückdiffusion ein, indem sich die einfache in Fig. 8 dargestellte Kurvenform in mehrere Stufen aufteilte, eine Erscheinung, die sich mit weiter abnehmender Schichtdicke immer deutlicher ausprägte, und die jedenfalls als eine Wirkung der Quarzunterlage anzusprechen ist.

Die Feinheit der beiden Methoden zur x_{III}-Bestimmung reicht nicht dazu aus, für die verschiedenen hier benutzten V_p verschiedene x_{III}-Werte zu ermitteln. Immerhin zeigen die Kurven in Fig. 9, daß die Abweichungen für eine festgehaltene Schichtdicke mit wachsendem V_p größer werden.

45. Man kann den gefundenen x_{III}-Wert mit demjenigen vergleichen, den Hr. Becker[1]) für eine gewalzte Goldfolie bei $V_p = 35000$ Volt und normaler Einstrahlung erhalten hat. Rechnet man diesen mit Hilfe der von Hrn. Lenard[2]) angegebenen Formel

$$x_{\text{III}} = \frac{\log 10}{\alpha \cdot f},$$

worin α den praktischen Absorptionskoeffizienten und f eine bei Stoffen großer Atomgewichte den Wert 1 annehmende Konstante bedeutet, auf Platin und $V_p = 10000$ Volt um, so erhält man 15 $\mu\mu$ als Rückdiffusionsdicke für 90 v. H. der gesamten Rückdiffusion. Wie wir sehen, ist der hier gewonnene Wert von etwa 100 $\mu\mu$, obgleich bei schiefer Einstrahlung gewonnen, 7 mal größer als der errechnete. Es könnte die Ursache in der besonderen Struktur der benutzten Zerstäubungs-

1) A. Becker, Ann. d. Phys. 17. S. 430. 1905.

2) P. Lenard, Quantitatives über Kathodenstrahlen. S. 214.

schicht liegen, aber auch darin, daß wir den Absorptionskoeffizienten α für unsere V_p durch Interpolation zwischen den bisher bei größeren und kleineren V_p gemessenen *massenproportional* berechneten.[1]) In letzterem Sinne sprechen die Ergebnisse, die Hr. Becker[2]) bei Geschwindigkeiten, die innerhalb unseres Intervalles liegen, hinsichtlich der Absorption bei Gold erhielt. Es zeigte sich die Absorption der Metalle (Au, Ni, Al) bei diesen Geschwindigkeiten in der Tat erheblich geringer als massenproportional, so daß guter Anschluß nach obiger Gleichung zu bestehen scheint. Es soll noch bemerkt werden, daß die gefundene Rückdiffusionsdicke etwa das 10-fache des Radius der molekularen Wirkungssphäre beträgt.

Zusammenfassung

1. Es wird eine Versuchsanordnung konstruiert, die eine einwandfreie Feststellung der aus einem bestrahlten Leiter austretenden Geschwindigkeitsverteilung gestattet. Wesentlich ist hierbei die weitgehende *Vermeidung von Wandstrahlenwirkung*, was an einer Reihe von Kontrollversuchen aufgezeigt wird (12).

2. Die mit dieser Anordnung erhaltene Geschwindigkeitsverteilung wird nach feststehenden Definitionen in einen rückdiffundierten (R) und einen sekundär gestrahlten Anteil (S) geschieden (16), wobei allerdings nicht ohne eine gewisse Extrapolation verfahren werden konnte, deren Sinn jedoch ausdrücklich erläutert ist.

3. Nach solcher Scheidung werden die *sekundären Geschwindigkeitsverteilungen* der Metalle Au, Pb, Cu und Al bei verschiedenen Primärgeschwindigkeiten (V_p) zwischen 2000 und 10000 Volt untersucht. Das Geschwindigkeitsgebiet der Sekundärstrahlung erstreckt sich von 0 bis etwa 36 Volt und zeigt keinerlei Abhängigkeit von V_p und vom Strahler (18). Hingegen besteht eine solche in geringem Grade hinsichtlich der *Form* der Geschwindigkeitsverteilungskurve (17). Die Größe der maximal vertretenen Geschwindigkeit ist aus den Beobachtungen nicht mit Sicherheit zu entnehmen; sie ist aber nach den Kurven unzweifelhaft sehr klein, so daß Geschwindig-

1) P. Lenard, Quantitatives über Kathodenstrahlen. Tafel III.
2) A. Becker, Ann. d. Phys. 84. S. 789. 1927.

keiten gegen 36 Volt hin nur selten vorkommen. Bemerkenswert ist übrigens die Übereinstimmung dieser selten vorkommenden Höchstgeschwindigkeit mit dem für Sekundärstrahlung anderweitig gefundenen mittleren Energieverbrauch (18).

4. Mit einer anderen Versuchsanordnung, die die Elektronenemission in der Normalenrichtung zu messen gestattet, wird die Geschwindigkeitsverteilung des schneller austretenden Anteils der Ausstrahlung gemessen. Dieser Anteil umfaßt in steigendem Maße Geschwindigkeiten, die sehr viel kleiner sind als die der auftreffenden Elektronen (26).

5. Der so gemessene Anteil erweist sich nach der benutzten Unterscheidungsweise (16) als ausschließlich von Rückdiffusion herrührend (27).

6. Es werden Untersuchungen der *Mengenverhältnisse von Rückdiffusion und Sekundärstrahlung* angestellt. Es werden Messungen des „Gesamtstrahlungsvermögens" (29) einiger Strahler für die Primärgeschwindigkeiten von 2000—9000 Volt ausgeführt (32). Ferner wird das Verhältnis der Sekundärmenge zur jeweils zugehörigen Rückdiffusionsmenge S/R für Au und Al bei verschiedenen V_p festgestellt (33). Dieses erweist sich vom Strahler nur in geringem Maße abhängig.

7. Aus dem Vergleich des Gesamtstrahlungsvermögens mit dem Verhältnis S/R ergibt sich der wichtige Schluß, daß im *hier untersuchten V_p-Gebiet die Eintrittssekundärstrahlung fast ausschließlich durch rückkehrende Primärelektronen ausgelöst* wird (34). Dieser Schluß ist in Übereinstimmung mit schon vorhandenen Ergebnissen (35).

8. Die Kombination der Ergebnisse über das Gesamtstrahlungsvermögen und den Ausdruck S/R läßt ferner eine Bestimmung der *Rückdiffusionskonstante* (37) für Gold und Aluminium zu (38). Die Rückdiffusionskonstante ist die in dem hier untersuchten V_p-Gebiet für das ganze Verhalten eines Strahlers hinsichtlich der Elektronenemission kennzeichnende Konstante.

9. Die entwickelten Schlüsse über die Herkunft der Eintrittssekundärstrahlung erfahren eine Bestätigung durch Kontrollversuche an freien dünnen Goldschichten, wobei die Änderung des Verhältnisses S/R mit abnehmender Schichtdicke verfolgt wird (41).

10. Nach zwei verschiedenen Methoden wird die „*Rückdiffusionsdicke* x_{m}" (42) einer durch Kathodenzerstäubung hergestellten Platinschicht für die Primärgeschwindigkeiten 4000 bis 9000 Volt übereinstimmend zwischen 80 und 120 $\mu\mu$ liegend gefunden (43). Dieser Wert erscheint im Vergleich mit der Erfahrung bei höheren V_p auffallend groß (45), was jedoch mit der Rückdiffusionstheorie bei Berücksichtigung der wesentlich untermassenproportional gefundenen Absorption der hier benutzten Elektronen in Übereinstimmung ist.

Vorstehende Arbeit wurde auf Anregung von Hrn. Prof. A. Becker ausgeführt. Ich möchte an dieser Stelle Hrn. Geh. Rat Prof. P. Lenard und Hrn Prof. A. Becker für die stete Förderung meiner Untersuchungen herzlichsten Dank aussprechen.

(Eingegangen 22. Juni 1928.)

2. *Über die Zuverlässigkeit der Sondenmessungen im dunklen Kathodenraum der Glimmentladung;* *von A. Wehnelt und G. Schmerwitz*

Aus den Sondenmessungen im Kathodendunkelraum hat sich bei verhältnismäßig geringen Stromdichten stets ein kontinuierlicher Verlauf des Potentials ergeben. Die Messungen von Brose[1]) hingegen haben gezeigt, daß bei kleinen Kathoden und relativ großen Stromdichten ein Potentialverlauf entsteht, der, wie sich aus den Broseschen Kurven für die Feldstärke entnehmen läßt, in der Nähe der Kathode zuerst einen geringen, dann einen stärkeren Anstieg zeigt, um dann erst wieder in normaler Weise abzunehmen. Das Ergebnis dieser Arbeit ist in den neueren Handbüchern meist dahin gedeutet worden, daß die Sondenmessungen in der Nähe der Kathode mit großen Fehlern behaftet sind. Wenn wir dieses auch nicht in vollem Maße ablehnen, so können wir doch durch folgende Versuche den Beweis erbringen, daß die Sondenmessungen nicht ganz so fehlerhaft sind, wie man allgemein annimmt.

Versuche

Hr. Bastian hat im hiesigen Institut eine Arbeit[2]) ausgeführt, worin er unter anderem auch die Sondenmethode bei Messungen in engen Röhren, wie sie Hr. Brose benutzt hat, gebraucht. Das Rohr, das er verwendet, ist in Fig. 1 dargestellt. *A* ist die Anode, *K* die Aluminiumkathode mit ebener Stirnfläche; sie ist an einem Messingstab *b* mit Gewinde befestigt, der in der Führung *f* ohne sich zu drehen gleiten kann. Auf dem Gewinde sitzt die Mutter *m*, die fest mit dem Konus des Schliffes *c* verbunden ist. Durch Drehen des Konus wird die Kathode um meßbare Beträge verschoben. In das

1) E. Brose, Ann. d. Phys. 58. S. 731. 1919.
2) B. Bastian, Dissertation, Berlin 1927.

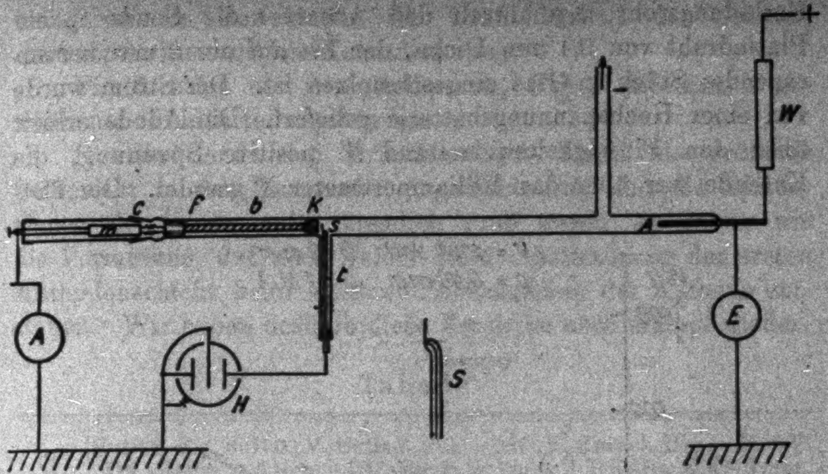


Fig. 1

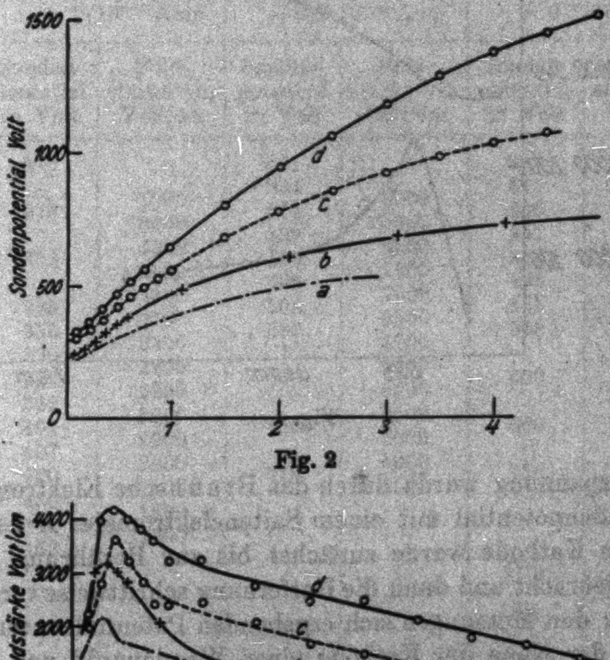


Fig. 2

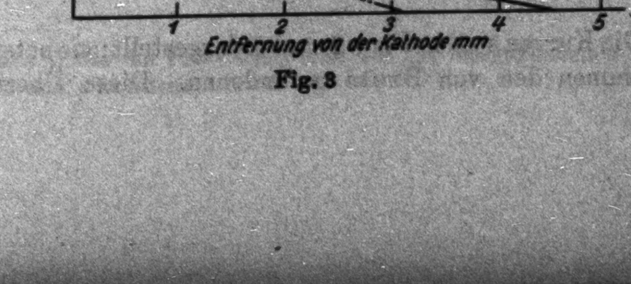


Fig. 3

Entladungsrohr ragt durch den Ansatz t die Sonde S, ein Platindraht von 0,1 mm Dicke, der bis auf ein 2 mm hervorragendes Stück in Glas eingeschmolzen ist. Der Strom wurde von einer Hochspannungsbatterie geliefert. Die Anode erhielt über den Flüssigkeitswiderstand W positive Spannung, die Kathode war über das Milliamperemeter A geerdet. Die Ent-

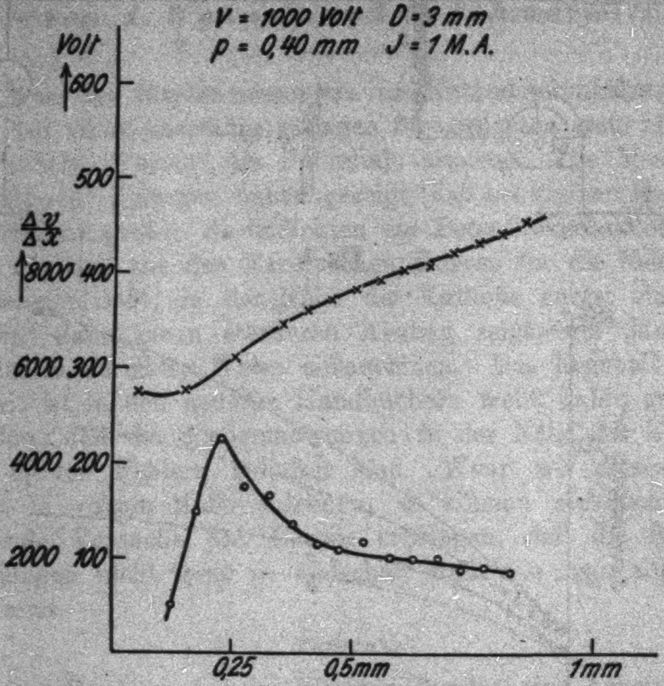


Fig. 4

ladungsspannung wurde durch das Braunsche Elektrometer E, das Sondenpotential mit einem Saitenelektrometer H bestimmt.

Die Kathode wurde zunächst bis zur Berührung mit der Sonde gebracht und dann die Entfernung schrittweise vergrößert. Die aus den Messungen sich ergebenden Potentialkurven zeigen alle in der Nähe der Kathode einen Wendepunkt und die abgeleiteten Kurven für die Feldstärke ein Maximum an dieser Stelle.

Die Kurven sind in Figg. 2 und 3 dargestellt; sie entsprechen vollkommen den von Brose gefundenen. Diese Übereinstim-

mung ist ein Beweis für die Brauchbarkeit der Sondenmessungen im dunklen Kathodenraum.

Fig. 2 zeigt die Potentialkurven, Fig. 3 die daraus gewonnenen Feldverteilungskurven.

Da die Sonde bei Hrn. Bastian durch ein größeres Seitenrohr in das Hauptrohr eingeführt war, und die Dimensionen der Sonde selbst ziemlich groß waren, so hatten wir die Vermutung, daß noch Fehler durch Abschnürung der ersten Kathodenschicht beim weiteren Zurückziehen der Kathode entstehen. Wir haben deshalb diese Versuche noch einmal wieder-

Tabelle

Entfernung von der Kathode in mm	Entlad.-Pot. = 1000 V. DK.-Raum = 3 mm Druck p = 0,4 mm Hg Stromstärke J = $1 \cdot 10^{-3}$ Amp.		Entlad.-Pot. = 2200 V. DK.-Raum = 7 mm Druck p = 0,135 mmHg Stromstärke J = $0{,}8 \cdot 10^{-3}$ Amp.		Entlad.-Pot. = 2800 V. DK.-Raum = 10 mm Druck p = 0,084 mmHg Stromstärke J = $0{,}3 \cdot 10^{-3}$ Amp.	
	Sondenpotential in Volt	Feldstärke¹) in Volt/cm	Sondenpotential in Volt	Feldstärke¹) in Volt/cm	Sondenpotential in Volt	Feldstärke¹) in Volt/cm
0,05	275		361		332	
0,1		1000	354	3000	315	3000
0,15	275	3000	371	5500	330	5000
0,2		4500	399	6500	357	6000
0,25	312	3500	433	7500	386	7500
0,3		3300	468	7000	425	8000
0,35	345	2700	503	6500	465	8500
0,4	358	2300	530	6700	500	8500
0,45	370	2200		6300		8400
0,5	382	2300	600	6000	600	8200
0,55	392	2000		5500		7500
0,6	403	2000	650	5000	660	7500
0,65	407	2000		5000		8000
0,7	420	1800	710	4500	750	8000
0,75	430	1800				8000
0,8	438	1700				8000
0,85	453					7000
0,9					910	6000
0,95						7500
1,0					970	7500
1,05						7500
1,1					1030	6000
1,15						
1,2					1110	

1) Die Werte der Feldstärken sind aus den ausgeglichenen Kurven Figg. 4, 5 und 6 ermittelt.

holt mit einer feineren Sonde aus 0,06 mm Wolframdraht, der bis auf eine Spitze von 0,2 mm aus einem haardünnen Glas-

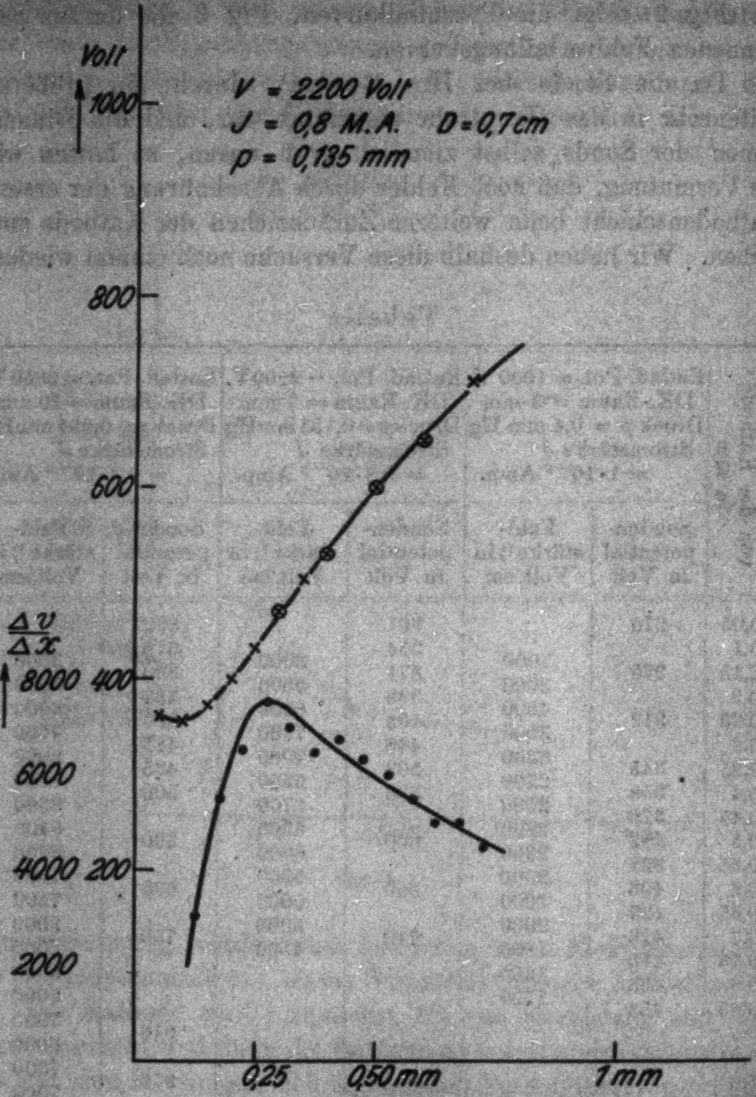
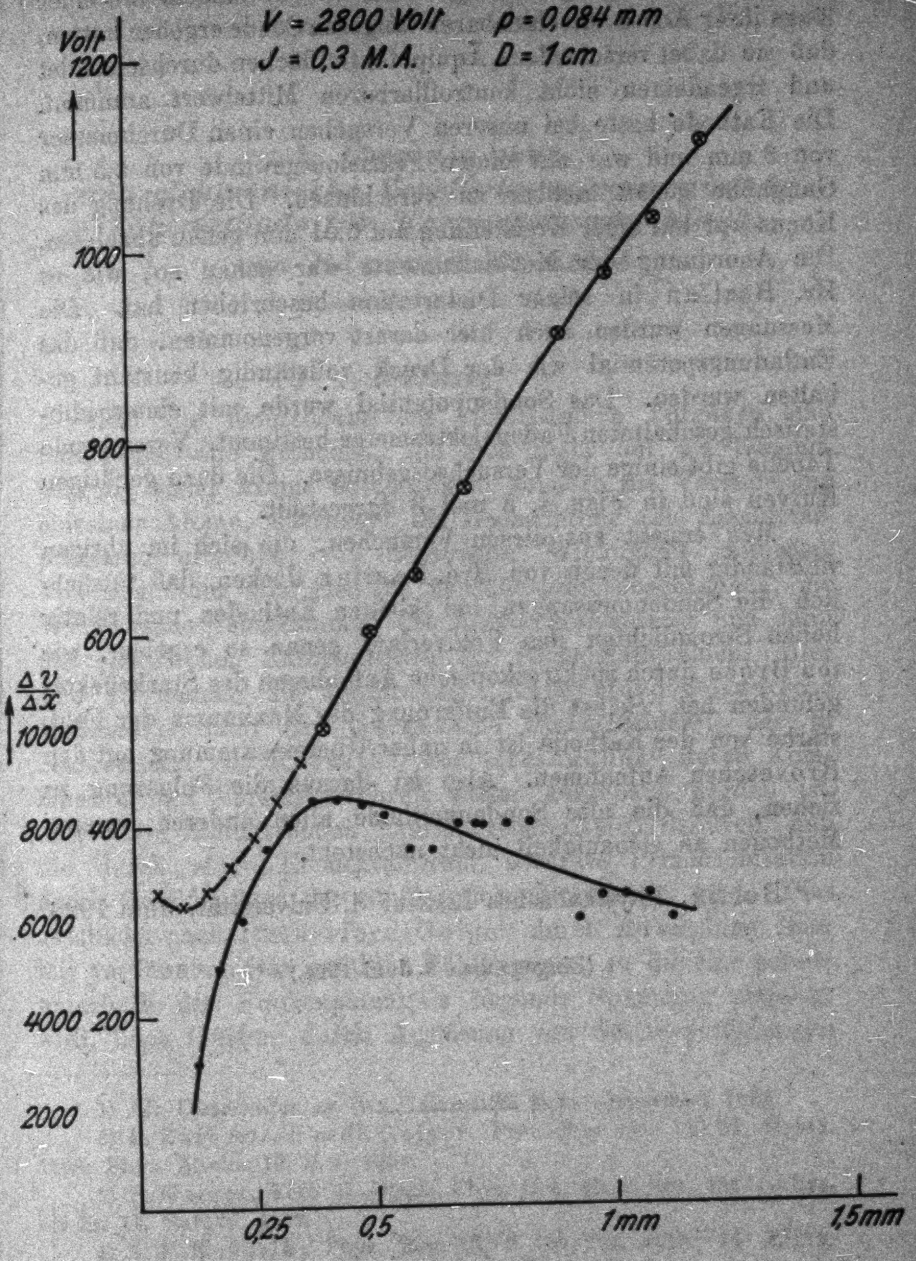


Fig. 5

rohr herausragte. Die Sonde wurde durch eine feine 0,3 mm starke Bohrung in der Glaswand in das Hauptrohr eingeführt, so daß das freie Ende genau parallel mit der Kathode und in Höhe der ersten Kathodenschicht stand.



V = 2800 Volt
p = 0,084 mm
J = 0,3 M.A.
D = 1 cm
Volt
1200
1000
800
600
400
200
Δv/Δx
10000
8000
6000
4000
2000
0,25
0,5
1 mm
1,5 mm

Fig. 6

Diese Anordnung wurde gewählt, da Vorversuche mit einer längs ihrer Achse verschiebbaren längeren Sonde ergeben hatten, daß sie dabei verschiedene Äquipotentialflächen durchschneidet und irgendeinen nicht kontrollierbaren Mittelwert annimmt. Die Kathode hatte bei unseren Versuchen einen Durchmesser von 8 mm und war mit einem Präzisionsgewinde von 0,5 mm Ganghöhe genau meßbar zu verschieben. Die Drehung des Konus war auf einer Kreisteilung auf 0,01 mm genau abzulesen. Die Anordnung der Meßinstrumente war genau so, wie es Hr. Bastian in seiner Dissertation beschrieben hat. Die Messungen wurden auch hier derart vorgenommen, daß das Entladungspotential wie der Druck vollständig konstant gehalten wurden. Das Sondenpotential wurde mit einem idiostatisch geschalteten Fadenelektrometer bestimmt. Vorstehende Tabelle gibt einige der Versuchsergebnisse. Die dazu gehörigen Kurven sind in Figg. 4, 5 und 6 dargestellt.

Man ersieht aus diesen Versuchen, die sich im übrigen vollständig mit denen von Hrn. Bastian decken, daß tatsächlich die Sondenmessungen bei kleinen Kathoden und relativ hohen Stromdichten den Feldverlauf genau so ergeben, wie ihn Brose durch spektroskopische Aufnahmen des Starkeffektes gefunden hat. Selbst die Entfernung des Maximums der Feldstärke von der Kathode ist in naher Übereinstimmung mit den Broseschen Aufnahmen. Also ist daraus die Folgerung zu ziehen, daß die alte Sondenmethode allen anderen neueren Methoden an Genauigkeit nicht nachsteht.

Berlin, Physikalisches Institut d. Universität, Juni 1928.

(Eingegangen 8. Juni 1928.)

3. *Über die neue, rein elektronische Verstärkung verwendende Zählmethode für Korpuskularstrahlen*[1]; *von Edouard Ramelet*

(Hierzu Tafel XXI bis XXV)

Einleitung

Für die Erforschung der atomistischen Vorgänge sind naturgemäß alle Methoden, die sich nicht auf die Gesamtwirkung vieler Atome beschränken, sondern die Veränderung einzelner Atome, überhaupt die Beobachtung von Elementarprozessen erlauben, von besonderer Wichtigkeit geworden. Von Bedeutung sind hier die Scintillationsbeobachtungen, die Wilsonsche Nebelkammer, der Millikankondensator und dann die elektrischen Zählmethoden für Elementarstrahlen. Hier sind zu nennen die ursprüngliche Rutherford-Geigersche Methode[2], dann der Geigersche Spitzenzähler[3], der in neuerer Zeit von Kovarik[4] und Greinacher[5] durch Kombination mit Verstärkerröhren weiter ausgebaut worden ist. Alle diese Zählmethoden charakterisieren sich dadurch, daß die durch einen Elementarstrahl bewirkte Primärionisation durch Zuhilfenahme der Stoßionisierung verstärkt wird. Dies geschieht nach Rutherford-Geiger durch Anwendung einer mit verdünntem Gas gefüllten Zählkammer, an die eine gerade unterhalb des Funkenpotentials liegende Spannung angelegt wird, nach Geiger durch Auslösung von Spitzenentladungen

1) Als Dissertation an der Universität Bern eingereicht 1928.

2) E. Rutherford u. H. Geiger, Proc. Roy. Soc. (A) 81. S. 141. 1908; Phys. Ztschr. 10. S. 1. 1909.

3) H. Geiger, Verh. d. Dtsch. Phys. Ges. 15. S. 534. 1913; Phys. Ztschr. 14. S. 1129. 1913.

4) A. F. Kovarik, Phys. Rev. 13. S. 153, 272. 1919; 14. S. 179. 1919; 19. S. 433. 1922.

5) H. Greinacher, Ztschr. f. Phys. 23. S. 361. 1924.

bei passender Spitzenspannung. So lassen sich Stromstöße erzielen, die leicht mittels eines Elektroskops, ja sogar mittels eines Telephons nachgewiesen werden können, und die sich mit der Kovarik-Greinacherschen Verstärkeranordnung bis zur Betätigung von Lautsprechern und gewöhnlichen Galvanometern steigern lassen. Die Spitzenmethode hat sich infolge ihrer Einfachheit und vielseitigen Verwendbarkeit als sehr wertvoll erwiesen, namentlich, nachdem durch zahlreiche Arbeiten (vgl. Literatur etwa bei Greinacher, a. a. O.) die Fehlerquellen eingehend studiert waren. Als technische Forderung hat sich ergeben, daß vor allem der Behandlung und Lage der Zählerspitze und der Vermeidung von Staub in der Zählkammer Aufmerksamkeit zu schenken ist. Dadurch kann weitgehend erreicht werden, daß 1. jeder Elementarstrahl eine (kurze) Spitzenentladung auslöst, 2. die Spitze ohne Elementarstrahl nicht anspricht. Trotz der zahlreichen Arbeiten haben sich indessen immer wieder Bedenken geäußert über die absolute Zuverlässigkeit der Methode bzw. die restlose Beseitigung der „natural disturbances“. Auch ist darauf hingewiesen worden, daß die Strahlenanalyse (z. B. die Unterscheidung von α- und H-Strahlen), selbst in der Kombination des Zählers mit Verstärkern [Greinacher und neuerdings N. Kreidl[1])] nur sehr unvollkommen ist, indem die Spitzenentladungen in keinem einfachen Verhältnis zur Primärionisierung steht. Es war daher ein Fortschritt, als es Greinacher[2]) gelang, eine Methode zu realisieren, bei der jede Spitzenentladung, überhaupt die Anwendung jeglicher Stoßionisierung als Verstärkung, vermieden ist und die zudem die Primärionisierung quantitativ mißt. Greinacher hat gezeigt, daß man durch ausschließliche Anwendung von Elektronenröhren den Primäreffekt eines α-Strahls so weit verstärken kann, daß man ihn im Telephon bzw. Lautsprecher hören und mittels Galvanometer ballistisch messen kann. Dabei ergab sich, wie erwartet, eine hohe Selektivität der Methode, wie sie ja zur Unterscheidung verschiedener Strahlenarten erforderlich ist. So stören z. B. β- und γ-Strahlen die Registrierung von α-Strahlen in keiner Weise, da sie entsprechend ihrem mehrhundertfach kleineren

1) N. Kreidl, Wien. Berichte 2a. S. 136, 589. 1927.
2) H. Greinacher, Ztschr. f. Phys. 36. S. 364. 1926.

Ionisierungsvermögen nicht registriert werden. Gleichzeitig mit α-Strahlen können indessen H-Strahlen registriert werden, da das Ionisierungsvermögen von der gleichen Größenordnung ist. Wie Greinacher in einer zweiten Arbeit[1]) mitteilt, zeigt sich hier sehr schön der Unterschied der Ionisierung durch die verschiedene Größe der Registrierimpulse. Aus den photographischen Registrierungen am Oszillograph ergab sich bei den gewählten Versuchsbedingungen das Verhältnis der Registrierimpulse von α- und H-Teilchen zu etwa 2,5. Der Unterschied ist genügend, um auch akustisch α- und H-Teilchen voneinander unterscheiden zu können. Hierzu ist einfach die Einschaltung eines Telephons oder Lautsprechers in den Anodenkreis der letzten Lampe erforderlich. Auch Ortner und Stetter[2]) ist es inzwischen gelungen, die neue Methode nach Greinacher mit einigen Abänderungen in den Details zu realisieren, und berichten sie über die Hörbarmachung des Atomzerfalls. In der zitierten zweiten Arbeit hat nun auch Greinacher die vorläufigen Grenzen nach der quantitativen Seite der Unterscheidbarkeit von α- und H-Strahlen festgestellt. Danach ist eine *sichere* Unterscheidung zwischen beiden noch nicht möglich. Schon von Anfang an zeigte sich die unerwartete Erscheinung, daß anscheinend homogene α-Strahlen ganz verschieden große Registrierimpulse geben, so daß kleine α-Impulse von großen H-Impulsen nicht zu unterscheiden sind. Über die Ursache und die Möglichkeit einer Beseitigung dieser für die Anwendung der neuen Methode störenden Erscheinung hat Greinacher in der zweiten Mitteilung bereits kurz berichtet.

Ziel vorliegender Arbeit war es nun, die neue Methode nach der quantitativen Seite hin näher zu untersuchen und ihr eine in diesem Sinne möglichst zweckmäßige Form zu geben. Dann aber sollten Versuche über die Schwankungen des Ionisierungsvermögens der α-Strahlen gemacht und weiterhin die Bedingungen gefunden werden, welche die Inhomogenität der Registrierausschläge auf ein Minimum herabzusetzen geeignet sind.

---

1) H. Greinacher, Ztschr. f. Phys. 44. S. 319. 1927.

2) G. Ortner u. G. Stetter, Phys. Ztschr. 28. S. 70. 1926.

I. Versuchsanordnung

1. Die Apparatur

a) Die Zählkammer und die Verstärkeranordnung

Die Zählkammer selber ist, wie bei der Anordnung von Greinacher, nichts anderes als ein kleiner zylinder- oder plattenförmiger Kondensator, dessen innere Elektrode direkt an das Gitter der Aufnahmelampe angeschlossen ist, und dessen Außenwand auf ein konstantes positives oder negatives Potential aufgeladen wird. Die innere Elektrode besteht entweder aus einem vorne abgerundeten dünnen Metallstab, oder

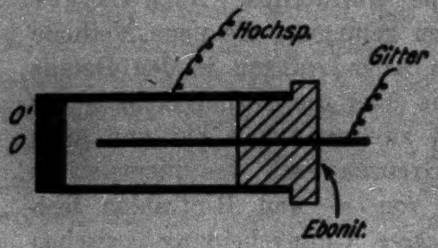


Fig. 1

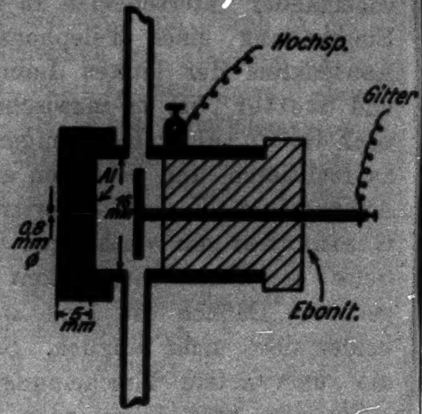


Fig. 2

einer ebenen, parallel zur Vorderwand der Kammer angebrachten Metallplatte (Figg. 1 und 2). Die Vorderwand war dabei als Schraubdeckel ausgebildet, der ein Dazwischenklemmen einer Aluminiumfolie erlaubte. Die beiden seitlichen metallenen Rohransätze dienten zum Durchleiten der Gase. Der Abstand der Innenelektrode von der Vorderwand der Kammer war regulierbar und wurde für gewöhnlich auf 0,5 cm eingestellt. Die Maße und die Konstruktion gehen ohne weiteres aus der Fig. 2 hervor.

Der Anodenkreis der ersten Lampe (Fig. 3a) besteht aus einer Anodenbatterie und einem hohen äußern Widerstand W_1 („Loewe"-Hochohmwiderstand, 1 Megohm). Dieser vermittelt, in Verbindung mit einem Kondensator c_1, die Kopplung mit der ersten Verstärkerlampe L_2. Eine induktive Kopplung mittels Transformatoren ist in der ganzen Verstärkeranordnung

aus den unten angegebenen Gründen gänzlich vermieden. Als Aufnahmelampe diente eine gewöhnliche Dreielektrodenröhre mit guter Gitterisolation. Die Schwierigkeiten, die Greinacher anfänglich beim Aussuchen einer geeigneten Aufnahmelampe bei seiner Anordnung hatte, fallen dahin, sobald der äußere Widerstand ihres Anodenkreises (hier W_1) genügend groß genommen wird. Unter Berücksichtigung dieser Bedingung kann für nur qualitative Zwecke fast jede Röhre mit nicht allzu schlechter Gitterisolation verwendet werden. Für quantitative Zwecke hingegen ist ein Aussuchen vorteilhaft, und es hat sich gezeigt, daß im allgemeinen die Röhren mit präparierten Heizfäden (sog. Sparröhren) am besten geeignet sind.[1]) Ich verwendete mit gutem Erfolg eine Telefunkenröhre Type „Re 89" mit schwach unterheiztem Glühdraht und einer Anodenspannung von nur 40 Volt.

Der eigentliche Verstärker ist prinzipiell nicht von irgendeinem andern ähnlichen Gerät verschieden außer, daß er nirgends einen Transformator aufweist. Die ganze Anordnung, zu der wir nach vielen Versuchen schließlich gelangten, ist aus Fig. 3a ersichtlich. Die ersten drei Verstärkerstufen bilden einen reinen Widerstandsverstärker. Wichtig ist, daß die Leitungen möglichst kurz gezogen und keine unnötigen Kapazitäten vorhanden sind. Daher besaßen die Lampen auch gar keine Sockel. Da es sich, entsprechend der verwendeten hohen Anodenwiderstände (3 Megohm) nur um sehr schwache Ströme handelt, muß auch die Isolation der ganzen Anordnung eine gute sein. Die drei nächsten Stufen sind den vorangehenden ganz ähnlich, nur mit dem Unterschied, daß hier die Anodenwiderstände durch eisenfreie, hochohmige Drosseln aus 0,1 mm Manganindraht ersetzt sind. Ihre Gleichstromwiderstände betragen 20000 bzw. 14000 Ohm. Die Verwendung dieser Drosseln hat jedoch für die hier vorliegende Anordnung keine prinzipielle Bedeutung und könnten sie ebensogut durch hochohmige Widerstände ersetzt sein. Der einzige Grund für deren Verwendung war der, daß die eben erwähnten drei Verstärkerstufen als fertiges Gerät von unseren früheren Versuchen her — wo wir damit besser definierte Versuchsbedingungen als

1) Vgl. auch H. Greinacher, a. a. O. 1926.

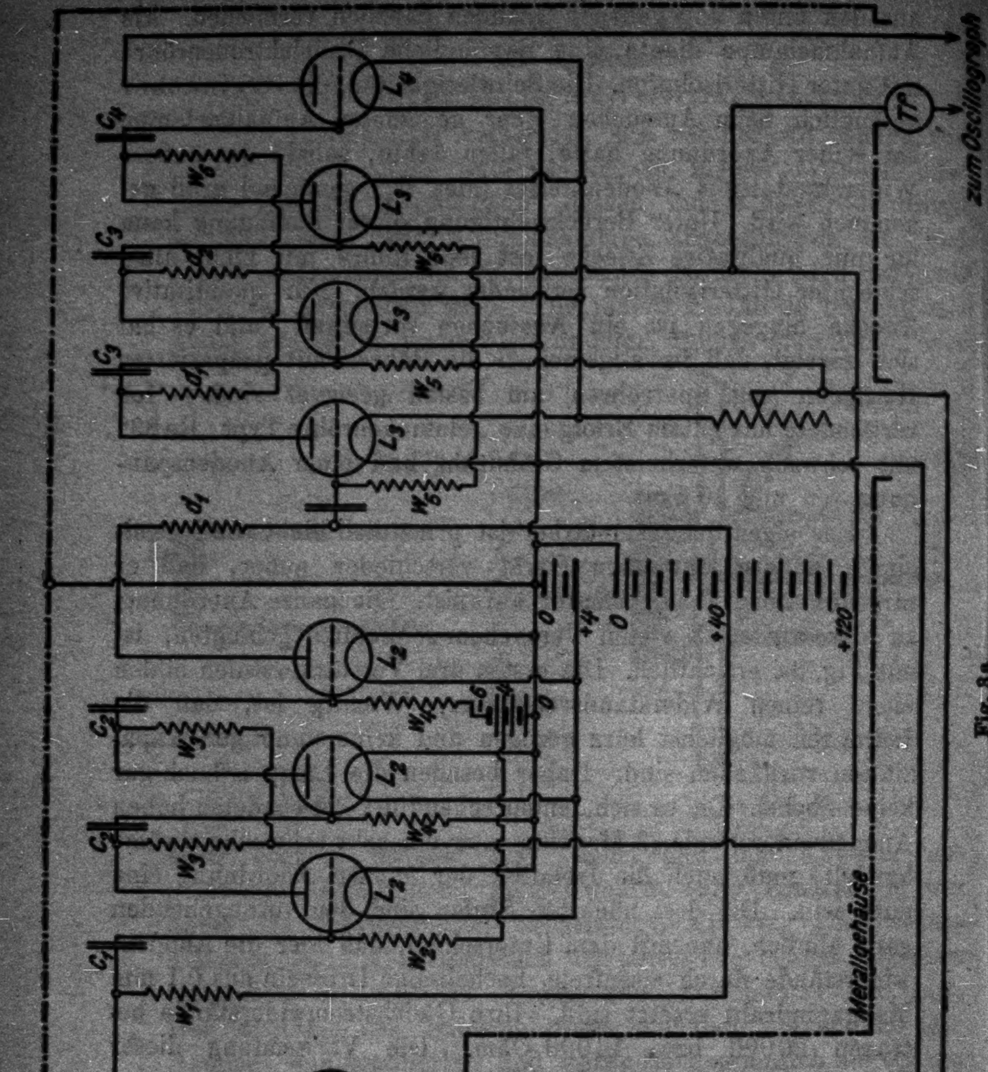
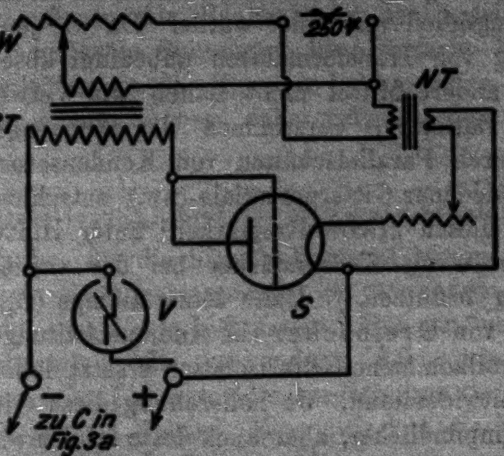

zum Oscillograph
Zur Hochsp.
Metallgehäuse
C
Z
A
+
−
0
+4
+40
+120
-6
TP

Fig. 8a.

mit nie ganz einwandfreien Hochohmwiderständen zu erhalten hofften — schon vorhanden war. Es zeigte sich jedoch bei



HT Hochspannungstransformator „Brown-Boveri", 180/5000 Volt.
NT Kleiner Niederspannungstransformator.
S 20 Watt Senderöhre.
W Rheostat zur Regulierung der Sekundärspannung von *HT*.
V Braunsches Elektrometer.

Fig. 3b

Erklärung zu Fig. 3a:

Z Zählkammer.
A Heizstromamperemeter für L_1.
L_1 Aufnahmelampe, Telefunken Type „Re 89".
L_2 „Loewe" NF-Lampen.
L_3 NF-Lampen „Philips" Type „E".
L_4 Endverstärkungslampe, meist Telefunken Type „Re 504".
W_1 „Loewe" Hochohmwiderstand 1 Megohm (Anodenwiderstand).
W_2 „ „ 1 „ (Gitterableitwiderstand).
W_3 „ „ 3 „ (Anodenwiderstände).
W_4 „ „ 5 „ (Gitterableitwiderstände).
W_5 „ „ 3 „ „
W_6 „ „ 1 „ (Anodenwiderstand).
d_1 Hochohmige Drossel ohne Eisenkern. R = 20000 Ohm.
d_2 „ „ „ „ R = 14000 Ohm.
C 2 in Serie geschaltete 2 MF Siemens Wickelkondensatoren.
c_1 Luftkondensator 250 cm.
c_2 Glimmerkondensatoren je 250 cm.
c_3 „ „ 3000 cm.
c_4 Glimmerkondensator 300 cm.

diesen früheren Versuchen bald, daß bei der Kopplung der Aufnahmelampe mit diesem „Drosselverstärker" immer niederfrequente Schwingungen auftraten, wenn nicht ein Transformator als Kopplungsglied verwendet wurde. Da wir jedoch von der Verwendung von Transformatoren unbedingt absehen wollten, und auch andere Mittel nicht halfen (wie Verwendung ganz getrennter Batterien, Verstimmen der Anodenkreise untereinander durch Parallelschalten von Kondensatoren, Anwendung verschiedener Gitterpotentiale usw.), entschlossen wir uns schließlich, diesen „Drosselverstärker" unter Hinzufügen einer vierten Lampe als *End*verstärker bei der vorliegenden Anordnung zu benützen.[1]) Diese letzte Lampe (L_4) ist, wie in der Arbeit von Greinacher, in Audionschaltung angeordnet. Die nicht vollkommene Gitterisolation ersetzt dabei den eigentlichen Ableitwiderstand. Je höherohmig diese Gitterableitung ist, desto empfindlicher, aber auch desto labiler wird die ganze Anordnung. (Labil im Sinne einer Neigung zum niederfrequenten Schwingen, wahrscheinlich infolge Ladungs- und Entladungserscheinungen am Gitterkondensator c_4.)

b) Die Hochspannungsquelle

Um auch höhere Spannungen an die Zählkammer legen zu können, wurde außer den Hochspannungsbatterien auch ein Hochspannungsgleichrichter verwendet. Dieser bestand einfach aus einem Hochspannungstransformator, dessen primäre Wicklung mit einem Regulierwiderstand an das Wechselstromnetz angeschlossen war, so daß dadurch bequem jede gewünschte Sekundärspannung erhalten werden konnte. Der hochgespannte Wechselstrom wurde dann durch eine kleine Senderöhre, die als Kathodengleichrichter geschaltet war, in pulsierenden Gleichstrom umgewandelt, der dann zwei in Serie geschaltete Siemenssche Wickelkondensatoren von je 2 MF auflud. Letztere hielten sich lange Zeit geladen, so daß während der

1) Allem Anschein nach war bei direkter Kopplung des Drosselverstärkers mit der Aufnahmelampe der Scheinwiderstand ihres Anodenkreises zu klein in Anbetracht ihres isolierten Gitters. Die Schwingungen konnten nur dadurch beseitigt werden, daß entweder dieses Gitter mit mindestens 10^7 Ohm abgeleitet wurde, oder daß der Anodenkreiswiderstand vergrößert wurde. Mit Rücksicht auf die erforderliche Empfindlichkeit kam einzig das letztere Verfahren in Betracht.

eigentlichen Untersuchung das Wechselstromnetz von der ganzen Apparatur getrennt werden konnte. Ein Braunsches Elektrometer, das parallel zu den Kondensatorklemmen geschaltet war, diente zur Beobachtung der jeweilig an die Zählkammer angelegten Spannung. Eine einfache Kommutiervorrichtung erlaubte an die Kammer bald positive bald negative Spannung anzulegen bzw. dabei jedesmal den andern Pol zu erden.

c) Der Oszillograph und die Registriereinrichtung

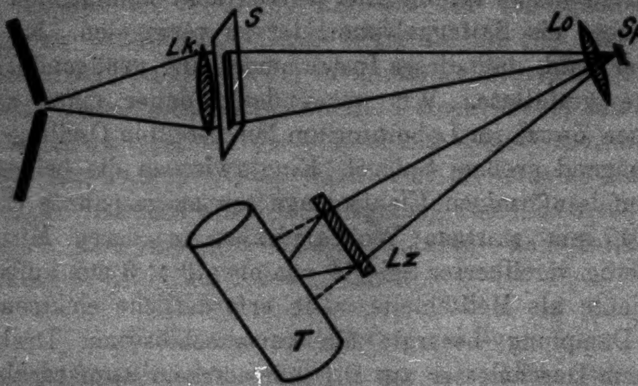
Es lag nahe, für die hier in Betracht kommenden Registrierungen, ein Saitengalvanometer zu verwenden. Es zeigte sich aber bald, daß dieses Instrument keine genügende Lichtausbeute gestattete. Wir verwendeten daher einen speziell für diesen Zweck im Laboratorium hergestellten Oszillographen mit genügend großem Spiegel. Eine zwischen die beiden Pole eines hufeisenförmigen Elektromagneten ausgespannte Schleife aus 0,017 mm starkem Wolframdraht, in deren Mitte ein vorderseitig versilberter Spiegel von etwa 3 × 3 mm aufgekittet war, diente als Meßschleife. Die erforderliche elektromagnetische Dämpfung besorgte ein kurzgeschlossener Drahtkreis von 4 mm Durchmesser aus 0,1 mm starkem Kupferdraht, der hinter dem Spiegel und parallel zu ihm aufgekittet war. Das ganze bewegliche System zwischen den beiden Stegen, über die die Schleife gespannt war, wog etwa 6 mg. Der Magnetstrom, mit dem auch die Dämpfung reguliert werden konnte, betrug normalerweise 4 Amp. Die Dämpfung war so gewählt, daß die Ausschläge vollkommen aperiodisch erfolgten. Es konnten mit diesem Oszillographen mühelos 80—100 unregelmäßig aufeinanderfolgende Stromstöße in der Sekunde sauber getrennt registriert werden.

Als Lichtquelle wurde für gewöhnlich eine Bogenlampe verwendet, die wahlweise mit Gleich- oder Wechselstrom betrieben wurde. Dabei betrug die Stromstärke in beiden Fällen 16—18 Amp. Gelegentlich konnte auch eine Osrampunktlichtlampe Verwendung finden, die den Vorteil absoluter Konstanz des Lichtpunktes gewährte, jedoch für schnelle Registrierungen keine genügende Helligkeit ergab. Auf die räumliche Konstanz der Lichtquelle ist, wegen der äußersten Lichtausnützung,

besonderes Gewicht zu legen. Daher ist auch die Verwendung einer Gleichstrombogenlampe einer solchen mit Wechselstrom vorzuziehen.

Auch auf die optische Einrichtung mußte besondere Sorgfalt gelegt werden, damit man die für die Registrierung der rasch verlaufenden Stromstöße nötige Helligkeit erzielte. Folgende in Fig. 4 schematisch wiedergegebene Anordnung ergab nach vielen Versuchen die besten Resultate.

Der Abstand der Lichtquelle von der Sammellinse *Lk* wurde so gewählt, daß das reelle Bild des Lichtbogens auf



Lk Sammellinse, $f = 33$ cm, Durchmesser 10 cm.
S Spalt, $9 \times 0{,}1$ cm.
Lo Sammellinse, $f = 50$ cm.
Sp Spiegel des Oszillographen.
Lz Zylinderlinse, $f = 10$ cm.
T Registriertrommel.

Abstand: *Lk—Lo*, *Lo—T* je 50 cm. *Lk—S*, *Lo—Sp* sehr klein.

Fig. 4

den Oszillographenspiegel *Sp* fiel, während dann der Spalt *S* durch den Spiegel und die Objektivlinse *Lo* auf der Trommel *T* abgebildet wurde. Dadurch erreichte man, daß auch bei kleinem Oszillographenspiegel alle Strahlen, die überhaupt vom Spalt ausgesandt werden, zur Erzeugung seines reellen Bildes ausgenützt wurden. Auf möglichste Punktförmigkeit der Lichtquelle bzw. auf gute Abbildung durch die Sammellinse *Lk* (geringe sphärische Aberration) ist, mit Rücksicht auf die Kleinheit des Spiegels *Sp* besonderes Gewicht zu legen. Die Zylinderlinse *Lz* hat nur den Zweck, das Spaltbild, welches

sich gemäß den angegebenen Abständen der Anordnung, in natürlicher Größe abbilden würde, der Länge nach auf etwa 1 cm zusammendrücken. Dadurch wird das Bild entsprechend lichtstärker.

Der eigentliche Registrierapparat bestand aus einer, durch ein Uhrwerk bewegten Trommel, auf die das lichtempfindliche Papier (Bromsilber, hochempfindlich) oder der Filmstreifen (Agfa) aufgewickelt war. Die Rotationsgeschwindigkeit konnte verschieden eingestellt werden und betrug am Umfang der Trommel 0,5—4,0 cm/sec. Ein zweiter Registrierapparat, dessen Trommel mit Spindelantrieb versehen war, erlaubte Registrierungen bis 50 cm/sec.

Die Oszillographenschleife wurde gewöhnlich direkt in den Anodenkreis der letzten Lampe eingeschaltet. Der Ruhestrom wurde entweder durch Kompensation[1]) auf Null herabgesetzt oder aber bei den meisten Registrierungen nicht kompensiert. Jedoch wurde dann der Ruheausschlag durch mechanisches Zurückdrehen der Oszillographenschleife auf Null gebracht. Außerdem konnte die Empfindlichkeit des Instrumentes in weiten Grenzen durch stärkeres oder schwächeres Spannen der Schleife reguliert werden.

d) Der elektrische und akustische Schutz

Der elektrische Schutz der ganzen Verstärkeranordnung (hauptsächlich der Aufnahmelampe und der letzten Lampe), auf dessen Wichtigkeit schon Greinacher (a. a. O. 1926) aufmerksam gemacht hat, wurde hier dadurch realisiert, daß die ganze Apparatur inklusive Hochspannungs- und Gittervorspannungsbatterien in einem metallenen Gehäuse untergebracht wurde, das mit dem positiven Pol der 10-Volt-Heizbatterie verbunden war. Ganz besondere Aufmerksamkeit erforderte auch der von der Innenelektrode der Zählkammer nach dem Gitter hin führende Verbindungsdraht. Es zeigte sich, daß auch die (natürlichen) α-Teilchen der umgebenden Luft, wenn auch schwächer, mitregistriert wurden, da zwischen dem Verbindungsdraht und den spannungführenden Teilen der Zählkammer ein beträchtliches Feld herrschte. Um dieses Feld

1) H. Greinacher, a. a. O. 1926.

abzuschirmen und das für die Störung in Betracht fallende Luftvolumen zu verkleinern, wurde dieser Zuführungsdraht mit einem Metallrohr, das mit dem Schutzgehäuse verbunden war, umgeben. Das Rohr wurde indessen, um die Kapazität des Systems nicht zu sehr zu vergrößern, nicht zu eng gewählt. Im übrigen erwies es sich als günstig, von einer eigentlichen Erdung all dieser, untereinander verbundenen Teile abzusehen.

Es war völlig unmöglich, ohne diesen Schutz auszukommen, schon weil ohne diesen die Apparatur in andauerndes Pfeifen geriet. Es sind hauptsächlich die erste und die letzte Lampe[1]), deren Gitter isoliert sind, welche die Anordnung als störungsempfindlich erscheinen lassen. Die Empfindlichkeit für äußere Einflüsse war so, daß ohne den elektrostatischen Schutz der hiesige 10 km weit entfernte Rundspruchsender im Lautsprecher gehört wurde, trotzdem keine Spur von Abstimmung (Hochohmwiderstände) vorhanden war und die Versuchsanordnung sich im Souterrain des Instituts befand.

e) Die radioaktiven Präparate

Es wurden für die nachstehenden Versuche zwei Poloniumpräparate verwendet. Ein schwächeres (*A*) in Form eines kleinen Kupferknopfes und ein stärkeres (*B*) in Form eines etwa 1 cm² großen Platinplättchens. *A* war auf elektrolytischem Weg mit *Ra D* überzogen, so daß man außer der α-Strahlung des Poloniums auch die β-Strahlung des *Ra E* hatte. *B*, ebenfalls elektrolytisch dargestellt, bestand aus reinem, vom Wiener Radiuminstitut bezogenen Polonium. Zur Zeit der Versuche ergab die einseitige Gesamtaktivität des Präparats *B* einen Sättigungsstrom von 100 bis 150 elektrostatischen Einheiten.

2. Wirkungsweise der Apparatur

Die Funktionsweise der Aufnahmelampe ist schon bei Greinacher[2]) beschrieben und sei hier nochmals kurz wiederholt:

Tritt durch die Öffnung *O* oder *O'* in Fig. 1 eine α-Partikel in die Kammer ein, so entsteht längs ihrer Bahn eine

---

1) Vgl. H. Greinacher, a. a. O. 1926.
2) H. Greinacher, a. a. O. 1926.

Ionenkolonne. Infolge des elektrischen Feldes in der Kammer werden die Luftionen des einen Vorzeichens an die Elektrode fliegen und dort ihre Ladung abgeben, während die des anderen Vorzeichens an die Kammerwand wandern. Dadurch erhält die Elektrode eine kleine Potentialänderung, die sich dem Gitter der Aufnahmelampe mitteilt. Infolgedessen resultiert auch im Anodenkreis derselben eine entsprechende Stromstärkenänderung, welche dann weiter verstärkt werden kann. Es ist ohne weiteres anzunehmen, daß die entsprechende Stromstärkenänderung in erster Annäherung proportional der entladenen Elektrizitätsmenge, bzw. der Ionen*zahl* ist. Dauer und Größe des Stromimpulses hängen im übrigen vom Vorzeichen der Kammerspannung ab. Für die Ionenvorgänge in der Kammer ist dies zwar prinzipiell gleichgültig, aber die Verstärkerlampe verhält sich hier verschieden. Betrachten wir erst den praktisch wichtigeren Fall, daß die Kammer negativ geladen ist. Solange kein Ionenstrom in der Ionisationskammer fließt, besitzt das Gitter der Aufnahmelampe ein Ruhepotential, d. h. ein gewisses negatives Potential, dessen Wert von der Heizung der Lampe, von der angelegten Anodenspannung, vom Anodenwiderstand und von der Gitterisolation abhängt. Dieses Ruhepotential ist jedoch von der angelegten Kammerspannung unabhängig. Tritt nun etwa ein α-Teilchen in die Kammer ein, so wird die negative Gitterladung um einen gewissen Betrag erhöht. Nur relativ langsam wird sich dann das Gitter über die mehr oder weniger gute Isolation wieder entladen, bis der frühere Gleichgewichtszustand erreicht ist. Diese Zunahme der negativen Gitterladung kann bei Anwendung starker radioaktiver Präparate (oder z. B. infolge Wechselstrominduktion beim Neuaufladen der zwei Hochspannungskondensatoren mittels der Gleichrichteranordnung) so weit gehen, daß der Anodenstrom ganz abgedrosselt wird. Es vergehen dann unter Umständen mehrere Minuten, bis sich das Gitter wieder über die Isolation bis zum Gleichgewichtszustand entladen hat. (In solchen Fällen empfiehlt sich ein kurzes Berühren des Gitters mit dem Finger.)

Etwas anders dagegen sind die Verhältnisse bei positiver Kammerspannung. Hier wird dem Gitter durch die an die Elektrode gelangenden positiven Ionen positive Ladung zu-

geführt. Das negative Ruhepotential sinkt. Die Entladung (Neutralisation) erfolgt aber jetzt im Gegensatz zum ersten Fall, fast momentan durch die Glühelektronen. Daher ist bei gegebener Ionenzahl und Auftreffgeschwindigkeit, die Potentialänderung eine viel geringere wie im ersten Fall. Und tatsächlich beobachtet man bei positiver Kammerladung, unter sonst gleichen Bedingungen, durchweg bedeutend kleinere Ausschläge als bei negativer Kammerladung. Wir benutzten daher zur Registrierung der Ausschläge immer die letztere.[1]) Man sieht, daß jedenfalls die maximal mögliche Anodenstromänderung in beiden Fällen dadurch erniedrigt wird, daß sich das Gitter schon zu entladen beginnt, *bevor* der Ionenvorgang beendet ist. Diese Erniedrigung ist natürlich um so größer, je kürzer die Neutralisationszeit des Gitters ist. In bezug auf die Zeit der Ionenströmung ist sie (wie sehr schnelle Registrierungen gezeigt haben) bei positiver Kammer kurz, bei negativer lang, und bedingt daher die kleinere bezw. größere Empfindlichkeit beider Anordnungen und den Umstand, daß die Anodenstromstärkenänderungen nicht streng proportional der Ionenzahl sind, sondern auch in geringem Maße von ihrer Wanderungsgeschwindigkeit abhängen. Wir können jedoch diesen Fehler, der bei negativer Kammerladung verschwindend ist, vernachlässigen, so daß der ganze Vorgang als ein rein statischer angesehen werden kann. Daß dies der Fall ist, läßt sich durch folgende Näherungsrechnung darlegen:

Angenommen, der Ionenstrom einer α-Partikel fließe gleichmäßig an die Elektrode der Ionisationskammer, was bei der Anordnung von Fig. 2 ungefähr zutreffen würde; d. h. von den gebildeten Ionen eines α-Strahls gelangen in der Zeit dt stets gleichviel an die Elektrode. Wenn alle Ionen nach der Zeit T entladen sind, hört der Strom i plötzlich auf. Die in

1) Es gibt jedoch bald eine obere Grenze für die Registriergeschwindigkeit, und zwar ist sie nicht in der Trägheit des Oszillographen zu suchen, sondern in der „Erholungsfähigkeit" des Gitters der Aufnahmelampe. Daher ist bei positiv geladener Kammer die mögliche Registriergeschwindigkeit eine viel größere als bei negativer Kammerladung. Bei der letzteren liegt die Grenze schon bei etwa 6 Teilchen pro Sekunde.

diesem Moment erzielte Potentialänderung V ergibt sich aus der Gleichung der Aufladung

$$C \frac{dV}{dt} = i - \frac{V}{W},$$

worin C die Kapazität des Systems, W den Gitterableitwiderstand bedeutet. Es folgt hieraus für die Potentialerhöhung

$$V_T = i W \left(1 - e^{-\frac{T}{CW}}\right).$$

Von diesem Moment an wird das Potential des Gitters wieder sinken. V_T ist also die maximal erzielte Erhöhung. Man sieht nun unmittelbar, daß V für T/CW klein, wird

$$V_T = \frac{i T}{C},$$

d. h. V ist der gesamten Ionenladung iT proportional, wie im Falle *vollkommener* Gitterisolation. Die Bedingung hierfür ist also T/CW klein. Nun ist T schon bei einer Kammerspannung von 100 Volt nur etwa $^1/_{400}$ sec. (Meistens aber bei 1000 Volt, $^1/_{4000}$ sec.) Denn bezeichnet man die Ionisierungsstrecke mit a, so ist

$$a = u \left(\frac{V}{a}\right) T,$$

wo u die Ionenbeweglichkeit. Das gibt, u zu 1 cm/sec/Volt angenommen, C zu 10 cm und W zu 10^{11} Ohm geschätzt, den Wert

$$\frac{T}{CW} = \frac{^1/_{400} \cdot 9 \cdot 10^{11}}{10 \cdot 10^{11}} = {^1/_{440}}.$$

Daraus ist zu schließen, daß die maximale Spannungsänderung des Gitters selbst bei noch geringerem Ableitwiderstand (etwa 10^9 oder 10^8 Ohm) die Ionenzahl mißt. Dieser Änderung geht die Amplitude des Stromstoßes im Anodenkreis proportional. Damit nun bei weiterer Verstärkung diese Proportionalität gewahrt bleibt, dürfen keine Transformatoren in der Apparatur vorkommen. Demzufolge wurde auch die reine Widerstandsverstärkung angewendet.

Der Wirkungsunterschied der beiden Verstärkungsarten (mit oder ohne Transformatoren) kann aus folgender Darstellung der Vorgänge ersehen werden:

Wir nehmen an, wir hätten eine gegebene Anzahl Luftionen, die einmal in der Zeit T, das andere Mal in der Zeit $T/2$ auf die Gitterelektrode fallen. Fig. 5 veranschaulicht dann rein schematisch deren Potentialverlauf in Funktion der Zeit. Wir nehmen hierbei zur Vereinfachung an, daß die Neutralisation gleichmäßig über die Gitterisolation erfolge, während natürlich in Wirklichkeit die Ladung nach einem exponentiellen Gesetz abnimmt. Wir stellen diese, im Verhältnis zu T große Zeit durch die willkürlich gewählte

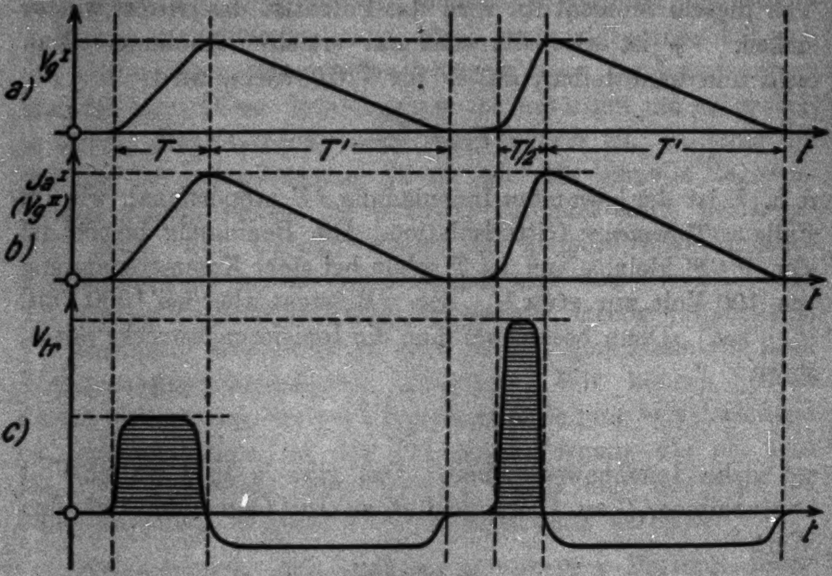


Fig. 5

Strecke T' dar. (Für negative Kammerladung). Vernachlässigen wir dann T gegenüber T', was nach dem früheren berechtigt ist, so werden, wie in Fig. 5 eingezeichnet, die beiden Potentialmaxima einander gleich. Diese Potentialänderungen des Gitters bewirken im Anodenkreis der Aufnahmelampe ebenso langandauernde, konforme Stromstärkenänderungen. Dementsprechend sind in Fig. 5 auch diese Maxima gleich groß (alles übrigens in willkürlichem Maßstab aufgezeichnet). Schalten wir dagegen, als Kopplungsglied für die nächste Verstärkerröhre, einen Transformator in den Anodenkreis der Aufnahmelampe, dann gibt die Kurve in

Fig. 5c den Strom- bzw. den Spannungsverlauf auf dessen Sekundärseite an. Da die Aufladungszeit des Gitters in einem Fall T sec, im anderen nur $T/2$ sec beträgt, so verhalten sich die beiden induzierten Maximalspannungen wie 1:2.

Ein Oszillograph, der die *Amplitude* des Stromstoßes anzeigt, würde also für den Fall von Fig. 5c ganz verschiedene Ausschläge geben je nach der Dauer der Ionenentladung. Aber auch im Falle eines ballistischen Galvanometers, welches das *Integral* des Stromimpulses mißt, würden verschiedene Ausschläge resultieren. Bei einem eisenfreien Transformator würden allerdings die beiden schraffierten Flächenstücke in Fig. 5c (und somit auch die Ausschläge) stets gleich groß ausfallen, und zwar, wie sich leicht zeigen läßt, auch bei einer beliebigen Stromkurve für J_a. Bei Eisentransformatoren dagegen ist das Übersetzungsverhältnis kein konstantes, ein Umstand, der z. T. für die bekannte Verzerrung des radiotelephonischen Empfangs verantwortlich gemacht wird. Hier wird ja aus demselben Grunde vielfach die Widerstandsverstärkung bevorzugt. Für rasche Registrierung kommt im übrigen das ballistische Galvanometer überhaupt nicht in Betracht. Große Registriergeschwindigkeit ist aber nicht nur aus Zeitersparnis sehr erwünscht, sondern es spielen dann auch die unvermeidlichen sporadisch auftretenden Impulse[1]) nur noch eine untergeordnete Rolle. Zweckmäßig ist daher die Verwendung eines Saitengalvanometers[2]) oder eines Schleifenoszillographen. In diesem Falle wird die Stromamplitude gemessen, und zur Wahrung der Proportionalität mit der entladenen Ionenmenge ist dann die Widerstandsverstärkung anzuwenden.

Die Vorteile unserer Anordnung lassen sich etwa wie folgt zusammenfassen:

1. Die Ausschläge sind proportional der Anzahl der entladenen Luftionen in der Kammer, und sind in weiten Grenzen unabhängig vom zeitlichen Verlauf des Ionenvorganges. Es läßt sich demnach der richtige Verlauf der Sättigungskurve an einzelnen Partikeln bestimmen.

---

1) Auch unter günstigen Bedingungen traten immer noch 1—8 Impulse/min auf.

2) H. Greinacher, a. a. O. 1926.

2. Wählt man eine Kammerspannung, die mindestens gleich der Sättigungsspannung ist, so sind die Ausschläge proportional der *gebildeten* Ionenzahl. Die Spannung braucht weder genau gemessen zu sein, noch braucht sie konstant gehalten zu werden.

Der einzige Nachteil, den man bei der Widerstandsverstärkung mit in Kauf nehmen muß ist der, daß im allgemeinen zur Erzielung der gleichen Endverstärkung eine größere Lampenzahl (Stufen) notwendig ist, als bei der Anwendung von Transformatoren.

Der Gesamtverstärkungsfaktor unserer Apparatur wurde in folgender Weise bestimmt: Ein Glimmerkondensator von 0,131 MF konnte durch eine Wippe einerseits an eine Batterie angeschlossen, und darauf direkt an die Klemmen des Oszillographen gelegt werden. Die bei 40 Volt Aufladung beobachteten Ausschläge (1 cm) entsprachen in der Größe denjenigen, die man vermittels der Verstärkerapparatur aus α-Teilchen erzeugen konnte, wenn diese in der Kammer eine Ionisierungsstrecke von 0,5 cm durchliefen. Rechnet man für die ganze Bahn eines α-Teilchens von der Reichweite von 4 cm im Mittel 160 000 Ionenpaare, so fallen auf 0,5 cm 20 000. Diese 20 000 an die Elektrode wandernden Ionen transportieren eine Elektrizitätsmenge von

$$20\,000 \cdot 1{,}59 \cdot 10^{-19} = 3{,}18 \cdot 10^{-15} \text{ Cb.}$$

Andererseits hatte der oben erwähnte Kondensator *vor* der Entladung die Elektritätsmenge von $5{,}24 \cdot 10^{-6}$ Cb. aufgenommen. Somit bildet das Verhältnis beider den Gesamtverstärkungsfaktor der Apparatur (in bezug auf Ladungsmengen). Er beträgt folglich

$$\frac{5{,}24 \cdot 10^{-6}}{3{,}18 \cdot 10^{-15}} = 1{,}65 \cdot 10^{9}.$$

Man sieht danach auch, wie relativ wenig empfindlich der Oszillograph war, eine Eigenschaft, die natürlich mit der Forderung hoher Eigenschwingungszahl Hand in Hand ging. Die im folgenden wiedergegebenen Registrierungen entsprechen Stromimpulsen von der Größenordnung eines Milliampere und mehr.

Was die Nullpunktsschwankungen anbelangt, sind diese nie ganz zum Verschwinden zu bringen. Sie hängen in hohem Maße von der Güte des elektrischen und vermutlich auch des magnetischen Schutzes ab, so daß man sie möglicherweise durch Anwendung eines genügend dicken Eisengehäuses auf noch bedeutend kleinere Werte herunterdrücken könnte. (Vermeidung jeglicher magnetischen Induktion von benachbarten niederfrequenten Wechselfeldern.) In unseren Versuchen, wo als Schutz Aluminium verwendet wurde, betrugen jedoch die Nullpunktsschwankungen im ungünstigsten Fall nur etwa 4—5 Proz. der Registrierausschläge. Die Nullpunktsschwankungen sind auch in hohem Maße von der Heizung der Aufnahmelampe abhängig. Eine schwächere Heizung und damit verbunden eine geringe Anodenspannung[1]) für die Aufnahmelampe wirken in diesem Sinne günstig. Die relativ breiten Nullinien der nachfolgenden Registrierungen rühren nicht etwa von Nullpunktsschwankungen her, sondern sind das Resultat einer optischen Überstrahlung, indem das lichtempfindliche Papier, bei der langsamen Rotation der Trommel, auf der Nullinie viel zu lange exponiert wurde. Dieser Haloeffekt (Lichthof) trat in Fällen normaler Exposition nicht ein. (Schnelle Registrierung).

Die auf sämtlichen Registrierausschlägen des Oszillographs mehr oder weniger gut erkennbaren Haltepunkte des Lichtzeigers haben allem Anschein nach ihre Ursache in der Aufnahmelampe. (Jedenfalls nicht im Oszillographen). Der Grund dafür scheint der, daß das erste Gitter bei jedem Stromimpuls äußerst feine mechanische Schwingungen ausführt, die natürlich dementsprechende Kapazitätsänderungen mit sich bringen, so daß dadurch dem Anodenstrom ein sinusähnlicher Wechselstrom überlagert wird, der dann weiter

1) Es sei bemerkt, daß auch hier Glühdrahtspannung und Anodenspannung im gleichen Sinne zu variieren sind, um ein gutes Arbeiten der Lampe zu erzielen. So ergab sich bei der von mir verwendeten Telefunkenlampe bei etwa 80 prozentiger Normalheizung eine Anodenspannung von 0 Volt, d. h. die Anode war über den äußeren Widerstand direkt mit dem positiven Glühfadenende verbunden. Dabei waren die α-Ausschläge nur noch $^1/_4$—$^1/_5$ derjenigen, die mit 40 Volt Anodenspannung zu erhalten waren. Dafür aber waren die Nullpunktsschwankungen prozentual kleiner.

verstärkt wird. Es hat sich gezeigt, daß die Periode dieser Schwingungen immer dieselbe ist, ganz unabhängig von der mechanischen Spannung der Oszillographenschleife. Es gelang, diese Schwingung zu registrieren. Aufn. 1, Taf. XXI zeigt ein Stück eines bei 44 cm/sec Geschwindigkeit erhaltenen Registrierstreifens. Man erkennt deutlich eine Grundschwingung von etwa 70 Per./sec, — die also deutlich von einer eventuellen Induktion der Lichtleitung (40 Per.) abweicht, — mit zeitweise stärkerem oder schwächerem Hervortreten von Oberschwingungen. In Aufn. 2, Taf. XXI sind einige α-Ausschläge bei einer Registriergeschwindigkeit von 35 cm/sec wiedergegeben, welche zeigen sollen, daß nach dem eigentlichen α-Impuls (erster sehr steiler Anstieg der Kurve, der immer ganz glatt verläuft) eine Anzahl abklingender Schwingungen auftreten, welche die erwähnten Haltepunkte erzeugen. Man erkennt (aus der Registriergeschwindigkeit), daß letztere nur von Oberschwingungen der oben angegebenen Grundfrequenz von 70 herrühren können. Daß bei allen nachstehenden Versuchen der Oszillograph vollkommen aperiodisch arbeitete, erkennt man aus der Aufn. 3, Taf. XXI, welche die mit unterbrochenem Gleichstrom aufgenommene Dämpfungskurve darstellt.

Der Grund für die Annahme einer ursprünglich mechanischen Schwingung des Gitters der Aufnahmelampe ist der, daß die ganze Apparatur (die Schwingungen des Apparates haben keine Analogie mit denjenigen einer als Generator wirkenden Dreielektrodenröhre, schon aus dem Grunde nicht, weil die ersteren gedämpft sind) auf akustische Störungen stark empfindlich war, hauptsächlich aber auf reine Töne ganz bestimmter Frequenz bzw. auf einen Grundton und seine Obertöne ansprach, und dies auch dann, wenn kein Telephon in die Apparatur eingeschaltet war.

Eine ähnliche Empfindlichkeit gegen Erschütterungen, Geräusche und Töne wurde schon von Greinacher[1]) beschrieben, nur mit dem Unterschied, daß dort das Schwingen des ganzen Apparates infolge Rückwirkung der Transformatoren sich sehr leicht zu einem bleibenden Maximum aufschaukelte. Diese Erscheinung trat bei der neuen Anordnung

1) H. Greinacher, a. a. O. 1926.

nicht ein, vermutlich wegen der Abwesenheit jeglicher relativ niederohmiger Selbstinduktionen. Die primäre Erregungsursache für das Entstehen dieser Schwingungen ist aber höchstwahrscheinlich in beiden Anordnungen dieselbe.

II. Versuche und Ergebnisse

1. Prüfung der Apparatur

a) Tropfenversuch

Wie schon in der Einleitung bemerkt, ergaben die Aufzeichnungen des Registrierapparates sehr verschiedene Werte für die Wirkung einzelner α-Teilchen gleicher Geschwindigkeit und Reichweite. Es ist a priori nicht klar, warum die Strahlen, die doch in der Ionisierungskammer gleichlange Bahnen durchlaufen, nicht auch gleichviel Ionen bilden sollen. Denn die durchschnittliche Zahl der gebildeten Ionenpaare beträgt immerhin pro Zentimeter Bahnlänge etwa 40000. Kleine Differenzen in in der Registrierung wären denkbar, nicht aber solche bis 500 Proz. Es hatte daher den Anschein, daß dies auf einem Fehler der Nachweisapparatur beruhe. Es was daher von großer Wichtigkeit, ein für allemal festzustellen, ob die Versuchsanordnung an und für sich, getrennt von dem Ionenvorgang, immer gleich arbeitet, und festzustellen, ob die erhaltenen Ausschlagsgrößen unabhängig voneinander stets gleich groß ausfallen. Es handelte sich also darum, dem Gitter der Aufnahmelampe genau reproduzierbare Potentialschwankungen zu erteilen und zu konstatieren, ob unter sonst unveränderten Versuchsbedingungen, stets gleiche Ausschläge erhalten werden. Nach mehreren erfolglosen Versuchen mit pendelartigen Anordnungen lieferten uns schließlich herabfallende geladene Flüssigkeitstropfen die gegebene Methode. Wie aus Fig. 6 hervorgeht, wurde das Gitter der Aufnahmelampe mit einem kleinen Faradayschen Eimer verbunden, dessen Boden, um das Herausspritzen der Flüssigkeit zu vermeiden, mit einem Wattebausch bedeckt war. (Selbstverständlich befand sich dieser Eimer innerhalb des elektrischen Schutzes der ganzen Apparatur.)

In diesen Eimer fielen Wassertropfen von einer gewissen Höhe durch ein am Schutzkasten befindliches Loch herab aus einer isoliert aufgestellten Flasche mit Ausflußkapillare.

Die Flasche konnte auf ein beliebiges konstantes Potential geladen werden[1]), so daß die herabfallenden Tropfen, ihrer gleichbleibenden Größe entsprechend, immer die gleiche Elektrizitätsmenge transportierten. Durch passende Wahl des Flaschenpotentials und der Fallhöhe konnte man sowohl die Ladung der Tropfen, als auch die Aufladungszeit des Gitters immer derart wählen, daß sie dem wirklichen, durch α-Strahlen erzeugten Ionenvorgang möglichst entsprachen.

Um nun den Beweis zu leisten, daß die Inhomogenität der α-Ausschläge nicht in der Nachweisapparatur ihre Ur-

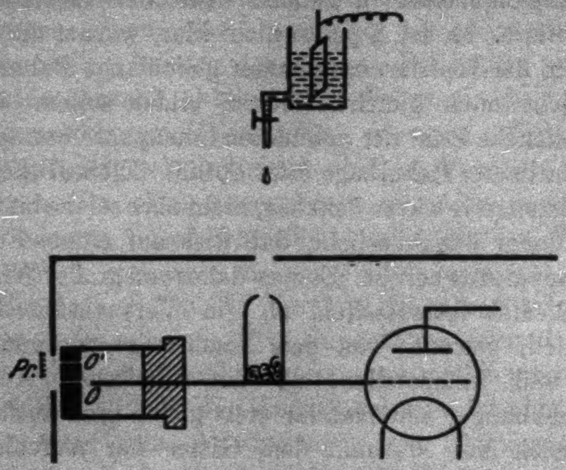


Fig. 6

sache hat, wurden nacheinander folgende Registrierungen vorgenommen:

1. Nur mit geladenen Tropfen.
2. Mit Tropfen und α-Teilchen zugleich.

Die Versuchsbedingungen waren beidemal genau dieselben. Kammerspannung — 1500 Volt, Feldstärke in der Kammer etwa 1500 Volt/cm. Tropfen in Zeitabständen von etwa 2 Sek. Bestrahlung durch O' in Fig. 6. Die erhaltene Aufnahme ist Nr. 4, Taf. XXII. Man ersieht hieraus, daß die Ausschläge mit Tropfen stets gleich groß ausfallen, während auch hier wieder die α-Teilchen ganz inhomogene Ausschläge liefern. Als Prä-

1) Sie wurde gewöhnlich mit der Ionisierungskammer verbunden.

parat wurde bei diesem Versuch „*A*" gewählt. Dabei ist zu bemerken, daß die von „*A*" ausgesandten β-Teilchen auf die Registrierung keinen Einfluß haben.[1]) Im übrigen ist nicht nur die *Amplitude* der Tropfenausschläge konstant, sogar der eigenartige zeitliche Verlauf der Aufladung wird stets gleich wiedergegeben. (Vgl. den anfänglich in entgegengesetzter Richtung erfolgenden Ausschlag.) Auch hier treten Haltepunkte des Lichtzeigers, beruhend auf superponierten Schwingungen, auf. Eine etwas raschere Registrierung (Aufn. 5 Taf. XXII) möge die Schwingungen noch deutlicher zeigen. Hier war hinter die letzte Verstärkerlampe ein Transformator geschaltet. Man erkennt daher infolge mangelnder Gleichrichtung Induktion und Gegeninduktion; dann aber, daran anschließend, die gedämpften Oszillationen, die hier ebenfalls stets vollkommen gleich auftreten. Also selbst im Falle eines Transformators arbeitet die Apparatur stets gleichmäßig.

b) Mittelwertsregistrierungen

Nach allem war anzunehmen, daß die Inhomogenität der Ausschläge einer ungleichen Ionisierung der einzelnen α-Teilchen zuzuschreiben war. Um dieses Resultat aber noch weiter zu erhärten, wurde eine Mittelwertsregistrierung vorgenommen. In der Voraussetzung, daß der statistische Mittelwert einer größeren Anzahl Ausschläge praktisch stets gleich groß ist, waren dann mehr oder weniger konstante Amplituden zu erwarten. Die Anordnung war so getroffen, daß das Präparat „*B*" sehr nahe an die größere Öffnung *O* der in Fig. 7 schematisch wiedergegebenen Kammer gesetzt wurde, so daß in der Zeiteinheit eine große Anzahl Teilchen in diese gelangen konnten. Damit der Effekt jedes einzelnen α-Teilchens nicht zu groß ausfiel[2]), wurde die Ionisierungsbahn durch Verschieben der Mittelelektrode auf 1 mm herabgesetzt. Die Spannung war wieder so gewählt, daß die Feldstärke größer als diejenige für die Sättigung war.

Normalerweise war die Öffnung *O* der Kammer (über die eine Aluminiumfolie von 0,007 mm Dicke gespannt war) durch

---

1) Vgl. H. Greinacher, a. a. O. 1926 und 1927.

2) Vgl. S. 883, Zeile 28.

eine Blende verdeckt und wurde nur für kurze Zeit, durch eine torsionspendelartige Anordnung periodisch freigegeben. Die Zeit, während welcher die Öffnung frei lag, betrug etwa $^1/_{20}$ Sek., und in dieser Zeit traten ungefähr 60 α-Teilchen in die Kammer. (Berechnet aus der Größe der Öffnung und der Stärke des Präparats.) Dadurch, daß die Aufnahmelampe für diese

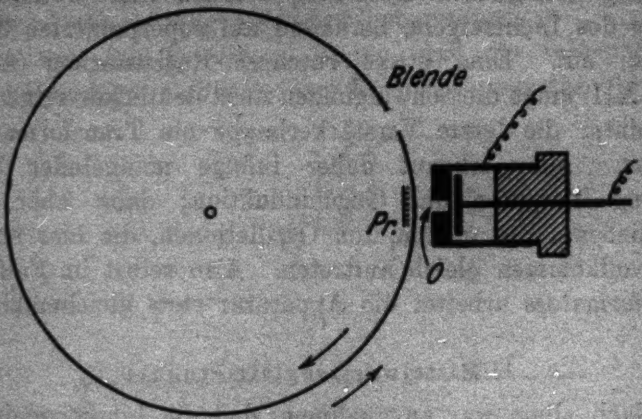


Fig. 7

sehr rasch aufeinanderfolgenden gleichgerichteten Impulse zu träge war, zeigte der Oszillograph deren Mittelwert an. Auch diese Aufn. 6 (Taf. XXIII) ist ein Beweis für die Zuverlässigkeit der Apparatur, da die Ausschläge hier, wie vorauszusehen, ungefähr gleich groß ausfielen. Für vollkommene Gleichheit wären natürlich entsprechend mehr Teilchen notwendig.

c) Aufnahme einer Sättigungsstromkurve

Um die einwandfreie Funktion der Apparatur darzutun, wurden mit der vorbeschriebenen Anordnung noch Sättigungsstromkurven aufgenommen. In Fig. 8 ist diejenige für Luft dargestellt. Der richtige Verlauf dieser Kurven zeigte, daß die Methode tatsächlich quantitative Ionisierungsmessungen erlaubt. Wie erwartet, erhält man insbesondere Sättigung oberhalb einer gewissen Feldstärke, im Gegensatz zur Verstärkeranordnung mit Transformatoren, wo der Ausschlag mit zunehmender Feldstärke stets weiter wächst. Aus den Kurven ließ sich zudem für die späteren Versuche entnehmen, welche

Kammerspannungen zum mindesten für quantitative Registrierungen zu benützen waren.

Die Sättigungskurven wurden durch Mittelwertsregistrierungen, gemäß dem vorangehenden Abschnitt, ermittelt. Aber auch bei den Registrierungen von einzelnen α-Teilchen ließ sich feststellen, daß die mittleren Ausschläge oberhalb der Sättigungsspannung dieselben blieben. Auch die Inhomogenität blieb unverändert. Allzu hohe Feldstärken mußten indessen

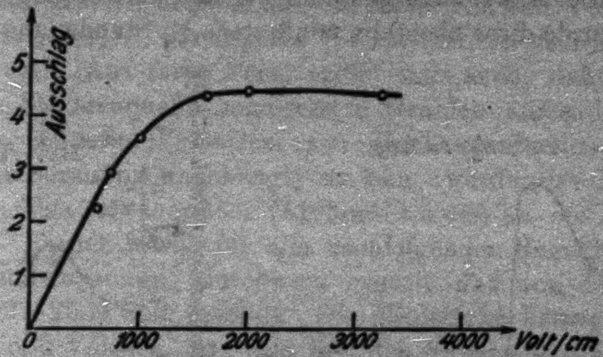


Fig. 8

vermieden werden (untersucht wurden die Ausschläge bis zu Feldstärken von 30000 Volt/cm), da sich Kriechentladungen über die isolierenden Teile der Ionisierungskammer bemerkbar machten. Hierdurch entstanden starke Nullpunktsschwankungen.

2. Untersuchungen über die Inhomogenität der Registrierausschläge

a) Allgemeines über die Ausführung der Versuche und die Darstellung der Ergebnisse

In sämtlichen nachfolgenden Versuchen wurde die in Fig. 2 wiedergegebene Ionisierungskammer verwendet. Die Eintrittsöffnung für die Strahlen war innen mit einer 0,007 mm dicken Aluminiumfolie bedeckt. Der Abstand der Innenelektrode von der Vorderwand der Kammer betrug 0,5 cm, so daß von der ganzen Bahn eines α-Teilchens nur 0,5 cm zur Ionisierung ausgenützt wurde.

Bei Anwendung verschiedener Gasfüllungen der Kammer wurden die betreffenden Gase vor jeder Registierung mindestens $^1/_4$ Stunde in langsamem Strome durch die an der Kammer

angebrachten seitlichen Rohransätze hindurchgeleitet, und wurde der Gasstrom erst kurz vor dem eigentlichen Versuch, durch beidseitiges Absperren der Rohrleitungen abgestellt. Der Gasdruck war somit während des Versuchs konstant und ziemlich gleich dem Atmosphärendruck. Ein ständiges Durchströmenlassen der Gase während des Versuchs hat den Nachteil, daß die Nullpunktsschwankungen bedeutend größer werden, so daß die Registrierausschläge ungenauer ausgewertet werden können. Bei Anwendung gewöhnlicher Zimmerluft als Kammerfüllung wurde diese ebenfalls mindestens $^1/_4$ Stunde lang mittels

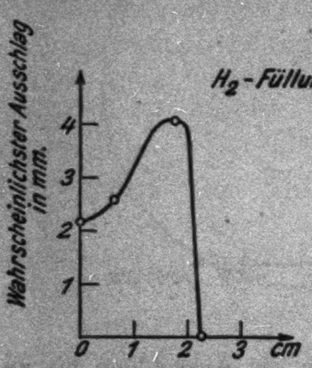


Fig. 9

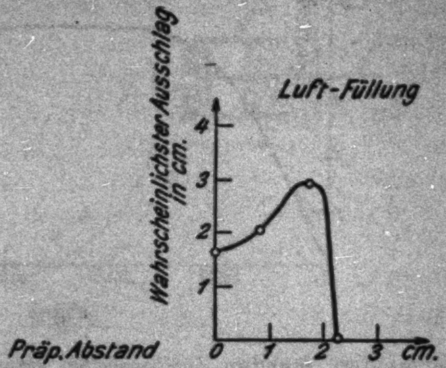


Fig. 10

einer Wasserstrahlpumpe durch die Kammer gesaugt. Bei Gasgemischen, wie Wasserstoff–Stickstoff, wurden die Komponenten am Vortage des Versuchs hergestellt und nach der Durchmischung in einem Gasometer aufbewahrt.

Da die Ausschläge für die α-Teilchen in ihrer Größe davon abhängen, welchen Teil ihrer Bahn zur Ionisierung verwendet wird, so war es zur Orientierung nötig, die Ionisierung als Funktion des Präparatabstandes zu bestimmen. Es wurden zwei diesbezügliche Kurven für Wasserstoff und für Luft ermittelt (Figg. 9 u. 10). In diesen ist als Abszisse der Abstand des Präparats von der Kammerwand eingetragen. Der Weg, den die Teilchen vor Eintritt in den Ionisierungsraum zurückgelegt hatten, war dann gleich diesem Abstand plus dem Luftäquivalent der Al-Folie von 0,007 mm (d. h. gleich 1,3 cm) plus der Länge des Blendenkanals von 5 mm. Also insgesamt Abstand plus 1,8 cm. Als Ordinaten wurden in beiden Kurven

die wahrscheinlichsten Ausschläge eingetragen, welche aus einer größeren Anzahl Einzelmessungen ermittelt wurden.

Außer der verschiedenen Gasfüllung sind die Bedingungen bei beiden Kurven genau dieselben: Kammerfeldstärke 2000 Volt/cm, Ionisierungslänge in der Kammer 0,5 cm. Bei einem Druck von durchschnittlich 715 mm können wir die Reichweite der α-Strahlung aus Polonium (Präparat „B"), den Wert 4,05 cm annehmen.

Beide Kurven zeigten den charakteristischen Verlauf der Ionisierungskurve[1]) (Braggsche Kurve) hier mit dem Maximum bei 1,7 cm. (Aus ihrer Form ergibt sich auch, daß die verwendete Strahlenquelle homogene α-Strahlen aussendet.) Um bei den späteren Versuchen von einer eventuellen kleinen Reichweitestreuung unabhängig zu sein, wurde das Präparat im folgenden etwas näher (Abstand 1,5 cm) an die Kammer gesetzt. Ferner wurde für alle nachfolgenden Registrierungen die Kammerspannung durchwegs negativ und von der Größe von 1000—2000 Volt gewählt. Die Feldstärke betrug folglich 2000—4000 Volt/cm, war also laut den früher aufgenommenen Sättigungskurven, erheblich über dem Sättigungswert. Im übrigen sind die Absolutwerte der Ausschläge bei Luft und Wasserstoff nicht ohne weiteres miteinander zu vergleichen, da die Meßempfindlichkeit (wegen des genauen Auswertens der sehr kleinen Ausschläge mit Wasserstoff) bei Wasserstoff größer gewählt werden mußte. Aber auch wenn diese nicht willkürlich geändert wird, so können die Ausschläge auf verschiedenen Registrierstreifen nicht immer ohne weiteres absolut verglichen werden. Da die Auswechslung der Gasfüllung der Kammer mindestens $^1/_4$ Stunde in Anspruch nahm, hatte man immer damit zu rechnen, daß sich die Empfindlichkeit der Verstärkerapparatur inzwischen etwas geändert hatte. Es genügt nicht etwa den Heizstrom und die Anodenspannung zu kontrollieren, um eine Gewähr für die Konstanz des Verstärkungsfaktors der gesamten Anordnung zu erhalten. Bei der angewandten hohen Verstärkung und der großen Stufenzahl können sehr geringe Unterschiede der Betriebsbedingungen an einzelnen Lampen

---

1) Diese erscheint hier nach links hin wegen des Reichweiteverlustes von 1,8 cm vorzeitig abgeschnitten.

unter Umständen nicht unerhebliche Schwankungen des Gesamtverstärkungsfaktors zur Folge haben. Immerhin sind diese langsamen Änderungen so mäßig, daß der Verstärkungsfaktor innerhalb der Zeit einer einzelnen Registrierung (einige Sekunden bis eine Minute) als konstant angesehen werden kann. Die Hauptursache dieser Schwankungen der Empfindlichkeit liegt darin, daß die Bedingungen, unter denen die Röhren hier arbeiten (hauptsächlich der ersten und der letzten), im betriebswarmen Zustand anders waren als kurz nach ihrer Einschaltung. Es empfahl sich daher, die ganze Apparatur schon etwa eine Stunde vor der ersten Registrierung in Betrieb zu setzen (Heiz- und Anodenstrom). Die folgende Tabelle gibt die Größe des wahrscheinlichsten Ausschlages (bestimmt aus einer größern Anzahl gemessener Ausschläge), in Abhängigkeit von der Zeit, vom Augenblick des Einschaltens an gerechnet:

	Wahrscheinlichster Ausschlag in mm
Kurz nach dem Einschalten d. Lampen	27,0
Nach 10 Minuten	18,0
Nach weiteren 10 Minuten	12,65
„ „ 10 „	12,05
„ „ 20 „	11,9
„ „ 10 „	11,8
„ „ 30 „	11,1
„ „ 10 „	11,6

Es handelte sich nun darum, aus den photographischen Registrierungen die Verteilungskurven für die Ausschläge zu erhalten. Da die Zahl der Registrierausschläge pro Aufnahme variierte, und auch die mittleren Ausschläge in verschiedenen Gasen verschieden waren, so waren überdies die Kurven aufeinander zu reduzieren. Alle Kurven sollten für die gleiche Teilchenzahl (z. B. 100) und denselben wahrscheinlichsten Ausschlag (z. B. 10 mm) wiedergegeben werden. Dabei fallen die Maxima, entsprechend der Größenverteilung, verschieden hoch aus. Um daher die unmittelbare Vergleichung der Streuung durch Vergleich der Kurvenbreiten zu gestatten, wurden die Kurven nachträglich auf eine gemeinschaftliche Höhe reduziert, d. h. die Kurven wurden dargestellt für die gleiche Häufigkeit des wahrscheinlichsten Ausschlages. In dieser Darstellung verlieren dann die Abszissen ihren absoluten Charakter.

Nachfolgend sei als Beispiel die Auswertung einer Registrierung für Luft als Kammerfüllung, unter den gleichen Bedingungen wie die späteren Aufnahmen mit anderen Gasen, mitgeteilt. Die ganze Aufnahme weist 160 Ausschläge von einer mittleren Größe von 8—9 mm auf. Durch Anlegen eines Maßstabes konnten die verschiedenen Ausschläge auf etwa 0,5 mm genau gemessen werden. Wir mußten folglich immer auf ganze oder halbe Millimeter auf- bzw. abrunden. Die Meßgenauigkeit beträgt also $\pm$ 0,25 mm oder absolut 0,5 mm. Man erhielt so die Zahlen der Kolonnen II und III.

Aus den Kolonnen II und III ließe sich unmittelbar die

I Intervall	II Gemess. Ausschl. Größe	III Anzahl	IV Anzahl der Ausschläge im Interv. 1 mm Z'	 Intervall	V Z''	 Intervall
2,75— 3,25	3,0	1	1	2,75— 3,75		
3,25— 3,75	3,5	0			0	3,25— 4,25
3,75— 4,25	4,0	0	1	3,75— 4,75		
4,25— 4,75	4,5	1			1	4,25— 5,25
4,75— 5,25	5,0	0	1	4,75— 5,75		
5,25— 5,75	5,5	1			5	5,25— 6,25
5,75— 6,25	6,0	4	10	5,75— 6,75		
6,25— 6,75	6,5	6			18	6,25— 7,25
6,75 — 7,25	7,0	12	30	6,75— 7,75		
7,25— 7,75	7,5	18			42	7,25— 8,25
7.75— 8,25	8,0	24	61	7,75— 8,75		
8,25— 8,75	8,5	37			71	8,25— 9,25
8,75— 9,25	9,0	34	47	8,75— 9,75		
9,25— 9,75	9,5	13			19	9,25—10,25
9,75—10,25	10,0	6	9	9,75—10,75		
10,25—10,75	10,5	3			3	10,25—11,25

Total 160 Ausschläge.

Verteilungskurve entnehmen. Denn die in III angegebenen Zahlen geben auch an, wieviel Ausschläge in die Intervalle 2,75—3,25; 3,25—3,75 usw. hineinfallen. Um sie für das Intervall 1 mm umzurechnen, wären sie alle mit 2 zu multiplizieren und als Ordinaten aufzutragen. Man erhielte dann die Kurve Fig. 11 (*a*). Immerhin ist zu bemerken, daß die Meßgenauigkeit im Verhältnis zu den Intervallen von $^1/_2$ mm eine so geringe ist, daß die Verteilungskurve keinen großen Anspruch auf Genauigkeit erheben kann. Zumal ist die Höhe des Maximums durch die Meßfehler stark beeinflußt. Es hätte

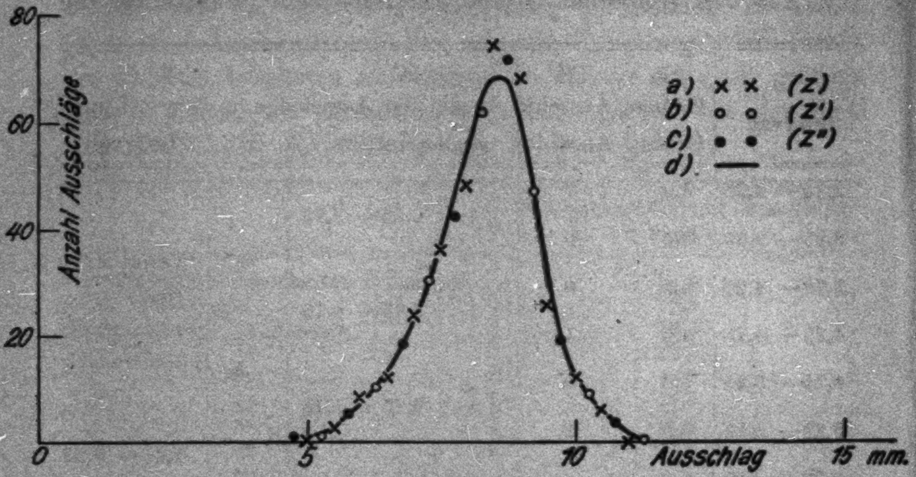


Fig. 11

sich versuchen lassen, eine genauere Kurve, durch Aufnahme einer zweiten Meßreihe für die Intervalle 2,5—3,0; 3,0—3,5 usw., zu erhalten, eine Kurve, die dieselbe Berechtigung wie die erste gehabt hätte. Durch Mittelbildung aus beiden Meßreihen hätte sich dann eine genauere Mittelkurve gewinnen lassen. Diese mühsame Auswertung hätte aber doch die beschränkte Meßgenauigkeit nicht wettmachen können.

Es wurde daher als Meßintervall 1 mm genommen. Dafür wurden zwei Meßreihen mit um $^1/_2$ mm gegeneinander verschobenen Intervallen aufgenommen. Indem man das Mittel aus den beiden (gleichberechtigten) Meßreihen nahm, wurde eine mittlere Kurve erhalten, bei der dann die Meßfehler nicht mehr in dem starken Maße hervortraten. Insbesondere waren

die Maxima zuverlässiger, was bei der Umrechnung der verschiedenen Kurven auf gleiche Maxima wichtig war. Die vorhandene Meßreihe mit der Ausmessung von $^1/_2$ zu $^1/_2$ mm wurde also einfach anders interpretiert. Dies möge durch die angeführte Tabelle veranschaulicht werden. Während Kolonne III (Z) die Kurve Fig. 11 *a* ergibt, geben Kolonne Z' und Z'', welche Z für die Intervalle 1 mm angeben, die Kurve *b* und *c*.

Die Mittelwertskurve ist dann die Kurve *d*. Man sieht, daß das Verfahren im Sinne einer Verflachung des Maximums wirkt, und allgemein eine gewisse Nivellierung der Unregelmäßigkeiten herbeiführt. Diese Art der Auswertung haben wir bei allen Registrierungen durchgeführt. Die weitere Reduzierung der Kurven auf gleiche Höhen haben wir bereits erwähnt. Dann stellen die Kurven die Häufigkeiten der einzelnen Ausschläge in bezug auf die Häufigkeit des wahrscheinlichsten Ausschlages dar. Die Breiten (z. B. in mittlerer Höhe) sind dann direkt den relativen Streuungen proportional.

b) Die Inhomogenität in Abhängigkeit von der Gasfüllung

Wasserstoff. Wie aus dem eben angeführten Beispiel für Luft als Kammerfüllung hervorgeht, ergibt sich bei diesem Gas eine ziemlich beträchtliche Streuung der Ionisationswirkung von einzelnen α-Teilchen. Es war nun denkbar, daß bei Anwendung einfacherer Gase als Kammerfüllung die Streuung der Ausschlagsgröße eine geringere würde. Gerade der Wasserstoff mußte in dieser Hinsicht Interesse bieten. Es ergab sich aber, wie schon bemerkt, daß unter den gleichen Bedingungen wie bei Luft, die Ausschläge im Mittel etwa 7 mal kleiner ausfielen, so daß die Nullpunktsschwankungen prozentual viel stärker ins Gewicht fielen. Sie betrugen in ungünstigen Fällen 30—35 Proz. Mit solch schlecht definierten Ausschlägen war natürlich quantitativ wenig anzufangen. Hier konnte auch eine Vergrößerung der Ausschläge durch Erhöhung des Verstärkungsgrades nicht helfen. Immerhin sieht man aus der Aufn. 8, Taf. XXIV, daß hier eine ähnliche Inhomogenität vorliegt wie bei der Anwendung von Luft (Aufn. 7, Taf. XXIII). Den Grad der Inhomogenität hingegen, können wir jedoch erst später aus Analogieschlüssen entnehmen. Der bei dieser Aufnahme

verwendete Wasserstoff war im übrigen auf chemischem Wege aus Zink und Salzsäure dargestellt, mit Wasser gewaschen und über Phosphorpentoxyd getrocknet.

Sauerstoff. Weiterhin wurden Aufnahmen mit Sauerstoff gemacht. Dieser wurde nach einer Vorschrift von J. Habermann[1]) auf elektrolytischem Wege dargestellt, und durch Überleiten über frische Kautschukstücke und vorheriges Trocknen mit Phosphorpentoxyd, sowohl von Ozon wie auch von Wasserdampf befreit. Aufn. 9, Taf. XXIV, gibt eine Aufnahme für

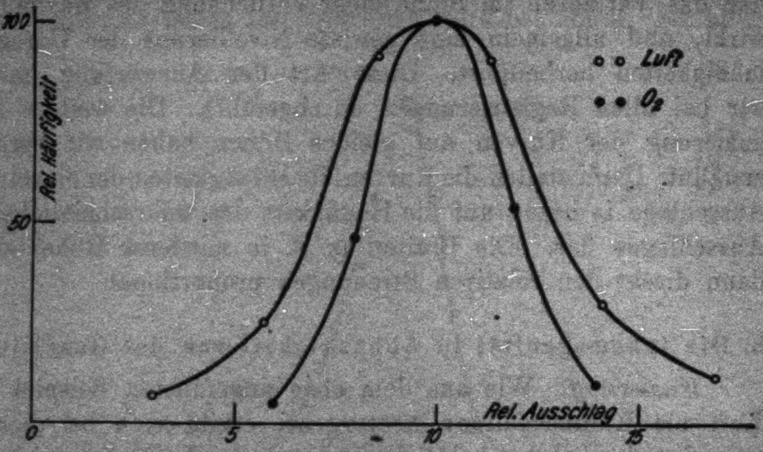


Fig. 12

Sauerstoff wieder. Man bemerkt zunächst, daß auch hier die Größe der Ausschläge von denen in Luft erhaltenen wesentlich differieren, und zwar sind sie bei Sauerstoff größer. Ferner bleibt auch hier die Inhomogenität bestehen. In Fig. 12 ist die aus den Aufnahmen nach dem obigen Verfahren gewonnene und reduzierte Verteilungskurve wiedergegeben.

Wir können den Grad der Streuung nach dem früheren zahlenmäßig dadurch angeben, daß wir die Breite der Kurve in halber Höhe messen. Wir erhalten so für Sauerstoff den Wert 4 (Teile) und für Luft 6. Die Streuung in Sauerstoff ist also merklich kleiner als in Luft.

Zu diesen Ergebnissen ist noch zu bemerken, daß die Kurven verschiedener Registrieraufnahmen um einige Prozente

1) J. Habermann, Z. angew. Chem. 1892. S. 323.

verschieden ausfallen können, bzw. sich nicht völlig decken. Die Abweichungen sind jedoch recht klein und äußern sich besonders nur in den unteren Teilen der Kurven, wo die gemessene Anzahl Ausschläge relativ klein ist. Im übrigen ist zur Feststellung des Kurvenverlaufs eine mäßige Anzahl von Ausschlägen schon hinreichend (40—50), während im allgemeinen jede Meßreihe mindestens 120 Ausschläge aufwies.

Stickstoff. Besonderes Interesse mußte nun das Verhalten des Stickstoffs bieten. Eine solche Untersuchung versprach näheren Aufschluß über die starke Streuung der Registrierausschläge in Luft zu geben.

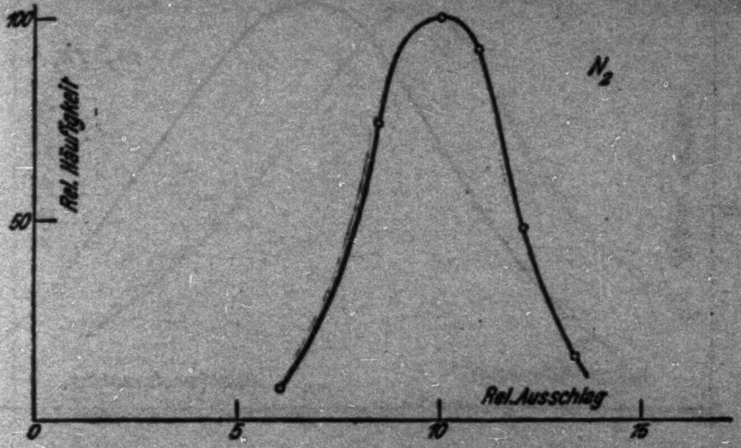


Fig. 13

Vor allem mußte hieraus hervorgehen, ob diese mit einer starken Streuung für Stickstoff zusammenhing oder mit dem Umstand, daß Luft molekular kein einheitliches Gas ist. Der für die Aufnahmen verwendete Stickstoff war nach einer Vorschrift von Vanino[1]) aus Chlorammonium und Natriumnitrit dargestellt und über Phosphorpentoxyd getrocknet. Der so gewonnene Stickstoff enthält noch Spuren von Stickoxyden, die jedoch nicht störend sind. Wie sich herausstellte, spielen überhaupt kleine Beimengungen nicht erwünschter Gase bei diesen Versuchen nur dann eine Rolle, wenn ihr Atomgewicht (oder Atomnummer) von dem des Füllgases stark abweicht. So z. B. sind bei Gasen wie

1) L. Vanino, Handb. d. präp. Chem., I. Bd. Verlag Ferd. Enke, Stuttgart, 1921.

Sauerstoff oder Stickstoff kleine Beimengungen von Wasserstoff sofort spürbar.

Die Aufnahmen mit Stickstoff, wovon in Nr. 10, Taf. XXIV, eine solche abgebildet ist, ergaben nun, daß die Ausschläge nur wenig kleiner ausfielen als für Luft. Wichtig ist nun die (reduzierte) Verteilungskurve, Fig. 13. Man erkennt, daß die Homogenität auch hier größer ist als bei Luft und derjenigen für Sauerstoff beinahe gleich kommt, indem die beiden Kurven sich fast genau decken. Die Streubreite ist somit auch für

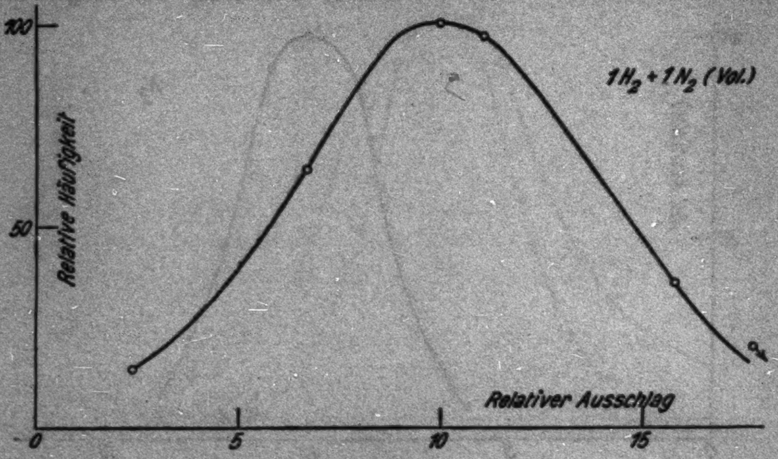


Fig. 14

Stickstoff 4 (Teile). Demnach ist die starke Streuung bei Luft nicht dem Stickstoff zuzuschreiben, sondern scheint mit der molekularen Heterogenität der Luft zusammenzuhängen.

Aus Analogie wäre dann zu schließen, daß alle einheitlichen Gase von derselben einfachen chemischen Zusammensetzung wie N_2 und O_2 also auch H_2 eine relativ kleine Streuung besitzen.

Versuche mit Gasgemischen. Da die molekulare Homogenität des Gases ein die Streuung bestimmender Faktor zu sein scheint, so müssen wir erwarten, daß sich bei Gasgemischen die Verteilungskurven verbreitern werden. Schon im Falle der Luft hatte es sich gezeigt, daß zwei für sich eine geringe und zudem praktisch gleich große Streuung ergebende Gase, bei ihrer Mischung die Verteilungskurve wesent-

lich verbreitern. Zur Bestätigung dieser Tatsache versuchten wir ein künstliches Gasgemisch, Wasserstoff–Stickstoff im Volumverhältnis 1 : 1. Aufn. 11, Taf. XXIV, gibt eine mit diesem Gemisch, unter sonst genau gleichen Versuchsbedingungen erhaltene Registrierung wieder. Die daraus gewonnene Verteilungskurve gibt Fig. 14. Die mittlere Größe der Ausschläge war etwa halb so groß wie bei Luft. Dafür ist aber, wie man sieht, die Streuung noch bedeutend größer als bei Luft. Die Breite der Kurve ergibt sich, nach obigem Ver-

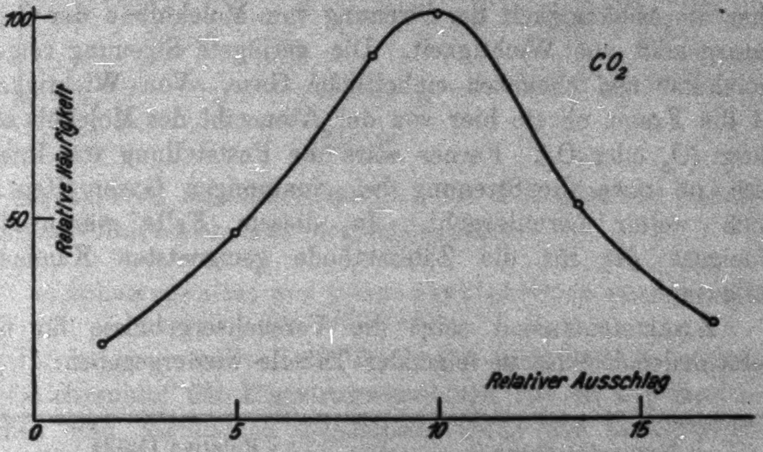


Fig. 15

fahren, zu 9. Wie es scheint, spielt also das Verhältnis der Atomgewichte bzw. der Atomnummmern der verschiedenen Gaskomponenten für die Größe der Streuung die Hauptrolle. Zudem wird die Streuung vom Mischungsverhältnis abhängen, was hier jedoch nicht näher untersucht worden ist.

Versuche mit zusammengesetzten Gasen. Es erhob sich nun noch die Frage, ob alle molekular einheitlichen Gase dieselbe Streuung aufweisen, oder ob die chemische Zusammensetzung eine Rolle spielt. Insbesondere konnten sich chemische Verbindungen anders als elementare Gase verhalten. Ein besonders einfaches Beispiel bot hier das Kohlendioxyd. Eine Aufnahme mit CO_2, welches aus einer Stahlflasche entnommen und über Phosphorpentoxyd getrocknet war, zeigt Nr. 12. Die zugehörige Verteilungskurve (Fig. 15) zeigt, daß eine Streuung

vorhanden ist, welche die der Luft noch übertrifft (8), immerhin aber noch etwas kleiner als für das Wasserstoff-Stickstoffgemisch ist. Die mittlere Größe der Ausschläge war im übrigen etwa dieselbe wie für Sauerstoff.

Hieraus folgt, daß die mechanische Mischung zweier (oder mehrerer) Komponenten, gleich wie ihre chemische Verbindung, im Sinne einer Streuvergrößerung wirkt. Weitere Versuche müssen hier zeigen, ob gemischte Gase und Gasverbindungen der gleichen Zusammensetzung, z. B. $2N_2 + O_2$ und N_2O, dieselbe Streuung aufweisen. Überhaupt erscheinen Versuche über die Abhängigkeit der Streuung vom Molekülbau der Gase naturgemäß von Wichtigkeit. Die geringste Streuung zeigen molekular *und* chemisch einheitliche Gase. Von Wichtigkeit ist die Frage, ob sie hier von der Atomzahl des Moleküls abhängt (O_2 oder O_3). Ferner wäre die Feststellung von Interesse, ob etwa die Streuung bei einatomigen Gasen (He, ...) noch weiter heruntergeht. In diesem Falle wären die Edelgase die für die Zählmethode geeignetsten Kammerfüllgase.

Zusammenfassend seien die Versuchsergebnisse für die verschiedenen Gase in folgender Tabelle wiedergegeben:

Natur des Gases in der Ionisierungskammer (Außerhalb der Kammer befindet sich immer Luft)	Relative Größe des wahrscheinlichsten Ausschlag	Relative Größe der Streuung
Wasserstoff	etwa 1,5	4(?)
Stickstoff	9,5	4
Sauerstoff	11,8	4
Luft	10,0	6
Wasserstoff-Stickstoff 1:1 . .	5,2	9
Kohlendioxyd	10,6	8

Die in der Tabelle angegebenen relativen Werte sind Mittelwerte aus allen Registrierungen für das betreffende Gas. Die wahrscheinlichsten Ausschläge scheinen angenähert proportional den Ordnungszahlen der betreffenden Elemente zu sein. (Bei zusammengesetzten Gasen, proportional den „mittleren Ordnungszahlen“.)

In Fig. 16 seien, der besseren Übersicht wegen, nochmals

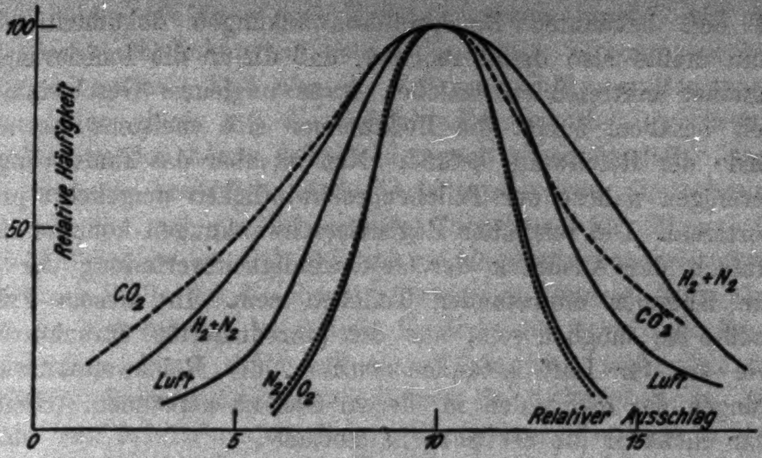


Fig. 16

alle Streukurven zusammengestellt. Sie sind ebenfalls Durchschnittsresultate aus allen Registrierungen.

c) Inhomogenität und Geschwindigkeitsstreuung der α-Teilchen

Im folgenden sollte noch die Frage kurz berührt werden, ob die Streuung der Registrierausschläge nur in der mechanischen und chemischen Zusammensetzung der verwendeten Gase begründet sei. Es bestand die Möglichkeit, daß die Streuung, die bei den elementaren Gasen immer noch blieb, auf einer Inhomogenität der verwendeten α-Strahlung beruhe. Diese Frage wäre natürlich weggefallen, wenn sich bei irgendeinem Gas hätte völlige Gleichmäßigkeit der Ausschläge erzielen lassen. Es war nun nicht anzunehmen, daß die vom Präparat emittierte α-Strahlung merklich inhomogen war, zumal das Polonium (nach Berechnung aus der Stärke des Präparats und der Größe der emittierenden Fläche) in molekular dünner Schicht auf Platin niedergeschlagen war[1]), und die früher wiedergegebene Braggsche Ionisierungskurve (Figg. 9 und 10) auf eine durchaus homogene Strahlung schließen ließ. Indessen entstehen beim Durchgang der Strahlung durch das Gas (hier Luft) infolge des statistischen Absorptionsvorgangs Geschwindigkeitsunterschiede der einzelnen Teilchen, die sich

1) Vgl. Rona u. Schmidt, Wien. Ber. 136. S. 65. 1927.

in den bekannten Reichweiteschwankungen dokumentieren. Man mußte also damit rechnen, daß die in die Ionisierungskammer eintretenden Teilchen etwas ungleiche Geschwindigkeit besaßen, zumal die Meßkammer sich meistens fast am Ende der Reichweite befand. Nun ist aber das Ionisierungsvermögen nahezu der Teilchengeschwindigkeit umgekehrt proportional. Die restlichen Registrierschwankungen konnten also einfach der Ausdruck der Geschwindigkeitsverteilung der in die Kammer eintretenden Teilchen sein. In diesem Falle mußte es möglich sein, aus den (unreduzierten) Streukurven, wie sie für Luft gefunden wurden, die Reichweiteschwankungen der α-Strahlen in diesem Gas zu berechnen. Hierzu war entweder die Geigersche Formel

$$v^3 = a \cdot R,$$

oder die Rutherfordsche Formel

$$v = C\sqrt{(R - x) + 1{,}25}$$

zu verwenden.

Im einzelnen wurde so vorgegangen: Die Ionisierungskammer maß das Reichweiteintervall von 3,35—3,85 cm, befand sich also im Mittel bei 3,6 cm. Die Reichweite selbst betrug bei 715 mm Druck und 18° C 4,05 cm, so daß man für die wahrscheinlichste Restreichweite 0,45 cm hatte. Dieser entspricht einer Geschwindigkeit von $0{,}77 \cdot 10^9$ cm/sec und nach der Streukurve der wahrscheinlichste Ausschlag von 10 mm. Nun lassen sich für alle Ausschläge, da diese umgekehrt proportional den Geschwindigkeiten sind, die entsprechenden Restreichweiten berechnen (Geigersche oder Rutherfordsche Formel). Trägt man die letzeren (addiert zu der Strecke 3,6 cm) als Abszissen und die zugehörigen Häufigkeiten der Ausschläge als Ordinaten auf, so erhält man die Reichweitenkurve.

Die so erhaltene Reichweitenkurve ergibt für die Streuungen Werte, wie man sie auch nach direkten Methoden findet. Indessen zeigt die Kurve unsymmetrischen Verlauf bzw. eine zu große Häufigkeit auf der Seite der großen Reichweiten. Dies resultiert aus der Anwendung eines kubischen bzw. eines quadratischen Gesetzes und der Tatsache, daß die benützten Verteilungskurven ziemlich symmetrischen Charakter besitzen.

Nun finden **Meitner** und **Freitag**[1]) aber gerade, daß die Reichweiteschwankungen keinen merklich unsymmetrischen Verlauf zeigen. Daß also die Inhomogenität der Registrierausschläge einzig auf die Geschwindigkeitsverteilung zurückgeführt werden könne, scheint demnach schon fraglich. Dazu ist noch zu bemerken, daß die oben skizzierte Umrechnung an und für sich problematischen Charakter hat. Einmal ist die Meßkammer zu dick (0,5 cm) um das Ionisierungsvermögen an einer Stelle der Reichweite messen zu können; dann aber ist die Anwendung der obigen Formeln für so geringe Restreichweiten kaum mehr zulässig. Dies um so mehr, als die kritische Ionisierungsgeschwindigkeit für α-Teilchen in der Nähe von $0{,}7 \cdot 10^9$ cm/sec liegt. Wir haben allerdings in Anbetracht dessen die gleiche Umrechnung durchgeführt, wobei die Zählkammer näher an das Präparat zu liegen kam, so daß die betrachteten Restreichweiten sich noch im Gültigkeitsbereich der obigen Formeln befanden, jedoch nicht mit besserem Erfolg. Es sei daher auch von einer Wiedergabe der erhaltenen Reichweitekurven abgesehen. Dagegen wäre noch die Möglichkeit vorhanden, daß durch die Aluminumfolie (von 1,3 cm Luftäquivalent) die Geschwindigkeitsverteilung in der Kammer beeinflußt war, d. h. daß die Geschwindigkeitsstreuung der α-Teilchen im Aluminium größer ist als in Luft. (Abgesehen von der möglicherweise nicht ganz gleichmäßig dicken Folie.)

Es seien aber zum Schluß noch zwei Versuche mitgeteilt, welche zeigen, daß doch die Geschwindigkeitsstreuung der α-Teilchen, wenn nicht ganz, so doch zu einem Teil die Inhomogenität der Registrierausschläge bewirkt.

Alle bisher wiedergegebenen Verteilungskurven wurden unter den gleichen Bedingungen erhalten, sind daher unter sich vergleichbar. Insbesondere befand sich die Ionisierungskammer stets bei 3,6 cm der Reichweite. Es war nun zu erwarten, daß mit der Annäherung der Meßkammer ans Präparat die eintretenden Strahlen homogener seien, und damit die Streuung abnehmen würde. Es wurden daher Registrierungen für einen um 1,3 cm kleineren Präparatabstand bei sonst

1) L. **Meitner** u. K. **Freitag**, Ztschr. f. Phys. **37**. S. 481. 1926.

gleichen Bedingungen vorgenommen. Fig. 17 zeigt zwei Verteilungskurven für Luft als Kammerfüllung, für die beiden Reichweitestrecken 2,00—2,50 cm und 3,35—3,85 cm. Man bemerkt, daß tatsächlich in der Mitte der Reichweite die

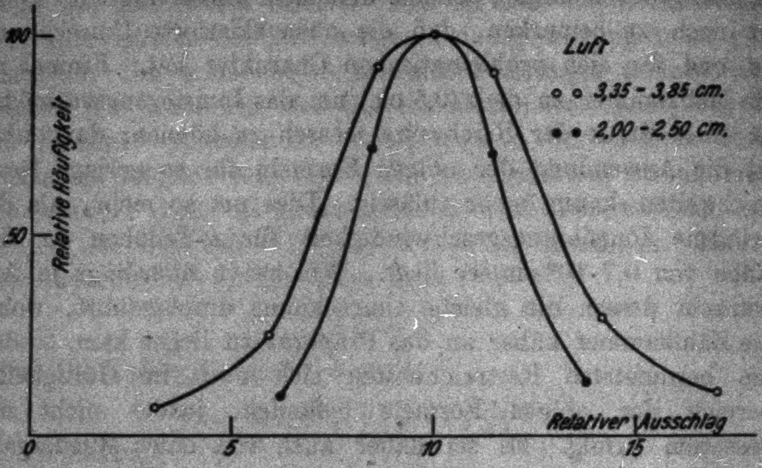


Fig. 17

Streuung kleiner ist als gegen ihr Ende, im übrigen aber noch beträchtlich ist, und vermutlich auch am Anfang der Reichweite nicht verschwinden dürfte. Die Konstruktion unserer Ionisierungskammer erlaubte jedoch die Untersuchung am Anfang der Reichweite nicht.

Fig. 18

Dagegen wurden mit einem Ionisierungsgefäß von der Form der Fig. 18 Registrierungen aufgenommen. Hier befand sich das Präparat direkt an der Kammer, so daß fast die ganze Reichweite der α-Teilchen zur Ionisierung ausgenützt wurde. Nach Passieren des 4 mm langen Blendenkanals (eine Aluminiumfolie war wegen der nicht beabsichtigten

Untersuchung anderer Gase als Luft nicht vorhanden) traten hier die Teilchen in ein praktisch homogenes Feld ein. Das Feld war hier transversal, was jedoch keine wesentliche Bedeutung hat.[1]) Der Verstärkungsfaktor konnte hier, entsprechend der größeren Ionenzahl geringer genommen werden. Es genügten insgesamt 5 Lampen, wobei allerdings die dritte mit der vierten durch einen Niederfrequenztransformator gekoppelt war. Aus der Aufn. 13, Taf. XXV ist der geringere Verstärkungsgrad ohne weiteres am Ausbleiben der Haltepunkte auf den Registrierausschlägen zu erkennen, indem die äußerst kleinen Vibrationen nur bei höchster Verstärkung auftreten.[2]) Die Aufnahme zeigt eine nicht unbeträchtliche Homogenität der Ausschläge. Aus der Verteilungskurve ergab sich in der Tat eine relative Streuung von nur 2,4, während bei den anderen Versuchen als kleinster Wert 4,0 (bei Sauerstoff und Stickstoff) gefunden worden war.

Dieses Resultat ist um so bemerkenswerter, als die Verwendung eines Transformators in der Apparatur (wegen des Eisens) naturgemäß die Inhomogenität der Ausschläge eher vergrößert. Immerhin dürfte auch abgesehen davon, noch eine gewisse, auf Ionisierungsschwankungen beruhende Inhomogenität übrigbleiben. Sie ist jedoch kleiner bei völliger Ausnützung der Reichweite als bei Verwendung kleiner Reichweiteintervalle. Dies dürfte wiederum dafür sprechen, daß im letzteren Fall die Geschwindigkeitsstreuung eine gewisse Rolle spielt, während diese sich, auf die ganze Reichweite bezogen, bis zu einem gewissen Grade ausgleicht (mittlere Geschwindigkeit der Teilchen im betrachteten Reichweiteintervall).

Es wäre von Interesse, auch die Registrierungen von H-Strahlen (Protonenstrahlen) auf ihre Homogenität zu untersuchen. Ist die Frage doch von großer Bedeutung, wenn es sich darum handelt, H-Strahlen und α-Strahlen sicher voneinander zu unterscheiden. Indessen sind hier die Schwierigkeiten eher größer, da es nicht leicht ist, für Homogenität der Strahlen, was Geschwindigkeit und Richtung anbelangt, zu sorgen. Die in Aufn. 14, Taf. XXV wiedergegebene Registrierung

1) Vgl. H. Greinacher, a. a. O. 1926.

2) Am deutlichsten in Aufn. 14, Taf. XXV höchste erreichte Verstärkung).

von α- und H-Strahlen weicht insofern von der von Greinacher (a. a. O. 1927) gegebenen ab, als hier das Verhältnis von α- zu H-Ausschlägen ungefähr 4 beträgt, während dort als ungefährer Wert 2,5 angegeben wurde. Es muß daher erwähnt werden, daß dieses Verhältnis an unseren H-Strahlenregistrierungen keineswegs konstant ist. Die beobachteten Schwankungen zwischen 2,5 und 4,5 dürften damit zusammenhängen, daß je nach der Dicke der gerade verwendeten Paraffinfolie ein anderes Reichweiteintervall der H-Strahlen in die Zählkammer zu liegen kommt. Übrigens ist die Dicke dieser Paraffinfolie sicherlich nicht an allen Stellen genau gleich. Daher vermutlich auch die relativ große Streuung der H-Ausschläge.

Zusammenfassung

Die von Prof. Greinacher ausgearbeitete elektrische Zählmethode mit rein elektronischer Verstärkung wurde auf ihre Wirkungsweise näher untersucht. Es wurde eine reine Widerstandsverstärkung als zweckmäßig befunden, um der Primärionisierung proportionale Ausschläge zu erhalten, während bei Verwendung von Niederfrequenztransformatoren der Verstärkungsgrad in hohem Maße von der Zählkammerspannung abhängt. Der erreichte Verstärkungsgrad (in bezug auf Ladungsmengen) betrug $1{,}65 \cdot 10^9$. Durch verschiedene Versuche wurde dargetan, daß dieser Faktor unter gegebenen Bedingungen ein konstanter ist, daß also eine gegebene, dem Gitter der Aufnahmelampe zugeführte Elektrizitätsmenge stets denselben Ausschlag am Oszillograph ergibt. Da α-Teilchen unter anscheinend konstanten Versuchsbedingungen variable Ausschläge ergaben, war damit bewiesen, daß diese Schwankungen in der Ionisierung begründet sind. Um die Ausschlagsschwankungen zu studieren, wurden photographische Registrierungen mit einem Oszillographen ausgeführt. Aus diesen wurden Häufigkeitsverteilungskurven gewonnen. In allen untersuchten Gasen war eine Inhomogenität der Ausschläge festzustellen. Wasserstoff ließ sich nicht quantitativ auswerten, da die Ausschläge relativ zu den Nullschwankungen zu klein waren. In Sauerstoff und Stickstoff wurde annähernd dieselbe Streuung der Ausschläge festgestellt, und zwar war sie kleiner

als in Luft. Der mittlere Ausschlag ist um so größer, je höher die Ordnungszahl des Elementes ist, ein Resultat, das schon von gebräuchlichen Meßverfahren her bekannt ist. Gasgemische wie Luft und ganz besonders auch ein Gemisch Wasserstoff–Stickstoff, zeigen eine größere Streuung als die Komponenten. Aber auch chemisch zusammengesetzte Gase wie Kohlendioxyd streuen stärker als elementare Gase. Ob die Streuung etwa in einatomigen Gasen (Edelgasen) verschwindet, wurde nicht untersucht. Ein Teil der Inhomogenität der Ausschläge ist auf Rechnung einer Geschwindigkeitsstreuung der α-Teilchen zu setzen. Relativ klein wird sie, wenn man die ganze Reichweite der α-Teilchen zur Ionisierung ausnützt. Am Schluß ist noch eine, gleichfalls Schwankungen aufweisende Registrierung von H-Strahlen wiedergegeben.

Es sei mir an dieser Stelle gestattet, meinem hochverehrten Lehrer, Hrn. Prof. Dr. H. Greinacher, für die Anregung zu dieser Arbeit und für die ständige Unterstützung bei ihrer Ausführung, meinen verbindlichsten Dank auszusprechen.

Bern, Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 28. Mai 1928)

4. *Die Supraleitfähigkeit nach Schrödingers[1]) Wellengleichung und Fermis[2]) Statistik;*

von Erich Kretzschmann

Inhalt: In einem makroskopisch isotropen homogenen metallischen Leiter, in dem die Elementarladungen nur nach dem Coulombschen Gesetz aufeinander wirken, ohne je ineinander einzudringen, besteht kein elektrischer Widerstand, solange die Bewegung der freien Elektronen lediglich durch die Schrödingersche Wellengleichung und ihre Geschwindigkeits- und Energieverteilung allein durch die Fermische Statistik bestimmt sind. Die Ergebnisse der früheren auf die Boltzmannsche Statistik und gewöhnliche Mechanik gegründeten Untersuchungen des Verfassers bleiben hiernach bestehen, mit Ausnahme unwesentlicher Zahlwerte. — Der Einfluß der magnetischen Kräfte auf die Elektronenbewegung ist wellenmechanisch noch nicht berechnet.

Einleitung

Die Fermische Geschwindigkeitsverteilung der Leitungselektronen ist kürzlich von Hrn. Sommerfeld[3]) einer im übrigen unter den Voraussetzungen der alten Theorie von H. A. Lorentz durchgeführten Berechnung der elektrischen und Wärmeleitfähigkeit der Metalle zugrunde gelegt worden, und im Anschluß daran hat Hr. Houston[4]) die de Brogliesche Vorstellung der Wellennatur des bewegten Elektrons verwertet, indem er die Temperaturabhängigkeit der elektrischen Leitfähigkeit nach einer Formel berechnete, die von Debye für die Temperaturabhängigkeit der ungeordneten Zerstreuung ebener Röntgenwellen in vollkommenen Kristallen aufgestellt worden ist.

Der Verfasser[5]) hat in seinen früheren Arbeiten über

---

1) E. Fermi, Ztschr. f. Phys. 36. S. 902. 1926.

2) Erwin Schrödinger, Ann. d. Phys. (4) 81. S. 109—139. 1926.

3) A. Sommerfeld, Ztschr. f. Phys. 47. S. 1—32. 1928.

4) William V. Houston, Ztschr. f. Phys. 48. S. 449—468. 1928; vgl. auch J. Frenkel, Ztschr. f. Phys. 47. S. 819—834. 1928.

5) Verf., Ann. d. Phys. 74. S. 189—215 u. S. 405—444. 1924; 80. S. 109—136. 1926. Die letztgenannte Arbeit genügt zum Verständnis des Folgenden.

metallische Leitfähigkeit und Supraleitfähigkeit das einfache Drude-Lorentzsche Bild, der geradlinig zwischen elastischen Atomen hin- und herfliegenden Leitungselektronen durch die allgemeinere Annahme ersetzt, daß auch die jeweils freien Elektronen dauernd unter der unregelmäßigen Wirkung der von Atomen und anderen Elektronen ausgeübten Kräfte stehen. Die elektrische Leitfähigkeit kann so, insbesondere wegen der wechselseitigen Beeinflussung der Elektronen, nicht mehr durch eine auf die einzelnen Elektronen oder Scharen von Elektronen mit gleicher Geschwindigkeit bezogene freie Weglänge bestimmt werden, vielmehr muß man von vornherein die Gesamtheit der Leitungselektronen eines hinreichend großen Gebiets ins Auge fassen. An den unregelmäßigen, ohne äußeren Antrieb erfolgenden Geschwindigkeitsschwankungen einer solchen Gesamtheit ließ sich zunächst ein rein kinematisches, aber von der Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen unabhängiges Kriterium für das Verschwinden des elektrischen Widerstandes aufweisen.

Die Übertragung der aufgestellten Bedingung der Supraleitfähigkeit in dynamische Form geschah unter den Voraussetzungen, daß alle Elementarladungen im Leiter lediglich nach den bekannten elektromagnetischen Kraftgesetzen aufeinander wirkten, und daß für die freien Elektronen das Maxwell-Boltzmannsche Energieverteilungsgesetz gälte. Es ergab sich, daß kein Widerstand besteht, solange — klassisch gesprochen — kein Eindringen der Elementarladungen ineinander oder — quantentheoretisch — kein Austausch freier mit gebundenen Elektronen stattfindet. Findet ein solcher statt, so ist der Widerstand der Häufigkeit der Vertauschungen proportional.

In der vorliegenden Arbeit werden nun auch die Überlegungen der oben angedeuteten Theorie des Verfassers, mit der Wellenmechanik von Schrödinger statt der gewöhnlichen Mechanik und mit Fermischer[1]) statt Boltzmannscher

1) Die nach Fermi berechnete Geschwindigkeitsverteilung der freien Elektronen ergibt im Gegensatz zur Maxwellschen keine merkliche Abhängigkeit der kinetischen Energie der Elektronen von der Temperatur; vgl. A. Sommerfeld, a. a. O., S. 16.

Statistik durchgeführt, soweit sie hierdurch eine neue Gestalt annehmen.

Im Gegensatz zu der Theorie von Sommerfeld und Houston werden aber ebene oder gar stehende Wellen nicht als ausreichende Darstellung der Elektronenbewegung angesehen, sondern erst ein erheblich verwickelterer Schwingungsvorgang mit vielfach und unregelmäßig gekrümmten und sich bewegenden Phasenflächen, der sich im einzelnen ebensowenig angeben läßt, wie die Bewegung vieler dauernd und unregelmäßig beschleunigter Elektronen. Demgemäß konnte nicht von einer besonderen Lösung der Wellengleichung ausgegangen werden, sondern die gebrauchten Bewegungsgesetze mußten aus der für die Gesamtheit der freien Elektronen aufgestellten Wellengleichung selbst unmittelbar entwickelt werden. Die Grundlage hierfür bot die von Hrn. Ehrenfest[1]) gegebene elegante Darstellung der Beziehungen zwischen gewöhnlicher und Wellenmechanik.

Die Schrödingersche Wellenfunktion ψ wird als Wahrscheinlichkeitsamplitude und ihr Quadrat $\psi \cdot \psi^*$ als Wahrscheinlichkeitsdichte im Konfigurationsraume für die unbestimmte Lage der Punktladungen, nicht aber als tatsächliche Ladungsdichte „verschmierter" Elektronen betrachtet.[2]) Das ist wichtig, weil so die elektrische Kraft, die auf irgendein Leitungselektron wirkt, aus einem stets der Laplaceschen Gleichung genügenden Potential abzuleiten ist. Eine Bestimmung des Einflusses des magnetischen Feldes auf die Elektronenströmung, die jedenfalls von relativistisch gestalteten Wellengleichungen ausgehen müßte, wurde wegen der damit verbundenen Verwicklungen nicht vorgenommen. Doch ist

1) P. Ehrenfest, Ztschr. f. Phys. 45. S. 455. 1927.

2) Die Ladungsverteilung einer voll besetzten Elektronenschale ist hiernach erst im Zeitmittel ganz kugelsymmetrisch, aber das genügt offensichtlich, um das Fehlen beobachtbarer Richtungseffekte zu erklären. Ebenso ist das von Hrn. A. Unsöld, Ztschr. f. Phys. 43. S. 563. 1927 bestimmte Gleichgewicht eines Ions in der Elektronenwolke eines Atoms nicht davon abhängig, ob die Wolke aus stetig verteilter Ladung oder aus einzelnen Elektronen besteht, abgesehen von kleinen Schwankungen, die im letzten Falle das abwechselnd nach verschiedenen Richtungen von den vorbeifliegenden Elektronen gezogene, verhältnismäßig sehr träge, Ion ausführen müßte.

wohl nicht zu erwarten, daß sich dadurch an dem Ergebnis des Folgenden etwas wesentliches ändert.

Dieses bleibt, abgesehen von Zahlwerten, die von der Elektronengeschwindigkeit abhängen, das entsprechende bzw. gleiche wie nach den früheren Untersuchungen des Verfassers, d. h. elektrischer Widerstand tritt nur auf, wenn die Bewegung der freien Elektronen von Vorgängen unterbrochen wird, die nicht von der Wellengleichung beherrscht werden. Nimmt man wie früher als solche Vorgänge die quantenmäßige Bindung freier Elektronen an Atome und das Freiwerden gebundener an, so erhält man auch wieder die frühere Formel für den spezifischen Widerstand.[1]) Ebenso bleibt die angegebene Erklärung für die von Kamerlingh Onnes beobachtete Unverrückbarkeit der Stromlinien in Supraleitern gegenüber magnetischen Kräften bestehen.

I. Die kinematische Bedingung der Supraleitfähigkeit

§ 1. Betrachtet man in einem unendlichen homogenen metallischen Leiter die Leitungselektronen eines hinreichend großen Gebiets, so führt dieser „Elektronenverein" auch ohne äußere Einwirkung und bei stationärem Zustande lediglich infolge der unregelmäßigen Bewegung der einzelnen freien Elektronen zufällige Bewegungen als Ganzes aus. Die Schnelligkeit, mit der eine zufällig in einer bestimmten Richtung x erreichte Strömungsgeschwindigkeit s' *im Mittel* zu Null abfällt, muß offensichtlich ein Maß bieten für den Widerstand des Leiters gegen einen Strom in der x-Richtung. Jedenfalls kann, wenn im Mittel die Strömungsgeschwindigkeit nicht gegen Null strebt, auch kein Widerstand vorhanden sein. Die Bedingung, unter der dieser ideale Fall von Supraleitfähigkeit eintritt, ist früher rein kinematisch und ohne Benutzung eines bestimmten Geschwindigkeitsverteilungsgesetzes für die Elektronen abgeleitet und kann daher hier einfach übernommen werden. Sie lautet: vollkommene Supraleitfähigkeit tritt dann und nur dann ein, wenn die zweite zeitliche Ableitung s'' der Strömungsgeschwindig-

1) Dieser entsteht hiernach durch Absorption und Emission von Elektronenwellen, dagegen nach Sommerfeld und Houston durch bloße Zerstreuung.

keit, gemittelt über alle Zeitabschnitte, während deren diese sich zufällig in irgendeinem festen Wertbereiche s' bis $s' + ds'$ befindet, gleich Null wird, unabhängig von s'.[1]) Die anschauliche Bedeutung dieses Satzes liegt auf der Hand: Wenn man s' als Zeitfunktion aufzeichnet, so ist s''' proportional der Krümmung der $s'(t)$-Kurve gegen die t-Achse, $s' = 0$, hin. Verschwindet die Krümmung in jedem Abstande s' von der Achse im Mittel, so heißt das, sinnfällig gesprochen, der Nullwert der Strömungsgeschwindigkeit verliert seine Anziehungskraft und die Geschwindigkeitsschwankungen ihren Mittelpunkt.

II. Die Bewegung der freien Elektronen nach der Wellengleichung

§ 2. Es seien in einem hinreichend großen Gebiete eines homogenen metallischen Leiters N Leitungselektronen mit den Koordinaten x_1, y_1, z_1 bis x_N, y_N, z_N. Ist V ihre gesamte potentielle Energie, m die Masse des Elektrons und h das Plancksche Wirkungsquantum, so gelten nach Schrödinger[2]) die konjugierten Wellengleichungen:

$$(1) \qquad \begin{cases} \Delta \Psi - \dfrac{8\pi^2 m}{h^2} V \cdot \Psi = - \dfrac{4\pi i m}{h} \dfrac{\partial \Psi}{\partial t} \\ \Delta \Psi^* - \dfrac{8\pi^2 m}{h^2} V \cdot \Psi^* = - \dfrac{4\pi i m}{h} \dfrac{\partial \Psi^*}{\partial t} \end{cases}$$

mit

$$\Delta = \sum^k \left(\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_k^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_k^2} \right),$$

(m = Masse des Elektrons, $k = 1, 2, \ldots N$).

Die Wellenfunktion Ψ und ihr konjugierter Wert Ψ^* seien durch

$$(2) \qquad \int d\,\Omega\, \Psi \cdot \Psi^* = 1$$

geeicht, wobei

$$d\,\Omega = d x_1 \cdot d y_1 \cdot d z_1 \cdots d x_N \cdot d y_N \cdot d z_N$$

sei und über den ganzen $3N$-dimensionalen Koordinatenraum integriert wird.

---

1) Der Beweis dieses Satzes ist vom Verfasser in Ann. d. Phys. (4) 74. S. 409—427. 1924 und kürzer und etwas allgemeiner: Ann. d. Phys. (4) 80. S. 114—117. 1926 gegeben. Der genannte Mittelwert ist dort mit $s' \cdot \mu_0''$ bezeichnet, im folgenden mit $(\overline{s'''})_{s'}$.

2) E. Schrödinger, Ann. d. Phys. (4) 81. S. 112. Gl. (4''). 1926.

$\Psi \Psi^* \cdot d\,\Omega$ sei die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Elektronenkoordinaten im Bereiche $d\,\Omega$ liegen. Die „wahrscheinliche" x-Koordinate des l-ten Elektrons ist dann

$$\bar{x}_l = \int d\,\Omega \cdot \Psi \Psi^* \cdot x_l \tag{3}$$

und demgemäß seine „wahrscheinliche" Geschwindigkeit in der x-Richtung

$$\bar{\dot{x}}_l \equiv \frac{d\,\bar{x}_l}{d\,t} = \int d\,\Omega \left(\Psi \frac{\partial\,\Psi^*}{\partial\,t} + \Psi^* \frac{\partial\,\Psi}{\partial\,t} \right) \cdot x_l,$$

oder nach (1)

$$\bar{\dot{x}}_l = \frac{i\,h}{4\,\pi\,m} \int d\,\Omega (\Psi^* \varDelta \Psi - \Psi \varDelta \Psi^*) \cdot x_l.$$

Schreibt man, wie üblich, im $x_1 \ldots z_N$-Raume

$$\operatorname{grad} \Phi \equiv \left(\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,x_1}, \quad \frac{\partial\,\Phi}{\partial\,y_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial\,\Phi}{\partial\,y_N}, \quad \frac{\partial\,\Phi}{\partial\,z_N} \right)$$

und

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} \equiv \sum^k \left(\frac{\partial\,\mathfrak{A}_{x_k}}{\partial\,x_k} + \frac{\partial\,\mathfrak{A}_{y_k}}{\partial\,y_k} + \frac{\partial\,\mathfrak{A}_{z_k}}{\partial\,z_k} \right),$$

so ist

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi \equiv \varDelta \Phi$$

und

$$X \cdot \varDelta \Phi - \Phi \cdot \varDelta X \equiv \operatorname{div} (X \operatorname{grad} \Phi - \Phi \operatorname{grad} X). \tag{4}$$

Folglich:

$$\bar{\dot{x}}_l = \frac{i\,h}{4\,\pi\,m} \int d\,\Omega \cdot x_l \cdot \operatorname{div} (\Psi^* \operatorname{grad} \Psi - \Psi \operatorname{grad} \Psi^*).$$

Mittels partieller Integration ergibt sich hieraus, da Ψ und Ψ^* überall im Unendlichen verschwinden und von x_l nur die eine Ableitung nach x_l selbst nicht gleich Null ist:

$$\bar{\dot{x}}_l = \frac{i\,h}{4\,\pi\,m} \int d\,\Omega \cdot \Psi \Psi^* \cdot \frac{\Psi \dfrac{\partial\,\Psi^*}{\partial\,x_l} - \Psi^* \dfrac{\partial\,\Psi}{\partial\,x_l}}{\Psi \Psi^*}. \tag{5}$$

Durch diese Gleichung ist die reelle Koordinatenfunktion

$$\frac{i\,h}{4\,\pi\,m} \cdot \frac{\Psi \dfrac{\partial\,\Psi^*}{\partial\,x_l} - \Psi^* \dfrac{\partial\,\Psi}{\partial\,x_l}}{\Psi \Psi^*}$$

der wahrscheinlichen Geschwindigkeitskomponente $\bar{\dot{x}}_l$ mittels der Wahrscheinlichkeitsdichte $\Psi \Psi^*$ gerade so zugeordnet, wie

die Punktkoordinate x_l durch (3) ihrem wahrscheinlichen Wert $\bar{x}_l$. Demnach können

$$(5a)\quad \begin{cases} \dot{x}_l = \dfrac{ih}{4\pi m}\cdot\dfrac{\Psi\dfrac{\partial\Psi^*}{\partial x_l} - \Psi^*\dfrac{\partial\Psi}{\partial x_l}}{\Psi\Psi^*} \\ \dot{y}_l = \dfrac{ih}{4\pi m}\cdot\dfrac{\Psi\dfrac{\partial\Psi^*}{\partial y_l} - \Psi^*\dfrac{\partial\Psi}{\partial y_l}}{\Psi\Psi^*} \\ \dot{z}_l = \dfrac{ih}{4\pi m}\cdot\dfrac{\Psi\dfrac{\partial\Psi^*}{\partial z_l} - \Psi^*\dfrac{\partial\Psi}{\partial z_l}}{\Psi\Psi^*} \end{cases}$$

sinngemäß als die „Punktwerte" der Geschwindigkeitskomponenten des l-ten Elektrons bezeichnet werden. Es ist

$$(5b)\qquad \overline{\dot{x}_l} = \int d\,\Omega\cdot\Psi\Psi^*\cdot\dot{x}_l$$

und entsprechend

$$(5b)\quad \begin{cases} \overline{\dot{y}_l} = \int d\,\Omega\cdot\Psi\Psi^*\cdot\dot{y}_l \\ \overline{\dot{z}_l} = \int d\,\Omega\cdot\Psi\Psi^*\cdot\dot{z}_l \end{cases}$$

Weiter folgt aus (5) und (1):

$$\begin{aligned} \overline{\ddot{x}_l} \equiv \frac{d}{dt}\left(\overline{\dot{x}_l}\right) = \frac{ih}{4\pi m}\int d\,\Omega \\ \cdot\left\{\frac{\partial\Psi^*}{\partial x_l}\left(\frac{ih}{4\pi m}\,\varDelta\Psi - \frac{2\pi i}{h}\,V\cdot\Psi\right)\right. \\ + \frac{\partial\Psi}{\partial x_l}\left(\frac{ih}{4\pi m}\,\varDelta\Psi^* - \frac{2\pi i}{h}\,V\cdot\Psi^*\right) \\ - \Psi\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{ih}{4\pi m}\,\varDelta\Psi^* - \frac{2\pi i}{h}\,V\cdot\Psi^*\right) \\ \left. - \Psi^*\cdot\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{ih}{4\pi m}\,\varDelta\Psi - \frac{2\pi i}{h}\,V\cdot\Psi\right)\right\}, \end{aligned}$$

und da nach (4)

$$\begin{aligned} \int d\,\Omega\left(\frac{\partial\Psi^*}{\partial x_l}\cdot\varDelta\Psi - \Psi\frac{\partial\varDelta\Psi^*}{\partial x_l}\right) \\ \equiv \int d\,\Omega\left(\frac{\partial\Psi^*}{\partial x_l}\cdot\varDelta\Psi - \Psi\cdot\varDelta\frac{\partial\Psi^*}{\partial x_l}\right) = 0, \end{aligned}$$

ist ebenso wie der konjugierte Ausdruck, so wird:

$$\overline{\ddot{x}_l} = -\frac{1}{m}\int d\,\Omega\cdot\Psi\Psi^*\cdot\frac{\partial V}{\partial x_l}.$$

Für das Gesamtpotential V darf hier auch das Potential V_l des l-ten Elektrons eingesetzt werden, das alle von x_l, y_l, z_l abhängigen Glieder von V enthält.

$$\overline{\ddot{x}}_l = -\frac{1}{m}\int d\,\Omega\cdot\Psi\,\Psi^*\cdot\frac{\partial V_l}{\partial x_l}\,. \tag{6}$$

Der „Punktwert" der Beschleunigung des l-ten Elektrons in der x-Richtung ist also gleich der entsprechenden Beschleunigungskomponente nach der gewöhnlichen Mechanik.

§ 3. Wir brauchen noch die nächste Ableitung von $\overline{\ddot{x}}_l$ nach der Zeit. Es wird nach (6) und (1)

$$\overline{\dddot{x}}_l = \frac{d\overline{\ddot{x}}_l}{d\,t} = \frac{i\,h}{4\pi\,m^2}\cdot\int d\,\Omega\,\frac{\partial V_l}{\partial x_l}(\Psi\,\Delta\,\Psi^* - \Psi^*\,\Delta\,\Psi)$$
$$-\frac{1}{m}\int d\,\Omega\,\Psi\,\Psi^*\,\frac{\partial^2 V_l}{\partial x_l\,\partial t}$$

und nach (4)

$$\overline{\dddot{x}}_l = \frac{i\,h}{4\pi\,m^2}\int d\,\Omega\,\frac{\partial V_l}{\partial x_l}\,\mathrm{div}(\Psi\,\mathrm{grad}\,\Psi^* - \Psi^*\,\mathrm{grad}\,\Psi)$$
$$-\frac{1}{m}\int d\,\Omega\,\Psi\,\Psi^*\,\frac{\partial^2 V_l}{\partial x_l\,d\,t}\,.$$

Partielle Ausführung des ersten Integrals rechts ergibt:

$$\overline{\dddot{x}}_l = \frac{i\,h}{4\pi\,m^2}\int d\,\Omega\sum\Big\{\frac{\partial^2 V_l}{\partial x_l\,\partial x_k}\Big(\Psi^*\frac{\partial\,\Psi}{\partial x_k} - \Psi\frac{\partial\,\Psi^*}{\partial x_k}\Big)$$
$$+\frac{\partial^2 V_l}{\partial x_l\,d\,y_k}\Big(\Psi^*\frac{\partial\,\Psi}{\partial y_k} - \Psi\frac{\partial\,\Psi^*}{\partial x_k}\Big)$$
$$+\frac{\partial^2 V_l}{\partial x_l\,d\,z_k}\Big(\Psi^*\frac{\partial\,\Psi}{\partial z_k} - \Psi\frac{\partial\,\Psi^*}{\partial z_k}\Big)\Big\}$$
$$-\frac{1}{m}\int d\,\Omega\cdot\Psi\,\Psi^*\cdot\frac{\partial^2 V_l}{\partial x_l\,\partial t}\,,$$

oder nach (6)

$$\overline{\dddot{x}}_l = -\frac{1}{m}\int d\,\Omega\cdot\Psi\,\Psi^*$$
$$\cdot\Big[\sum\Big(\frac{\partial^2 V_l}{\partial x_l\,\partial x_k}\cdot\dot{x}_k + \frac{\partial^2 V_l}{\partial x_l\,\partial y_k}\cdot\dot{y}_k + \frac{\partial^2 V_l}{\partial x_l\,\partial z_k}\,\dot{z}_k\Big) + \frac{\partial^2 V_l}{\partial x_l\,\partial t}\Big]\,.$$

Die zweite zeitliche Ableitung der Strömungsgeschwindigkeit s' der N Elektronen in der x-Richtung ist somit:

$$s''' = \frac{1}{N}\sum^l\overline{\dddot{x}}_l = -\frac{1}{m\cdot N}\int d\,\Omega\cdot\Psi\,\Psi^*$$
$$\cdot\Big[\sum^l\sum^k\Big(\frac{\partial^2 V_l}{\partial x_l\,\partial x_k}\cdot\dot{x}_k + \frac{\partial^2 V_l}{\partial x_l\,\partial y_k}\cdot\dot{y}_k + \frac{\partial^2 V_l}{\partial x_l\,\partial z_k}\cdot\dot{z}_k\Big)$$
$$+\sum^l\frac{\partial^2 V_l}{\partial x_l\,\partial t}\Big]\,. \qquad l, k = 1, 2, \ldots N)$$

Zur Vereinfachung der Doppelsumme werde noch V_l in das von den Kernen und gebundenen Elektronen herrührende Potential V_l^+ und in den von freien Elektronen erzeugten Rest V_l^- zerlegt:

$$V_l = V_l^+ + V_l^- \tag{7}$$

und weiter nach den einzelnen freien Elektronen:

$$V_l^- = \sum^k V_{lk} = \sum^k \frac{e^2}{r_{lk}} \tag{7a}$$

mit

$$V_{ll} = 0\,, \quad V_{lk} = V_{kl}$$

und

$$r_{lk} = \sqrt{(x_l - x_k)^2 + (y_l - y_k)^2 + (z_l - z_k)^2}\,.$$

Dann ist:

$$\frac{\partial^2 V_l}{\partial x_l \partial x_k} \dot{x}_k = \frac{\partial^2 V_{lk}}{\partial x_l \partial x_k} \dot{x}_k = -\frac{\partial^2 V_{lk}}{\partial x_k^2} \dot{x}_k \qquad \text{für } k \neq l,$$

$$\frac{\partial^2 V_l}{\partial x_l^2} \dot{x}_l = \frac{\partial^2 V_l^+}{\partial x_l^2} \cdot \dot{x}_l + \sum \frac{\partial^2 V_{lk}}{\partial x_l^2} \cdot \dot{x}_l$$

also:

$$\sum^k \left(\frac{\partial^2 V_l}{\partial x_l \partial x_k} \dot{x}_k\right) = \frac{\partial^2 V_l^+}{\partial x_l^2} \cdot \dot{x}_l + \sum^k \left(\frac{\partial^2 V_{lk}}{\partial x_l^2} \cdot \dot{x}_l - \frac{\partial^2 V_{kl}}{\partial x_k^2} \cdot \dot{x}_k\right),$$

und ebenso:

$$\sum^k \left(\frac{\partial^2 V_l}{\partial x_l \partial y_k} \cdot \dot{y}_k\right) = \frac{\partial^2 V_l^+}{\partial x_l \partial y_l} \cdot \dot{y}_l + \sum \left(\frac{\partial^2 V_{lk}}{\partial x_l \partial y_l} \cdot \dot{y}_l - \frac{\partial^2 V_{kl}}{\partial x_k \partial y_k} \cdot \dot{y}_k\right),$$

$$\sum^k \left(\frac{\partial^2 V_l}{\partial x_l \partial z_l} \cdot \dot{z}_k\right) = \frac{\partial^2 V_l^+}{\partial x_l \partial z_l} \cdot \dot{z}_l + \sum^k \left(\frac{\partial^2 V_{lk}}{\partial x_l \partial z_l} \cdot \dot{z}_l - \frac{\partial^2 V_{kl}}{\partial x_k \partial z_k} \cdot \dot{z}_k\right).$$

Bei der Summation nach l haben sich die rechts stehenden in l und k antisymmetrischen Klammern heraus. Folglich und da V_l nach (7a) nicht ausdrücklich von t abhängt, wird:

$$\text{8)} \quad \begin{cases} s''' = -\dfrac{1}{N \cdot m} \sum^l \int d\,\Omega \cdot \Psi \Psi^* \\ \qquad \cdot \left\{\dfrac{\partial^2 V_l^+}{\partial x_l^2} \cdot \dot{x}_l + \dfrac{\partial^2 V_l^+}{\partial x_l \partial y_l} \cdot \dot{y}_l + \dfrac{\partial^2 V_l^+}{\partial x_l \partial z_l} \cdot \dot{z}_l + \dfrac{\partial^2 V_l^+}{\partial x_l \partial t}\right\}. \end{cases}$$

§ 4. Rechts in der letzten Gleichung steht durch $-m$ geteilt der Mittelwert des Klammerausdrucks über alle Elektronen und alle mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $\Psi \Psi^*$ belasteten Punkte des Koordinatenraums. Jetzt ist noch einmal zu mitteln über alle die Zeitelemente, während deren die x-Komponente, s', der Strömungsgeschwindigkeit der Elektronen bei ihren zufälligen Schwankungen sich in dem willkürlich

vorgegebenen Wertbereiche s' bis $s' + ds'$ befindet. Das Ergebnis der ganzen Mittlung könnte man, da durch sie

(9) $$\overline{\dot{y}} = \overline{\dot{z}} = 0,$$

sowie bei stationärem Zustande des Körpers auch

(9a) $$\overline{\frac{\partial^2 V_i^+}{\partial x_i \, \partial t}} = 0$$

wird, und

(10) $$\frac{\partial^2 V_i^+}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 V_i^+}{\partial y_i^2} + \frac{\partial^2 V_i^+}{\partial z_i^2} = 0$$

ist, in einem isotropen und unendlich ausgedehnten Körper ohne weiteres gleich Null setzen, wenn nicht die Möglichkeit eines statistischen Zusammenhangs zwischen den Punktwerten der Geschwindigkeitskomponenten und den mit ihnen in (8) malgenommenen zweiten Ableitungen des Potentials bestände, etwa in der Art, daß bei positivem $\dot{x}_i$ auch $\frac{\partial^2 V_i^+}{\partial x_i^2}$ vorzugsweise positiv wäre.

III. Das Fermische Geschwindigkeits- und Energieverteilungsgesetz bei gegebener Strömungsgeschwindigkeit

§ 5. Diese Frage wird entschieden durch die der Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen zugrunde liegenden Statistik. Statt der früher von mir benutzten Boltzmannschen Statistik nehme ich jetzt die Fermische als gültig an, die ja unverkennbare Vorzüge gegenüber jener besitzt.[1])

Nach Fermi kann die Verteilung mit den Besetzungszahlen N_r der einzelnen Zustandsgebiete des Phasenraums, deren jedes z Elementarzellen für je 2 Elektronen enthalte auf

$$W = \prod_r \left(\frac{(2z)!}{N_r!\,(2z - N_r)!} \right)$$

1) Für die Fermische Statistik sprechen außer der bereits in der Einleitung erwähnten Unabhängigkeit der kinetischen Energie der Elektronen von der Temperatur die von W. Pauli jr., Ztschr. f. Phys. 41. S. 81—102. 1926 gegebene Deutung des temperaturunabhängigen Paramagnetismus bei Metallen und schließlich ihre kürzlich von E. Fermi, Ztschr. f. Phys. 48. S. 73—79. 1928 aufgedeckte Anwendbarkeit auch auf die gebundenen Elektronen schwerer Atome. Vgl. auch im folgenden § 6 die Anmerkung zu Gleichung (12).

verschiedene Weisen erfolgen.[1]) Die wahrscheinlichste Verteilung in unserem Falle, wo außer der Energie und Anzahl der Elektronen noch ihre Strömungsgeschwindigkeit s' in der x-Richtung gegeben ist, bestimmt sich aus

$$\delta \ln W = -\sum^r [\ln N_r - \ln(2z - N_r)]\,\delta N_r = 0$$

mit den Nebenbedingungen:

$$\delta N = \sum \delta N_r = 0,$$
$$\delta E = \sum^r \varepsilon_r \delta N_r = 0,$$
$$\delta(N \cdot s') = \sum \dot{x}_r \delta N_r = 0,$$

wo ε_r und $\dot{x}_r$ Energie und x Komponente der Geschwindigkeit der Elektronen des r-ten Zustandsgebiets sind.

Es folgt:

$$\ln N_r - \ln(2z - N_r) + \alpha + \beta\varepsilon_r + \gamma\dot{x}_r = 0$$

oder

$$N_r = \frac{2z}{e^{\alpha + \beta\varepsilon_r + \gamma\dot{x}_r} + 1}.$$

Die Parameter α und β sind durch Ableitungen der Entropie $S = k \ln W$ bestimmt:

(11) $$\alpha = \frac{1}{k}\left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{V,E} \qquad \beta = \frac{1}{k}\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{V,N} = \frac{1}{kT},$$

während γ in einfacher Beziehung zur Strömungsgeschwindigkeit s' der Elektronen steht. Denn sei V_r die potentielle Energie in dem r-ten Gebiete, so ist:

$$\alpha + \beta\varepsilon_r + \gamma\dot{x}_r = \alpha + \beta V_r + \frac{\beta m}{2}(\dot{x}_r^2 + \dot{y}_r^2 + \dot{z}_r^2) + \gamma\dot{x}_r$$
$$= \alpha + \beta V_r + \frac{\beta m}{2}\left[\left(\dot{x}_r + \frac{\gamma}{\beta \cdot m}\right)^2 + \dot{y}_r^2 + \dot{z}_r^2\right]$$
$$- \frac{\gamma^2}{2\beta m}.$$

---

1) Die Verteilung der N_r *nicht unterschiedenen* Elektronen des r-ten Zustandsgebietes auf die $2z$ ($\geqq N_r$) vorhandenen Einzelstellen kann nämlich, wie man leicht einsieht, auf $\frac{(2z)!}{N_r!\,(2z - N_r)!}$ Arten erfolgen, und zwar in jedem Zustandsgebiete unabhängig von jedem andern.

Also:

(12)[1] $$N_r = \frac{2\varkappa}{e^{\alpha' + \beta V_r + \frac{\beta m}{2}\left[\left(\dot{x}_r + \frac{\gamma}{\beta \cdot m}\right)^2 + \dot{y}_r^2 + \dot{z}_r^2\right]} + 1}$$

mit

$$\alpha' = \alpha - \frac{\gamma^2}{2\beta m}.$$

Die $\dot{x}_r$ verteilen sich nach (12) für jeden Wert von V_r symmetrisch um den Wert $-\frac{\gamma}{\beta \cdot m}$, der somit gleich s' ist:

$$\gamma = -s' \cdot \beta \cdot m = -\frac{m}{kT} \cdot s'.$$

IV. Die Supraleitfähigkeit und der spezifische Widerstand

§ 6. Nach (12) haben die Elektronengeschwindigkeiten nur mit den Potentialwerten selbst einen *unmittelbaren* statistischen Zusammenhang, ein solcher mit Ableitungen des Potentials — oder eines Teils, V^+, von ihm — nach den Koordinaten kann nur mittelbar zustande kommen und fällt fort bei fest gegebenem Potentialwerte. Innerhalb des festen Wertbereichs V bis $V + dV$ des Elektronenpotentials gemittelt, ist folglich nach (9)

(13) $$\left\{\begin{aligned} &\overline{\left(\frac{\partial^2 V_l^+}{\partial x_l^2} \cdot \dot{x}_l\right)} + \overline{\left(\frac{\partial^2 V_l^+}{\partial x_l\, \partial y_l} \cdot \dot{y}_l\right)} + \overline{\left(\frac{\partial^2 V_l^+}{\partial x_l\, \partial z_l} \cdot \dot{z}_l\right)} \\ &\qquad = \overline{\frac{\partial^2 V_l^+}{\partial x_l^2}} \cdot \bar{\dot{x}} = \overline{\left(\frac{\partial^2 V_l^+}{\partial x_l^2}\right)} \cdot s'. \end{aligned}\right.$$

Den Zusammenhang zwischen dem Verteilungsgesetz (12) und der Wahrscheinlichkeitsdichte $\Psi \Psi^*$ erhält man, wenn man einerseits durch N_r nach (12) und andererseits durch $\Psi \Psi^*$ den Bruchteil aller Elektronen ausdrückt, der sich bei der Strömungsgeschwindigkeit s' durchschnittlich im Geschwindigkeitsbereiche $\dot{x}$ bis $\dot{x} + d\dot{x}$, ... $\dot{z}$ bis $\dot{z} + d\dot{z}$ und Potentialbereiche V bis $V + dV$ befindet:

---

1) Fragt man nach der Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich ein Elektron im Innern eines positiven Atomkernes befinde, so würde diese nach dem Maxwell-Boltzmannschen Energieverteilungsgesetz, bei dem N_r proportional zu $e^{-\beta V_r}$ ist, mit zu Null abnehmender Kerngröße, wie leicht zu sehen, zur Gewißheit, dagegen nach (12) wegen der 1 im Nenner, die bei $V_r \to -\infty$ allein übrig bleibt, zu Null.

$$(14) \qquad \frac{N_r}{N} = \frac{1}{N} \overline{\sum_l \int_{(\dot{x}_l = \dot{x}, \ldots V_l = V)}^{(\dot{x}_l = \dot{x} + d\dot{x}, \ldots V_l = V + dV)} d\,\Omega\, \Psi\, \Psi^*}.$$

Rechts ist zur Beseitigung der zufälligen Schwankungen über alle Zeitabschnitte zu mitteln, in denen die Strömungsgeschwindigkeit zwischen s' und $s' + ds'$ liegt.[1]) Die Integrationsgrenzen sind mit dem Integranden durch (5a) und (1) verknüpft. Die dem von ihnen umschlossenen Zustandsgebiete im Ausdrucke (12) für N_r zuzuordnende Zahl z von Elementarzellen wird durch die Quantelung des Elektronengases bestimmt, auf deren Regeln es hier nicht weiter ankommt.

Der gesuchte Mittelwert von s''' bei gegebenem s' ist somit, wenn man die Integration in (8) nach dem Werte von V_l ordnet und die durchschnittliche Anzahl der in einem Wertbereiche dV befindlichen Elektronen mit dN bezeichnet, nach (13) und (14) sowie (9a):

$$(15) \qquad \overline{(s''')_{s'}} = -\frac{s'}{N \cdot m} \int dN \overline{\left(\frac{\partial^2 V_l^+}{\partial x_l^2}\right)}.$$

Vermöge der Laplaceschen Gleichung (10) verschwindet der rechts stehende Ausdruck, sofern nur auf den Flächen konstanten Potentials der Elektronen die x-Richtung den zu ihr senkrechten Richtungen so weit gleichberechtigt ist, daß

$$(16) \qquad \overline{\frac{\partial^2 V_l^+}{\partial x^2}} = a^2 \cdot \left(\overline{\frac{\partial^2 V_l^+}{\partial y^2}} + \overline{\frac{\partial^2 V_l^+}{\partial z^2}}\right)$$

wird, wo a^2 einen beliebigen positiven Proportionalitätsfaktor bezeichnet, der im Falle der Isotropie natürlich gleich $^1/_2$ wird.

Unter dieser Bedingung ist also

$$(17) \qquad \overline{(s''')_{s'}} = 0$$

1) Daß die Gleichung (14) als *Anfangsbedingung* für die Wellenfunktion, also ohne die zeitliche Mittlung rechts, bei beliebigem Verteilungsgesetz der N_r mit der Wellengleichung (1) vereinbar ist, ersieht man leicht aus der Form von (1). (Vgl. auch P. Ehrenfest u. G. E. Uhlenbeck, Ztschr. f. Phys. 41. S. 24—26. 1927.) Dagegen ist die wichtigere Frage, ob nach der Wellengleichung die Fermische Verteilung als mittlerer Zustand *dauernd* bestehen kann, erst noch zu entscheiden.

und wir haben nach dem oben in Abschn. I gesagten vollkommene Supraleitfähigkeit.

Diese muß hiernach in einem unbegrenzten[1]) *metallischen Leiter, der makroskopisch isotrop ist oder wenigstens (16) erfüllt, stets bestehen, solange die Bewegung der Elektronen lediglich von den Schrödingerschen Wellengleichungen (1) beherrscht wird.*

Ob dies Ergebnis auch bei quantenmechanischer Berücksichtigung der verhältnismäßig kleinen, magnetischen Kräfte auf die Leitungselektronen bestehen bleibt, muß allerdings noch untersucht werden. Doch darf es bei dem weitgehenden Entsprechen von gewöhnlicher und Quantenmechanik im Hinblick auf eine früher[2]) durchgeführte Abschätzung bis auf weiteres wohl angenommen werden.

§ 7. Nach dem oben Ausgeführten ist die einzige Ursache elektrischen Widerstandes in metallischen Leitern in einem Vorgange zu suchen, der aus dem Rahmen der Wellengleichungen (1) fällt. Als solcher bietet sich der Austausch zwischen den freien strömenden und den an Atomkerne gebundenen Elektronen dar, den man ohnedies bei jeder von Null verschiedenen Temperatur, und zwar immer häufiger bei zunehmender Erwärmung, erwarten müßte. Zu derselben Vorstellung führte meine frühere, nach der gewöhnlichen Mechanik und unter Annahme der Maxwellschen Geschwindigkeitsverteilung durchgeführte Untersuchung der metallischen Leitfähigkeit und Supraleitfähigkeit. Qualitativ bleibt somit alles beim alten. Auch die Formel für den spezifischen elektrischen Widerstand im einfachsten Falle, daß beim Austritt der Elektronen aus Bindungen an Kerne wie beim Eintritt in solche im Mittel keine Richtung bevorzugt[3]) und die Eintrittswahr-

1) Durchschneidet eine Grenze die Strömungslinien, so finden die strömenden Elektronen in ihr ein anisotropes Kraftfeld, das eben vermöge dieser Anisotropie ihre Bewegung hemmen kann.

2) Verf., Ann. d. Phys. (4) 80. S. 119ff. 1926. Die obere Grenze für die Stärke der ungeordneten magnetischen Molekularfelder erhöht sich infolge der nach Fermi anzunehmenden größeren Elektronengeschwindigkeit sogar beträchtlich. Auch die Kräfte auf die magnetischen Dipolmomente der Elektronen ergeben nach der gewöhnlichen Mechanik im Mittel keinen Beitrag zu s''', wie man leicht einsieht.

3) Bei nicht regulären Kristallen bestehen vermutlich Vorzugsrichtungen des Eintritts und Austritts. Dadurch ist wohl die Abhängigkeit des Widerstands von der Richtung zu erklären.

scheinlichkeit unabhängig von der Geschwindigkeit des Elektrons ist, bleibt gemäß ihrer Ableitung die bereits angegebene

$$\sigma = \frac{m}{e^2} \cdot \frac{\gamma}{n_f}, \tag{18}$$

wo n_f die Anzahl der freien Elektronen in 1 cm³ und γ die Bindungswahrscheinlichkeit eines von ihnen in 1 Sekunde ist. Ebenso kann die Erklärung der von Kamerlingh-Onnes beobachteten merkwürdigen Unverrückbarkeit der Stromlinien in Supraleitern gegenüber magnetischen Kräften einfach übernommen werden.[1])

Von den weiter[2]) für Blei ausgerechneten Zahlwerten bleiben die für γ ($\gamma \leqq 187$ für $T = 4{,}2^0$ abs. bei höchster Supraleitfähigkeit und $\gamma = 1{,}87 \cdot 10^{14}$ (bei 0° C) bestehen, da sie allein aus (18) folgen; dagegen ändern sich die von der Elektronengeschwindigkeit abhängenden Werte. Z. B. wird der mittlere Weg eines freien Elektrons mit der jetzt etwa anzusetzenden Geschwindigkeit $v = 10^8$ cm/sec bis zur nächsten Bindung, die im Durchschnitt nach $1/\gamma$ Sekunde erfolgt, $\sim 5{,}5 \cdot 10^5$ cm = 5500 m statt früher 74 m bei 4,2° abs. und $\sim 5{,}5 \cdot 10^{-7}$ cm statt früher $6 \cdot 10^{-8}$ cm bei 0° C, natürlich längs der vielfach gekrümmten Bahn gemessen, insofern von einer solchen quantenmechanisch überhaupt geredet werden darf.

Eine Untersuchung der Abhängigkeit des spezifischen Widerstandes von der Temperatur soll demnächst folgen.

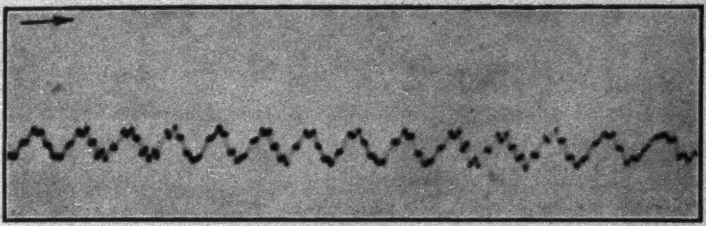
Königsberg i. Pr., Juni 1928.

---

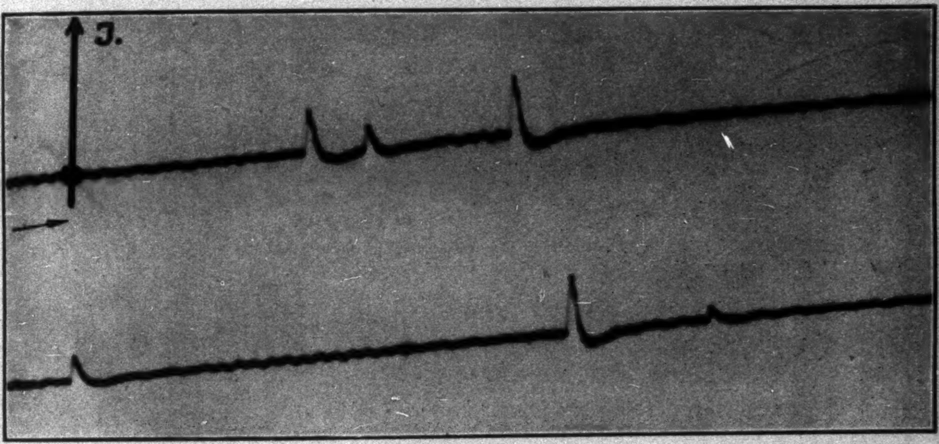
1) Dafür ist wesentlich, daß die Geschwindigkeitsverteilung (12) bei einer zufällig entstandenen Strömung wieder von derselben Form ist, wie wenn ein homogenes elektrisches Feld während einer Zeit dt auf die Elektronen gewirkt hätte. Vgl. Verf., Ann. d. Phys. **80**. S. 128ff. 1926.

2) A. a. O., S. 125ff.

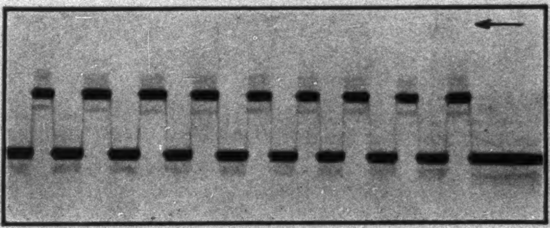
(Eingegangen 25. Juni 1928)



Aufnahme 1

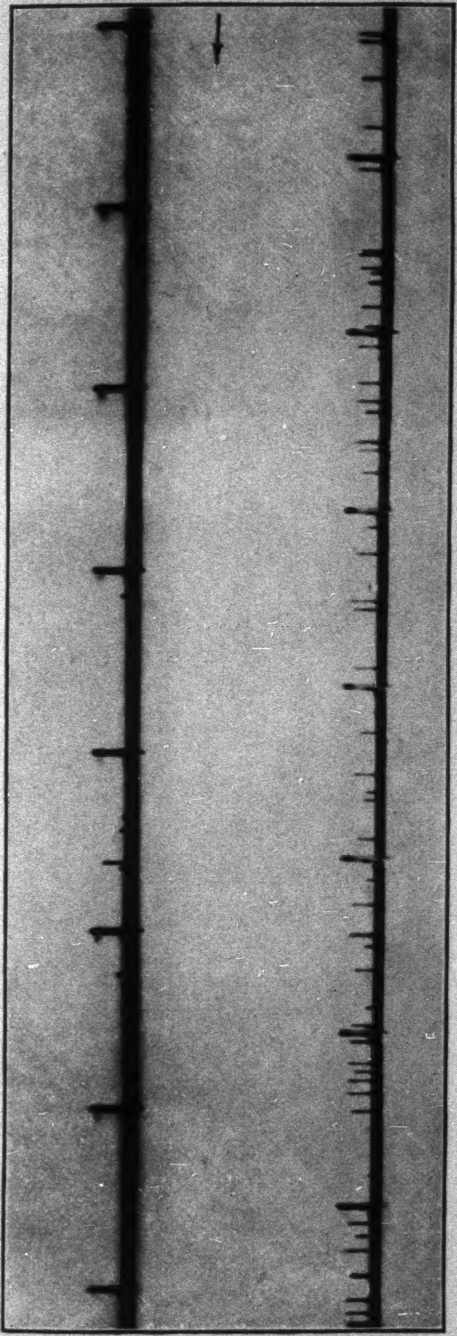


Aufnahme 2

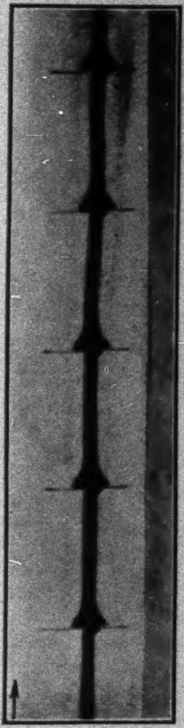


Aufnahme 3

E. Ramelet

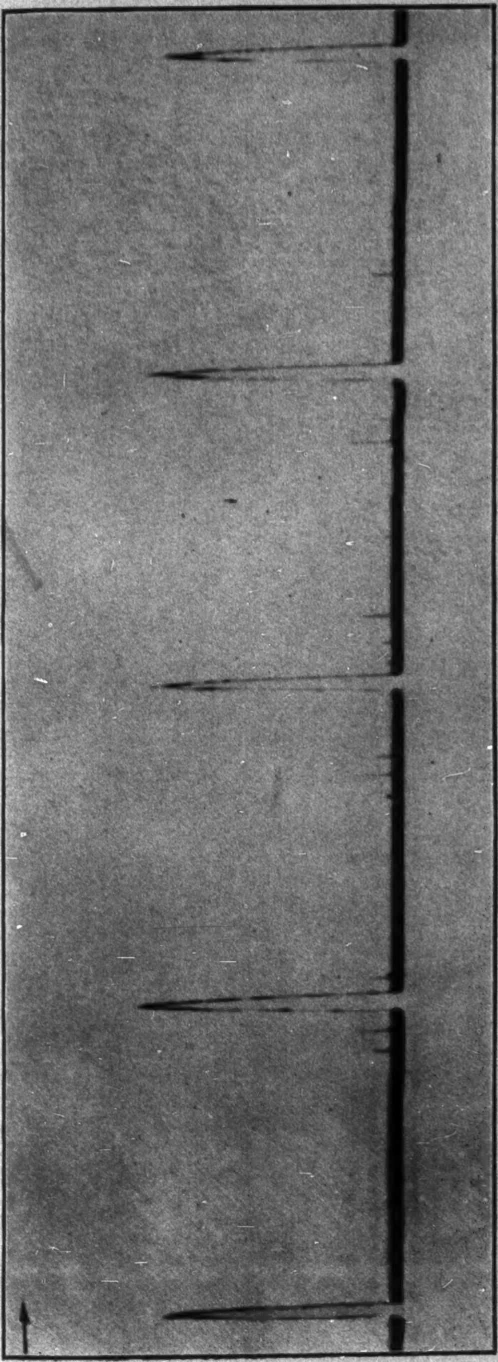


Aufnahme 4

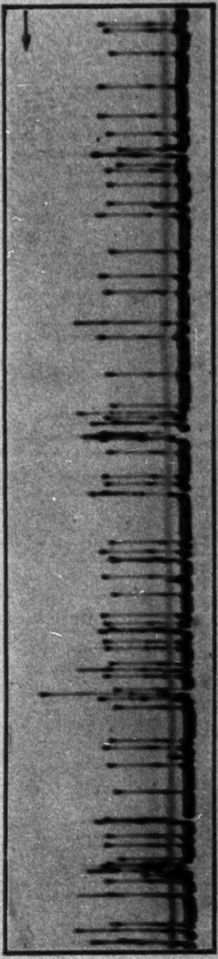


Aufnahme 5

E. Ramelet

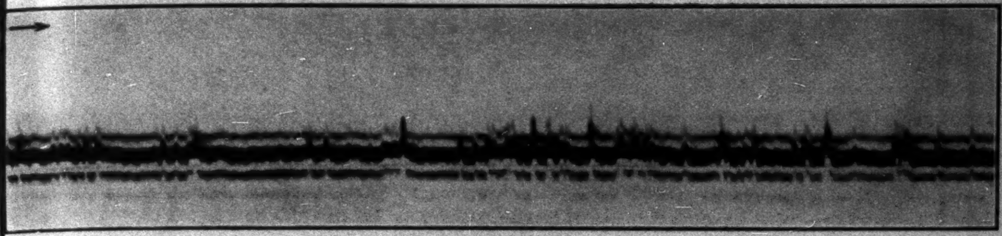


Aufnahme 6

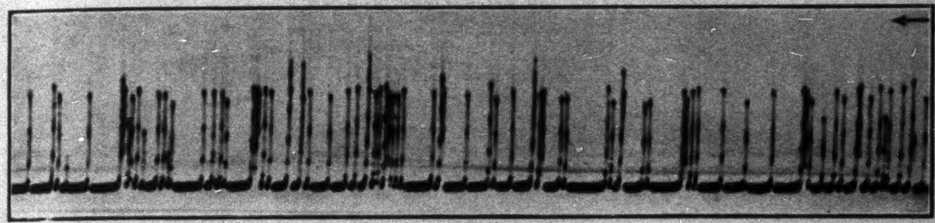


Aufnahme 7

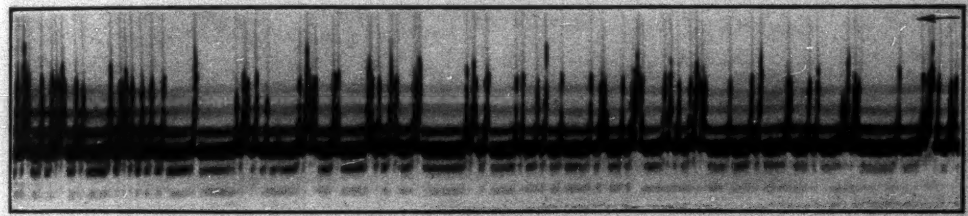
E. Ramelet



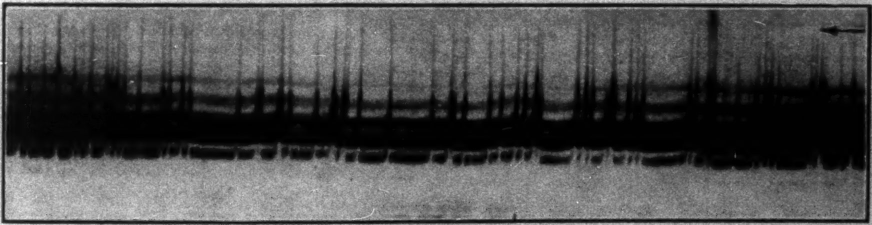
Aufnahme 8



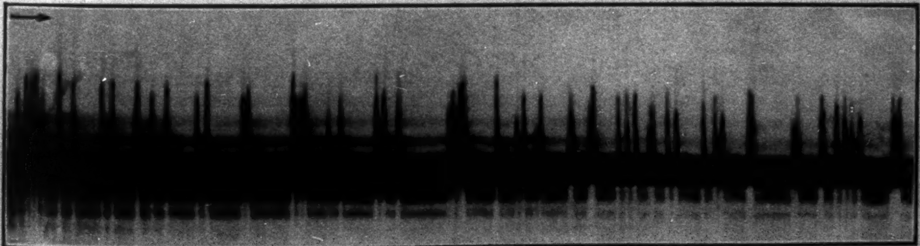
Aufnahme 9



Aufnahme 10

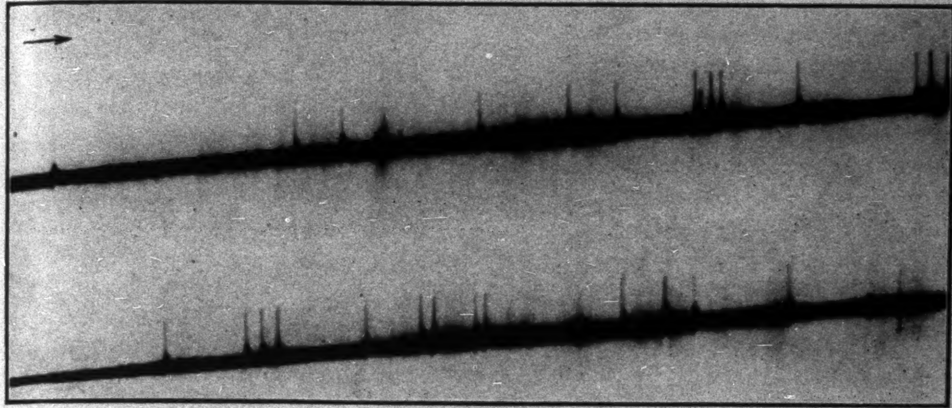


Aufnahme 11

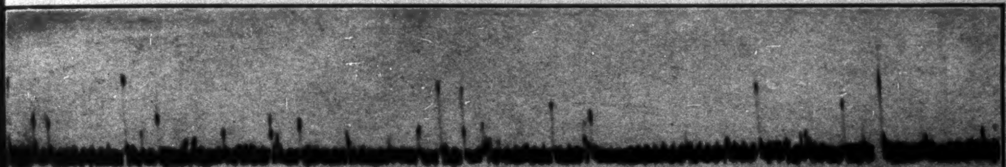


Aufnahme 12

E. Ramelet



Aufnahme 13



Aufnahme 14

E. Ramelet

1928 № 15

ANNALEN DER PHYSIK

VIERTE FOLGE. BAND 86

1. *Eine Prüfung der Tammannschen Theorie der Resistenzgrenzen am System Gold–Kupfer. Aufstellung neuer Gesichtspunkte;*

von M. LeBlanc, K. Richter und E. Schiebold

Inhalt: Einleitung. — 1. Darstellung der Legierungen und Versuchsanordnung zur Bestimmung der Einwirkungsgrenzen. — 2. Ergebnisse bei der Einwirkung von Salpetersäure. — 3. Vergleich mit den Ergebnissen von Tammann. — 4. Röntgenographische Untersuchungen an Gold–Kupferlegierungen. — 5. Über die Tammannschen normalen Verteilungen und die Struktur der Legierungen im allgemeinen. — 6. Über die Prüfung der Tammannschen normalen und abnormen Verteilungen mit Hilfe von Röntgenbeobachtungen. — 7. Beziehungen zwischen den Resistenzgrenzen und dem Feinbau der Cu–Au-Legierungen. — Zusammenfassung.

Einleitung

Vor wenigen Jahren ist von LeBlanc und Rössler[1]) der Auflösungsvorgang von (Na, Ag)Cl-Mischkristallen eingehend untersucht und das unterschiedliche Aussehen und Verhalten des getemperten und nicht getemperten abgeschreckten Schmelzgutes zu deuten versucht worden:

Das n/8-Mol-Gesetz von Tammann erwies sich auch bei Temperung nur in roher Annäherung erfüllt, scharfe Resistenzgrenzen waren nicht vorhanden. Eine „normale" Verteilung im Sinne Tammanns konnte weder bei diesem System noch bei dem System (Br, Cl)K nachgewiesen werden, wenigstens ergaben die von B. H. Broomé[2]) aufgenommenen Röntgenogramme keine Anhaltspunkte dafür.

Dasselbe Mischkristallsystem war in wesentlich beschränkterem Umfange auf Veranlassung von Tammann[3]) bereits von

1) M. LeBlanc und A. Rössler, Z. anorg. u. allg. Chem. 143. S. 1. 1925.

2) B. H. Broomé, a. a. O. S. 60.

3) G. Tammann, Z. anorg. u. allg. Chem. 107. S. 186 ff. 1919.

K. W. Schmidt[1]) untersucht worden. Aus seinen nicht sehr genauen Versuchen mit getemperten Schmelzen waren er und Tammann zu ganz anderen Schlüssen gekommen. So sagte Schmidt: Die Mischkristalle, welche mehr als 0,74 Mol AgCl enthalten, geben an Wasser nur Spuren von AgCl ab ... und Tammann[2]) sprach davon, daß die Mischkristalle von 1—$^6/_8$ Mol AgCl an Wasser keine merklichen Mengen von NaCl abgäben. Beide schlossen auf scharfe Resistenzgrenzen bei 0,75 = $^6/_8$ und bei 0,625 = $^5/_8$ Mol AgCl. Die Versuche von Le Blanc und Rössler haben jedoch gezeigt, daß von den untersuchten Schmelzen (bis 94,08 Mol-Proz. AgCl) keine einzige wirklich unangreifbar war. Selbst nach 800 stündiger Einwirkung des Lösungsmittels war der Angriff noch nicht erschöpft, sondern ging mit erkenbarer Geschwindigkeit weiter. Scharfe Resistenzgrenzen waren, wie schon gesagt, nicht vorhanden.

Tammann hat nun seine vermeintlich scharfen Resistenzgrenzen bei $^5/_8$ und $^6/_8$ Mol AgCl durch seine Theorie der „normalen" Verteilung zu deuten gesucht, aber auch für diese letztere konnten die bereits erwähnten Röntgenuntersuchungen von Broomé keine Bestätigung liefern.

Angesichts dieses Tatbestandes ist es nicht leicht zu verstehen, wie Tammann in seiner Entgegnung[3]) die Auffassung durchblicken lassen kann, daß die Arbeit von Le Blanc und Rössler eigentlich überflüssig gewesen sei und nichts zur Klärung der Angelegenheit beigetragen habe. Wenn er am Schlusse der Meinung Ausdruck gibt, daß die Versuchsresultate darauf hinwiesen, daß bei hinreichender Homogenisierung die Einwirkungsgrenze von $^6/_8$ Mol AgCl sich ergeben würde, so muß man diese Meinung in Ermanglung von Beweisen auf sich beruhen lassen. Wenn er aber weiterhin das System (Na, Ag)Cl jetzt für ungeeignet erklärt, um zu entscheiden, bei welchem Molenbruch die Einwirkungsgrenze liege, so muß doch betont werden, daß er, bevor die Untersuchung von Le Blanc und Rössler die ganzen Verhältnisse und die Schwierigkeiten, die bei diesem System vorhanden sind, klargelegt hat, bestimmte für seine Theorie günstige Schlüsse aus

1) K. W. Schmidt, Dissertation Göttingen 1917.

2) G. Tammann, a. a. O. S. 190.

3) G. Tammann, Z. anorg. u. allg. Chem. 143. S. 76. 1925.

den Schmidtschen Versuchen an eben demselben System hat geglaubt ziehen zu dürfen, es also augenscheinlich damals für geeignet dazu befunden hat.

Da wir das vorliegende Problem für wichtig halten, so haben wir uns entschlossen, neue Versuche mit dem System Gold-Kupfer anzustellen, deren Komponenten lediglich zwei verschiedenartige Atome sind und das sowohl zur Ermittelung von Resistenzgrenzen wie für Röntgenuntersuchungen wohl geeignet ist.

Neue Versuche mit Gold–Kupferlegierungen

1. Darstellung der Legierungen und Versuchsanordnung zur Bestimmung der Einwirkungsgrenzen

Zur Herstellung der Legierungen diente Kupfer von Merck (elektrolytisch gekörnt) und Feingold, das durch dreimaliges Auflösen und jedesmalige Reduktion, zweimal mit Ammoniumoxalat und einmal mit Wasserstoffperoxyd, frei von Verunreinigungen erhalten wurde. Das Zusammenschmelzen der eingewogenen Bestandteile erfolgte bei 1200° im Nickelwiderstandsofen in einer gereinigten Stickstoffatmosphäre mit 3 Proz. Wasserstoff. Als Schmelzgefäße wurden Batterseatiegel verwendet und zur Vermeidung von Inhomogenität von jeder Schmelze mindestens 20 g Legierung hergestellt. Die geschmolzene Legierung wurde 3 Stunden lang in Fluß gehalten und nach kräftigem Umschwenken in weißglühendem Zustande in ein 50prozentiges Alkohol–Wassergemisch gegossen. Bei dieser Behandlungsweise war wohl anzunehmen, daß sich infolge der schnellen Abkühlung die von Tammann geforderte Verteilung nicht oder höchstens in zu vernachlässigendem Maße einstellte. Die Reguli wurden zu Streifen von 0,08 mm Dicke ausgewalzt und diese zur Kontrolle auf ihren Gold- und Kupfergehalt untersucht. In allen Fällen ergab sich Übereinstimmung mit den eingewogenen Mengen. Proben, die aus der Mitte der Streifen herausgeschnitten waren, zeigten dieselbe Zusammensetzung wie die Enden der Streifen.

Zur Untersuchung gelangten folgende Legierungen: Wir geben den Gehalt in Molenbrüchen Cu an, wenn nichts besonderes bemerkt ist:

$$\frac{\text{Mole Cu}}{\text{Mole Au} + \text{Mole Cu}}$$

1. 0,450 = 20,87 Gew.-Proz. Cu
2. 0,500 = 24,39 " "
3. 0,550 = 28,27 " "
4. 0,600 = 32,60 " "
5. 0,625 = 34,96 " "

Um die Untersuchung nicht zu sehr auszudehnen, wurden nur die angeführten Prozentgehalte angewendet, die innerhalb und in der Nähe der von Tammann verlangten Einwirkungsgrenzen liegen.

Zum Tempern wurden Streifen von 5 g herausgeschnitten und in Quarzröhrchen im Hochvakuum eingeschmolzen. Das Tempern erfolgte bei 840 ± 5° und dauerte 29 Tage. Die Schmelzpunkte unserer Legierungen lagen in der Nähe von 890°. Nach dem Tempern ließ man die Legierungen abkühlen (5 Stunden). Die getemperten Blättchen hatten ihr glattes Aussehen verloren und zeigten auf der Oberfläche lauter kleine Erhebungen. Diese können wohl auf den Ausgleich von Spannungen zurückgeführt werden, die sich beim Walzen gebildet hatten, oder auf kleine Gaseinschlüsse. Außerdem unterschieden sich die Streifen von den ungetemperten durch ihre Weichheit.

Die Extraktion der Blättchen mit Salpetersäure erfolgte in großen Reagenzgläsern, die mit Überwurfkappen aus Glas lose bedeckt waren. Es wurden je 5 g der Legierung mit 50 ccm Salpetersäure übergossen und im Thermostaten bei 22 ± 1° ruhig stehen gelassen, da nach den Versuchen von Klemenc[1]) eine Rührung in diesem Falle die Reaktionsgeschwindigkeit außerordentlich herabsetzt. Die tiefe Temperatur wurde gewählt, um einen Platzwechsel der Atome im Gitter auszuschalten. Alle Versuche wurden doppelt ausgeführt. Die Resultate stimmten ausgezeichnet überein.

Bei der ersten Versuchsreihe kam chlorfreie Salpetersäure von der Dichte 1,40 zur Anwendung. Da der Angriff von Salpetersäure auf Kupfer bei Gegenwart von salpetriger Säure nach Klemenc[2]) bedeutend schneller erfolgt, wurde der Salpetersäure etwa 1 Gewichtsprozent N_2O_3 zugesetzt. Das

---

1) A. Klemenc, Z. f. Elektrochem. 32. S. 151. 1926.

2) A. Klemenc, a. a. O.

Salpetersäuregemisch wurde alle 14 Tage erneuert. Die Einwirkungsdauer betrug 61 Tage.

Die abgegossene Salpetersäure, sowie das Waschwasser wurden eingedampft, das meist spurenweise im wesentlichen wohl kolloid in der Lösung befindliche Gold durch Eindampfen mit Wasserstoffperoxyd abgeschieden, und das Kupfer schnellelektrolytisch aus salpetersaurer Lösung bestimmt. Die von den edlen Legierungen abgegebenen, sehr geringen Cu-Mengen wurden kolorimetrisch als komplexes Kupferammoniaknitrat ermittelt. Zur Kontrolle wurden in allen Fällen die angegriffenen Blättchen nach dem Trocknen bei 50° im Hochvakuum gewogen. Dabei ergaben sich meist etwas höhere Cu-Werte (1—3 Promille), die durch die oben erwähnte Goldabgabe bedingt waren.

2. Ergebnisse bei der Einwirkung von Salpetersäure

In Tab. 1, Spalte *a* und *α*, sind die Werte der gelösten Cu-Mengen in Prozenten der ursprünglichen verzeichnet. Um zu sehen, ob der Endpunkt der Extraktion erreicht war, wurden die Blättchen nochmals wie oben mit Salpetersäure

Tabelle 1

Nr.	Kupfergehalt in Molenbrüchen	Kupfergehalt in Gewichtsprozenten	Kupfergehalt in n/8 Mol	Gelöstes Kupfer in Prozenten des ursprünglichen Cu-Gehaltes	Nicht getempert: b. erstmal. Extrakt.	Nicht getempert: bei weiterer Behandlung			Getempert: b. erstmal. Extrakt.	Getempert: bei weiterer Behandlung		
					a	*b*	*c*	*d*	*α*	*β*	*γ*	*δ*
				HNO_3: *D* =	1,4	1,4	1,5	1,5	1,4	1,4	1,5	1,5
				t =	22°	22°	22°	55°	22°	22°	22°	55°
				Dauer in Tagen	61	weitere 15	weitere 14	weitere 14	61	weitere 15	weitere 14	weitere 14
1	0,450	20,87	3,6		0,62	0,05	0,00	2,50	0,65	0,04	0,00	2,39
2	0,500	24,39	4,0		0,81	0,03	0,01	1,82	0,86	0,05	0,02	2,72
3	0,550	28,27	4,4		1,01	0,06	0,03	0,75	1,20	0,03	0,95	0,83
4	0,600	32,60	4,8		94,71	0,07	1,05	1,30	3,59	0,08	29,23	58,44
5	0,625	34,96	5,0		99,88	0,05	0,21	0,01	99,91	0,03	0,09	0,08

($D = 1,4 + 1$ Proz. N_2O_3) 15 Tage lang behandelt. In Spalte *b* und *β* sind die herausgelösten Cu-Mengen verzeichnet.

Praktisch quantitative Herauslösung des Kupfers erfolgt bei dem getemperten Material bei einem Molenbruch von 0,625 ($^5/_8$) in Übereinstimmung mit der Tammannschen Forderung (Nr. 5 von Tab. 1). Den Beginn der Angreifbarkeit der getemperten Legierung dagegen möchte man eher in die Nähe von Molenbruch 0,600 legen, während sie nach Tammann schon bei 0,500 liegen sollte. Die Steigerung der Angreifbarkeit von 0,500 bis 0,600 Molenbruch ist jedenfalls gering. Daß eine zu langsame Reaktionsgeschwindigkeit nicht etwa das edlere Verhalten der Legierungen vortäuschen kann, geht aus dem Ergebnis der zweiten 15 tägigen Extraktion hervor, bei der in allen Fällen nur noch Spuren von Cu in Lösung gingen. Der Übergang von geringer Angreifbarkeit zu völliger Herauslösung des Kupfers erfolgt außerordentlich schroff innerhalb einer Änderung des Molenbruches von nur $^1/_{40}$. Die Behauptung Tammanns, daß Legierungen zwischen $^4/_8$ und $^5/_8$ Mol Cu ihr Cu proportional dem abnehmenden Au-Gehalt verlieren, trifft also unter den gewählten Versuchsbedingungen nicht zu.

Die nicht getemperten Legierungen sind überraschenderweise ebenfalls bei einem Molenbruch von 0,500, ja auch noch bei 0,550 nahezu unangreifbar. Erst bei 0,600 ist sehr starke Angreifbarkeit festzustellen. Auch in diesem Falle vollzieht sich also der Übergang von geringer Angreifbarkeit zu völliger Herauslösung des Kupfers viel schroffer, als nach den Ausführungen von Tammann zu erwarten war.

Diese in der beschriebenen Weise extrahierten Blättchen wurden weiterhin mit konzentrierter chlorfreier Salpetersäure von der Dichte $D = 1,50$ übergossen und bei 22° stehengelassen. Ein Zusatz von N_2O_3 erfolgte hierbei nicht, da die Säure infolge ihres Gehaltes an niederen Stickoxyden bereits gelb gefärbt war. Die Extraktionsdauer betrug 14 Tage. Spalte *c* und *γ* enthalten die herausgelösten Cu-Mengen.

Die ungetemperten Legierungen haben keine nennenswerten Mengen Kupfer mehr abgegeben. Bei den getemperten Legierungen ist bei dem Präparat mit 0,55 Molenbruch eine kleine, bei dem mit 0,60 eine starke Veränderung eingetreten.

Die Blättchen mit 0,60 zeigten ja gegen kalte Salpetersäure von der Dichte 1,4 recht edlen Charakter. Durch die höhere Säurekonzentration hat sich die Angreifbarkeit nach der Seite der kupferärmeren Legierungen hin verschoben.

Bemerkenswert ist weiterhin die Tatsache, daß sich der schon nicht große Unterschied zwischen getemperten und ungetemperten Legierungen bei Benutzung von konzentrierterer Säure noch weiter verringert.

Es sollte nun schließlich untersucht werden, wie sich die Legierungen gegen Salpetersäure von der Dichte 1,5 bei 55° verhalten. Auch bei dieser Temperatur wird man einen in Betracht kommenden Platzwechsel nicht annehmen können. Dabei zeigte sich überraschenderweise, daß die Blättchen teilweise zu einer pulverigen Masse von dunkelbrauner Farbe zerfielen. Der Versuch wurde nach 14 Tagen abgebrochen. Von den zum Teil kolloiden Bestandteilen wurde mittels Membranfilter abfiltriert und die Lösungen auf ihren Cu-Gehalt untersucht. Die gefundenen Werte sind in Spalte *d* und *δ* der Tab. 1 verzeichnet. Bei den ungetemperten Legierungen war der Zerfall sehr gering, außer bei 4 und 5, die bei den vorhergehenden Extraktionen bereits alles oder fast alles Kupfer verloren hatten. Dagegen waren sämtliche getemperten Legierungen zum großen Teil zerfallen. Trotz der dadurch gebildeten großen Oberfläche waren die abgegebenen Cu-Mengen relativ klein mit Ausnahme der getemperten Legierung von 0,600 Molenbruch. Die erwähnte Ausnahme führt dazu, daß die getemperten und ungetemperten Legierungen fast genau dieselben Extraktionswerte zeigen. Das bei der vorhergehenden Extraktion mit kalter Säure vom spezifischen Gewicht 1,5 gefundene Ähnlichwerden ist jetzt nahezu zur Gleichheit geworden, soweit die Genauigkeit unserer Versuche reicht. Die Resistenzgrenze scheint nach niederen Gehalten an Kupfer hin verschoben worden zu sein. Die ganzen Ergebnisse sind im Rahmen der Tammannschen Theorie nicht verständlich.

Die zu den bisherigen Versuchen verwendeten Legierungen waren nach dem Tempern innerhalb von etwa 5 Stunden abgekühlt worden. Da hierbei nach den Versuchen von Kur-

nakow, Zemczuzny und Zasetabelew[1]), sowie von Johansson und Linde[2]) mit der Möglichkeit gerechnet werden mußte, daß sich Gold--Kupferverbindungen gebildet hatten, die die Ergebnisse beeinflußten, so wurde eine weitere Versuchsreihe angesetzt, um den Einfluß der Abkühlungsgeschwindigkeit nach dem Tempern zu untersuchen. Außerdem sollte noch der Einfluß der nachträglichen Kaltbearbeitung nach dem Tempern bestimmt werden. Für diese Versuche wurde nur eine Legierung mit dem Molenbruch 0,600 verwendet, da diese den Unterschied zwischen dem getemperten und ungetemperten Zustande am auffälligsten gezeigt hatte.

In Tab. 2 stehen die Resultate von vier verschieden behandelten Proben dieser Legierung.

A war die ungetemperte und abgeschreckte Probe, aus ihr wurde in Übereinstimmung mit den früheren Versuchen das Kupfer nahezu quantitativ herausgelöst. *B*, *C* und *D* wurden 170 Stunden lang bei 800 ± 5° getempert. *B* wurde nach dem Tempern durch Einwerfen des evakuierten Quarzröhrchens mit der Legierung in kaltes Wasser abgeschreckt. Der Temperaturabfall ging also keineswegs momentan vor sich. Probe *C* wurde nach dem Tempern 28 Stunden abkühlen gelassen. Legierung *D* war vor dem Tempern auf 2 mm Dicke ausgewalzt worden und wurde nach dem Tempern und Abschrecken (in derselben Weise wie *B*) weiter auf 0,08 mm ausgewalzt.

Tabelle 2

Molenbruch 0,600 Dichte von HNO_3 = 1,40. t = 55° Dauer 3 Monate

Legierung	Vorbehandlung	Gelöste Cu-Menge in Prozenten der ursprünglichen
A	ungetempert	93,27
B	getempert, abgeschreckt . . .	4,74
C	„ langsam gekühlt . .	4,99
D	„ nachträglich gewalzt	72,41

1) N. Kurnakow, S. Zemczuzny und Zasetabelew, Referat in Ztschr. f. Metallk. 17. S. 31. 1925.

2) C. H. Johansson und J. O. Linde, Ann. d. Phys. (IV) 78. S. 439. 1925; 82. S. 478. 1927.

Als Extraktionsmittel diente Salpetersäure von der Dichte 1,40 ohne Zusatz von N_2O_3. Die Versuchstemperatur betrug $55 \pm 2^{\circ}$, die Einwirkungsdauer 3 Monate.

Die Legierungen *B* und *C* zeigen so gut wie keine Unterschiede in den Extraktionswerten. Ein Einfluß der Abkühlungsgeschwindigkeit auf die Angreifbarkeit ist nicht nachweisbar.

Probe *D* läßt deutlich erkennen, wie auch Tammann an extrem dünn ausgeschlagenen Legierungen nachwies, daß durch nachträgliche Kaltbearbeitung die durch Tempern bewirkte Veredlung größtenteils wieder aufgehoben wird.

Wir haben bei allen ungetemperten Präparaten, um für die Feststellung der chemischen Angreifbarkeit genügend große Oberflächen zu erhalten, eine Auswalzung der Reguli vornehmen müssen. Es steckt also in den Werten dieser Präparate noch der Walzeffekt. Trotzdem sind, wie wir gesehen haben, die Unterschiede im Verhalten der getemperten und ungetemperten Präparate gering. Bei Ausschaltung dieses Walzeffektes, die sich durch ein umständliches Gießverfahren im Vakuum wohl erreichen ließe, könnte man annehmen, daß obige Unterschiede noch geringer würden, bzw. völlig verschwänden.

8. Vergleich mit den Ergebnissen von Tammann

Tammann[1]) hat seine Versuche über die Angreifbarkeit von Gold–Kupferlegierungen bei 110° unter Verwendung von Salpetersäure vom spez. Gew. 1,3 gemacht. Bei dieser Temperatur wird nach seiner Ansicht ein Platzwechsel zwischen Cu- und Au-Atomen im Raumgitter schon merklich sein. Trotzdem findet er eine geringere Angreifbarkeit. So wurden aus seiner getemperten Legierung mit dem Molenbruch 0,628 nur 64 Proz. des vorhandenen Kupfers gelöst gegen 100 Proz. bei unseren Versuchen bei einem Molenbruch von 0,625 und unter Verwendung von Salpetersäure vom spez. Gew. 1,4 bei Zimmertemperatur.

Es ist zu vermuten, daß bei seiner Kochdauer von 13 Stunden der Endzustand noch nicht erreicht war.

Tammann glaubt aus seinen Versuchen einmal schließen zu können, daß die Legierungen mit mehr als 0,5 Molenbruch Au,

---

1) G. Tammann, a. a. O. S. 49f.

also mit weniger als 0,5 Cu bei 115° nur sehr geringe Mengen Cu an Salpetersäure abgeben und daß bei tieferen Temperaturen diese Mengen praktisch nicht mehr nachweisbar seien. Das ist ja nahezu richtig, aber dieser Punkt bedeutet, und das ist das Wesentliche, keine Resistenzgrenze, denn unsere Versuche lehren, daß diese Grenze, wenn man überhaupt von einer scharfen Grenze sprechen will, bei wesentlich höherem und mit der Konzentration der Salpetersäure und wohl auch der Temperatur wechselndem Cu-Gehalt liegt.

Sodann schließt Tammann weiter, daß die Legierungen mit mehr als 0,625 Molenbruch Cu ihr Kupfer praktisch völlig abgeben. Unsere Versuche zeigen ebenfalls eine völlige Auslösbarkeit des Cu bei 0,625 Molenbruch bei Säure vom spez. Gew. 1,4 und bei Zimmertemperatur, bei stärkerer Säure und bei höherer Temperatur wird aber der Beginn der völligen Auslösbarkeit des Kupfers deutlich nach niederen Molenbrüchen hin verschoben. Ganz abwegig ist der Schluß, daß zwischen 0,500 und 0,625 eine dem zunehmenden Molenbruch proportionale Auflösung stattfände, denn unsere Versuche haben ergeben, daß bei 0,55 und selbst bei 0,60 nur geringe Cu-Mengen durch Salpetersäure von 1,4 spez. Gew. bei Zimmertemperatur herausgelöst werden.

In einer vor kurzem erschienenen kleinen Abhandlung nimmt Tammann[1]) zu einer Untersuchung von van Liempt[2]) Stellung, der bei Molybdän–Wolfram-Mischkristallen von einer Verschiebung der Resistenzgrenzen bei Änderung der angreifenden Säurelösung gesprochen und betont hatte, daß diese Resistenzgrenzen nicht bei Vielfachen von n/8 Mol liegen. Er sieht diese Versuche nicht als beweisend an, da beide Komponenten angreifbar seien und oxydische Schutzschichten sich bilden könnten. Für eine Resistenzgrenze gibt er folgende Merkmale:

1. Unabhängigkeit von der Zeit. Diese tritt nur dann ein, wenn die eine Komponente von dem chemischen Agens überhaupt nicht angegriffen werden kann.

---

1) G. Tammann, Ztschr. f. anorg. u. allg. Chem. 169. S. 151. 1928.
2) J. A. M. van Liempt, Rec. d. Trav. Chim. Pays-Bas 45. S. 508. 1926.

2. Beständigkeit bis zu Temperaturen, bei denen Platzwechsel im Mischkristall merklich wird. Dieser Bedingung entsprechen die Passivitätserscheinungen nicht.

3. Konzentrationsänderungen des chemischen Agens verschieben die Resistenzgrenze nicht, da sie die Unangreifbarkeit der einen Komponente nicht aufheben.

4. Von der Teilchengröße soll die Unangreifbarkeit der resistenten Mischkristalle soweit unabhängig (soll wohl „abhängig“ heißen) sein, als angreifbare Atome neu aus der Oberfläche gelöst werden.

Wir wollen nun zusehen, inwieweit bei unserem Mischkristallsystem Gold–Kupfer, bei dem die eine Komponente stets unangreifbar geblieben und das ja von Tammann selbst als geeignetes Versuchsobjekt bewertet worden ist, die obigen theoretischen Merkmale für eine Resistenzgrenze den Versuchsergebnissen entsprechen.

1. Gegen die Unabhängigkeit von der Zeit sprechen die Versuche nicht.

2. Von einer Temperaturbeständigkeit innerhalb des Gebietes des mangelnden Platzwechels kann man nicht sprechen. Ein gewisser Einfluß der Temperatur auf die in Lösung gehende Kupfermenge ist wahrnehmbar.

3. Konzentrationsänderungen des chemischen Agens haben einen starken Einfluß auf die Resistenzgrenze. Während die Legierung von 0,600 Molenbruch bei 22° bei genügend langem Behandeln mit Salpetersäure vom spez. Gew. 1,4 kein weiteres Kupfer mehr abgibt, geschieht dies sofort in starkem Maße bei Auswechseln der Säure gegen eine solche vom spez. Gew. 1,5.

4. Die Mengen Kupfer, die auch bei den resistenten Mischkristallen vom Molenbruch 0,450 Cu zunächst in Lösung gehen, sind nicht unbeträchtlich und erreichen eine Dicke von fast tausend Atomdurchmessern.

Besonders hervorzuheben ist der Umstand, daß getemperte und ungetemperte Legierungen sich in ihrem Verhalten gegenüber chemischen Agentien auffallend wenig unterscheiden, was auch mit den Tammannschen Anschauungen nicht übereinstimmt.

Zusammenfassend ist folgendes zu sagen: Tammann hatte das Verhalten von (Na, Ag) Cl und (Cu, Au) Mischkristallen

gegenüber chemischen Agentien experimentell geprüft und die Ergebnisse als einen Beweis für seine Resistenzgrenzentheorie angesehen. Nachdem dieser Beweis für das System (Na, Ag) Cl einer strengen experimentellen Nachprüfung nicht standgehalten hatte, hat sich jetzt Analoges für das System (Cu, Au) herausgestellt.

4. Röntgenographische Untersuchungen an Gold–Kupferlegierungen

Die untersuchten Legierungen lagen in Form von kleinen gewalzten Blechstreifen vor[1]), deren Vorbehandlung aus folgender Tabelle ersichtlich ist:

Tabelle 3

Legierung Film Nr.	Kupfergehalt in Molenbrüchen	Vorbehandlung nach dem Kaltwalzen	Belichtung
172	0,600	getempert und langsam gekühlt	1,5 st
169, 170	0,600	getempert und abgeschreckt	1,5 „
250, 251	0,600	wie Nr. 172, dann 32,9 Proz. der gesamten Kupfermenge herausgelöst	1,75 „
107	0,500	nicht getempert	1,75 „
106	0,500	getempert, mäßig gekühlt	1,75 „
239	0,500	wie Nr. 106, dann 0,93 Proz. d. ges. Kupfermenge herausgelöst	1,75 „
109	0,450	nicht getempert	1,75 „
220	0,750	getempert und abgeschreckt	5 „
205	0,750	getempert (5 Tage b. 700°), langsam gekühlt	1,5 „
206, 207	0,750	getempert wie Nr. 205, aber abgeschreckt	1,5 „; 2,5 „
252	0,750	nicht getempert	1,5 „

Die für die Lösungsversuche verwendete Blechform der Proben war für die röntgenographische Untersuchung nicht gerade günstig, da die gewalzten Blättchen auch nach dem Tempern eine Tendenz zu Verwerfungen und Verkrümmungen zeigten (vgl. S. 932). Die Breite der Streifen konnte nicht gut unter 1 mm herabgesetzt werden, da sonst durch die mechanische Bearbeitung gerade in den Randschichten, an welchen bei stark absorbierenden Materialen die Röntgeninterferenzen hauptsächlich entstehen, unerwünschte Kaltbearbeitungseffekte hervorgerufen werden. Dies trifft besonders bei den getemperten Proben zu, welche deshalb mit besonderer

1) Entsprechend einem Walzgrad von 98 Proz.

Vorsicht herauspräpariert wurden. Die Dicke der Streifen betrug durchschnittlich 0,08 mm. Die Drahtform, welche auch in den Untersuchungen von Johansson und Linde[1]) verwendet wurde, wäre an sich für die Röntgenuntersuchung viel geeigneter gewesen, doch lagen die Proben, als die Röntgenversuche in Angriff genommen wurden, bereits fertig vor.

Die Proben wurden so in den Strahlengang gestellt, daß sie streifend vom Primärstrahlbündel getroffen wurden, damit der Einfluß der Probenbreite und Exzentrizität auf die Interferenzen in der Nähe des Primärfleckes klein blieb. Störend bemerkbar machte sich, wie schon erwähnt, die Neigung der Blättchen zur Verkrümmung und Verbiegung, sie äußerte sich in den Aufnahmen darin, daß die Interferenzen wegen der einseitig stärkeren Absorption auf der einen Filmhälfte weniger zahlreich und intensiv auftraten und unter Umständen gänzlich fehlten, wodurch die Ausdeutung erschwert wurde. Eine Drehung der Blättchen während der Belichtung wurde im allgemeinen nicht vorgenommen, da sie zwar gleichmäßigere Interferenzen lieferte, andererseits aber wegen der wenig geeigneten Blättchenform sehr schwierige Korrekturen erforderte und etwaige Effekte der Rekristallisation, besonders bei den getemperten Proben, verdeckt hätte.

Sämtliche Aufnahmen wurden mit einer Müllerröhre mit Kupferantikathode und Lindemannfenster in einer Präzisionskamera mit 99,97 mm Filmdurchmesser hergestellt. Die Röhrenspannung betrug etwa 40 Kilovolt bei 7 Milliamperebelastung. Die Belichtungszeiten sind in der Tab. 1 angegeben. Es stellte sich im Laufe der Untersuchungen heraus, daß bei manchen Proben erst nach sehr langer Belichtung weitere Einzelheiten des Interferenzmusters z. B. verwaschene Streifen auftraten, weshalb die Versuche zum Teil wiederholt werden mußten. Durch besondere Kontrollaufnahmen wurde die spektrale Reinheit der benutzten Kupferstrahlung geprüft.[2]) Die

---

1) C. H. Johansson und J. O. Linde, Ann. Phys. 78. S. 439. 1925.

2) Im Verlaufe der Untersuchung stellte es sich heraus, daß die stark benutzte Röntgenröhre auf der Kupferantikathode einen vom Heizdraht herrührenden Wolframbeschlag erhalten hatte. Die Linien Wo/$L\alpha_1$ und Wo/$L\beta_1$ wurden infolgedessen beobachtet. In den Tabellen sind die hiervon herrührenden fremden Interferenzen fortgelassen.

Auswertung der Filme erfolgte auf graphischem Wege an Hand besonders zu diesem Zweck entworfener Nomogramme, von denen eins in der Fig. 1 verkleinert wiedergegeben ist. (Vgl. S. 943). Das benutzte graphische Verfahren hat sich für die beabsichtigen Zwecke, bei denen es zunächst mehr auf den qualitativen Nachweis neu auftretender Interferenzlinien handelte, außerordentlich gut bewährt, es wurde auch für die quantitative Bestimmung der Gitterkonstanten verwendet, wodurch die Rechenarbeit sehr stark verringert werden konnte. Die Genauigkeit ist annähernd dieselbe, wie sie mit den rechnerischen Methoden in Anbetracht der vielen möglichen Fehlerquellen erreicht werden kann. Korrekturen wegen Stäbchendicke und Exzentrizität wurden anfänglich vorgenommen. Sie waren aber bei dem großen Kameraradius so klein, daß sie im allgemeinen vernachlässigt werden konnten.

Ergebnisse

a) Legierungen mit Molenbruch 0,500 Cu

Die Tab. 4 am Schluß enthält die Ergebnisse der Auswertung der Debye-Scherrerdiagramme der Proben Nr. 106 (getempert und mäßig gekühlt) und 107 (nicht getempert).

Die Auswertung dieser Diagramme ergibt folgendes: Die nicht getemperte Legierung, Film Nr. 107, zeigt im Röntgenbild in der Hauptsache ein *kubisch-flächenzentriertes* Gitter mit der Würfelkante $a = 3{,}83$ Å, das ungeordneten Mischkristallen mit 0,500 Molenbruch zuzuschreiben ist. Dieser Befund steht in Übereinstimmung mit den Ergebnissen von Kirchner[1]), Bain[2]), Lange[3]), sowie von Johansson und Linde[4]), aus denen sich der Wert der Gitterkonstante zu $a_0 = 3{,}84$ Å ergibt, während neuerdings von Vegard[5]) der Wert $a_0 = 3{,}880$ gefunden wurde. Nach der Additivitätsregel wäre $a = 3{,}847$. Daneben tritt jedoch, wenn auch viel schwächer ausgeprägt und deshalb nicht mit der gleichen Genauigkeit zu messen, ein *tetragonales* Gitter auf mit den Kantenlängen $a_0 = 3{,}856$ Å, $c_0 = 3{,}61$ Å, mit dem

1) F. Kirchner, Ann. d. Phys. 69. S. 59. 1922.
2) E. C. Bain, Chem. met. Ing. 28. S. 21. 1923.
3) H. Lange, Ann. d. Phys. 76. S. 476. 1925.
4) C. H. Johansson u. J. O. Linde, Ann. d. Phys. 78. S. 439. 1925.
5) L. Vegard und Hj. Dale, Zeitschr. f. Krist. 67. S. 148. 1928.

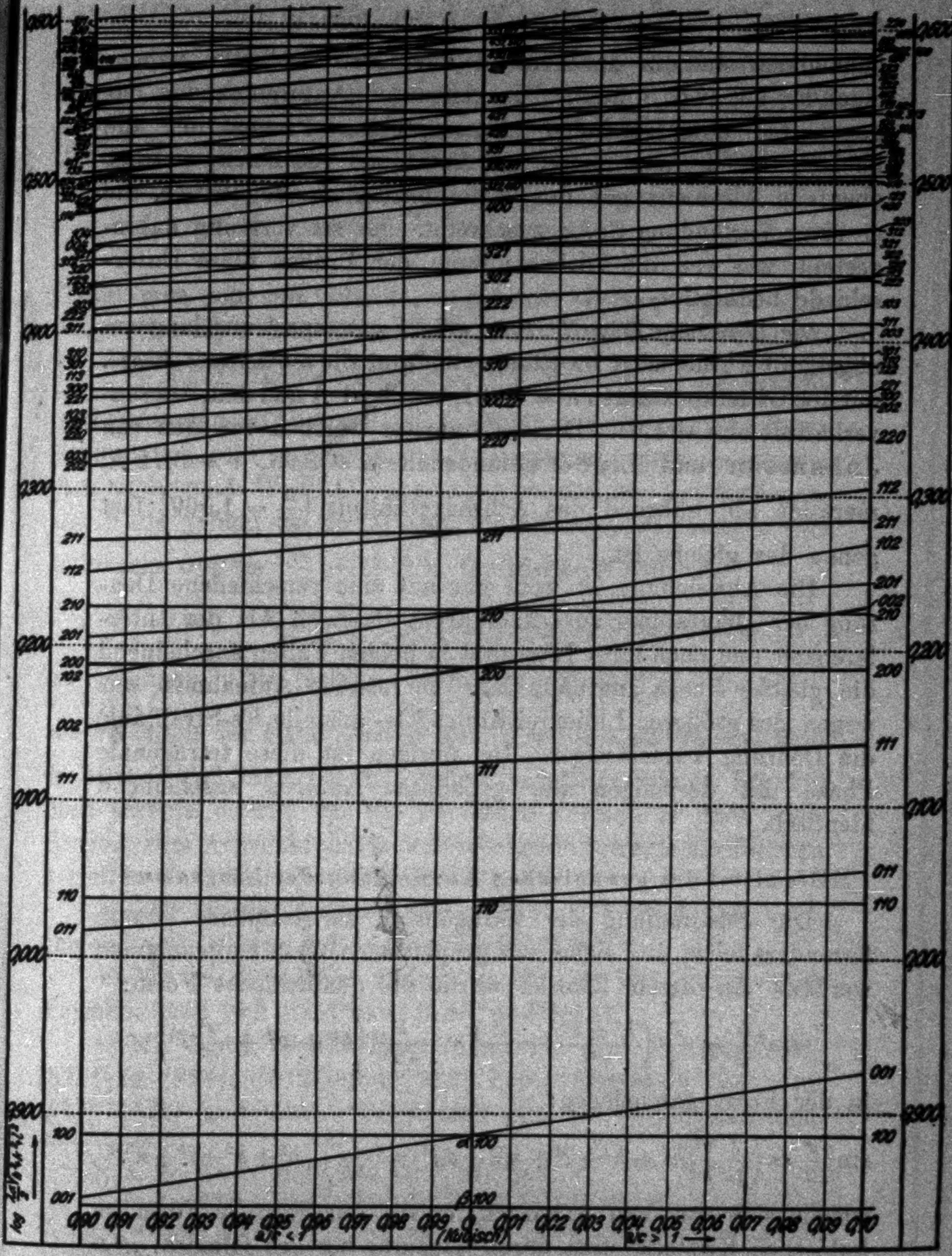


Fig. 1

Achsenverhältnis $\frac{a}{c} = 1{,}07$. Es treten also in diesem Vorbehandlungsstadium anscheinend zwei Kristallphasen nebeneinander auf (vgl. S. 936). Die genannten Autoren fanden dagegen bei entsprechenden abgeschreckten Proben nur die kubische Mischkristallphase, mit Ausnahme von Bain, welcher ebenfalls Abweichungen der Gitterkonstanten beobachtete, die er einer Verbindung CuAu zuschreibt. Es sei vorläufig dahingestellt, wie weit die Vorbehandlung der Proben diese Unterschiede bedingt.

Die Legierung Film Nr. 106, welche getempert und langsam abgekühlt wurde, zeigt im Röntgenbild nur die *tetragonale Phase*, mit den Gitterkonstanten $a = 3{,}891$, $c = 3{,}64$ Å und dem Achsenverhältnis $a:c = 1{,}07$. Diese Parameter weichen von den von Johansson und Linde gefundenen ($a = 3{,}98$, $c = 3{,}72$ Å) merklich ab, während das Achsenverhältnis $\left(\frac{a}{c} = 1{,}069\right)$ fast genau das gleiche ist.

Die Abweichung ist wohl nur auf eine verschiedene Deutung der Diagramme zurückzuführen, da nach Art der Interferenzen und nach ihrer Intensität in beiden Fällen anscheinend die gleiche Phase zugrunde lag. In unseren Aufnahmen war wegen des größeren Linienreichtums (Cu- anstelle Fe-Strahlung) die Deutung zuverlässiger. Im übrigen ist diese tetragonale Phase mit derjenigen der genannten Autoren anscheinend identisch.

Hilfsmittel der graphischen Auswertung der Diagramme

Die Bestimmung der tetragonalen Kristallphase konnte besonders leicht und sicher auf graphischem Wege vorgenommen werden. Zu diesem Zwecke wurde die quadratische Form:

$$\sin^2\frac{\vartheta}{2} = \frac{\lambda^2}{4}\left(\frac{h^2+k^2}{a^2} + \frac{l^2}{c^2}\right) = \frac{\lambda^2}{4a^2}\left(h^2 + k^2 + \frac{a^2}{c^2}l^2\right)$$

in der Form geschrieben:

$$\sin^2\frac{\vartheta}{2} = \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2[h^2 + k^2 + l^2 + \varepsilon(2+\varepsilon)l^2] = \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2[h^2+k^2+l^2+\varkappa^2 l^2],$$

welche sich von dem Ausdruck für die quadratische Form im kubischen Kristallsystem durch Hinzufügung des Gliedes: $\varkappa^2 l^2$ unterscheidet. Der Koeffizient $\varkappa^2 = \varepsilon(2+\varepsilon)$ ist eine Funktion des

Achsenverhältnisses, welches mit der Größe ε durch die Beziehung $1 + \varepsilon = \frac{a}{c}$ verknüpft ist. Bezeichnen wir zur Abkürzung die Größe $\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}$ mit Q, die Größe: $\sqrt{Q^2 + x^2 l^2}$ mit Q^*, so findet man den Winkel $\frac{\vartheta}{2}$ aus $\sin\frac{\vartheta}{2} = \frac{\lambda}{2a} Q^*$. Diese Formel läßt sich in logarithmischer Form wie folgt schreiben:

$$\log \sin\frac{\vartheta}{2} + \log a = \log\frac{\lambda}{2} + \log Q^*.$$

Trägt man nun mit Hilfe der gegebenen Werte für die Wellenlänge der K_α- und K_β-Strahlung von Kupfer die Werte von $\log\frac{\lambda}{2} + \log Q^*$ für eine kontinuierliche Reihenfolge des Achsenverhältnisses $a:c$ (Abszisse) auf, so erhält man ein zur graphischen Auswertung sehr gut geeignetes Nomogramm, wie es in anderer Art auch von A. W. Hull[1]) angegeben worden ist. Im vorliegenden Falle genügt es, dieses Netz für kleine Abweichungen vom kubischen System $\left(\frac{a}{c} = 1\right)$ d. h. für kleine Werte von

$$\varepsilon = -0{,}03;\ -0{,}02;\ -0{,}01;\ 0{,}00;\ 0{,}01;\ 0{,}02;\ 0{,}03;\ \ldots$$

zu zeichnen. Die Kurven, welche den Verlauf von $\log\sin\frac{\vartheta}{2}$ als Funktion der Parameter Q^* und $\frac{a}{c} = 1 + \varepsilon$ darstellen, sind in diesem Teildiagramm fast genau *geradlinig*, wie in Fig. 1.[2]) Man erkennt daraus, wie die kubischen Formen je nach ihrer Stellung am Achsenkreuz in entsprechende tetragonale Formen zerfallen und zwar die Flächen:

a) Mit lauter *gleichen* Indizes (z. B. 111; 222 usw., allgemein hhh) wieder nur in eine Form: $\{hhh\}$.

b) Mit *zwei gleichen* Indizes (z. B. hll, hhl) in je zwei Formen: $\{hll\}$ und $\{llh\}$ bzw. $\{hhl\}$ und $\{lhh\}$.

c) Mit lauter *verschiedenen* Indizes in drei Formen: z. B. $\{321\}$ in $\{321\}$, $\{312\}$ und $\{213\}$ usw., allgemein $\{hkl\}$ in $\{hkl\}$, $\{klh\}$ und $\{lhk\}$. Trägt man nun auf einen passenden

1) A. W. Hull, Phys. Rev. 17. S. 571. 1921.

2) In der Fig. 1 sind außer der Linie β (100) nur die Linien der K_α-Interferenzen gezeichnet. Die dem allseitig flächenzentrierten Gitter zugehörigen Interferenzen sind vor den übrigen durch ihre Stärke hervorgehoben.

Papierstreifen im gleichen Maßstabe wie bei der Zeichnung des Netzes die Werte der gemessenen $\log \sin \frac{\vartheta}{2}$ auf, so läßt sich durch Verschieben des Streifens in horizontaler und in vertikaler Richtung eine Stellung finden, bei welcher die beobachteten Interferenzlinien mit den Linien des Netzes zur Deckung kommen. Sucht man auf der im Netz gezeichneten vertikalen Skala die Stelle auf, wo die 0-Linie des Papierstreifens liegt, das ist die Linie, welche dem Wert $\sin \frac{\vartheta}{2} = 1$, also $\log \sin \frac{\vartheta}{2} = 0$ entspricht, so gibt die gewonnene Zahl den Logarithmus der Gitterkonstanten (a) an, wie aus der Formel:

$$\log \sin \frac{\vartheta}{2} = \log \frac{\lambda}{2} - \log a + \log Q^*$$

hervorgeht.[1])

Die Ausdeutung der Aufnahmen Filme Nr. 106 und 107 auf diesem Wege zeigt, daß neben den für das allseitig flächenzentrierte kubische bzw. tetragonale Gitter charakteristischen Interferenzen, die in den Filmen mit besonderer Stärke erscheinen, noch Interferenzen mit *ungemischten* Indizes auftreten, die einem einfachen Gitter mit gleichen Dimensionen entsprechen. Solche Linien werden auch als „Überstrukturlinien" bezeichnet. Später wird darauf näher eingegangen werden.

b) Legierungen mit Molenbruch 0,600

Die Tab. 5 am Schluß enthält die Ergebnisse der Auswertung. Die Auswertung der Filme Nr. 170 und 172 führt zu folgendem Ergebnis: Beide Legierungen weisen eine *ausgesprochene Sammelkristallisation* auf, die durch das lange Tempern entstanden sein dürfte. Die Legierung Film Nr. 170 läßt sich zwanglos auf ein *kubisch-flächenzentriertes Raumgitter* beziehen, was dem ungeordneten Mischkristallzustand entspricht.[2]) Als Gitterkonstante ergibt sich der Wert $a = 3{,}802$ Å. Nur zwei sehr schwache Linien, deren Existenz nicht einwandfrei festgestellt werden konnte, fügten sich nicht in das flächenzentrierte Schema ein, sie ließen sich aber als Wolframlinien deuten,

1) Die Skala für $\log a$ ist im Netz der Fig. 1 auf dem äußeren Rand angebracht. Dabei bedeutet z. B. 9,900 den log 0,900—1.

2) Zum gleichen Ergebnis führt die Auswertung des Films Nr. 169.

durch welches die Antikathode verunreinigt war. Die Legierung Film Nr. 172, welche nach dem Tempern langsam abgekühlt wurde, weist dagegen eine ausgesprochene *tetragonale Struktur* auf (vgl. Tab. 5). Die Kantenlängen des tetragonalen Elementarkörpers ergeben sich zu: $a = 3{,}84$ Å, $c = 3{,}53$ Å. Das Achsenverhältnis hat den Wert $a/c = 1{,}085$. Neben den für das flächenzentrierte tetragonale Gitter charakteristischen Linien treten wieder solche mit *gemischten* Indizes auf, aber mit *sehr viel schwächerer* Intensität (Überstrukturlinien). Hierdurch werden die Ergebnisse von Johansson und Linde in gewisser Weise bestätigt, nur ist die Deutung eine andere (vgl. S. 976).[1]) Es ist auffällig, daß bei diesem nicht exakt stöchiometrischen Molenbruch eine so ausgesprochen tetragonale Phase an Stelle des unregelmäßigen Mischkristalles auftritt, die in der Exaktheit der Orientierung ihrer Atome derjenigen mit dem genauen stöchiometrischen Verhältnis von 0,5 Molenbruch kaum nachsteht (vgl. S. 955).

c) Legierungen mit 0,450 Molenbruch

Das Diagramm der Probe Film Nr. 109 mit 0,450 Molenbruch Cu, die im gewalzten und nicht getemperten Zustand untersucht wurde[2]), ergibt die Zugehörigkeit zu einem *kubisch-flächenzentrierten* Gitter mit der Kantenlänge 3,87 Å, wie sie der entsprechende Mischkristall mit vollkommen regelloser Substitution der Goldatome an Stelle der Kupferatome nach

---

1) Im Nachtrag zur Korrektur der obengenannten Arbeit wird angegeben, daß das Achsenverhältnis der tetragonalen Legierungen zwischen einem Goldgehalt von 0,50—0,40 Molenbruch abnimmt. ($a/c = 1{,}069$ bei 0,500, 1,072 bei 0,450, 1,068 bei 0,420, 1,028 bei 0,36 Molenbruch.) Es scheint aber in der Nähe von 0,400 Molenbruch eine raschere Annäherung an den kubischen Bau aufzutreten, als im Zwischengebiet zwischen 0,50 und 0,40. Der hier gefundene abweichende Wert $a/c = 1{,}085$ könnte durch eine bessere Annäherung der vorliegenden Probe an die vollkommene Orientierung hervorgerufen sein, wie sich auch aus den Ausführungen der genannten Autoren entnehmen läßt.

2) Damit in Übereinstimmung sind die Interferenzlinien des Diagrammes ganz einheitlich, besitzen aber eine ziemliche Breite. Dies deutet darauf hin, daß die Legierung sich in einem sehr feinkörnigen Zustand befindet. Es sind keinerlei Spuren von Sammelkristallisation bemerkbar.

der Additivitätsregel aufweisen sollte.[1]) Die Auswertung des Diagrammes ist in der Tab. 4 enthalten.

Es sei erwähnt, daß bei einer *getemperten* und langsam abgekühlten Probe gleicher Molzusammensetzung Johansson und Linde ein *tetragonales Gitter* mit dem Achsenverhältnis 1,071 fanden.[2])

d) Legierungen mit 0,750 Molenbruch

Obgleich diese Legierungen kein unmittelbares Interesse für den Nachweis der Tammannschen Resistenzgrenzen besitzen, wurde dennoch ihr Feinbau in verschiedenen Arten der Vorbehandlung näher studiert, teils zur Nachprüfung der Ergebnisse von Johansson und Linde[2]), teils zur Feststellung, wieweit eine geordnete normale Verteilung im Sinne Tammanns wirklich zutrifft. In den Diagrammen der Legierungen Film Nr. 207 (getempert und abgeschreckt) und Film Nr. 205 (getempert und langsam gekühlt), des weiteren in Film Nr. 252 (ungetempert und abgeschreckt) sind die Interferenzlinien durchweg nicht gleichmäßig geschwärzt, sondern bestehen aus mehr oder minder großen Pünktchen, als Zeichen dafür, daß beim Tempern eine erhebliche Sammelkristallisation eingetreten ist. Bei der Probe Film Nr. 205 treten neben diesen Interferenzen noch eine Anzahl breite verwaschene Bänder auf (in der Tab. 6 mit den Buchstaben a bis o bezeichnet), die erst bei 5stündiger Belichtung deutlicher werden. Das Ergebnis der Auswertung ist in der Tab. 6 niedergelegt. Die Legierung Film Nr. 252, welche im ungetempertem Zustande abgeschreckt wurde, zeigt im wesentlichen die *kubische Mischkristallphase* mit der Gitterkonstante $a = 3{,}724$ Å. Daneben tritt durch etwa 5 zusätzliche schwache Interferenzen kenntlich eine zweite Kristallphase auf, die wahrscheinlich der chemischen Verbindung Cu_3Au entspricht. Nach Johansson und Linde sollte dieses Raumgitter, das aus dem flächenzentrierten Goldgitter durch Ersatz von je drei auf den Flächenmitten des Elementarwürfels liegenden Au-Atomen durch Cu-Atome hervorgeht, erst bei langsamer Abkühlung einer getemperten Legierung gleicher Zusammensetzung erhalten werden; die verschiedene Vorbehandlung scheint sonach von ausschlaggebender Bedeutung zu sein. Die Legierung Film Nr. 207, welche lange

1) L. Vegard a. a. O.

2) C. H. Johansson u. J. O. Linde, a. a. O. S. 447ff.

getempert und abgeschreckt wurde, zeigt im Röntgenbild fast ausschließlich die kubische Mischkristallphase mit der Gitterkonstante $a = 3{,}71$. Einige sehr schwache Interferenzen, die sich z. T. als von der Wo-*L*-Strahlung herrührend erwiesen, deuten darauf hin, daß eine zweite kubische Phase, wahrscheinlich die Verbindung Cu_3Au, in geringer Menge auftritt. Die getemperte und langsam gekühlte Legierung Film Nr. 205 zeigt neben scharfen Interferenzen noch eine Anzahl breite verwaschene Streifen, die erst bei 5 stündiger Belichtung deutlicher werden. Es sind also anscheinend zwei verschiedene Kristallphasen in der Probe vorhanden mit sehr verschiedener Korngröße. Die eine läßt sich wie Tabelle 6 zeigt einigermaßen mit der Verbindung Cu_3Au bzw. einem Mischkristall dieser Verbindung mit Cu bzw. Au identifizieren, die höher disperse Phase ist anscheinend ebenfalls kubisch aber mit einer doppelt so großen Gitterkonstante. Eine exakte Deutung konnte an Hand des vorliegenden Materials nicht erfolgen. Die Aufnahme Film Nr. 220, welche durch Wiederholung von der Legierung Film Nr. 207 jedoch mit 5stündiger Belichtung gewonnen wurde, zeigt ein komplexes Verhalten. Die Linien der einen Filmhälfte, welche relativ stark und breit erscheinen, passen auf ein flächenzentriert kubisches Gitter mit der Kantenlänge $a = 3{,}74$ Å. Einige schwache weitere Interferenzen lassen sich zwanglos als Überstrukturlinien deuten, die einer gewissen Ordnung der Atome bzw. einer in gewisser Menge vorhandenen neuen Kristallphase ihre Entstehung verdanken. Die Linien auf der anderen Filmhälfte dagegen, welche schmaler und weniger intensiv erscheinen, decken sich zum Teil mit den genannten Linien und gehören derselben Mischkristallphase an, daneben treten Linien auf, die der Verbindung Cu_3Au entsprechen. Es ist nicht leicht, diese Widersprüche aufzuklären. Man müßte annehmen, daß die genannte Legierung nicht homogen ist, sondern aus wenigstens *zwei* kristallinischen Phasen besteht, die auf den Außen- und Innenschichten der Probe auftreten.

e) Legierungen mit 0,625, 0,600 und 0,500 Molenbruch, denen durch Salpetersäure ein Bruchteil der gesamten Kupfermenge entzogen wurde

Um zu prüfen, ob bei dem Herauslösen verschieden großer Kupfermengen aus den Legierungen Änderungen des Raum-

gitters der vorliegenden kristallographischen Phasen bzw. der Mischkristalle mit normaler Verteilung eintreten, wurden die Legierungen mit 0,500 und 0,625 Molenbruch, erstere im getemperten, letztere im ungetemperten Zustand untersucht[1]), aus denen gemäß der Tabelle auf S. 933 einmal nur verschwindend wenig (insgesamt 0,93 Proz.), das andere Mal fast quantitativ die gesamte Menge des in der Legierung enthaltenen Kupfers durch Salpetersäure vom spez. Gewicht 1,4 und 1,5 und der Temperatur von 22° nach einer Einwirkungsdauer von insgesamt 90 Tagen herausgelöst war. Die Legierungen blieben dabei, wenigstens äußerlich, in ihrem Gefüge unverändert. Die röntgenographische Untersuchung ergab gemäß Tab. 7 folgendes:

Das Röntgenbild Film Nr. 239 der vorhergenannten edlen Legierung mit 0,500 Molenbruch zeigte gegenüber der nicht dem Angriff der Salpetersäure ausgesetzten Legierung gleicher Zusammensetzung und Vorbehandlung (Röntgenbild Film Nr. 106) keinen wesentlichen Unterschied (vgl. Tab. 4). Die Gitterkonstante des tetragonalen Gitters erhält den Wert 3,89 Å und das Achsenverhältnis *a/c* vergrößert sich von 1,08 auf 1,09. Es ist wahrscheinlich, daß dieser Befund mit der Art des Auflösungsprozesses zusammenhängt, worauf noch eingegangen werden wird.

Ein Zwischenstadium zwischen der edlen und der unedlen Legierung stellt die Legierung Film Nr. 250 mit 0,600 Molenbruch dar. Aus dem Röntgendiagramm ergibt sich, gemäß Tab. 5, daß nach dem Herauslösen von 32,9 Proz. der gesamten Kupfermenge an Stelle des vorher einheitlichen tetragonalen Gitters nun zwei kubische Gitter auftreten. Das eine entspricht in seinen Dimensionen angenähert dem reinen Goldgitter (Gitterkonstante 4,025 Å an Stelle von 4,080 Å bei reinem Gold) das andere hat fast die gleichen Dimensionen des ursprünglichen Mischkristallgitters.[2])

---

1) Bei den nach Abschluß der Lösungsversuche vorgenommenen Röntgenuntersuchungen stand leider nur noch die ungetemperte Legierung zur Verfügung.

2) Erhebliche Unterschiede zwischen der während der Belichtung feststehenden (Film Nr. 250) und der kontinuierlich gedrehten Probe (Film Nr. 251) ließen sich nicht feststellen.

Tabelle 7
Vergleich der verschiedenen Legierungen

Legierung Film Nr.	Molenbruch Cu	Vorbehandlung der Legierung	Chem. Verhalten	Auftretende Kristallarten im Röntgendiagramm	Kristallsystem	*a* in Å (röntgenogr.)	*c* in Å (röntgenogr.)	*V* in Å³ (röntgenogr.)	Spez. Gew. aus Röntgendaten	Spez. Gew. beob.[1]	Spez. Gew. interpoliert
109	0,450	gewalzt, *nicht* getempert, sehr feinkörnig	edel	Mischkrist. (mit statist. Verteilung)	kub.	3,87	—	57,96	15,80	—	15,40
107	0,500	gewalzt, *nicht* getempert feinkörnig	nahezu edel	im wesentl. Mischkrist. + Verbind.	kub.	3,88	—	56,18	15,22	14,9	14,9
106	0,500	gewalzt, getempert und mäßig lange abgekühlt, grobkörnig	nahezu edel	im wesentl. Verbindung CuAu	tetrag.	3,89	3,64	55,11	15,52	14,8	14,8
239	0,500	wie Nr. 106, dann mit HNO_3 (spez. Gew. 1,5) 0,93 % der gesamten Cu-Menge herausgelöst	nahezu edel (0,93 %)	Verbindung CuAu	tetrag.	3,89	3,66	55,39	15,48	14,60	14,8
280 (*A*)	0,600	gewalzt, *nicht* getempert, feinkörnig	sehr stark angreifb. (93,27 %)	Mischkristalle	kub.	3,785	—	54,23	14,17	13,76	13,9
170 (*B*)	0,600	gewalzt, getempert und abgeschreckt, grobkörnig	wenig angreifbar (4,74 %)	Mischkristalle	kub.	3,80	—	54,96	13,98	13,02	13,9
172 (*C*)	0,600	gewalzt, getempert und langsam gekühlt grobkörnig	wenig angreifbar (4,99 %)	tetrag. Verbind. CuAu + Mischkrist.	tetrag. kub.	3,84	3,64	53,67	14,31	—	13,9
250/51	0,600	wie Nr. 172, dann mit HNO_3 (spez. Gew. 1,5) 32,9 % der gesamten Cu-Menge herausgelöst	stark angreifbar (32,9 %)	kubische Mischkristalle mit versch. Gitterkonstante	kub.	4,025	—	65,21	—	—	13,9
					kub.	3,772	—	54,00	—	—	13,9

1) Die Kleinheit der für die Röntgenuntersuchungen gebrauchten Proben ließ keine größere Genauigkeit als ± 3 % als Mittelwert von je 20 Messungen zu.

Tabelle 7 (Fortsetzung)

Legierung Film Nr.	Molenbruch Cu	Vorbehandlung der Legierung	Chem. Verhalten	Auftretende Kristallarten	Kristallsysteme	*a* in Å (röntgenogr.)	*c* in Å (röntgenogr.)	*V* in Å³ (röntgenogr.)	Spez. Gew. aus Röntgendaten	Spez. Gew. beob.[1]	Spez. Gew. interpoliert
290	0,625	gewalzt, ungetempert, dann etwa 100% der gesamten Cu-Menge mit HNO_3 (spez. Gew. 1,5) herausgelöst	unedel	kub. Mischkristalle mit versch. Gitterkonstante	kub.	4,04	—	65,90	etwa 19	—	18,6
					kub.	3,77	—	58,55	18,87	—	18,6
252	0,750	gewalzt, ungetempert u. abgeschreckt	unedel	Mischkrist. + Verbind. Cu_3Au	kub.	3,724	—	51,65	12,30	etwa 12	12,2
					kub.	3,724	—	51,65	12,30	etwa 12	12,20
220	0,750	gewalzt, getempert und abgeschreckt wie 207	unedel	Verb. Cu_3Au	kub.	3,72	—	51,48	12,36	etwa 12	12,20
				+ Mischkrist.	kub.	3,71	—	52,00	12,30	etwa 12	12,20
205	0,750	gewalzt, lange getempert (5 Tage bei 700°) u. langsam gekühlt	unedel	Verb. Cu_3Au	kub.	3,72	—	51,48	12,36	etwa 12	12.20
				+ hochdisp. kub. Kristallart mit dopp. Kantenlänge	kub.	7,44	—	—	—	etwa 12	12,20
207	0,750	wie Nr. 205 aber nach d. Temp. abgeschreckt	unedel	wesentlich Verbindung Cu_3Au	kub.	3,71	—	51,07	12,46	etwa 12	12,20

Bei der *unedlen* ungetemperten Legierung Film Nr. 290 mit 0,625 Molenbruch wurden nach Herauslösen der gesamten Kupfermenge ebenfalls zwei kubische Mischkristallgitter festgestellt, von denen das eine wieder annähernd mit dem Goldgitter zusammenfiel, das andere mit dem Gitter des ursprünglichen Mischkristalls.

Zusammenstellung der Ergebnisse

Zur Übersicht und zum Vergleich der gefundenen Gitterkonstanten der untersuchten Legierungen mit den berechneten

1) Die Kleinheit der für die Röntgenuntersuchungen gebrauchten Proben ließ keine größere Genauigkeit als ± 3% als Mittelwert von je 20 Messungen zu.

Werten sind in der Tab. 7 die charakteristischen Daten zusammengestellt.

Zum Vergleich sind in den beiden letzten Spalten die beobachteten spez. Gewichte der Legierungen und die nach der linearen Interpolationsformel berechneten spez. Gewichte hinzugefügt, wobei als Wert für reines Gold $a = 4{,}08$ Å ($s = 19{,}05$), für reines Kupfer $a = 3{,}613$ Å ($s = 8{,}84$), zugrunde gelegt wurde.[1])

Trägt man die beobachteten Werte für die Kantenlängen a und c für Legierungen mit verschiedenen Molenbrüchen auf, so ergibt sich der Verlauf wie in Fig. 2 (S. 954).

Betrachten wir zunächst die Kurven der a- und c-Werte der tetragonalen Gitter bzw. der a-Werte der kubischen Gitter (in der Figur durch verschieden große leere Kreise und Punkte bezeichnet). Die beobachteten a-Werte der homogenisierten Legierungen (große leere Kreise) liegen bei Johansson und Linde[2]) durchweg höher als sie sich aus der linearen Interpolation nach der gezeichneten Geraden zwischen den Punkten 3,613 Å (Cu 100 Proz.) und 4,08 Å (Au 100 Proz.) ergeben. Nach den Messungen von Kirchner und Lange (a. a. O.) (kleine leere Kreise) sollten dagegen die ungetemperten Legierungen angenähert der Vegardschen Additivitätsregel Genüge leisten.[3]) Diese Unterschiede zwischen den verschiedenen Beobachtern müssen danach durch die Art der Vorbehandlung und das eventuelle Auftreten von Verbindungen entstanden sein. Im Gebiete von 0,500 Molenbruch Cu ergibt sich nach Johansson und Linde für die von ihnen untersuchten getemperten und langsam abgekühlten Legierungen eine allmähliche Zunahme und Wiederabnahme des Achsenverhältnisses a/c des tetragonalen Elementarkörpers. Die Kurve für die a-Werte steigt in diesem Gebiete stark an und erreicht das Maximum $a = 3{,}95$ Å bei einem Molenbruch von 0,450, während gleichzeitig die c-Achse in annähernd dem gleichen Maße abnimmt, sie erreicht ein Minimum bei einem Molenbruch von 0,550 Å.

1) Daten nach L. Vegard u. Hj. Dale, a. a. O., S. 159. Die spez. Gewichte sind aus diesen Röntgendaten berechnet.

2) C. H. Johansson u. J. O. Linde, a. a. O. S. 452.

3) Anmerkung während der Korrektur: In einer während des Druckes der Arbeit erschienenen Veröffentlichung von L. Vegard u. Hjalmar Dale wurde dies durch genaue Vergleichsaufnahmen bestätigt.

Bei den von uns untersuchten Legierungen in dem Bereich von 0,400—0,600 Molenbruch (schwarze Kreise in Fig. 2) liegen die nicht getemperten Legierungen (Filme Nr. 109, 107 und 280)

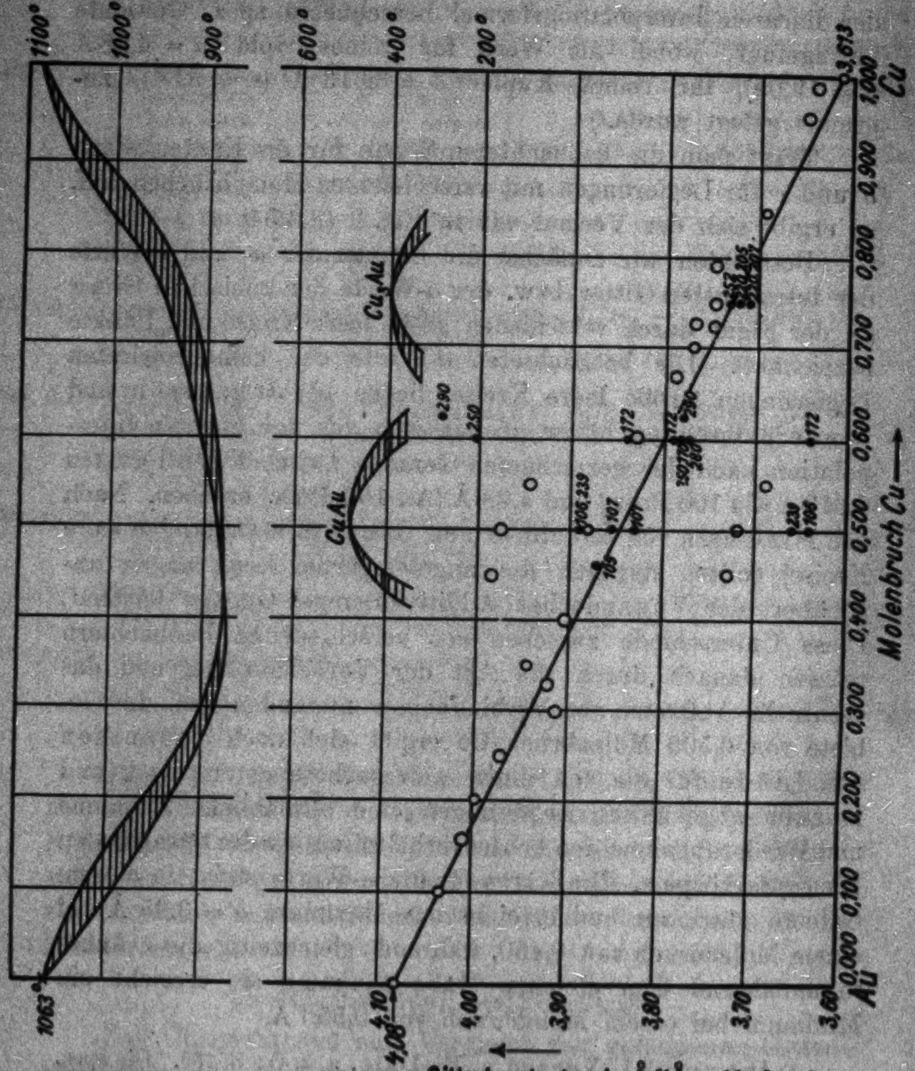


Fig. 2

angenähert auf der für die Mischkristalle mit ungeordnetem Ersatz des Cu durch Au nach der Additivitätsregel gezeichneten Geraden, in Übereinstimmung mit dem Befund der genannten

Autoren. Auch die Legierung (Film Nr. 170) mit 0,600 Molenbruch, die getempert und abgeschreckt wurde, liegt dicht in der Nähe der geraden Linie. Bei den getemperten Legierungen (Filme Nr. 172 und 106, sowie 239) mit tetragonalem Gitter konnte der von Johansson und Linde beobachtete starke Anstieg der Achse *a* nicht gefunden werden, vielmehr ändert sich *a* auch bei diesen Legierungen fast proportional mit dem Kupfergehalt.[1]) Die *c*-Achse dagegen nimmt in diesem Gebiete sehr stark ab und dementsprechend auch das Volumen der Elementarzelle. Dies bedeutet, daß bei der Bildung der tetragonalen Kristallphase in diesem Bereich der molekularen Zusammensetzung die Mischungsregel nicht befolgt wird, sondern daß eine gewisse Kontraktion des Gitters zustande kommt.

Im Intervall mit etwa 0,750 Molenbruch wurde von Bain (1923) später genauer von Johansson und Linde ebenfalls das Auftreten einer neuen Kristallphase mit kubischem Gitter röntgenographisch festgestellt. Nach Kurnakow, Zemczuzny und Zasetabelew (l. c.) handelt es sich hierbei um die durch besonders geringe elektrische Widerstandswerte ausgezeichnete intermetallische Verbindung Cu_3Au. Die Gitterkonstante dieser Verbindung wurde von Johansson und Linde zu $a = 3{,}75$ Å bestimmt (näheres vgl. S. 967). Von den von uns untersuchten Legierungen weisen die getemperten Proben (Filme Nr. 220, 205, 207) im wesentlichen die Verbindung Cu_3Au neben Mischkristallen auf, auch die nicht getemperte und abgeschreckte Probe (Film Nr. 252) mit 0,750 Molenbruch zeigt neben der Hauptmenge der Mischkristalle diese Verbindung.

Die auffällige Abweichung der Gitterkonstanten in diesen beiden durch besonders einfache chemisch-stöchiometrische Zusammensetzung charakterisierten Gebieten des Zustandsdiagrammes von der Additivitätsregel (gerade Linie der Fig. 2) läßt sich wohl am einfachsten so erklären, daß sich auch beiderseits der Zusammensetzung einfacher Proportionen eine gewisse Menge der neuen Kristallphasen (chemische Verbindungen CuAu und Cu_3Au) bildet, und daß die überschüssigen Atome sich nach Zufall in das Gitter dieser Phasen einordnen. Dies erscheint nach dem von Kurnakow, Zemczuzny und

1) Der Unterschied beruht auf einer verschiedenartigen Deutung der Interferenzen.

Zasetabelew im oberen Teil der Fig. 2 eingezeichneten Zustandsdiagramm des Systems Cu–Au (für den Fall echter Gleichgewichte) gut möglich. Die bei hohen Temperaturen homogenen Mischkristalle von verschiedener Zusammensetzung wandeln sich in einem gewissen Temperaturintervall zu Mischkristallen der chemischen Verbindung mit Cu oder Au um. Dabei können unter Umständen Ungleichgewichte auftreten, wodurch Mischkristalle mit Zonenbau oder auch mehrere Phasen entstehen, wenn die Reaktionen nicht zu Ende verlaufen und ein Teil der ursprünglichen Mischkristalle noch vorhanden ist. Die Röntgenbilder (Filme Nr. 252, 220 und 207) weisen in der Tat zwei Phasen, Mischkristalle der Verbindung und ursprüngliche Mischkristalle, auf, womit die Gitterkonstante im Einklang steht. Je nach der Menge der nicht stöchiometrisch eingelagerten Atome ist zu erwarten, daß die Gitterdimensionen insbesondere das Verhältnis der *a*- zur *c*-Achse sich ändern, wie es auch beobachtet wird.

5. Über die Tammannschen normalen Verteilungen und die Struktur der Legierungen im allgemeinen

Nach Tammann (l. c.) lassen sich 4 Typen von Verteilungen zweier Atomarten in einem Raumgitter unterscheiden:

1. Die normalen Verteilungen, die zugleich der Symmetrie des Kristallgitters genügen und den besten Grad der möglichen Durchmischung beider Atomarten verkörpern sollen. Tammann drückt dieses mit den Worten aus: „In diesem Sinne darf man für einen normalen Mischkristall eine Atomverteilung fordern, bei der die Zahl der Gittergeraden gleicher Besetzung ohne Anhäufungen in einer Gruppe in gleichwertigen Richtungen einander gleich sind, und den geringsten, mit der Zahl dieser Geraden in anderen ebenfalls gleichwertigen Richtungen verträglichen Wert haben.“ Die normalen Verteilungen stellen sich bei Temperaturen, bei denen ein Platzwechsel der Atome im Raumgitter auftreten kann, von selbst her. Auch nach Abkühlung des Mischkristalles mit normaler Verteilung kann diese ohne merkliche Schwankungen dauernd bestehen bleiben, ebenso kann sie sich bei langsamer Abkühlung eines aus der Schmelze kristallisierten Mischkristalles einstellen. *Die normale Verteilung soll also bei allen Temperaturen die absolut stabile Verteilungsart sein.*

2. Abnorme Verteilungen, deren Symmetrie bei relativ guter Durchmischung eine niedrigere ist als sie durch die Art der Gitter der reinen Komponenten vorgeschrieben wird. Diese Verteilungen sollen bei hinreichend hoher Temperatur unter Änderung des Gitters in die normalen übergehen.

3. Abnorme Verteilungen, die der Symmetrie des Gitters entsprechen, nicht aber der Forderung der bestmöglichen Durchmischung. Die Entstehung dieser Verteilungen ist um so unwahrscheinlicher, je größer in ihnen die örtlichen Anhäufungen einer Atomart sind. Bei Temperaturen, in denen Diffusionen im Gitter eintreten können, werden sie in die normalen Verteilungen übergehen. Bei niedrigen Temperaturen können sie jedenfalls nur in sehr kleinen Gitterbezirken vorkommen.

4. Die völlig ungeordnete (statistische) Verteilung der beiden Atomarten über die im Gitter der einen Komponenten möglichen Punktlagen. (Mischkristalle im gewöhnlichen Sinne.) Diese Verteilung entsteht immer dann, wenn die Atome bei schneller Kristallisation gezwungen werden, die Gitterplätze zu besetzen, wenn Diffusion nicht stattfindet.

Neben diesen 4 Typen unterscheidet Tammann noch regellose Verteilungen im Kristallgitter mit orientierten Anhäufungen einer Atomart in Form von Fäden oder Lamellen und abnorme Verteilungen, in denen in größeren Bezirken des Raumgitters orientierte Anhäufung der Atome einer Art auftritt. Es ist im letzteren Falle allerdings die Frage, wie weit hier nicht schon von einer Entmischung beider Komponenten, speziell in Form von orientierten Ausscheidungen einer Kristallart innerhalb der anderen gesprochen werden kann.

Auf geistreiche Weise hat Tammann die normalen Atomverteilungen im einfachen, körperzentrierten — und allseitig — flächenzentrierten kubischen Raumgitter abgeleitet und gezeigt, daß besonders einfache Strukturen sich für Mischungen ergeben, bei denen der Molenbruch $m = x:(x+y) = n/8$ ist (n = ganze Zahl). Bemerkenswert ist, daß für jeden Molenbruch nur je eine normale Verteilung konstruiert werden kann, entsprechend dem Vorkommen nur je eines absolut stabilen Mischkristalls. Nicht normale Verteilungen gibt es zahlreiche, insbesondere sind die anomalen Verteilungen wegen der Erfüllung der bestmöglichen Durchmischung, aber nicht der

Symmetrieforderung, wenn auch nicht absolut stabil, so doch existenzfähig.

An diese Vorstellungen, so einleuchtend und fast selbstverständlich sie auch erscheinen mögen, knüpfen sich eine große Anzahl von Fragen prinzipieller Art und auch kritische Einwände, auf die kurz eingegangen werden soll.

1. Inwiefern unterscheidet sich eine geordnete Verteilung in einem Mischkristall mit einfacher stöchiometrischer Zusammensetzung von einer chemischen Verbindung, die die gleiche Struktur aufweist? Tammann[1]) selbst meint vom strukturellen Standpunkt aus, daß an sich auf Grund der Konstellation der Atomschwerpunkte kein Unterschied bestünde, sondern daß die Frage erst durch die Anordnung der (Valenz-) Elektronen und ihre Beziehungen zu den Atomkernen entschieden werden könne. Rosenhain[2]) glaubt vom strukturellen Standpunkt aus einen Unterschied feststellen zu können, insofern als sich die Verbindungen gegenüber den Mischkristallen durch ein kompliziertes von denen der Komponenten verschiedenes Gitter unterscheiden lassen. Beide Anschauungen lassen sich nicht mit den neueren Erfahrungen über den Bau der metallischen Verbindungen befriedigend vereinbaren. Es zeigt sich, daß bei den festen Metallverbindungen, wie auch bei den Mischkristallen, im wesentlichen zwei Typen existieren, die folgendermaßen unterschieden werden.

1. a) *Intermetallische Verbindung mit neuem Gittertypus.* — Das Gitter der intermetallischen Verbindung ist von dem der reinen Komponenten mehr oder minder verschieden. Entweder tritt ein völlig neuer Gittertypus auf, oder die Atome der einen Art besetzen neue Plätze im Gitter, die bisher nicht durch Atome der anderen Art besetzt waren, wie z. B. im System Cu–Al, wo beide Komponenten ein kubisch flächenzentriertes Gitter besitzen, während z. B. die Verbindung $CuAl_2$ ein tetragonal-körperzentriertes Gitter mit 4 Molekülen in der Elementarzelle aufweist. Noch kompliziertere Verhältnisse ergeben sich, wenn die Gitter der reinen Komponenten im isolierten Zustand nicht gleich sind, wie z. B. beim

---

1) G. Tammann, l. c., S. 165/166.

2) W. Rosenhain, Chem. and Met. Eng. 28. S. 442. 1923.

System Cu–Zn (Messing), Cu–Sn, Au–Zn, Cr–C, Fe–Si, W–C. Beispielsweise besitzt die Verbindung CuZn eine Struktur wie CsCl, bei der die eine Atomsorte das Gitter der anderen zentriert. Der γ-Mischkristall im Gebiete von 38,3 – 32,3 % Cu stellt sogar einen Aufbau mit 52 Atomen in der Elementarzelle dar.

Dieser Typus der chemischen Verbindungen ist der, welcher gewöhnlich auch bei den chemischen Verbindungen der Metalle mit Nichtmetallatomen, z. B. bei den Halogensalzen, Oxyden, Sulfiden usw. auftritt.

1. b) *Intermetallische Verbindung mit ursprünglichem Gittertypus und regelmäßigem Atomersatz.* — Das Gitter der intermetallischen Verbindung ist von demjenigen der reinen Komponenten (A oder B) nur dadurch verschieden, daß z. B. die Atomsorte B in gesetzmäßiger Weise einen Teil der bisher durch die Atome (A) eingenommenen Punktlagen in der Elementarzelle ersetzt, daß neue Punktlagen aber nicht auftreten. Dabei kann eine Verzerrung des Gitters unter Erniedrigung der Symmetrie zustandekommen. Diesen Typus der chemischen Verbindungen beobachtet man weit seltener als den erstgenannten, er ist im wesentlichen auf die intermetallischen Verbindungen beschränkt. Z. B. gehören ihm die Verbindungen $AuCu_3$, AuCu, PdCu, IrOs, TeSb, CSi usw. an. Von den Verbindungen mit Nichtmetallatomen sind hierzu die Verbindungen vom CsCl-Typus zu rechnen.

Der zweite Typus von chemischen Verbindungen, der, wie wir sehen, wesentlich auf die intermetallischen Verbindungen beschränkt ist, kann rein strukturell, abgesehen von der Elektronenverteilung, sehr wohl auch eine normale Verteilung im Sinne Tammanns vorstellen, wenngleich die Verschiedenheit der auftretenden Typen nicht recht damit zu vereinbaren ist. Vom physikalisch-chemischen Standpunkt aus sind diese Legierungen nach ihrem thermischen und elektrischen Verhalten in den meisten Fällen als intermetallische Verbindungen aufgefaßt und beschrieben worden. Derartige Verbindungen werden im allgemeinen (zum Unterschied von der normalen Tammannschen Verteilung) nur innerhalb gewisser Temperaturgrenzen beständig sein, und es sei darauf hingewiesen, daß die oft bemerkten Widersprüche, die sich in den Beob-

achtungen der einzelnen Autoren finden, in den meisten Fällen durch mangelhafte Einstellung der Gleichgewichte und Überschreitung der Stabilitätsgrenzen erklärbar sind.

Es läßt sich danach die Frage, ob die in den Zustandsdiagrammen festgestellten neuen Phasen chemische Verbindungen oder normale Verteilungen im Tammannschen Sinne darstellen, in gewissem Sinne durch die röntgenographische Untersuchung entscheiden. Type 1. *a* stellt überhaupt keine normale Verteilung, sondern ein vollkommen neues Gitter dar, ihr Interferenzmuster wird völlig von dem der Komponenten verschieden sein. Bei Type 1. *b* würde das Interferenzmuster der Komponenten im großen und ganzen erhalten bleiben, aber durch die regelmäßige Substitution in gewisser, genau berechenbarer Weise abgeändert sein. (Vgl. S. 962ff.) Da aber die normalen Verteilungen für jede Zusammensetzung von vornherein festgelegt sind, so ergibt die röntgenographische Feststellung einer davon verschiedenen Struktur mit aller Sicherheit, daß die festgestellte Kristallart keine normale Verteilung darstellt. Häufen sich diese Fälle, so würden sie die Allgemeinheit der Tammannschen Vorstellung jedenfalls erheblich einschränken.

2. Auch bei den Legierungen mit nicht normaler (statistischer) Verteilung der einander ersetzenden Komponenten, die man als eigentliche Mischkristalle bezeichnet, kann man zwei verschiedene Typen unterscheiden, je nachdem wie die Einlagerung der Fremdatome in das Gitter der vorhandenen Atomsorte (meist diejenige mit der größeren Konzentration) vor sich geht.

2. a) *Mischkristalle mit Atomsubstitution.* — Hier wird einfach eine dem Konzentrationsverhältnis der beiden Komponenten entsprechende Anzahl von Gitterpunkten, die vorher mit den Atomen *A* besetzt waren, nunmehr bei der Mischkristallbildung von den Atomen *B* eingenommen. Im allgemeinen findet der Ersatz eines einzelnen Atoms *A* durch ein Atom *B* statt, es sind aber auch Fälle beobachtet worden, in denen eine Gruppe von Atomen *A* durch eine Gruppe von Atomen *B*, sogar mit eventuell verschiedener Anzahl ersetzt wird. Bei CuAl-Legierungen soll nach Westgren und Phragmén[1]) eine Ersetzung von je drei Atomen Cu durch

1) A. Westgren und G. Phragmén, Nature 113. S. 122.

je zwei Atome Al im Konzentrationsintervall zwischen 16 bis 25 Proz. Al auftreten. (Komplexe Substitution im Elementarkörper mit 52 Atomen.)

2. b) *Mischkristalle mit Einlagerung der Fremdatome zwischen die vorhandenen Atome.* — Dieser Typus von Mischkristallen ist bisher hauptsächlich beim System Fe–C beobachtet worden. In austenitischen Stählen wurde von Westgren und Phragmén (a. a. O.) und von Wever-Rütten[1]) eine feste Lösung von C im γ-Eisen mit Erweiterung des Fe_γ-Gitters beobachtet, bei welcher die C-Atome die Fe-Atome nicht nach Zufall vertreten, sondern vielmehr sich in die Zwischenräume zwischen den Fe-Atomen des flächenzentrierten kubischen Fe_γ-Gitters einlagern. Es ist noch nicht entschieden, ob diese eingelagerten C-Atome an bestimmte neue strukturelle Punktlagen festgebunden sind, oder ob sie bis zu einem gewissen Grade im Eisengitter frei beweglich sind, wie etwa der überschüssige Sauerstoff in Oxyden oder das nicht stöchiometrisch gebundene Kristallwasser in den Salzhydraten und dergleichen (vagabundierende Kristallbausteine).

Nach R. Glocker[2]) tritt diese Art von Mischkristallen nur bei begrenzter Mischbarkeit der Komponenten auf, während im allgemeinen und besonders bei lückenlosen Mischkristallreihen der einfache Atomersatz zu finden ist. Abgesehen von der speziellen Natur der einander ersetzenden Komponenten ist es verständlich, daß ein beliebiges Konzentrationsverhältnis nur schwierig bei Einlagerung der Fremdatome zwischen die anderen Atome hergestellt werden kann. Unsere Erkenntnisse reichen in dieser Beziehung zu einem abschließenden Urteil nicht aus.

Die Frage, ob sich in einem gegebenen Mischkristall der Atomersatz nach der ersten oder zweiten Art vollzieht, wird sich wohl meistens sowohl durch die Prüfung des spezifischen Gewichtes, wie durch die röntgenographische Untersuchung entscheiden lassen, wenn die substituierende Atomsorte in

---

1) F. Wever-P. Rütten, Mitteilung d. K. W. J. f. Eisenforschung III. S. 45. 1921; IV. S. 67. 1927; VI. S. 1. 1924.

2) R. Glocker, Materialprüfung mit Röntgenstrahlen. Berlin, J. Springer, 1927.

ihrem Beugungsvermögen der vorhandenen Atomart nicht zu sehr nachsteht.

Auch die weitere Frage, inwiefern ein solcher Mischkristall mit gesetzmäßiger Einlagerung der zweiten Atomart in das Gitter der ersten von einer intermetallischen Verbindung (vgl. S. 959) verschieden ist, läßt sich bis zu einem gewissen Grade beantworten: Hat das Konzentrationsverhältnis einen einfachen stöchiometrischen Wert, so entspricht das Atomverhältnis der beiden Komponenten in jeder Elementarzelle dem Verhältnis zweier möglicher Punktlagen der zugehörigen Raumgruppe, ein struktureller Unterschied gegenüber einer chemischen Verbindung ist dann nicht bemerkbar. Auch die Röntgenuntersuchung würde dies bestätigen. Bei nichtstöchiometrischem Verhältnis der beiden Atomsorten läßt sich vermuten, daß ebenfalls pro Elementarkörper so viel als möglich Fremdatome und zwar in stöchiometrischem Verhältnis in die durch die Symmetrie des ursprünglichen Gitters gegebenen Lagen eintreten, und daß die überschüssigen Atome nicht an feste Plätze gebunden im Gitter beweglich sind. Es sei dabei von gröberen Effekten wie Adsorption, orientierte Ausscheidung, submikroskopische Gitterbereiche von Fremdatomen und dergleichen abgesehen.

Alle diese Fragen bedürfen noch sehr der Klärung und Vertiefung durch weitere experimentelle Beobachtungen.

6. Über die Prüfung der Tammannschen normalen und abnormen Verteilungen mit Hilfe von Röntgenbeobachtungen

A. Normale Verteilungen

Wie M. v. Laue[1]) theoretisch abgeleitet hat, gibt ein Mischkristallgitter mit statistischer Verteilung der Atomkomponenten nach einem gegebenen Verhältnis, abgesehen von einer kleinen, durch die Änderung der Gitterdimensionen be-

1) M. v. Laue, Ann. d. Phys. **56**. S. 497. 1918; **78**. S. 167. 1925. Dabei wird vorausgesetzt, daß die Intensität der Interferenzen dem Quadrate des Strukturfaktors proportional ist, während nach der dynamischen Theorie von P. P. Ewald bei idealem Gitterbau die Intensität direkt proportional dem Strukturfaktor wäre. Ein solcher idealer Gitterbau wird schon bei reinen Stoffen selten beobachtet und ist in Mischkristallen noch weniger zu erwarten.

wirkten Verschiebung, und einer Erhöhung der unregelmäßig gestreuten Strahlung, dieselben scharfen Interferenzen, wie das Gitter der reinen Komponenten (bei lückenloser Mischbarkeit und gleichem Gittertypus der Komponenten) oder wie das Gitter der in der größeren Konzentration vorhandenen Komponente (bei nicht gleichem Typus der reinen Gitterkomponenten und begrenzter Mischbarkeit.[1])

Besitzen beispielsweise die beiden reinen Komponenten wie im vorliegenden Falle das Cu und Au je ein flächenzentriert-kubisches Gitter, so müssen in den Röntgenbildern alle Interferenzen ausgelöscht sein, die gemischte Indizes haben. Dies folgt aus der speziellen Art des Strukturfaktors, den wir im Falle des Goldgitters in der Form schreiben:

$$\left|\sum\right| = \psi_{Au}[1 + \cos\pi(h+k) + \cos\pi(k+l) + \cos\pi(l+h)]$$

für ungemischte Indizes $(h\,k\,l)$:

$$\left|\sum\right| = 4\psi_{Au},$$

für gemischte Indizes $(h\,k\,l)$:

$$\left|\sum\right| = 0.$$

Im entsprechenden Mischkristall mit statistischer Verteilung mit dem Molenbruch:

$$m = \frac{x}{x+y}\,\mathrm{Cu} \quad \text{bzw.} \quad \frac{y}{x+y}\,\mathrm{Au}$$

lautet der Strukturfaktor:

$$\left|\sum\right| = \left(\psi_{Cu}\cdot\frac{x}{x+y} + \psi_{Au}\frac{y}{x+y}\right)\cdot$$
$$\cdot\,[1 + \cos\pi(h+k) + \cos\pi(k+l) + \cos\pi(h+l)],$$

für ungemischte Indizes $(h\,k\,l)$:

$$\left|\sum\right| = 4\left(\psi_{Cu}\frac{x}{x+y} + \psi_{Au}\frac{y}{x+y}\right),$$

---

1) Abgesehen von den Fällen, wo bei verschiedenem Gittertypus der reinen Komponenten ein kristallographisch verschiedener Mischkristalltypus (in der Regel ein Zwischentypus) auftritt, wie z. B. im System Cu–Zn.

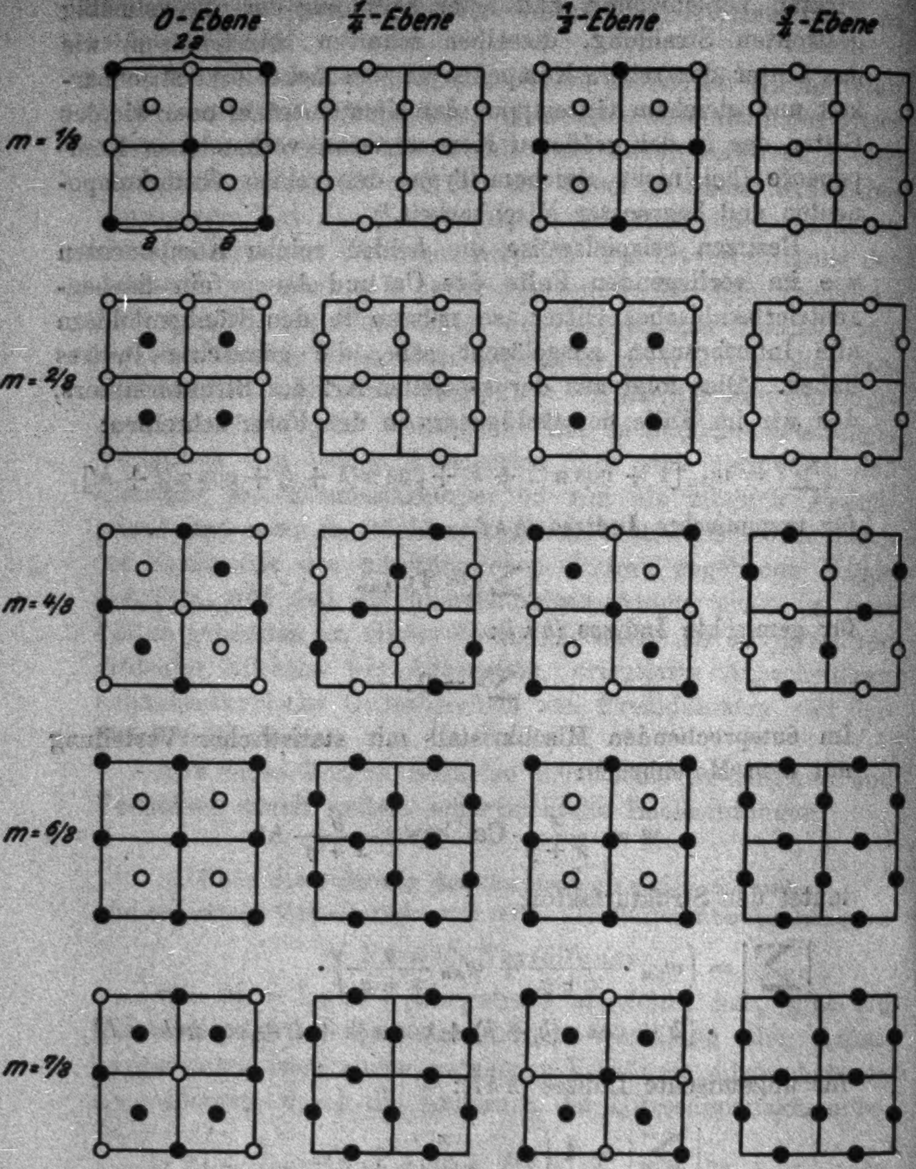


Fig. 8

für gemischte Indizes $(h\,k\,l)$:

$$\left|\sum\right| = 0 .$$

Es finden also dieselben Auslöschungen statt wie vorher.

Wenn der Mischkristall dagegen eine im Tammannschen Sinne normale Verteilung aufweist, wie etwa beim Molenbruch $^6/_8 = 0{,}750$ Cu, gemäß Figg. 3 u. 4, wo in jedem Elementarkörper des flächenzentrierten Goldgitters die sechs auf den Mitten der Würfelflächen liegenden Goldatome durch Cu ersetzt sind, so lautet der Strukturfaktor[1]):

$$|\sum| = \psi_{Au} + \psi_{Cu}\left[\cos\pi(h+k) + \cos\pi(k+l) + \cos\pi(h+l)\right],$$

für ungemischte Indizes $(h\,k\,l)$:

$$|\sum| = \psi_{Au} + 3\,\psi_{Cu},$$

für gemischte Indizes $(h\,k\,l)$:

$$|\sum| = \psi_{Au} - \psi_{Cu}.$$

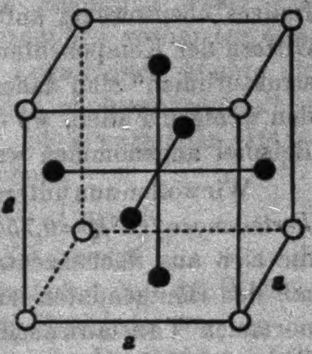


Fig. 4

Es treten danach auch die bisher *„ausgelöschten"* Interferenzen mit gemischten Indizes auf, mit einer Intensität, die dem Quadrate der Differenz des Beugungsvermögens von Cu und Au proportional ist (vgl. S. 967). Diese Interferenzen werden in der Literatur in wenig glücklicher Weise als „Überstrukturlinien"[2]) oder „Extramaxima" bezeichnet. In diesem Falle kann von einer „Überstruktur" doch nicht die Rede sein, da es sich einmal um eine normale Verteilung handelt, die nach Tammann ausdrücklich durch Ineinanderstellung von Teilgittern erhalten wird und da ferner die Kantenlänge des Elementarkörpers, also die Identitätsperiode parallel zur Würfelkante bei der Substitution nicht geändert wird. Der Ausdruck „Verbotene Linien" würde in diesem Falle den Sachverhalt vielleicht besser treffen. Faßt man die vorliegende Struktur aber als eine *intermetallische Verbindung* (der zweiten Art) auf (S. 959), so sind es auch die „Inter-

1) Vgl. C. H. Johansson und J. O. Linde, a. a. O. S. 448. Die Atombeugungsvermögen wurden hier den Ordnungszahlen Au = 79 und Cu = 29 proportional gesetzt.

2) L. Vegard und H. Schjelderup, Phys. Ztschr. 18. S. 93. 1917; C. H. Johansson und J. O. Linde, Ann. d. Phys. 78. S. 439. 1925; 82. S. 449. 1927.

ferenzen der chemischen Verbindung". Der Ausdruck „Überstrukturlinien" erscheint nur in den Fällen angebracht, bei denen eine Tammannsche normale Verteilung vorliegt und außerdem die Identitätsperiode parallel zur Würfelkante den doppelten oder einen mehrfachen Wert erhält, wie z. B. bei den Molenbrüchen $^1/_8 = 0{,}125$; $^4/_8 = 0{,}500$ und $^3/_8 = 0{,}375$ bzw. $^5/_8 = 0{,}625$ Cu gemäß Fig. 3. Wie auf S. 970 gezeigt wird, können aber bei diesen Gittern Interferenzen mit gemischten Indizes ebensowenig auftreten, wie bei den flächenzentrierten Gittern der Komponenten, aus denen sie sich aufbauen. „Überstrukturlinien" sind daher bei den Legierungen, abgesehen von den wenigen Fällen, wo eine normale Verteilung, wie im obigen Beispiel angenommen war, nicht zu erwarten.

Wir wollen nun untersuchen, wie die *Tammannschen normalen Verteilungen für $^6/_8 = 0{,}750$, $^5/_8 = 0{,}625$ und 0,500 Molenbruch Cu*, die sich aus flächenzentrierten-kubischen Teilgittern aufbauen, mit den Röntgendaten im Einklang sind. In der Fig. 3 sind die normalen Tammannschen Verteilungen im flächenzentrierten Gitter für die Molenbrüche $m = {}^1/_8 = 0{,}125$, $^2/_8 = 0{,}250$, $^3/_8 = 0{,}375$, $^4/_8 = 0{,}500$, $^5/_8 = 0{,}625$, $^6/_8 = 0{,}750$ u. $^7/_8 = 0{,}875$ Cu gezeichnet. Die Verteilungen außer denjenigen mit 0,375 und 0,625 Molenbruch lassen sich am einfachsten auf einen allseitig flächenzentrierten-kubischen Elementarkörper mit der Kantenlänge $a' = 2a$ beziehen (a = Kante des flächenzentrierten-kubischen Elementarkörpers der reinen Komponenten Cu oder Au). Die primitiven Translationen parallel zu den Richtungen der Würfelflächendiagonalen haben die Länge $a\sqrt{2}$ an Stelle des früheren Wertes $a/2\sqrt{2}$. Die Atomverteilung ist in der Fig. 3 in je vier aufeinanderfolgenden Ebenen parallel zur Würfelfläche mit dem Abstand $^1/_4\, a' = {}^1/_2\, a$ dargestellt. (Bezeichnet mit 0, $^1/_4$, $^1/_2$, $^3/_4$). Die Cu-Atome sind durch *volle*, die Au-Atome durch *leere* Kreise bezeichnet.[1])

α) Die normalen Verteilungen mit dem Molenbruch 0,250 und 0,750 Cu können, wie aus den Figg. 3 und 4 ersichtlich, auch

1) Über die Einzelheiten des Aufbaues der normalen Verteilungen, insbesondere die Besetzungen der Gittergeraden in verschiedenen Richtungen wird auf die Originalarbeit von G. Tammann verwiesen (a. a. O. S. 38 u. ff.).

auf ein einfach kubisches Gitter mit der Kantenlänge a bezogen werden, die Punktlagen sind dann für den Molenbruch:

0,750 Cu: Au: 0 0 0 Cu: $\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0$, $\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}$, $0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}$,
0,250 Cu: Cu: 0 0 0 Au: $\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0$, $\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}$, $0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}$.

Wir beschränken uns hier auf die Prüfung der normalen Verteilung mit dem Molenbruch 0,750 Cu. Die angegebene Struktur soll nach Johansson und Linde[1]) bei der getemperten und langsam abgekühlten Legierung dieser Zusammensetzung nach den Röntgendiagrammen vorhanden sein, auch bei den von uns untersuchten Legierungen konnte sie festgestellt werden (Vgl. Tab. 6). Zur röntgenographischen Prüfung wurden die Intensitäten der zu erwartenden Interferenzen nach folgender Formel berechnet:

$$i = i_0 \cdot H \cdot W \cdot \frac{1 + \cos^2 \vartheta}{\sin^2 \vartheta/2 \cdot \cos \vartheta/2} \left| \sum \right|^2 .$$ [2])

Dabei ist i_0 = Intensität der Primärstrahlung (mit der Wellenlänge λ), entsprechend der K_α- und K_β-Strahlung von Cu.

H = Häufigkeitsfaktor, entsprechend der Zahl gleichwertiger reflektierender Ebenen der kristallographischen Form $\{h\,k\,l\}$.

W = der Debyesche Wärmefaktor, der hier aber nicht berücksichtigt wird, da er einer genauen Rechnung bei Metallen zurzeit nicht zugänglich ist.

$$1 + \cos^2 \vartheta = \text{Polarisationsfaktor},$$
$$1 : \sin^2 \vartheta/2 \cos \vartheta/2 = \text{Lorenzfaktor}$$

für Debye-Scherreraufnahmen, welcher für $\vartheta = 109°$ ein Minimum besitzt.[3])

$$\left| \sum \right| = \sum_{1}^{s} \psi_i \, e^{2\pi i (x_i h + y_i k + z_i l)}$$

---

1) C. H. Johansson und J. O. Linde, a. a. O. S. 447.

2) Nach H. Mark, Die Verwendung der Röntgenstrahlen in Chemie und Technik, Leipzig, J. A. Barth 1926.

3) Zur Erleichterung der Berechnung wurde diese Funktion

$$P = \frac{1 + \cos^2 \vartheta}{\sin^2 \vartheta/2 \cos \vartheta/2}$$

als Funktion von ϑ aufgetragen und die Zwischenwerte mit genügender Genauigkeit graphisch interpoliert.

Tabelle 8

Interferenzen der normalen Tammannschen Verteilung mit 0,500 Molenbruch mit allseitig flächenz. Gitter und der intermetallischen tetragonalen Verbindung CuAu mit einfachem tetragonalen Gitter. [1])

Indizes	Zähligkeit d. Interferenzen	$i/i_{222\,\alpha}$ ber.	log sin $\vartheta/2$ ber. kub.	Nr. auf Film Nr. 106	Film Nr. 106 log sin $\vartheta/2$ gem.	Film Nr. 106 i beob.	$i/i_{111\,\alpha}$ ber. f. tetrag. Verb. CuAu	Indizes tetrag. f. Verb. CuAu	log sin $\vartheta/2$ ber. f. tetrag. Verb. CuAu
111 β	8	9,7	9·193	1	9·277	ss	7,15	001 β	9·284
111 α	8	24,7	·233	2, 3	·325	ms	17,4	001 α	·331
311 β	24	7,4	·471	4, 5, 6	·405	ss	8,0	110 β	·400
222 β	8	42,5	·490	7, 8	·446	m	19,0	110 α	·446
311 α	24	18,6	·517	10	·505	mst	45,0	111 β	·501
222 α	8	100,0	·536	11	·548	ststst	100,0	111 α	·547
400 β	6	22,2	·552	11 a		m	16,5	200 β	·552
313 β	24	4,08	·590	12	·575	ss	6,7	002 β	·587
400 α	6	46,2	·597	13	·597	stst	38,6	200 α	·596
313 α	24	9,3	·633	14	·628	st	15,5	002 α	·631
{ 333 β	8	3,3	·664	15	·655	m	11,8	201 α	·653
{ 511 β	24								
404 β	12	20,7	·701	16	·693	ss	7,2	220 β	·702
{ 333 α	8	8,1	·709	17	·705	ms	9,1	112 α	·707
{ 511 α	24								
513 β	48	3,7	·720	18	·718	s	13,4	202 β	·718
440 α	12	46,5	·746	19	·746	ms	16,9	220 α	·744
533 β	24	1,3	·764	20	·759	mst	31,0	202 α	·763
513 α	48	9,1	·766						
622 β	24	26,7	·770	21	·774	ms	20,0	311 β	·774
444 β	8	8,1	·788						
{ 515 β	24	2,42	·801	22	·795	ms	8,7	113 β	·800
{ 711 β	24								
533 α	24	3,56	·810						
622 α	24	67,5	·815	23	·817	stst	47,5	311 α	·819
{ 553 β	24	3,35	·833						
{ 713 β	48								
444 α	8	20,8	·835	24	·842	st	21,5	222 α	·847
{ 515 α	24	6,72	·846						
{ 711 α	24								
800 β	6	3,17	·850						
733 β	24	1,12	·861						
{ 535 α	24	10,5	·877	25	·880	ss	8,6	321 α [2])	·881
{ 731 α	48								
751 β	48	2,28	·886						
662 β	24	21,7	·888						
840 β	24	22,2	·899						

1) Berechnetes Verhältnis $i/i_{222\,\alpha}$ bei der Tammannschen Verteilung, bzw. $i/i_{111\,\alpha}$ bei der Verbindung CuAu nach Formel auf S. 967, wobei das Verhältnis der Intensität der K_β zur K_α-Strahlung wie 1 : 3 angenommen wurde.

2) Von 321 α an sind die gemischten Indizes nicht mehr aufgeführt wegen zu geringer Stärke der Interferenzen.

Tabelle 8 (Fortsetzung)

Indizes	Zähigkeit d. Interferenzen	$i/i_{222\,\alpha}$ ber.	log sin $\vartheta/2$ ber. kub.	Nr. auf Film Nr. 106	Film Nr. 106 log sin $\vartheta/2$ gem.	Film Nr. 106 i beob.	$i/i_{111\,\alpha}$ ber. f. tetrag. Verb. CuAu	Indizes tetrag. f. Verb. CuAu	log sin $\vartheta/2$ ber. f. tetrag. Verb. CuAu
800 α	6	21,7	9·897						
{ 753 β	48	8,7	·907	26	9·904	ms	6,7	420 β	9·900
{ 911 β	24								
733 α	24	8,7	·907	27	·919	ss	8,0	204 β	·923
931 β	48	2,88	·927	28	·924	ss	6,0	004 α	·930
751 α	48	9,15	·931						
662 α	24	8,85	·934	29	·933	ms	25,0	331 α	·939
844 β	24	31,6	·939	30	·942	st	27,5	420 α	·947
840 α	24	104,0	·944	31	·947	mst	18,6	422 β	·949
{ 771 β	24	1,8	·947						
{ 933 β	24	1,9							
735 α	48	sehr	·953	32	·954	mst	28,6	402 α	·952
911 α	24	schwach							
915 β	48	„	·962	33	·964	ss	25,2	511 β	·968
666 β	8	„	·966	34	·969	ss	12,4	224 β	·967
931 α	48		·973	35	·978	ms	42,0	204 α	·978

ist der bereits genannte Strukturfaktor einer Elementarzelle (Basis) mit s-Atomen, wo ψ_i das Beugungsvermögen der Atomart mit dem Index $x_i\, y_i\, z_i$ ihre Koordinaten sind. (Vgl. S. 967.)

In der Tab. 6 am Schluß ist der Vergleich an Hand der Röntgenaufnahmen durchgeführt. Die relative Intensität der Interferenzlinien stimmt mit den berechneten Werten annähernd überein, wenn man berücksichtigt, daß wegen der (blättchenförmigen) Gestalt der Proben und der hierdurch bedingten unregelmäßigen Absorption sowie Vernachlässigung der Wärmeschwingungen und der Abhängigkeit des Beugungsvermögens vom Streuwinkel eine quantitative Übereinstimmung naturgemäß nicht möglich ist.

β) Die von Tammann angenommene Verteilung mit den Molenbrüchen 0,375 ($^3/_8$) und 0,625 ($^5/_8$) würde nur dann eine Symmetrie innerhalb einer der kubischen Raumgruppen besitzen, wenn die Kantenlänge des zugeordneten Elementarkörpers mindestens achtmal so groß gewählt wird wie diejenige des Cu- bzw. Au-Gitterwürfels. Es würden dann aber wenigstens 4×8^3 Atome im Elementarkörper einer solchen normalen Verteilung enthalten sein, so daß seine Existenz

sehr unwahrscheinlich ist und hier nicht diskutiert werden soll. In den entsprechenden Röntgenbildern mit 0,625 und 0,600 Molenbruch Cu finden sich auch keine Andeutungen davon, vielmehr zeigten sich in den getemperten Proben (Film Nr. 170 und 172) die Linien der tetragonalen Verbindung Cu Au.

γ) *Die normale Verteilung mit dem Molenbruch 0,500* ($^4/_8$) *Cu bzw. Au* ist wieder einem allseitig flächenzentrierten-kubischen Elementarwürfel mit der Kantenlänge $a' = 2a$ zugeordnet, wie Fig. 3 zeigt. In den vier aufeinanderfolgenden Ebenen parallel zur Würfelfläche sind die diagonal verlaufenden Gittergeraden abwechselnd mit Atomen je einer Sorte besetzt, aber in jeder aufeinanderfolgenden Ebene zu der vorhergehenden um 90° verdreht. Dem Verhältnis $^4/_8$ Mol entsprechend ist das Atomverhältnis für jede Komponente 16 : 32.

Auf den flächenzentrierten Würfel bezogen, lauten die Koordinaten der Atome:

Cu:	$\frac{1}{2}\,0\,0$	$\frac{3}{4}\,0\,\frac{1}{4}$	$0\,0\,\frac{1}{2}$	$0\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}$
	$0\,\frac{1}{2}\,0$	$0\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}\,0\,\frac{3}{4}$
	$\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,0$	$\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}$
	$\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,0$	$\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}$
Au:	$0\,0\,0$	$0\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}\,0\,\frac{3}{4}$
	$\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,0$	$\frac{1}{4}\,0\,\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}$
	$\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,0$	$\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}$	$0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}$
	$\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}\,0$	$\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}$	$0\,\frac{3}{4}\,\frac{3}{4}$.

Für ungemischte Indizes ergibt sich der Strukturfaktor:

α) Wenn alle Indizes ($h\,k\,l$) gerade und durch 4 teilbar sind:

$$\left|\sum\right| = 16\,(\psi_{Au} + \psi_{Cu}),$$

β) wenn alle Indizes ($h\,k\,l$) gerade und *nicht* durch 4 teilbar sind:

$$\left|\sum\right| = 16\,(\psi_{Au} + \psi_{Cu}),$$

γ) wenn alle Indizes ($h\,k\,l$) gerade, aber nicht alle durch 4 teilbar sind:

$$\left|\sum\right| = 0,$$

δ) wenn alle Indizes $(h\,k\,l)$ ungerade sind, ist

$$|\Sigma| = 8\,(\psi_{Au} - \psi_{Cu})\,.$$

Für gemischte Indizes ergibt sich der Strukturfaktor:

$$|\Sigma| = 0\,.$$

Es treten demnach keine Interferenzen mit gemischten Indizes auf.

In der Tab. 8 sind die für die normale kubische Verteilung nach Tammann zu erwartenden Interferenzen und ihre berechneten Intensitäten wiederum nach wachsenden Glanzwinkeln $\vartheta/2$ geordnet zusammengestellt. Der Vergleich mit der getemperten und mäßig abgekühlten Legierung (Film Nr. 106) dieser Zusammensetzung zeigt, daß die berechneten log sin $\vartheta/2$-Werte der Interferenzlinien nicht mit den beobachteten übereinstimmen (Spalten 4 u. 6), auch der Intensitätsverlauf ist stark abweichend. Z. B. ist für $311\,\alpha$ berechnet: $i/i_{222\alpha} = 18{,}6$, für $222\,\beta$: $i/i_{222\alpha} = 42{,}5$, während die beobachteten Interferenzen, die man allenfalls damit identifizieren könnte, gerade ein umgekehrtes Verhalten zeigen. Ebenso wäre zu erwarten, daß die Linie $440\,\alpha$ mit $i/i_{222\alpha} = 46{,}5$ sehr intensiv erscheint, auf dem Film ist sie nur mittel-schwach (ms), die Linie $533\,\beta$ mit der berechneten sehr kleinen Intensität $i/i_{222\alpha} = 1{,}3$ dagegen ist mittel-stark (mst) vertreten. Aus diesen und vielen anderen Beispielen darf der Schluß gezogen werden, daß die Tammannsche normale Verteilung für $^4/_8 = 0{,}500$ Molenbruch hier *nicht* auftritt. Dagegen stimmen die im Film beobachteten Interferenzen sowohl in der Lage wie in der relativen Intensität gut mit den für die intermetallische tetragonale Verbindung CuAu berechneten Werten überein. (Vgl. Spalten 6—10 der Tab. 8, sowie auch Tab. 4 und S. 973).

B. Abnorme Verteilungen

Für den Molenbruch 0,500 ($^4/_8$) Cu bzw. Au kann man mit Tammann auch gut durchgemischte Verteilungen aufstellen, deren Symmetrie nicht mehr kubisch ist. Während es nur eine einzige kubische normale Verteilung mit diesem Molenbruch als absolut stabile Phase gibt, ist die Zahl der ab-

normen Verteilungen größer entsprechend der Erniedrigung der Symmetrie und Verzerrung in das hexagonale, tetragonale, rhomboedrische, rhombische, monokline und trikline Kristallsystem. In den Figg. 5 u. 6 sind hier nur die Verteilungen mit *tetragonaler* und *hexagonaler* (bzw. *rhomboedrischer*) Symmetrie gezeichnet.

α) Die tetragonale Verteilung läßt sich auf einen basisflächenzentrierten tetragonalen Elementarkörper mit der Kanten-

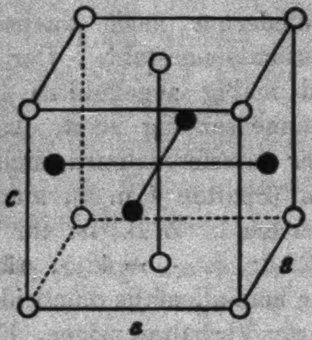


Fig. 5

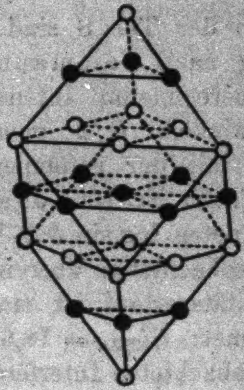


Fig. 6

länge *a* oder einen einfach-tetragonalen Elementarkörper mit der Kantenlänge $a/\sqrt{2}$ beziehen, im letzteren Falle verlaufen die Kanten in den Diagonalrichtungen (unter 45° zu den Würfelkanten). Diese abnorme Verteilung wird erhalten, wenn im allseitig flächenzentrierten-kubischen Elementarwürfel von Au, die auf den Mitten der vertikalen Würfelflächen liegenden Atome durch Cu ersetzt werden. Es wechseln dann parallel zur Basisfläche (001) Schichten von Goldatomen mit Schichten von Cu-Atomen ab, parallel zu den anderen Würfelflächen (100) und (010) finden sich dagegen in aufeinanderfolgenden Ebenen gleichzeitig beide Atomarten. Durch diese einseitige Bevorzugung einer Richtung (*c*-Achse) wird das kubische Gitter ins tetragonale deformiert. Diese Struktur ist von Johansson und Linde ebenfalls bereits diskutiert worden. Der Strukturfaktor lautet:

$$|\sum| = \psi_{Au}[1 + \cos\pi(h+k)] + \psi_{Cu}[\cos\pi(h+l) + \cos\pi(k+l)].$$

a) für ungemischte Indizes:

$$|\sum| = 2\,(\psi_{Au} + \psi_{Cu}),$$

b) für gemischte Indizes:

$$|\sum| = 2\,(\psi_{Au} - \psi_{Cu}),$$

wenn die Indizessumme $h + k$ gerade ist,

$$|\sum| = 0,$$

wenn die Indizessumme $h + k$ ungerade ist.

Es treten danach infolge des Ersatzes der Hälfte der Au-Atome durch Cu-Atome auch gewisse verbotene Interferenzen mit gemischten Indizes (Überstrukturlinien) auf, mit einer Intensität proportional dem Quadrate der Differenz der Beugungsvermögen von Cu und Au (nach S. 967). In den Tab. 4, 5 und 8 sind die zu erwartenden Interferenzen nach steigenden Glanzwinkeln geordnet und ihre berechneten Intensitäten vermerkt. Nach Johansson und Linde sollte diese Struktur in den Diagrammen ihrer getemperten und langsam abgekühlten Legierungen mit 0,500 Molenbruch Cu auftreten. Auch bei unseren Legierungen wurde diese Kristallart beobachtet, wie der Vergleich mit den Tabellen lehrt.

β) Eine zweite abnorme Verteilung mit dem Molenbruch 0,500 Cu bzw. Au mit rhomboedrischer Symmetrie ist in Fig. 6 gezeichnet. Sie ergibt sich, wenn im flächenzentrierten Würfelgitter mit 32 Atomen, welches durch Verdoppelung der Würfelkante a erhalten wird, eine Ebenenschar parallel zur Oktaederfläche abwechselnd nur mit Gold oder Kupferatomen besetzt wird. Am einfachsten wird die Struktur auf ein Rhomboeder mit dem Polkantenwinkel von 60° und der Kantenlänge $a' = a\sqrt{2}$ bezogen, dieses Rhomboeder enthält vier Atome Au und vier Atome Cu und stellt sozusagen eine stark rhomboedrisch verzerrte Steinsalzstruktur dar. Die aufeinanderfolgenden Schichten parallel zur Basisfläche des Rhomboeders mit den Abständen: $\frac{1}{6}c' = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$ sind angegeben. Das Achsenverhältnis würde unter Voraussetzung, daß keine Deformationen des Würfels von der Kantenlänge $2a$ eintritt, den Wert:

$$c'' : a'' = a\sqrt{3} : a\sqrt{2} = \sqrt{\tfrac{3}{2}}$$

haben, der Polkantenwinkel des Rhomboeders würde genau 60° sein. Die Rhomboederkante ist $a_0' = a\sqrt{2}$. In Wirklichkeit wird wieder, wie im vorigen Falle, eine Deformation des Würfels in Richtung der ausgezeichneten trigonalen Achse eintreten. Der Strukturfaktor, bezogen auf die rhomboedrischen Achsen mit der Kantenlänge, lautet:

$$|\sum| = \psi_{Au}[1 + \cos\pi(h+k) + \cos\pi(k+l) + \cos\pi(l+h)] + \psi_{Cu}[\cos\pi h + \cos\pi k + \cos\pi l + \cos\pi(h+k+l)].$$

a) Für ungemischte Indizes:

$$|\sum| = 4(\psi_{Au} + \psi_{Cu}),$$

wenn alle Indizes gerade

$$|\sum| = 4(\psi_{Au} - \psi_{Cu}),$$

wenn alle Indizes ungerade,

b) für gemischte Indizes:

$$|\sum| = 0.$$

Diese abnorme Verteilung wurde jedoch nicht in den Filmen beobachtet.

C. Von Tammann nicht berücksichtigte Verteilungen

Auch für andere Molenbrüche lassen sich abnorme Verteilungen mit Erniedrigung der Symmetrie aus dem kubischen in ein anderes Kristallsystem aufstellen, worauf hier jedoch nicht näher eingegangen werden kann.

Berücksichtigt man, daß in der Symmetrie des Feinbaues auch Symmetrieelemente mit zusätzlichen Translationen: Schraubenachsen und Gleitspiegelebenen neben den reinen Drehungsachsen und Spiegelebenen auftreten, so würden noch eine Zahl weiterer Verteilungen bei geometrischer Betrachtung möglich sein, bei Beschränkung durch das Prinzip der möglichst gleichmäßigen Durchmischung ergeben sich aber auch so keine neuen normalen Verteilungen. Die Verhältnisse entsprechen durchaus denen, wie sie zwischen der Symmetrie einer

Kristallklasse und derjenigen der zugeordneten Raumgruppen bestehen. Danach sind die verschiedenen Molenbrüche nur in gewissen kubischen Raumgruppen möglich was hier nicht näher erörtert werden soll.

D. Zusammenfassendes Ergebnis der Röntgenbeobachtungen

Die im System Cu–Au von Tammann vorausgesagten normalen (kubischen) Verteilungen mit den Molenbrüchen 0,375 (3/8), 0,500 (4/8) und 0,625 (5/8) Cu werden durch die Röntgenuntersuchung nicht bestätigt. Das Röntgenbild für die getemperte und langsam gekühlte Legierung mit dem Molenbruch 0,750 (6/8) Cu von Johansson und Linde ist zwar mit der normalen Verteilung nicht im Widerspruch, kann aber ebensogut der gleichgebauten intermetallischen Verbindung Cu_3Au angehören, die von Kurnakow, Zemczuzny und Zasetabelew thermisch und elektrisch nachgewiesen ist.[1][2])

Von den abnormen Verteilungen (vgl. S. 971), die mit einer Herabsetzung der Gittersymmetrie und Verzerrung des Elementarkörpers verknüpft sind, ist, wie bereits erwähnt, die tetragonale mit dem Molenbruch 0,500 (4/8) Cu bzw. Au mit

---

1) Von L. Sterner-Rainer, Ztschr. f. Metallkde. 17. S. 162. 1925, ist diese Verbindung in dem ternären System Ag–Au–Cu nachgewiesen worden. Es wurde nachträglich versucht, die röntgenographisch festgestellten Mischkristalle und intermetallischen Verbindungen, welche in der Tab. 7 verzeichnet sind, auch mikroskopisch zu identifizieren. Leider erwiesen sich die zu den Röntgenuntersuchungen benutzten kleinen Probestreifchen, welche dazu benutzt werden mußten, recht wenig geeignet, da sie stark verkrümmt waren und keine einwandfreien Schliffe erzielt werden konnten. Trotz sorgfältigen Ätzens mit Königswasser (nach Sterner-Rainer a. a. O.) und Anwendung verschieden starker Vergrößerung konnten eindeutige Schlüsse bisher nicht gezogen werden.

2) In einer während des Druckes dieser Arbeit erschienenen Veröffentlichung (Ztschr. f. Krist. 67. S. 440. 1928) wurde von F. Halla und E. Strausser durch Röntgenaufnahmen von Pb–Tl–Legierungen (Einkristallen) mit kubisch-flächenzentrierten Gittern und durch strukturtheoretische Betrachtungen der Nachweis geführt, daß die getemperten Mischkristalle mit dem Molenbruch 0,333 Pb (entsprechend der Zusammensetzung $PbTl_2$) und 0,400 Pb (entsprechend Pb_2Tl_3) mit größter Wahrscheinlichkeit *keine normale* Verteilung im Tammannschen Sinne darstellen, sondern rein statistische Verteilung haben. Auch chemische Verbindungen können es nicht sein.

den Röntgenogrammen von Johansson und Linde, sowie mit den unsrigen verträglich. Abgesehen davon, daß diese Atomanordnung vom feinbaulichen Standpunkt aus von der intermetallischen Verbindung CuAu der ersten Art nicht unterschieden werden kann, ist ihr Vorhandensein nach der Tammannschen Auffassung nicht gut erklärlich. Die Definition der abnormen Verteilungen schließt die Forderung in sich, daß sie bei genügend hoher Temperatur unter Änderung des Gitters in die normale kubische Verteilung als die einzig stabile Phase übergehen. Es wird aber diese Phase trotz des langen Temperns dicht unterhalb des Schmelzpunktes nicht nachgewiesen, so daß die gefundene Kristallphase jedenfalls viel stabiler ist, als es einer abnormen Verteilung entspricht.

Für die Auffassung, daß es sich bei den neuen Kristallphasen mit großer Wahrscheinlichkeit um intermetallische Verbindungen CuAu und Cu_3Au handelt, können auch wichtige physikalisch-chemische Gründe erbracht werden. Nach Tammann sollte sich für jeden Molenbruch als absolut stabile Phase eine einzige geordnete Verteilung gerade bei langem Tempern einer primär als Mischkristall erhaltenen Legierung bei Temperaturen, wo Platzwechsel stattfindet, bilden, evtl. auch bei sehr langsamer Abkühlung der primären Mischkristalle bei der Kristallisation aus der Schmelze. Im Gegensatz hierzu fanden jedoch die russischen Autoren, daß es zur Bildung der neuen durch ihre thermischen und elektrischen Eigenschaften im Konzentrationsdiagramm gekennzeichneten Legierungen nötig ist, die Proben bei der Abkühlung sehr langsam durch ein ganz bestimmtes Temperaturintervall (etwas unterhalb 400°) hindurchzuführen. Die röntgenographischen Versuche von Johansson und Linde sowie unsere eigenen bestätigen diese Feststellung. Einen direkten Nachweis für die Bildung dieser ausgezeichneten Kristallphasen nicht durch langes Tempern dicht unterhalb des Schmelzpunktes, sondern durch das Einhalten bestimmter viel tieferer Temperaturen bei der Abkühlung erblicken Johansson und Linde in folgendem Versuch: Einige getemperte und langsam in dem genannten Temperaturbereich abgekühlte Legierungen mit den Molenbrüchen 0,75, 0,78 und 0,55 Cu, welche im Röntgenbild die ausgezeichnete

Kristallphase anzeigten, wiesen nach nochmaligem Erhitzen auf 400 bzw. 420° und plötzlichem Abschrecken keine Spur mehr davon auf.

Nach dem obigen ist es verständlich, daß die Bildung der intermetallischen Verbindungen bei einer gegebenen Konzentration (bei gegebenem Druck) an bestimmte Reaktions(Umwandlungs)-Temperaturen gebunden ist und auch mit einer durch die äußeren Bedingungen gegebenen Reaktionsgeschwindigkeit vor sich geht. Es ist zu erwarten, daß je nach den Bedingungen der Abkühlung die Einstellung der wahren Gleichgewichte nur mehr oder minder vollkommen erreicht wird. Damit steht in Einklang, daß die Versuche jeweils bei verschiedenen Konzentrationen und verschiedener Art der Vorbehandlung eine verschiedene Menge strukturell und chemisch unterschiedlicher Kristallphasen ergeben haben. Sogar bei verhältnismäßig rascher Kühlung ist eine gewisse Menge der intermetallischen Verbindungen entstanden, wie die Filme Nr. 220, 207, 252 zeigen. Es ist auch zu bedenken, daß nach den Erfahrungen mit anderen metallischen Systemen manche dieser gebildeten Verbindungen metastabil erhalten bleiben können, besonders beim Abschrecken.[1])

---

1) Während des Druckes dieser Arbeit erschien eine Veröffentlichung über die Gitterstrukturumwandlung in metallischen Mischkristallen (Ann. d. Phys. **86**. S. 291. 1928) von G. Borelius, C. H. Johansson und J. O. Linde, in welcher die „Umwandlungen" im Temperaturgebiet von etwa 400° C bei 0,500 und 0,750 Molenbruch Cu mit Hilfe der Widerstandskurven im elektrischen Ofen festgestellt wurden. Im Gegensatz zu ihrer früheren Auffassung deuten die Autoren ihren Befund dahin, daß die ungeordnete statistische Mischkristallphase kontinuierlich und einphasig in die geordnete Gitterstruktur übergeht. Dabei soll im höheren Temperaturgebiet die ungeordnete Verteilung stabil sein, in einem niederen die „geordnete" Verteilung, im Gegensatz zu der Tammannschen Annahme. Die Übergänge werden thermodynamisch als Verschiebung eines homogenen Gleichgewichtes klassifiziert. Es erscheint nicht klar, was eigentlich unter dieser geordneten Verteilung zu verstehen ist, eine normale Verteilung im Tammannschen Sinne kann sie nicht sein, eine chemische Verbindung auch nicht, da der Mischkristall einphasig in diese übergehen soll. In unseren Röntgendiagrammen wurden tatsächlich in einigen Fällen wenigstens zwei Phasen aufgefunden. Auch die starken Hystereseerscheinungen bei diesen „Umwandlungen" deuten auf komplizierte Verhältnisse hin.

Für diese Auffassung bilden die Untersuchungen im System Sn—Bi und Sn—Cd von Le Blanc, Naumann und Tschesno[1]) wertvolle Hinweise. Die Verfasser zeigen, daß das Zusammenfallen der Erhitzungs- und Abkühlungskurven noch keine ausreichende Gewähr für das Vorhandensein stabiler Gleichgewichte gibt. Als Kriterium für die erfolgte Gleichgewichtseinstellung ergab sich vielmehr nur das völlige Zusammenfallen der Leitfähigkeitskurven bei sehr langsamer Erhitzung und Abkühlung.

Es ist deshalb auch nicht verwunderlich, daß im System Cu—Au die Befunde von Johansson und Linde und die unseren voneinander abweichen, da es sich in beiden Fällen nicht um Gleichgewichte, sondern um zufällige, undefinierte Einstellungen handelt. Dies gilt insbesondere auch für das Gebiet mit dem Molenbruch $^6/_8 = 0{,}750$ Cu, wo außer der von Johansson und Linde festgestellten Verbindung Cu_3Au nach unseren Beobachtungen wenigstens noch ein davon verschiedener Typus auftritt. Ähnliche Überlegungen gelten auch für die Versuche anderer Autoren mit Au—Cu-Legierungen.[2])

Auch beiderseits der Konzentrationen, welche in einfachen stöchiometrischen Verhältnissen stehen und den Verbindungen CuAu und Cu_3Au entsprechen, ist durch die Röntgenbilder, wie bereits auf S. 955 erörtert, das Vorhandensein dieser chemischen Verbindungen festgestellt, und somit das von den russischen Autoren auf anderem Wege gefundene Zustandsdiagramm in gewissem Sinne bestätigt worden.

Dabei nimmt die Menge der Verbindungen in dem Maße ab, wie sich die Konzentration von den Molenbrüchen 0,500 ($^4/_8$) und 0,750 ($^6/_8$) entfernt. In den Fällen, wo bei einer be-

---

1) M. Le Blanc, M. Naumann und D. Tschesno, Ber. der Sächs. Akademie der Wiss., Math.-phys. Klasse 79. S. 71. 1927.

2) Es sei bemerkt, daß nach den bisherigen Erfahrungen die thermische, mikrographische und röntgenographische Untersuchung einerseits, die elektrische und magnetische Untersuchung andererseits nicht immer zu gleichem Ergebnis führen (vgl. Le Blanc, Naumann und Tschesno S. 36). Im ersten Falle beobachten wir die tatsächliche Konstellation der Atomzentren und ihre Änderungen, im zweiten Falle wohl im wesentlichen Änderungen der Elektronenbahnen und Umorientierungen innerhalb der Atome.

stimmten Konzentration nur eine einzelne kristallisierte Phase beobachtet wird, handelt es sich wahrscheinlich um Mischkristalle, denen das Gitter der betreffenden chemischen Verbindung zugrunde liegt, oder ein Teil des Cu statistisch durch Au ersetzt wird, womit eine Änderung der Gitterdimensionen und des Achsenverhältnisses verbunden ist. Die Abnahme des Achsenverhältnisses auf beiden Seiten der Konzentration mit 0,750 und 0,500 Molenbruch Cu würde dann darauf beruhen, daß mit fortschreitendem Ersatz der Cu-Atome durch regellos verteilte Au-Atome die Struktur mehr und mehr sich derjenigen der kubischen Mischkristalle mit vollkommen statistischer Verteilung annähert. In ähnlicher Weise ist wohl auch die im Röntgenbild festgestellte Annäherung an das kubisch-flächenzentrierte Goldgitter durch den Abbau der orientierten Cu-Atome beim Auflösen durch Salpetersäure zu erklären (vgl. S. 950).

7. Beziehungen zwischen den Resistenzgrenzen und dem Feinbau der Cu–Au-Legierungen unter Berücksichtigung neuer wichtiger Gesichtspunkte

Unsere Versuche haben ergeben, daß aus den getemperten Legierungen beim Molenbruch $^5/_8 = 0{,}625$ Cu alles Cu durch konzentrierte Salpetersäure (spez. Gew. 1,4) bei 22° herausgelöst wird, während beim Molenbruch 0,600 Cu nach Herauslösung einer kleinen Cu-Menge ein weiterer Angriff nicht mehr erfolgt. Nach Tammann soll die Resistenz erst bei dem Molenbruch 0,500 eintreten. Seine Ansicht geht dahin, daß in der normalen Verteilung für $^5/_8$ Mol. Cu, in welcher auf den abwechselnden Seitendiagonalen der Würfelebenen jedes vierte Goldatom durch ein Cu-Atom ersetzt ist, durch die Salpetersäure alle Cu-Atome einer solchen Würfelebene entfernt werden. Die aufeinanderfolgenden Au-Atome können sich auf ihren Plätzen nicht mehr halten, so daß die Einwirkung in gleicher Weise auf die folgende parallele Netzebene beginnt, wodurch allmählich das ganze Kristallgitter abgebaut wird. In der Verteilung $^4/_8 = 0{,}500$ Molenbruch Cu sind dagegen abwechselnde Seitendiagonalen der Würfelebenen nur mit Gold- oder nur mit Kupferatomen besetzt. Wenn

nach der Entfernung der Cu-Geraden in der Oberfläche die Goldfäden ihre Plätze behalten, so werden die Säuremoleküle nach Tammanns Ansicht verhindert, auf die in den darunter gelegenen Schichten befindlichen Cu-Atome einzuwirken. Diese Mischkristalle erscheinen deshalb resistent, da die Entfernung der Cu-Atome in einer einzigen Atomschicht analytisch nicht nachgewiesen werden kann. Noch mehr gilt dies für die edleren Legierungen.

Zwischen 0,625 ($^5/_8$) und 0,500 ($^4/_8$) Molenbruch soll eine Herauslösung des Cu proportional seinem ansteigenden Gehalt erfolgen. Damit in Widerspruch stehen unsere Auflösungsversuche, wie schon auf S. 934 betont wurde.

Die Tammannsche Vorstellung wird somit weder durch die Auflösungs- noch durch die röntgenographischen Versuche bestätigt. Es erhebt sich die Frage, wie die tatsächlich doch beobachteten Resistenzgrenzen nun zu erklären sind.

Prüfen wir zunächst, inwieweit die auftretenden *intermetallischen Verbindungen*, insbesondere CuAu (mit dem Molenbruch 0,500 Cu) mit den beobachteten Resistenzgrenzen zusammenhängen, so ergibt sich *kein* klares Bild.

Nach der Tab. 1 sind die Legierungen mit dem Molenbruch 0,500 Cu in Salpetersäure (spez. Gewicht = 1,4; $t = 22^\circ$) beide nahezu unangreifbar, trotzdem die erste *nicht* getemperte Legierung (Film Nr. 107) im wesentlichen aus *Mischkristallen* mit statistischer Verteilung (ev. plus einer gewissen Menge der Verbindung CuAu), die letztere getemperte und langsam abgekühlte Legierung (Film Nr. 106) fast völlig aus der reinen *Verbindung CuAu* besteht. Ferner stellen nach Tab. 2 sowohl die nicht getemperte Legierung (A) mit dem Molenbruch 0,600 Cu (Film Nr. 280) wie die entsprechende getemperte und rasch abgeschreckte Legierung (B) (Film Nr. 170) fast die reine *Mischkristallphase* mit statistischer Verteilung dar, und trotzdem ist die erstere sehr stark angreifbar, die letztere nur sehr wenig. Auch zeigt sich, daß die getemperte und langsam gekühlte Legierung (C) mit dem Molenbruch 0,600 Cu (Film Nr. 172) und die entsprechend zusammengesetzte abgeschreckte Legierung (B) fast die gleiche *geringe* Löslichkeit besitzen, obgleich die erstgenannte hauptsächlich aus der *Verbindung*

CuAu besteht, die letztgenannte aus der statistischen *Mischkristallphase*. Ein Einfluß der Abkühlungsgeschwindigkeit auf die chemische Angreifbarkeit dieser Legierungen, der sich im Auftreten verschiedener Phasen äußert, ist danach, wie bereits erwähnt, nicht nachweisbar.

Die Tab. 7 läßt ferner erkennen, wie die Korngröße, die sich aus den Röntgendiagrammen abschätzen läßt, die chemische Angreifbarkeit beeinflußt. Die gewalzte und nicht getemperte, feinkörnige Legierung (A) ist *sehr stark*, die entsprechend zusammengesetzte getemperte und grobkörnig gewordene Legierung (B) dagegen nur sehr wenig angreifbar, trotzdem beide Legierungen aus der statistischen Mischkristallphase bestehen. Danach erhöht offenbar das feine Korn die chemische Angreifbarkeit wesentlich bei Legierungen, die an der Grenze der Angreifbarkeit stehen. Dabei ist jedoch zu berücksichtigen, daß auch durch das Walzen und die damit verbundene Gitterstörung bzw. Atomdeformationen eine größere Angreifbarkeit hervorgerufen werden kann. Die an sich schon recht edlen Legierungen mit dem Molenbruch 0,500 lassen einen solchen Unterschied nicht mehr erkennen, denn sowohl die feinkörnige nicht getemperte Legierung (Mischkristalle), (Film Nr. 107) wie die beim Tempern grobkörnig gewordene entsprechende Legierung (Verbindung CuAu, Film Nr. 106) zeigen beide die gleiche geringe Löslichkeit (vgl. Tab. 1).

Bei dem Molenbruch 0,500 herrscht die Verbindung CuAu bei den getemperten Legierungen vor, bei dem Molenbruch 0,625 ist nach dem Zustandsdiagramm dagegen schon das Auftreten der Verbindung Cu_3Au in merkbarer Weise anzunehmen. Wenn nun die mehr oder weniger große chemische Angreifbarkeit mit dem Auftreten bzw. Verschwinden gewisser Verbindungen zusammenhinge, so könnte man der Verbindung CuAu eine Schutzwirkung zuweisen, worauf noch später eingegangen wird. Durch stärkeres Auftreten der unedlen Verbindung Cu_3Au und damit verbundenes Zurücktreten von CuAu wird diese Schutzwirkung in beschleunigtem Maße aufgehoben.

Allerdings darf bei derartigen Überlegungen nicht außer acht gelassen werden, daß die Löslichkeit nicht nur von der

Natur des Kristallgitters, sondern in fast demselben Maße auch von der *Art* und *Konzentration des Lösungsmittels* und von den *physikalisch-chemischen Faktoren*, besonders von der *Temperatur*, abhängt. In der Tat zeigen unsere Versuche, daß eine höhere Säurekonzentration die Resistenzgrenze nach der *kupferärmeren* Seite des Systems Cu–Au hin verschiebt, und daß der beobachtete an sich geringe Unterschied zwischen den getemperten und ungetemperten Legierungen bei Benutzung konzentrierterer Säure noch weiter vermindert wird. In ähnlicher Weise wirkt sich die Erhöhung der Lösungstemperatur auf 55° aus.

Wie kompliziert die Verhältnisse bei der Auflösung schon in diesem einfachen Beispiel liegen, zeigt auch der beobachtete Zerfall aller untersuchten getemperten Legierungen in ein feinkristallines Gemenge von verschiedenem Dispersitätsgrad und die Tatsache, daß trotz der dadurch gebildeten großen Oberfläche die abgegebenen Cu-Mengen relativ klein bleiben (vgl. S. 935).

Auf Grund dieser Tatsachen muß die Existenz einer „absoluten" Resistenzgrenze im System Cu–Au, und wohl auch ganz allgemein, im ursprünglichen Tammannschen Sinne abgelehnt werden. Da ferner erfahrungsgemäß infolge der physikalisch-chemischen Anisotropie der Kristalle die Löslichkeit (bzw. die Lösungsgeschwindigkeit) keine skalare Größe ist, sondern gesetzmäßig mit der Richtung des Angriffs wechselt, so muß das Gleiche auch für die Grenze der Angreifbarkeit gelten (worauf übrigens auch bereits Tammann hingewiesen hat).

Besonders anschaulich kann man dies Verhalten aus der Struktur der tetragonalen Verbindung CuAu erkennen. Nimmt man mit Tammann an, daß der kristallographisch-chemische Abbau im idealen Falle, d. h. bei Abwesenheit aller Fehlstellen, sich nur von der jeweiligen Kristalloberfläche aus vollzieht, so wäre eine Schutzwirkung (Resistenzgrenze) zu erwarten, wenn der Säureangriff in Richtung der tetragonalen Achse erfolgt. Nach der Fig. 5 wechseln nämlich hier parallel zur Basisfläche (0 0 1) Gold- und Kupferschichten miteinander ab, so daß die darüberliegende Goldschicht die darunterliegenden

Cu-Schichten zu schützen vermag. In allen anderen Richtungen, speziell senkrecht zur tetragonalen Achse treffen die Säuremoleküle auf Netzebenen, welche stets beide Arten von Atomen enthalten und somit einen weiteren Abbau bis zur völligen Auflösung ermöglichen. Derartige Kristalle werden sich darnach gegenüber dem Lösungsmittel nur dann resistent erweisen, wenn sie mit der tetragonalen Basisfläche parallel zur Oberfläche liegen und die Seitenflächen durch andere Kristalle geschützt werden. Ist dies von vornherein nicht der Fall, so ist zu vermuten, daß in Analogie zu dem beim Ätzen beobachteten Verhalten metallischer Kristalle und den sonstigen mineralogischen Erfahrungen bei der Auflösung sich allmählich die resistenten Flächen herausbilden und gegebenenfalls eine weitere Auflösung verhindern können (vgl. S. 987).

Von einer allgemeinen Resistenzgrenzentheorie kann nicht die Rede sein, da der von Tammann geforderten Eindeutigkeit eine Vielheit der Erscheinung gegenübersteht. Während nämlich für jeden einfachen Molenbruch im Sinne Tammanns nur eine *einzige* normale Verteilung als absolut stabile Phase existieren und die Schutzwirkung verursachen soll, sind in einem gegebenen System zweier oder mehrerer metallischer Komponenten an sich beliebig viele intermetallische Verbindungen von vornherein denkbar. Von diesen können die einen nach ihrer Struktur eine relative Schutzwirkung ausüben, die anderen nicht, wie z. B. im System Cu—Au die Verbindungen CuAu gegenüber Cu_3Au. Wahrscheinlich wird sich diese Vielheit der Möglichkeiten praktisch einschränken lassen, nachdem die Röntgenuntersuchung gewisse Typen von intermetallischen Verbindungen als in den verschiedensten Systemen immer wiederkehrende stabile Bautypen aufgedeckt hat, doch bedarf diese Feststellung im gegebenen Falle einer besonderen Untersuchung, während dies nach der Tammannschen Vorstellung ein für allemal festgelegt ist.

Neben der möglichen Erklärung der Resistenzgrenzen durch das Auftreten gewisser Verbindungen müssen noch andere Erklärungen vorhanden sein, da wir auch bei den nicht getemperten Legierungen und damit bei den Mischkristallen mit statistischer Verteilung scharfe Resistenzgrenzen gefunden haben.

Tammann hat gezeigt, daß mit einiger Wahrscheinlichkeit schon in einem amorphen Stoff mit räumlich völlig regelloser Anordnung der Atome (bzw. Moleküle) und völlig regellosem gegenseitigen Ersatz der beiden Atomarten eine gewisse Schutzwirkung der unedlen Komponente durch die edle eintritt. Die Schutzwirkung ist naturgemäß bei kleinen Konzentrationen der unedlen Komponente besonders groß, führt aber zu keiner scharfen und überdies erheblich verschobenen Resistenzgrenze. In erhöhtem Maße ist die Schutzwirkung bei einem Kristallgitter zu erwarten, wo die räumliche Unordnung beseitigt und nur noch die materielle Ersetzung beider Atomarten nach Zufall vorhanden ist. In der Tat haben Berechnungen und Modellversuche von Masing[1]) und besonders von Borelius[2]) ergeben, daß auch in Mischkristallen mit statistischer Verteilung der Atomarten unter gewissen Bedingungen eine scharfe Resistenzgrenze auftreten kann.[3])

Dabei ist jedoch nicht berücksichtigt, daß ihre Lage von dem speziellen Mechanismus der chemischen Reaktion bei der Einwirkung des Lösungsmittels abhängig sein wird.

Nach van Liempt befinden sich bei der betrachteten statistischen Verteilung die einander ersetzenden Atome in einem Zustande der *Deformation*, da sie nicht in regelmäßiger Weise von anderen Atomen umgeben sind und da sich auch ihre Kraftfelder aneinander anpassen müssen, was sich oft durch optische und elektrische Anomalien kennzeichnet. (Vgl. Lit. Anm. 3.) Die

---

1) G. Masing, Ztschr. f. anorg. u. allg. Chem. 118. S. 293. 1921; Wiss. Veröffentl. aus d. Siemenskonz. 5. S. 156. 1926.

2) G. Borelius, Ann. d. Phys. 74. S. 216. 1924.

3) Anmerkung während der Korrektur: In einer kürzlich erschienenen Veröffentlichung (Neues Jahrb. f. Min. usw. Mügge-Festband, Beil.-Bd. 57. Abt. A. S. 1197. 1928) weist K. Spangenberg darauf hin, daß auf Grund der neueren Anschauungen über das Kristallwachstum, speziell bei Zusammenwirken des tangentialen und normalen Wachstums der Netzebenen infolge verschiedener Affinität des Kristallgitters zu den aufbauenden Atom- (bzw. Ionen)-Arten ein rhythmischer Wechsel in Schichten parallel zu den wachsenden Netzebenen auftreten könnte, in welchem das Konzentrationsverhältnis der beiden Atomarten verschieden ist (einmal kleiner, einmal größer) als das statistische Mittel. Diese periodischen Konzentrationsschlieren können sich über jeweils zwei oder

gefundenen Resistenzgrenzen müssen daher außer vom Mischungsverhältnis der beiden Komponenten auch vom Zustand des unedlen Atoms und seinem Verhalten zum einwirkenden Lösungsmittel abhängig sein. Wie stark sich dieses in manchen Fällen auswirkt, zeigt das Beispiel, daß im System Wo–Mo schon bei Anwesenheit von 1 Atom Wolfram auf 200 Atome Molybdän eine Schutzwirkung bei Einwirkung von wäßrigen Salpetersäure- und Orthophosphorsäuregemischen ausgeübt wird. So sehen wir, daß neben den oben betonten geometrischen Gesichtspunkten noch weitere in Betracht kommen, die sich durch die reine Wahrscheinlichkeitsbetrachtung nicht erfassen lassen.

Die Natur des Lösungsmittels und seine Konzentration bedingen ebenfalls das eventuelle Auftreten und die Änderung der Lage einer Einwirkungsgrenze auf ein gegebenes Kristallgitter. Sind die Moleküle (bzw. Ionen) des Lösungsmittels klein im Verhältnis zu den relativen Entfernungen der Atome im Kristallgitter, so ist eine Schutzwirkung wenig wahrscheinlich. Im umgekehrten Falle können die Moleküle des Lösungsmittels nur die an der jeweiligen Oberfläche gelegenen unedlen Atome ablösen. In einem System mit lückenloser Mischbarkeit, dessen Komponenten in ihren Gitterdimensionen verschieden sind, wie z. B. Cu und Au, kann bei passender Größe der Moleküle (Ionen) des Lösungsmittels der Fall eintreten, daß bei einem bestimmten Mol-Gehalt an der die Dimensionen verkleinernden Komponente, z. B. Cu, und der hierdurch bewirkten Kontraktionen des Mischkristallgitters den angreifenden Molekülen des Lösungsmittels der Weg mehr oder minder plötzlich versperrt wird.

---

mehr Netzebenenschichten erstrecken. Bei getemperten Mischkristallen wird diese bei der Kristallisation aufgetretene Erscheinung des Ungleichgewichts durch die Diffusion verschwinden, in den ungetemperten Mischkristallen kann dieser feinlamellare Schichtenbau auch bei Abkühlung erhalten bleiben. In diesem Falle könnte eine Schutzwirkung gegenüber dem Säureangriff eintreten, wenn die periodischen Pakete, in welchen die edlere Komponente angereichert ist, eine genügende Dicke haben. In gewissen Richtungen wird der Säureangriff dann zum Stehen kommen. wenn nach Abbau einiger unedler Schichten eine an Gold angereicherte Schicht zutage tritt.

Quantitative Aussagen lassen sich trotz vielversprechender Ansätze zurzeit noch nicht machen, da die Größen der Moleküle bzw. die Dimensionen der Ionen in wäßriger Lösung nur wenig bekannt sind. Rein qualitativ läßt sich die Möglichkeit voraussehen, daß die Erhöhung der Säurekonzentration mit einer Verminderung der die Ionen bzw. Molekeln umgebenden Wasserhülle verbunden ist, wodurch wiederum ein leichteres Eindringen ins Kristallgitter und erhöhte Diffusion zustande käme, oder es kann auch die Bildung anderer Molekeln von geringerem Durchmesser eintreten. Damit würde sich erklären lassen, daß bei konzentrierterer Säure die Grenze der Angreifbarkeit bei den Cu–Au-Legierungen nach der kupferärmeren Seite hin verschoben wird, eben weil die Verkleinerung der Gitterdimensionen durch die Verkleinerung der (hydratisierten) Säurebestandteile kompensiert wird. In ähnlicher Weise kann der Einfluß der höheren Einwirkungstemperatur gedeutet werden. Einmal wird hierdurch der Zustand des Lösungsmittels geändert, ebenfalls wohl im Sinne einer Verringerung der Wasserhülle, andererseits wird die thermische Bewegung im Kristall und Lösungsmittel und somit dessen Diffusion vergrößert. Dazu kommt, daß infolge der thermischen Ausdehnung des Kristallgitters die bindenden Gitterkräfte schwächer werden und die Herauslösung der unedlen Atome erleichtern, wie die Beobachtung beweist.

Von weiterer Bedeutung für das Auftreten von Resistenzgrenzen ist das Entstehen von festen, unlöslichen Reaktionsprodukten bei der Einwirkung der Lösungsmittel auf die Legierung. Werden diese an der Kristalloberfläche abgeschieden und dort adsorbiert, oder, falls sie kristallinisch sind, gesetzmäßig angelagert, so schützen sie das Kristallgitter vor weiterer Auflösung und täuschen so eine chemische Resistenz vor, während es sich in Wirklichkeit um eine Erscheinung der Passivität handelt. Auf diese Möglichkeit hat bereits Tammann (a. a. O.) beim System Molybdän–Wolfram hingewiesen. Auch wenn die Reaktionsprodukte löslich sind, wird ihre Entfernung aus den zwischenatomaren Hohlräumen des Kristallgitters nicht momentan vor sich gehen und dadurch die Diffusion erschwert. Bei einer gewissen Menge der zwischen den edlen Atomen ausgeschiedenen Reaktionsprodukte kann unter Umständen das

Herzubringen der frischen Säure überhaupt verhindert werden, so daß durch Abstumpfung und Verbrauch des Lösungsmittels allmählich die Reaktion zum Stillstand kommt. Begünstigt wird diese Erscheinung offenbar dadurch, daß in vielen Fällen das Kristallgitter beim Herauslösen der unedlen Atomsorte nicht einfach zusammenstürzt, sondern in großen Bereichen erhalten bleibt, wobei die edlen Atome das Gerüst bilden. Bei den Cu–Au-Legierungen z. B. erscheinen auch diejenigen, aus welchen das Cu fast quantitativ durch Salpetersäure herausgelöst wurde, äußerlich fast unversehrt; ihre Festigkeit ist aber stark herabgesetzt und bei der geringsten mechanischen Beanspruchung gehen sie zu Bruche. Im Röntgenbild zeigt sich, wie bereits bemerkt, ebenfalls, daß die Kristalle nicht zerfallen sind und daß sich die Dimensionen des Kristallgitters mehr und mehr denjenigen des reinen Goldgitters genähert haben (vgl. Filme Nr. 250/51 und 290).

Auf Grund ähnlicher Überlegungen gelingt es auch ohne eine vollständige Theorie, der sich bei der Kompliziertheit des Lösungsvorganges fast unüberwindliche Schwierigkeiten entgegenstellen, Rechenschaft über einige weitere beobachtete Tatsachen zu geben.

Es zeigt sich, daß auch bei den edlen Legierungen im Anfang stets eine gewisse, wenn auch sehr kleine Kupfermenge durch die Säure herausgelöst wird. Der Grund ist in der Oberflächenbeschaffenheit der Legierungen zu suchen. Diese stellen Kristallhaufwerke dar, deren Teile durch das Walzen in kleinere Bereiche unterteilt und nach einer *Walztextur* geregelt wurden. Beim Tempern bilden sich neue Kristalle (Mischkristalle und intermetallische Verbindungen), die ihrerseits wieder eine *Rekristallisationstextur* oder eine völlig *unregelmäßige Lage* besitzen, je nach den äußeren Bedingungen. Im ersten Falle besteht die Oberfläche des Präparats nach dem Tempern aus statistisch parallel gerichteten Kristallen. Es ist ersichtlich, daß je nach der Lage der Richtung kleinster Lösungsgeschwindigkeit zur gemeinsamen Wachstumsrichtung erst eine gewisse Menge Kristallmaterial aufgelöst wird, bis die Flächen maximalen Lösungswiderstands herausgebildet sind und die Auflösung zum Stillstand (bzw. starken Verlangsamung)

(*Fortsetzung auf S. 1004.*)

Tabelle 4

Legierungen mit 0,500 Molenbruch Cu

Berechnete Indizes und Intensitäten				Legierung, Film Nr. 109. 0,450 Molenbruch gewalzt, ungetempert					Legierung, Film Nr. 107. 0,500 Molenbruch gewalzt, ungetempert				
Indizes flächenz. kubisch	Indizes tetragonal[1])	i[3]) ber. kub.	i[2]) ber. tetrag.	Nr.	ϑ/2 gem.	log sin ϑ/2 gem.	log sin ϑ/2[3]) ber. kub.	i beob.	Nr.	ϑ/2 gem.	log sin ϑ/2 gem.	log sin ϑ/2[3]) ber. kub.	i beob.
	001β	—	7,15				9·256						
	001α	—	17,4				300						
	110β	—	8,0	1?	15° 51′	·436	404	ss					
	110α	—	19,0	2?	17 15	472	450	ss					
111β	111β	45,0	45,0	3	18 24	499	494	st	7	18° 21′	9·498	9·498	mst
111α	111α	100,0	100,0	4	20 27	548	540	ststst	8	20 24	542	544	ststst
200β	200β	24,5	16,5					s	9	21 00	554	559	s
	002β	—	6,7										
200α	200α	50,0	38,6	5	23 36	602	600	stst	11	23 36	602	604	stst
	201β	—	5,1										
	002α	—	15,5										
	201α	—	11,8										
	112β	—	3,8										
220β	220β	21,3	7,2	7	30 39	707	704	mst	16	30 45	709	708	ms
	112α	—	9,1										
	202β	—	13,4						17	32 36	731		ss
	221β	—	2,65										
	003β	—	0,6										
220α	220α	51,0	16,9	8	34 33	754	748	stst	18	34 30	758	752	st
	310β	—	2,3										
	202α	—	31,0										
311β	311β	29,3	20,0	9	36 30	774	773	mst	19	37 00	779	777	ms
	221α	—	6,3										
	310α	—	5,6										
	113β	—	8,7										

222β	222β	8,5	8,5				791		20	58 57	798	794	s
	003α	—	1,4										
311α	311α	70,0	47,5	10	41 24	820	819	stst	21	41 46	822	823	st
	203β	—	1,7										
	312β	—	3,2										
	113α	—	21,5										
222α	222α	21,5	21,5	11	43 36	839	837	mst	22	43 45	840	841	ms
400β	400β	5,0	3,75				854		23	45 24	852	858	ss
	401β	—	1,5										
	203α	—	4,3										
	312α	—	8,6										
	330β	—	0,7										
	004β	—	1,7										
	223β	—	1,4										
331β	331β[4])	19,3	6,7				892					896	
400α	400α	15,0	10,0	12	53 06	903	900	ms				904	
420β	420β	20,3	6,7				903					907	
	402β	—	7,6										
	113β	—	14,4										
	204β	—	8,0										
	004α	—	6,0										
331α	331α	75,0	25,0	13	60 06	938	938	m	24	60 45	941	941	mst
420α	420α	82,0	27,5	14	62 45	949	949	mst	25	68 30	952	952	mst
422β	422β	26,7	18,6				948					946	
	402α	—	28,6										
	313α	—	57,8										
511β	511β	34,3	25,2				967					972	
	224β	—	12,4										
	204α	—	42,0										
333β	333β	34,3	14,8				967					972	
422α	422α	184,0	116,0	15	76 15	987	987	m	26	79 36	993	993	ms
	115β	—											

1) Verbindung CuAu (vgl. S. 973). 2) Berechnetes Verhältnis $i_{hkl}/i_{111\alpha}$ nach Formel auf S. 967 ($i k_\beta = \frac{1}{5} i k_\alpha$ gesetzt).
3) Entsprechend dem flächenzentrierten Mischkristall dieser Zusammensetzung.
4) Von 331β an gemischte Indizes für tetragonales Gitter der Verbindung CuAu wegen zu geringer Intensität nicht mehr aufgeführt.

Tabelle 4 (Fortsetzung)

Berechnete Indizes und Intensitäten				Legierung, Film Nr. 166. 0,500 Molenbruch, gewalzt, getempert und mäßig lange abgekühlt					Legierung, Film Nr. 239.[5]) 0,500 Molenbruch wie 106, dann 0,93% d. gesamten Cu Menge mit HNO_3 ($D = 1,5$) herausgelöst				
Indizes flächenz. kubisch	Indizes tetragonal[1])	i[2])[5]) ber. kub.	i[2]) ber. tetrag.	Nr.	$\vartheta/2$ beob.	log sin $\vartheta/2$ gem.	log sin $\vartheta/2$[1]) ber. tetr.	i beob.	Nr.	$\vartheta/2$ beob.	log sin $\vartheta/2$ gem.	log sin $\vartheta/2$ beob. tetr.	i beob.
	001β	—	7,15	1	11° 48′	9·277	9·284	ss				9·285	
	001α	—	17,4	2, 3	14 09	325	331	ms				332	
	110β	—	8,0	4, 5, 6	14 51	405	400	ss				401	
	110α	—	19,0	7, 8	16 03	446	446	m				447	
111β	111β	45,0	45,0	10	18 39	505	501	mst	2	18° 42′	9·506	502	s
111α	111α	100,0	100,0	11	20 42	548	547	ststst	4	20 42	548	548	st
200β	200β	24,5	16,5	11a			552	m				553	
	002β	—	6,7	12	22 03	575	587	ss				588	
200α	200α	60,0	38,6	13	23 18	597	596	stst	5	23 15	596	597	mst
	201β	—	5,1				607					608	
	002α	—	15,5	14	25 09	628	631	st	6	25 21	632	632	stm
	201α	—	11,8	15	26 51	655	653	m	7	26 51	655	654	m
	112β	—	8,8				663		8	28 00	672	664	ss
220β	220β	21,3	7,2	16	29 33	693	702	ss	9	29 42	695	703	s
	112α	—	9,1	17	30 30	705	707	ms	10	30 30	705	708	s
	202β	—	13,4	18	31 30	718	718	s	11	31 30	718	719	s
	221β	—	2,65				731		12	32 27	730	732	sss
	003β	—	0,6				742					743	
220α	220α	51,0	16,9	19	33 57	746	744	ms	13	33 42	744	745	m
	310β	—	2,3				754					755	
	202α	—	31,0	20	35 03	759	763	mst	14	35 15	761	764	st
311β	311β	29,3	20,0	21	36 30	774	774	ms	15	36 21	773	775	s
	221α	—	6,3				776					777	
	310α	—	5,6				795					796	
	113β	—	8,7	22	38 33	795	800	ms	15a	38 57	798	801	s
222β	222β	8,5	8,5				802					803	

	003α	—	1,4				805					806	
311α	311α	70,0	47,5	23	41 03	817	819	stst	16	41 00	817	820	
	203β	—	1,7				833					834	
	312β	—	3,2				842					843	
	113α	—	21,5				842	st	17	44 06	842	843	stm
222α	222α	21,5	21,5	24	44 00	842	847					848	
400β	400β	5,0	3,75				852					853	
	401β	—	1,5				869		18	46 33	861	870	m
	203α	—	4,3				878					879	
	312α	—	8,6	25	48 30	880	881	ss				882	
	330β	—	0,7				878					879	
	004β	—	1,7				884					885	
	223β	—	1,4				891					892	
331β	331β[4])	19,3	6,7				892		19	51 30	893	893	s
400α	400α	15,0	10,0				{897					898	
420β	420β	20,3	6,7	26	53 15	904	{900	sm				901	
	402β	—	7,6				908		20	53 15	904	909	s
	113β	—	14,4				909		21	54 30	911	910	ss
	204β	—	8,0	27	56 06	919	923	ss	22	57 24	925	924	s
	004α	—	6,0	28	57 06	924	930	ss	23	59 00	933	931	m
331α	331α	75,0	25,0	29	59 00	933	936	ms	24	61 00	942	937	m
420α	420α	82,0	27,5	30	61 00	942	947	st	25	62 30	948	948	stst
422β	422β	26,7	18,6	31	62 12	947	949	mst				950	
	402α	—	28,6	32	64 00	954	952	stm	26	64 00	954	953	s
	313α	—	57,8				952					953	
511β	511β	34,3	25,2	33	67 00	964	968	ss	27	68 15	968	969	m
	224β	—	12,4	34	68 [illegible]5	969	967	ss				968	
	204α	—	42,0	35	72 06	978	973	ms				974	
333β	333β	34,8	14,8	36	75 03	988	977	ss				978	
422α	422α	184,0	116,0	37	78 08	991	992	m	28	76 00	987	993	mst
	115β	—					999					—	

1) Verbindung CuAu (vgl. S. 973). 2) Berechnetes Verhältnis $i_{hkl}/i_{111\,\alpha}$ nach Formel auf S. 967 ($ik_\beta = \frac{1}{5} ik_\alpha$ gesetzt).
3) Entsprechend dem flächenzentrierten Mischkristall dieser Zusammensetzung.
4) Von 331β an gemischte Indizes für tetragonales Gitter der Verbindung CuAu wegen zu geringer Intensität nicht mehr aufgeführt. 5) Film etwas unterbelichtet.

Tabelle 5

Legierungen mit 0,600 Molenbruch Cu

Berechnete Indizes und Intensitäten				Legierung, Film Nr. 280. 0,600 Molenbr. gewalzt, ungetempert					Legierung, Film Nr. 170. 0,600 Molenbruch, gewalzt, getempert und abgeschreckt				
Indizes kubisch	Indizes tetrag.[1])	i[2]) ber. kub.	i[2]) ber. tetrag.	Nr.	$\vartheta/2$ gem.	log sin $\vartheta/2$ gem.	log sin $\vartheta/2$ ber. kub.[3])	i beob.	Nr.	$\vartheta/2$ gem.	log sin $\vartheta/2$ gem.	log sin $\vartheta/2$ ber. kubisch	i beob.
	001β	—	7,15										
	001α	—	17,4										
	110β	—	8,0										
	110α	—	19,0										
111β	111β	45,0	45,0	1	18° 48′	9·508	·503	m	1	18° 21′	9·498	·501	m
111α	111α	100,0	100,0	2	20 51	551	551	stst	2	20 21	541	547	stst
200β	200β	24,5	16,5	3	21 33	565	565	ms	3				
	002β	—	6,7										
200α	200α	60,0	88,6	4	24 21	615	610	st					
	201β	—	5,1						5	24 00	609	607}	ststst
	002α	—	15,5									612}	ss
	201α	—	11,8									657	s
	112β	—	3,8									650	
220β	220β	21,3	7,2	5	32 09	726	715	s	8	31 00	712	718	mst
	112α	—	9,1									697	
	202β	—	13,4										
311β	221β	—	2,65	6	33 48	744	740	s					
	003β	—	0,6										
220α	220α	51,0	16,9	7	35 26	763	759	mst	9	34 45	756	759	st
	310β	—	2,3										
	202α	—	81,0										

	311β		311β	29,3	20,0	8	37 55	788	782	s	10	37 33	785	780	ms
		221α		—	6,3										
		310α		—	5,6										
			113β	—	8,7										
	222β		222β	8,5	8,5				802					800	
		003α		—	1,4										
311α		311α		70,0	47,5	9	42 37	831	829	mst	11	42 00	826	827	st
			203β	—	1,7										
			312β	—	3,2										
		113α		—	21,5										
222α		222α		21,5	21,5	10	45 03	850	848	m	12	43 57	841	845	s
	400β		400β	5,0	3,75				864		13	46 15	859	862	sm
			401β	—	1,5										
		203α		—	4,3										
		312α		—	8,6										
			330β	—	0,7										
			004β	—	1,7										
			223β	—	1,4										
	331β		331β [4]	19,3	6,7										
400α		400α		15,0	10,0				902		14	52 18	898	901	s
	420β		420β	20,3	6,7				910		15	53 45	906	907	m
			402β	—	7,6				914		16	54 24	911	911	m
			313β	—	14,4										
			204β	—	8,0										
		004α		—	6,0	11	62 18	947	947	st	17	61 45	945	945	st
331α		331α		75,0	25,0	12	65 12	958	958	st	18	65 00	957	956	st
420α		420α		82,0	27,5				953					951	
	422β		422β	26,7	18,6										
		402α		—	28,6										
		313α		—	57,8										
	511β		511β	34,3	25,2				978		19	71 36	977	976	m
			224β	—	12,4										
		204α		—	42,0										
	333β		333β	34,3	14,8				978		19	71 36	977	976	m
422α		422α		184,0	116,0				998						
			115β	—	—										

1) 2) 3) 4) vgl. Anmerkungen 1, 2, 3, 4 auf S. 989.

Tabelle 5 (Fortsetzung)

Legierungen mit 0,600 Molenbruch Cu

Berechnete Indizes und Intensitäten				Legierungen, Film Nr. 172. 0,600 Molenbruch, gewalzt, getempert und langsam gekühlt					Legierung, Film Nr. 250. 0,600 Molenbruch wie Nr. 172, dann 32,9 Proz.) der gesamten Cu-Menge mit HNO_3 ($D = 1,5$) herausgelöst						
Indizes kubisch	Indizes tetrag.[1])	i ber. kub.[2])[3])	i ber. tetrag.[3])	Nr.	$\vartheta/2$ gem.	log sin $\vartheta/2$ gem.	log sin $\vartheta/2$ beob. tetrag.	i beob	Nr.	$\vartheta/2$ beob.	log sin $\vartheta/2$ beob.	log sin $\vartheta/2$ beob.	log sin $\vartheta/2$ ber. kub.	log sin $\vartheta/2$ ber. kub.	i beob.
	001β	—	7,15	a	12° 24′	9·332	9·290	ss					(237)	9·265	
	001α	—	17,4	b	14 33	400	337	ss			9·294		(282)	(310)	s
	110β	—	8,0	1	15 52	437	407	ss	2		340		9·(387)	(416)	s
	100α	—	19,0	2	17 15	472	551	ss	3, 4	15° 30′	427	9·460	(430)	(460)	m, st
111β	111β	45,0	45,0	3	18 52	510	507	m	5, 6	17 45	484	508	475	504	m, st
111α	111α	100,0	100,0	4	21 00	554	554	stst	7, 9	19 36	526	552	421	550	stst, stst
200β	200β	24,5	16,5				559		8, 10	20 18	540	569	537	566	ss, s
	002β	—	6,7				593								
200α	200α	60,0	38,6	5	23 35	602	602	st	11	22 42	586	614	(582)	611	st, stst
	201β	—	5,1	6	24 54	624	607	mst		24 18		614	(585)	(614)	
220β	002α	—	15,5	7	25 46	638	637								
	201α	—	11,8	8	26 55	656	659	s					(630)	(658)	
	112β	—	3,8	9	27 43	667	670	s	13			646	(624)	(652)	ss
220α	220β	21,3	7,2	10	30 39	707	708	ss	15, 16	29 18 30 00	690 699	719 731	687	717	s, m s, m
	112α	—	9,1	11	31 23	717	714	ss	14, 15		675	690	(670)	(698)	m, s
	202β	—	13,4				724								
311β	221β	—	2,65				737		15		699		(712)	(740)	s
	003β	—	0,6				748								
222β	220α	51,0	16,9	12	34 54	757	751	m	16, 17	31 36 32 36	719 731	742 768	(733)	(762)	m, m m, st
	310β	—	2,3	13	35 18	762	756	m					(735)	(768)	

	202α	—	81,0	14	36 24	778	770	m							
311α	511β	29,8	20,0				780		18	37 33	785		755	788	mst
	221α	—	6,3	15	38 14	792	782	s					758	(786)	
	810α	—	5,6				801						780	(809)	
	113β	—	8,7	16	39 51	807	808	s							
222α	222β	8,5	8,5				808		19	39 30	804		774	802	ss
	003α	—	1,4				812								
	311α	70,0	47,5	17	41 48	824	825	st	19, 19a	39 30	804	831	802	830	ss, stst
	203β	—	1,7	18	43 42	839	840	m							
	312β	—	3,2				842								
	113α	—	21,5	19	44 51	848	854	s							
	222α	21,5	21,5	20	45 48	855	855	s	19, 29a	41 00	817	849	819	848	m
400β	400β	5,0	37,5				858		19'a	42 42	831		837	865	st st
	401β	—	1,5				875								
	203α	—	4,3				886								
	312α	—	3,6				887								
	330β	—	0,7				884								
	004β	—	1,7				891								
	223β	—	1,4				895								
331β	331β[4])	19,8	6,7				897		22	48 30	874	876		904	ss
400α	400α	15,0	10,0	21	52 48	901	902	st				883		911	sss
420β	420β	20,3	6,7				906		23	50 15	886	886		914	sm
	402β	—	7,6	22	55 36	916	914	s							
	313β	—	14,4	23	57 12	924	916	sm							
	204β	—	8,0				929								
	004α	—	6,0	24	60 48	941	937								
331α	331α	75,0	25,0	25	63 00	950	941	mst	26, 28	56 15	920	920	948	948	m, m
420α	420α	82,0	27,5				952	st	27, 29	58 30	931	931	958	959	stst, ss
422β	422β	26,7	18,6	26	64 15	955	954							954	
	402α	—	28,6				957	mst							
	313α	—	57,8	27	67 54	967	957								
511β	511β	34,3	25,2	28	69 12	971	973	s	28	62 30	948	950		979	m
	224β	—	12,4				973	s							
	204α	—	42,0				978								
333β	333β	34,3	14,8				983		28	62 30	948	950		979	m
422α	422α	184,0	116,0	29	78 30	992	997	st	30	68 45	969	971		998	m
	115β	—	—												

1) 2) 3) 4) vgl. Anmerkungen 1, 2, 3, 4 auf S. 989.

Tabelle 5 (Fortsetzung)

Legierungen mit 0,600 Molenbruch Cu

Berechnete Indizes und Intensitäten				Legierung, Film Nr. 251. 0,600 Molenbruch. Wie 250 aber Präparat während der Belichtung kontinuierlich gedreht							Legierung, Film Nr. 290. 0,625 Molenbruch, gewalzt, ungetempert, dann 100 Proz. der gesamten Cu Menge mit HNO_3 $(D = 1{,}5)$ herausgelöst						
Indizes kubisch	Indizes tetrag.[1])	i[2])[3]) ber. kub.	i ber. tetrag.[3])	Nr.	$\vartheta/2$ gem.	log sin $\vartheta/2$ beob.	log sin $\vartheta/2$ beob.	log sin $\vartheta/2$ ber. kub.	log sin $\vartheta/2$ ber. kub.	i beob.	Nr.	$\vartheta/2$	log sin $\vartheta/2$ gem.	log sin $\vartheta/2$ gem.	log sin $\vartheta/2$ ber. kub.	log sin $\vartheta/2$ ber. kub.	i gem.
	001β	—	7,15				9·261	9·(238)	9·(262)						9·(238)	9·267	
	001α	—	17,4				321	(283)	(307)						(288)	311	
	110β	—	8,0	3	14° 48′	9·407	407	(287)	(413)	m					(387)	416	
	110α	—	19,0	4, 5	15 51	486	468	(430)	(456)	m, ss					(433)	462	
111β	111β	45,0	45,0	6	17 45	484	484	476	501	s	2	17° 24′	9·476		(476)	505	m
111α	111α	100,0	100,0	7, 8	19 18	{ 509 519	536	520	547	st	3, 6	19 18	519	9·555	520	552	ststst
200β	200β	24,5	16,5	8, 9	20 06	536	556	536	562	s, s	4	20 06	536		587	567	mst
	002β	—	6,7														
200α	200α	60,0	38,6	10, 11	22 24	581	602	581	607	st, ss	7, 9	22 30	588	616	580	612	ststst
	201β	—	5,1	12	24 24		616	(584)	(611)		8	23 12	595		585	616	
	002α	—	15,5														
	201α	—	11,8	13, 14	25 42	637	666	(629)	(655)		10	25 21	631	659	631	660	
	112β	—	3,8					(625)	(648)						624	654	
220β	220β	21,3	7,2	15, 15a	29 18	690	712	688	713	s, ss	12	29 24	691	717	687	718	ms
	112α	—	9,1	15a				669	(694)							700	
	202β	—	18,4														
311β	221β	—	2,65	15a, 16				(711)	(736)							742	
	003β	—	0,6														
222β	220α	51,0	16,9	16, 17	32 45	733	759	733	759	stm	14	32 48	734	757_5	733	763	st
	310β	—	2,2					(735)	(760)							765	

	202α	—	31,0																	
311α	311β	29,3	20,0	17,	17a	35	00	759	778	755	780	mass	16	34	54	757_5		755	785	m
	221α	—	6,3							(758)	(783)							758	788	
	310α	—	5,6							(780)	(806)							780	811	s
	113β	—	8,7																	
222α	222β	8,5	8,5	17a,	18	36	51	778	801	774	800	sss	18	36	36	775		774	804	s
	003α	—	1,4																	
311α	311α	70,0	47,5	18,	19a	39	15	801	828	801	827	st, ss	19	39	18	802		801	831	st
	203β	—	1,7																	
	312β	—	3,2																	
	113α	—	21,5																	
222α	222α	21,5	21,5	19	21	41	12	819	843	819	844	m	20	41	24	820	849	819	849	mst
400β	400β	5,0	3,75	20		43	24	837		837	862	ss	21	43	24	837		837	877	ss
	401β	—	1,5																	
	203α	—	4,3																	
	312α	—	3,6																	
	330β	—	0,7																	
	004β	—	1,7																	
	223β	—	1,4																	
331β	331β	19,3	6,7	22		48	24	874		875	901	s	23	48	30	874_5	905	875	905	s
400α	400α	15,0	10,0	23		49	30	881		882	907	m	24	49	36	882	912	882	912	ms
420β	420β	20,3	6,7	24		50	15	886		885	911	s						885	916	
	402β	—	7,6																	
	313β[4])	—	14,4																	
	204β	—	8,0																	
	004α	—	6,0																	
331α	331α	75,0	25,0	26,	28	56	00	919	946	920	946	st, ss	27	56	00	918_5	950	920	950	st
420α	420α	82,2	27,5	27		58	24	930		930	956	stst	28	58	06	929		930	961	st
422β	422β	26,7	18,6	29					951	926	951	s						926	955	
	402α	—	28,6																	
	313α	—	57,8																	
511β	511β	84,3	25,2	29		63	24	951		950	976	s	29	63	00	950		950	980	m
	224β	—	12,4																	
	204α	—	42,0																	
333β	333β	84,3	14,8	29		63	24	951		950	976	s	29	63	00	950		950	980	m
422α	422α	184,0	116,0	30		68	30	969		970	996	st	30	68	36	969		971		st
	115β	—	—															987		

1) 2) 3) 4) vgl. Anmerkungen 1, 2, 3, 4 auf S. 989.

Tabelle 5 (Fortsetzung)

Legierungen mit 0,600 Molenbruch Cu

Berechnete Indizes und Intensitäten				Legierung, Film Nr. 251. 0,600 Molenbruch. Wie 250 aber Präparat während der Belichtung kontinuierlich gedreht							Legierung, Film Nr. 290. 0,625 Molenbruch, gewalzt, ungetempert, dann 100 Proz. der gesamten Cu Menge mit HNO_3 ($D = 1,5$) herausgelöst						
Indizes kubisch	Indizes tetrag.[1])	i[2])[3]) ber. kub.	i ber. tetrag.[3])	Nr.	$\vartheta/2$ gem.	log sin $\vartheta/2$ beob.	log sin $\vartheta/2$ beob.	log sin $\vartheta/2$ ber. kub.	log sin $\vartheta/2$ ber. kub.	i beob.	Nr.	$\vartheta/2$	log sin $\vartheta/2$ gem.	log sin $\vartheta/2$ gem.	log sin $\vartheta/2$ ber. kub.	log sin $\vartheta/2$ ber. kub.	i gem.
	001β	—	7,15				9·261	9·(238)	9·(262)						9·(238)	9·267	
	001α	—	17,4				321	(283)	(307)						(283)	311	
	110β	—	8,0	3	14° 48′	9·407	407	(287)	(413)	m					(387)	416	
	110α	—	19,0	4, 5	15 51	436	463	(430)	(456)	m, ss					(433)	462	
111β	111β	45,0	45,0	6	17 45	484	484	476	501	s	2	17° 24′	9·476		(476)	505	m
111α	111α	100,0	100,0	7, 8	19 18	{ 509 519	536	520	547	st	3, 6	19 18	519	9·555	520	552	ststst
200β	200β	24,5	16,5	8, 9	20 06	536	556	536	562	s, s	4	20 06	536		587	567	mst
	002β	—	6,7														
200α	200α	60,0	38,6	10, 11	22 24	581	602	581	607	st, ss	7, 9	22 30	588	616	580	612	ststst
	201β	—	5,1	12	24 24		616	(584)	(611)		8	23 12	595		585	616	
	002α	—	15,5														
	201α	—	11,8	13, 14	25 42	637	666	(629)	(655)		10	25 21	631	659	631	660	
	112β	—	3,8					(625)	(648)						624	654	
220β	220β	21,8	7,2	15, 15a	29 18	690	712	688	718	s, ss	12	29 24	691	717	687	718	ms
	112α	—	9,1	15a				669	(694)							700	
	202β	—	18,4														
311β	221β	—	2,65	15a, 16				(711)	(736)							742	
	003β	—	0,6														
222β	220α	51,0	16,9	16, 17	32 45	733	759	733	759	stm	14	32 48	734	757,5	733	763	st
	310β	—	2,2					(735)	(760)							765	

	202α	—	31,0															
311α	311β	29,3	20,0	17,	17a	35 00	759	778	755	780	msss	16	34 54	757,$_5$		755	785	m
	221α	—	6,3						(758)	(783)						758	788	
	310α	—	5,6						(780)	(806)						780	811	s
	113β	—	8,7															
222α	222β	8,5	8,5	17a,	18	36 51	778	801	774	800	sss	18	36 36	775		774	804	s
	003α	—	1,4															
311α	311α	70,0	47,5	18,	19a	39 15	801	828	801	827	st, ss	19	39 18	802		801	831	st
	203β	—	1,7															
	312β	—	3,2															
	113α	—	21,5															
222α	222α	21,5	21,5	19	21	41 12	819	843	819	844	m	20	41 24	820	849	819	849	mst
400β	400β	5,0	3,75	20		43 24	837		837	862	ss	21	43 24	837		837	877	ss
	401β	—	1,5															
	203α	—	4,3															
	312α	—	8,6															
	330β	—	0,7															
	004β	—	1,7															
	223β	—	1,4															
331β	331β	19,3	6,7	22		48 24	874		875	901	s	23	48 30	874,$_5$	905	875	905	s
400α	400α	15,0	10,0	23		49 30	881		882	907	m	24	49 36	882	912	882	912	ms
420β	420β	20,3	6,7	24		50 15	886		885	911	s					885	916	
	402β	—	7,6															
	313β[4])	—	14,4															
	204β	—	8,0															
	004α	—	6,0															
331α	331α	75,0	25,0	26,	28	56 00	919	946	920	946	st, ss	27	56 00	918,$_5$	950	920	950	st
420α	420α	82,2	27,5	27		58 24	930		930	956	stst	28	58 06	929		930	961	st
422β	422β	26,7	18,6	29				951	926	951	s					926	955	
	402α	—	28,6															
	313α	—	57,8															
511β	511β	34,3	25,2	29		63 24	951		950	976	s	29	63 00	950		950	980	m
	224β	—	12,4															
	204α	—	42,0															
333β	333β	34,3	14,8	29		63 24	951		950	976	s	29	63 00	950		950	980	m
422α	422α	184,0	116,0	30		68 30	969		970	996	st	30	68 36	969		971		st
	115β	—	—													987		

1) 2) 3) 4) vgl. Anmerkungen 1, 2, 3, 4 auf S. 989.

Tabelle 6

Legierungen mit 0,750 Molenbruch Cu

Berechnete Indizes und Intensitäten				Legierung, Film Nr. 252. 0,750 Molenbruch gewalzt, ungetempert und abgeschreckt					Legierung, Film Nr. 220. 0,750 Molenbruch gewalzt, getempert und abgeschreckt (linke Filmhälfte)				
Indizes, kubisch-flächenzentriert	Indizes, Verbindung Cu_3Au kubisch[1])	*i* ber. flächenzentriert kubisch[2])	*i* ber. Verbindung Cu_3Au[3])	Nr.	$\vartheta/2$ gem.	log sin $\vartheta/2$ gem.	log sin $\vartheta/2$ ber. kubisch	*i* beob.	Nr.	$\vartheta/2$ gem.	log sin $\vartheta/2$ gem.	log sin $\vartheta/2$ ber. kubisch Cu_3Au	*i* beob.
	001β		9,6									9·274	
	001α		23,3									819	
	101β		9,05	1				ss				424	mst
	101α		21,6	2	17° 48′	9·485		ss				468	stst
111β	111β	42,2	42,2	3	18 51	509	9·510	ss	5	19° 15′	9·518	512	ms
111α	111α	100,0	100,0	4, 4′	21 12	558	557	st	7	21 21	561	559	mst
002β	002β	30,2	30,2				572	sss?				574	
002α	002α	71,0	71,0	6	24 45	622	616	mst	9	24 45	622	618	st
	210β		6,8									623	
	211β		4,75	8	27 21	662	660	ms	11	27 24	663	661	s
	210α		14,7									668	
	211α		11,8	10	30 39	707	(706)	ms				707	
202β	202β	19,2	19,2	11	32 03	725	722	s	14	32 15	727	724	m
	221β } 003β }		3,9	12	33 30	742	(747)	m				748	
202α	202α	45,3	45,3	14	36 21	773	765	st	18	36 15	772	767	mst

	310β		2,75										
311β	311β	27,0	27,0	15	39 08	799	790	sss?	20	38 38	795	792	ss
	300α} 221α}		9,15	15			792					794	
222β	222β	8,3	8,3	16	40 00	808	810	s	21	40 54	816	811	s
	310α		10,7									817	
	320β		2,18									828	
311α	311α	67,2	67,2	17	43 33	838	836	st	22	43 51	841	837	m
	321β		2,08									844	
222α	222α	21,6	21,6	17′	45 45	855	855	m	23	46 03	857	856	m
	320α		5,76									875	
400β	400β	5,17	5,17	18	47 33	868	871	ss				872	
	401β} 322β}		3,85									886	
	321α		13,2									890	
	411β} 330β}		2,9									899	
331β	331β	21,6	21,6	19	54 30	911	910	s	25	55 00	913	912	ss
400α	400α	17,0	17,0	20	55 45	917	917	s	26	56 06	919	919	ms
420β	420β	23,0	23,0				921		27	57 00	923	923	ms
	401α} 322α}		13,5									932	
	412β		4,55									934	
	332β		2,47									942	
	330α} 411α}		11,1									945	
331α	331α	91,5	91,5	21	64 45	956	955	mst	28	64 30	955	956	stst
422β	422β	32,3	32,3				960		29	66 15	962	961	m
402α	402α	108,0	108,0	22	67 45	966	966	mst	30	68 00	967	967	stst
	500β} 430β}		4,27									971	
	421α		24,5									976	
	431β} 501β}		12,7									979	
	332α		16,6				986					986	
333β 511β	333β} 511β}	76,1	76,1						31	75 45	986	987	st

1) Vgl. S. 965. 2) Entsprechend dem flächenzentrierten Mischkristall dieser Zusammensetzung.

3) Berechnetes Verhältnis $i_{hkl}/i_{111\,\alpha}$ nach Formel auf S. 967 ($ik_\beta = \frac{1}{5} ik_\alpha$ gesetzt).

Tabelle 6 (Fortsetzung)

Legierungen mit 0,750 Molenbruch Cu

Berechnete Indizes und Intensitäten				Legierung, Film Nr. 220 (rechte Filmhälfte)					Legierung, Film Nr. 207. 0,750 Molenbruch gewalzt, lange getempert und abgeschreckt				
Indizes kubisch-flächen-zentriert	Indizes Verbindung Cu_3Au kubisch [1])	*i* ber. flächen-zentriert kubisch [2])	*i* ber. Verbindung Cu_3Au [3])	Nr.	$\vartheta/2$ gem.	log sin $\vartheta/2$ gem.	log sin $\vartheta/2$ ber. kubisch	*i* beob.	Nr.	$\vartheta/2$ gem.	log sin $\vartheta/2$ gem.	log sin $\vartheta/2$ ber. kubisch	*i* beob.
	001β		9,6										
	001α		23,3										
	101β		9,05										
	101α		21,6						1	{16° 24′	450}	470	ss
										{17 18	481}		
111β	111β	42,2	42,2	1, 2	18° 28′	9·502	9·508	mst	2	{18 39	505}	514	mst
										{19 21	520}		
111α	111α	100,0	100,0	3	20 42	548	555	ststst	4	21 15	559	560	ststst
002β	002β	30,2	30,2	4	21 51	571	570	mst	5	22 00	573	575	mst
002α	002α	71,0	71,0	5	24 09	612	614	stst	7	24 48	623	620	stst
	210β	—	6,8				618				*	624	
	211β		4,75	5a	26 24	648	657	sss				662	
	210α		14,7				663					669	
	211α		11,8				702		9	31 07	713	709	s
202β	202β	19,2	19,2	6	31 29	720	720	st	10	32 16	727	725	st
	221β} 003β}		8,9									750	
202α	202α	45,3	45,3	7, 8	35 28	768	768	stst	12	35 48	766	768	stst

	310β		2,75										
311β	311β	27,0	27,0	9	37 36	785	787	ss	13	38 05	790	793	ss
	300α, 221β		9,15										
222β	222β	8,3	8,3	10	39 36	804	806	ss	14	39 55	807	811	ss
	310α		10,7										
	320β		2,13										
311α	311α	67,2	67 2	11	42 45	832	834	st	15	43 08	835	839	st
	321β		2,02										
222β	222α	21,6	21,6	12	45 30	853	852	stst	16	45 37	854	857	stst
	320α		5,76										
400β	400β	5,17	5,17	13	47 45	869	869	mst	17	48 26	874	874	mst
	401β, 322β		3,85										
	321α		13,2										
	411β, 330β		2,9										
331β	331β	21,6	21,6	14	53 45	907	907	m	18	54 00	908	912	m
400α	400α	17,0	17,0	15, 16	55 05	914	915	stst	19	56 04	919	920	stst
420β	420β	23,0	23,0	17	56 00	919	919	mst					
	401α, 322α		13,5										
	412β		4,55										
	332β		2,47										
	330α, 411α		11,1										
331α	331α	91,5	91,5	18, 19	63 45	953	952	stst	21	63 29	952	957	stst
422β	422β	32,3	32,3	20	65 30	959	957	m					
402α	402α	108,0	108,0	21	66 45	963	963	stst	22	67 36	966	963	stst
	500β, 430β		4,27										
	421α		24,5										
	431β, 501β		12,7										
	332α		16,6										
333β, 511β	333β, 511β	76,1	76,1				983	mst	23	75 33	986	987	mst

1) 2) 3) vgl. Anmerkungen 1, 2, 3 auf S. 999.

Tabelle 6 (Fortsetzung)

Legierungen mit 0,750 Molenbruch Cu

Berechnete Indizes und Intensitäten				Legierung, Film Nr. 205 0,750 Molenbruch gewalzt, getempert und langsam gekühlt					Legierung, Film Nr. 205 Breite, verwaschene Interferenzstreifen				
Indizes kubisch-flächenzentriert	Indizes Verbindung Cu_3Au kubisch [1])	*i* ber. flächenzentriert kubisch [2])	*i* ber. Verbindung Cu_3Au [2])	Nr.	ϑ/2 gem.	log sin ϑ/2 gem.	log sin ϑ/2 ber. kubisch	*i* beob.	Nr.	ϑ/2 gem.	log sin ϑ/2 gem.	log sin ϑ/2 ber. kubisch	*i* beob.
	001β		9,6				9·274						
	001α		28,8	1	11°46′	9·309	320	st					
	101β		9,05				425					9·127	
	101α		21,6	2	17 13	472	469	s	a	8°21′	9·161	172	ss
111β	111β	42,2	42,2	4	19 25	522	518	s	b	9 43	227	216	ss
111α	111α	100,0	100,0	5	21 15	559	559	stst	c	10 31	261	262	ss
002β	002β	30,2	30,2	m n	21 50 22 07	{570 576	575	s	d	11 08	286	278	ss
002α	002α	71,0	71,0	6	24 10	612	620	st	e	12 17	326	322	s
	210β		6,8				624					326	
	211β		4,75	7	27 00	667	662	} s	f	13 48	377	365	s
	210α		14,7	7	27 00	667	669					372	
	211α		11,8	8	30 26	705	708	} s	g	15 00	413	411	s
202β	202β	19,2	19,2	8′	31 40	720	725		h	15 48	435	428	ss
	221β 003β }		3,9	9	34 21	752	750	s				452	
202α	202α	45,3	45,3	10	36 09	771	768	st	2*	17 18	472	471	s

	310β		2,75				778					475	
311β	311β	27,0	27,0	11	38 30	794	793	s	i	18 24	498	497	ss
	300α} 221β}	8,3	9,15				796					} 499	
222β	222β		8,3	12	40 57	817	812	s	k	18 58	511	515	ss
	310α		10,7				818					521	
	320β	67,2	2,13	13	42 34	830	829	s				533	
311α	311α		67,2	14	43 26	837	839	s	l	20 53	548	542	ss
	321β		2,08	15	44 20	847	845	s				550	
222α	222α	21,6	21,6	16	45 57	857	857	s	5*	21 15	559	560	stat
	320α		5,76	17	48 19	873	873	st					
400β	400β	5,17	5,17										
	401β} 322β}		3,85				887					} 590	
	321α		13,2	18	51 08	891	891	st				594	
	411β} 330β}		2,9				900					608	
331β	331β	21,6	21,6	19	54 52	913	913	s	o	24 08	611	615	ss
400α	400α	17,0	17,0				920					623	
420β	420β	23,0	23,0	20	56 49	923	928	s				627	
	401α} 322α}		13,5	21	58 48	931	933 933	s					
	411β		4,55				934						
	332β		2,47				942						
	330α} 411α}		11,1	22	61 21	943	944	s					
331α	331α	91,5	91,5	23	64 20	955	955	st					
422β	422β	32,3	32,3	24	67 14	965	961	} st					
402α	402α	108,0	108,0	24′	67 45	967	967						
	500β} 430β}		4,27	25	68 56	970	970	s					
	421α		24,5	26	70 25	974	977	s					
	431β} 501β}		12,7	28	72 23	979	979	s					
	332α		16,6	29	74 07	983	986	s					
333β 511β	333β} 511β}	76,1	76,1	30	75 05	985_5	986	mst					

1) 2) 3) vgl. Anmerkungen 1, 2, 3 auf S. 999.

bringen.[1]) Bei völlig unregelmäßiger Orientierung der Kristalle an der Oberfläche des Präparats ist der Säureangriff noch inhomogener, insofern als alle Kristalle bevorzugt aufgelöst werden, die nicht gerade mit der Fläche kleinster Lösungsgeschwindigkeit parallel zur Oberfläche liegen. Es bildet sich auch hier ein Ätzrelief heraus, und es kann bei genügend großem Kristallkorn durch seitliche Unterhöhlung zum Herausfallen der stehengebliebenen Kristalle und damit zu einem völligen Zerfall des Präparats kommen. Auch bei nicht getemperten edlen Legierungen werden beim Beginn des Lösungsprozesses Stellen leichter Angreifbarkeit vorhanden sein. Als solche können einmal die beim Walzen gebildeten Störungszonen des Kristallgitters wie auch die ursprünglich vorhandenen Lockerstellen (Kristallgitterporen) angesehen werden. Auch bei der Ausbildung der nach Masing und Borelius auftretenden röhrenförmigen Hohlräume muß erst ein Teil der Kupfermenge herausgelöst werden, ehe die schließlich nur mit edlen Atomen besetzten Wände einem weiteren Angriff Halt gebieten.

Aus alledem dürfte hervorgehen, wie mannigfaltig die Umstände sind, die bei der Herausbildung einer „Resistenzgrenze" in metallischen Systemen mitwirken, und daß von einer *scharfen* Resistenzgrenze im quantitativen Sinne weder nach der Menge der herausgelösten Komponente noch nach der Lage der Resistenzgrenze die Rede sein kann. Die Erscheinung der Resistenzgrenzen läßt sich in Anbetracht dieser Umstände nicht von einer allgemeinen Theorie des Kristallwachstums und der -Auflösung abtrennen, für welche die experimentellen Unterlagen auch heute noch recht mangelhaft sind.

Zusammenfassung

Sorgfältige Auflösungsversuche am System Au–Cu mit Salpetersäure haben gelehrt, daß die Schlußfolgerungen, die

---

1) Ähnliche Erscheinungen werden bei der Auflösung von Metalleinkristallen, z. B. von Al-Kristallen in einem Gemisch von konzentrierter HCl und HF beobachtet. Es entstehen regelmäßige, kristallographisch orientierte Ätzflächen, die die bekannte dislozierte Reflexion hervorrufen (Czochralski).

Tammann aus seinen Versuchen gezogen hat, nicht stichhaltig sind. Eingehende Röntgenuntersuchungen haben weiterhin keine Bestätigung der von Tammann vorausgesagten normalen Verteilungen gebracht. Eine absolute Resistenzgrenze im quantitativen Sinne, unabhängig von Temperatur und Art des Lösungsmittels, besteht unseres Erachtens nicht. Es werden Gesichtspunkte angegeben, auf Grund deren sich die im Gegensatz zu der nicht vorhandenen Eindeutigkeit Tammanns beobachtete Vielheit der Erscheinungen erklären ließe.

Leipzig, Physikalisch-chemisches und Mineralogisches Institut der Universität.

(Eingegangen 15. Juni 1928)

2. *Kathodenzerstäubungsprobleme*

(IV. Mitteilung)

Der Einfluß von Material und Zustand der Kathode auf den Zerstäubungsprozeß;

von E. Blechschmidt und A. v. Hippel

In der III. Mitteilung hatte der eine von uns[3]) eine Theorie der Kathodenzerstäubung entwickelt unter der Grundannahme, daß es sich bei der Zerstäubung um einen lokalen Verdampfungsprozeß handelt. Die einzelnen Phasen des Vorganges wurden theoretisch diskutiert und die gewonnenen Vorstellungen durch die experimentellen Daten der I.—III. Mitteilung[1-3]) weitgehend gestützt. Dabei war die formelmäßige Behandlung des Sublimationsaktes unter Zugrundelegen eines stark vereinfachten Bildes erfolgt: Die Kationenenergie sollte z-Atome in Gleichverteilung auf eine mittlere Temperatur $\bar{T}$ erhitzen, dementsprechend ein Oberflächenausschnitt $\Delta \bar{F}$ für die Zerstäubung wirksam sein. Während eines kleinen Zeitabschnittes $\Delta \bar{t}$ sollte sich über diesem Flächenstückchen Sättigungsdampfdruck einstellen, dann die Temperaturerhöhung momentan wieder verschwinden, nachdem der tatsächlich beobachtete Zerstäubungseffekt erreicht war. — In der hier vorgelegten Arbeit wird diese Vereinfachung zugunsten einer genaueren Behandlung fallen gelassen, dann die Theorie mittels einer neuen Methode an den sich bisher so abweichend verhaltenden, unedlen Metallen geprüft.

Die Arbeitsteilung in dieser gemeinsamen Mitteilung ist so erfolgt, daß die theoretische Weiterbehandlung von Hrn. v. Hippel gegeben wurde, beide Verfasser gemeinsam haben

1) A. v. Hippel, Ann. d. Phys. 80. S. 672. 1926.
2) E. Blechschmidt, Ann. d. Phys. 81. S. 999. 1926.
3) A. v. Hippel, Ann. d. Phys. 81. S. 1043. 1926.

die experimentelle Methode durchgebildet, die Messungen selbst sind während Hrn. v. Hippels Abwesenheit durch Hrn. Blechschmidt allein ausgeführt worden.

I. Erweiterung der Theorie

Die durch einen Kationenstoß ausgelöste Anzahl P von Zerstäubungspartikeln ist gleich der Anzahl z von Metallatomen der Oberfläche, die durch den Ionenaufprall einen zur Sublimation genügenden Energiebetrag übermittelt erhalten, multipliziert mit einem Wahrscheinlichkeitsfaktor W für das tatsächliche Eintreten der Emission:

$$P = z \cdot W. \tag{1}$$

Diese Gleichung läßt sich näher präzisieren: Dringt das Kation nicht unter die Metalloberfläche, d. h. handelt es sich nicht um Protonen oder α-Teilchen[1]), so wächst die Anzahl z proportional mit dem Energiebetrag U_1, den das Kation kalorisch zur Verfügung stellt. Der Wahrscheinlichkeitsfaktor W andererseits ist proportional zur Verdampfungswahrscheinlichkeit u der Metallatome aus der Oberfläche und umgekehrt proportional zur Geschwindigkeit des Temperaturausgleiches v. (1) geht damit über in

$$P = C\, U_1 \cdot \frac{u}{v}. \tag{1a}$$

Die *Verdampfungswahrscheinlichkeit* u läßt sich, wie folgt, diskutieren: Hat ein Atom der Oberfläche die Austrittsarbeit w zu leisten, um in den Dampfraum überzutreten, so ist nach einem bekannten Satz der statistischen Mechanik das Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten, daß sich das Atom im Dampfraum oder in der Oberfläche befindet, gegeben durch $e^{-\frac{w}{k \cdot T}}$. Für $w = 0$ würde das Atom aus der Oberfläche herausfliegen, wenn seine thermische Eigenschwingung es mit einer Komponente senkrecht zur Oberfläche bewegt, also mit einer Wahrscheinlichkeit, die praktisch gleich seiner Eigenschwin-

---

1) Bei Zerstäubung in H_2 hätte man auf das Verhältnis von Proton zu Molekülionen und die mit ihm steigende Zerstäubungsabnahme Rücksicht zu nehmen.

gung ν_m ist. Für $w \neq 0$ ist dementsprechend die Verdampfungswahrscheinlichkeit gegeben durch

$$u = \nu_m \cdot e^{-\frac{w}{k \cdot T}}.\text{[1]} \tag{2}$$

Die *Geschwindigkeit des Temperaturausgleiches* v andererseits ergibt sich wie folgt: Überträgt man das makroskopische Bild der Wärmeleitung auf atomare Dimensionen, so leitet ein Atom auf seine Nachbarn einen Wärmestrom über, gegeben durch das Produkt aus atomarem Leitvermögen und Temperaturgradienten. Als atomares Wärmeleitvermögen wäre sinngemäß zu definieren der Wärmefluß durch die Seitenfläche eines Elementarkubus, dessen Kantenlänge gleich ist dem mittleren Atomabstand b und über dessen Länge die Temperatur um einen Grad abfällt. Das atomare Leitvermögen $\varkappa_a$ steht danach zum normalen Leitvermögen $\varkappa$ des Metalls in der Beziehung:

$$\varkappa_a = \frac{\varkappa \cdot b^2}{b}. \tag{3}$$

Der Wärmestrom findet, wenn in erster Näherung für einen differentiellen Zeitabschnitt die zeitliche Änderung des Temperaturgradienten und die Weiterleitung über die n-Nachbaratome hinaus vernachlässigt wird, sein Äquivalent in der Temperaturerhöhung dieser Atome, deren jedes die Wärmekapazität $3k$ besitzt. Als die für das Metall charakteristische Geschwindigkeit des Temperaturausgleiches hat man demnach zu definieren:

$$v = \frac{dT}{dt} = \frac{\varkappa \cdot b}{3nk}. \tag{4}$$

Setzt man (4) und (2) in (1a) ein, so folgt für die Anzahl Zerstäubungspartikel pro Kationenstoß:

$$P = C \cdot U_1 \frac{3nk}{\varkappa \cdot b} \cdot \nu_m e^{-\frac{w}{k \cdot T}}. \tag{5}$$

Der Einfluß von Oberflächenschichten:

Bisher haben wir ganz davon abgesehen, daß sich die Kathode beim Zerstäubungsprozeß in einer Gasatmosphäre be-

---

1) Eine genaue Diskussion z. B. nach Frenkels Theorie der Adsorption: J. Frenkel, Ztschr. f. Phys. 26. S. 117. 1926, führt zum gleichen Resultat.

findet, daher normalerweise von einer adsorbierten Gasschicht mehr oder weniger vollständig bedeckt sein wird. Mit der Existenz einer solchen Oberflächenhaut über den Metallatomen ändert sich dreierlei in dem bisherigen Bilde:

1. Die *Reflexion der Kationen*, die gegenüber einer sauberen Metalloberfläche nahezu Null ist, kann bei Absättigung der Oberflächenkräfte durch adsorbierte Gasmoleküle einen sehr erheblichen Prozentsatz erreichen. Es ist demnach in die Formeln ein Reflexionskoeffizient r einzuführen.[1])

2. Die Austrittsarbeit w, die bei reinen Metalloberflächen in die atomare Sublimationswärme q_a übergeht, erhält einen Zusatzbeitrag w_1, der direkt jede Zerstäubung verhindern kann, weil er bei gleichbleibender Wärmeabklingung im Metall die Verdampfungsgschwindigkeit exponentiell herabsetzt. Dies erklärt wohl alle Beobachtungen über Zerstäubungsverzug oder völliges Ausbleiben von Zerstäubung bei Anwesenheit von Oxydschichten usw.

3. Es kann ein Ansteigen der Zerstäubungsintensität mit der Kathodentemperatur beobachtet werden, viel früher, als nach den bisherigen Überlegungen zu erwarten, weil mit steigender Temperatur ein Abdestillieren der Oberflächenschicht einsetzt. Es ist danach r und w in unseren Formeln als Funktion der makroskopischen Kathodentemperatur $\bar{T}$ anzusehen.

Damit findet die Zerstäubungsintensität I, die in der Zeiteinheit aus der Flächeneinheit ausgelöste Anzahl Metallatome, an Stelle durch Gleichung (19) der III. Mitteilung, ihre allgemeine Darstellung in

$$(6)\quad I = B \cdot \frac{i}{(1+C_s)} \cdot \left(1 - r(\bar{T})\right) \cdot U_1 \cdot \frac{3\,n\,k}{\varkappa\, b} \cdot v_m \cdot e^{-\frac{q_a}{k \cdot T} - \frac{w_1(\bar{T})}{k \cdot T}}.$$

---

1) J. Langmuir, Phys. Rev. 8. S. 149. 1916, behandelt das Verdampfen von Molekülen. Er leitet auf etwas anderem Wege als oben die von r reziproke Größe, die Abklingzeit, ab und weist mit besonderem Nachdruck darauf hin, daß ihr numerischer Wert die Zeit einer atomaren Wärmeschwingung von Größenordnungen unterschreitet, also die Leitungselektronen den Wärmetransport übernehmen müssen. Nach seinen Untersuchungen scheint ein Reflexionskoeffizient r bis etwa 90 Proz. für adsorbierten Wasserstoff möglich. Wieweit sich das Bild dadurch ändert, daß im Zerstäubungsfalle das auftreffende Gasmolekül ein Ion ist, läßt sich vorerst schwer sagen.

Wie früher, bezeichnet $\frac{i}{(1+C_i)}$ die Anzahl der Ionen, die sekundlich die Flächeneinheit der Kathode trifft.

Es ist vielleicht nützlich, sich die Bedeutung von (6) noch einmal in Worten klar zu machen: Die sekundlich auf die Flächeneinheit der Kathode übertragene Wärmeenergie $\frac{i}{(1+C_i)}(1-r(\bar{T}))\,U_1$ bestimmt, mit einem Proportionalitätsfaktor B multipliziert, die Anzahl der Atome, die durch den Ionenaufprall zur Sublimation befähigt werden. Wie viele von ihnen tatsächlich den Metallverband verlassen, ergibt die Multiplikation mit dem Wahrscheinlichkeitsfaktor

$$\frac{3nk}{\varkappa b}\,\nu_m \cdot e^{-\frac{q_0}{k\cdot T}-\frac{w_1(\bar{T})}{k\cdot T}},$$

in dem Verdampfungsgeschwindigkeit und Wärmeleitung Berücksichtigung finden.

Gleichung (6) erlaubt keine quantitative Auswertung, solange die Zerstäubung in der Glimmentladung und nicht im Hochvakuum mit Ionen einheitlicher Geschwindigkeit vorgenommen wird und damit der Ionenstromanteil am Glimmstrom sowie die kalorisch pro Ion auf die Kathode übertragene Energie U_1 nur näherungsweise anzugeben sind (vgl. III. Mitteilung). Jedoch gestattet (6) über die Richtigkeit der Verdampfungstheorie durch Experimente in zwei verschiedenen Richtungen zu entscheiden. Sie liefert den Zusammenhang zwischen der Zerstäubungsintensität und den Betriebsbedingungen der Glimmentladung; hier hat sie sich, wie die III. Mitteilung an Hand der experimentellen Daten der II. Mitteilung nachwies, bewährt. Sie formuliert auf der anderen Seite einen eindeutigen Zusammenhang zwischen der Zerstäubungsintensität und den Eigenschaften des Kathodenmetalls; hier scheint nach der III. Mitteilung eine Übereinstimmung erzielbar, wenn man die zur Oberflächenschichtbildung neigenden Metalle in eine besondere Reihe ordnet. Welche Reihenfolge man nach (6) erwarten sollte, zeigt Tab. 1. In ihr ist b ermittelt worden nach der Beziehung:

$$b = \sqrt[3]{\frac{M}{\varrho \cdot N_0}} \qquad \begin{aligned} M &= \text{Atomgewicht},\\ \varrho &= \text{Dichte},\\ N_0 &= \text{Avogadrosche Zahl}. \end{aligned}$$

Die Eigenfrequenz der Oberflächenatome wurde aus der Debyeschen Theorie der spezifischen Wärme berechnet mittels der

charakteristischen Temperaturen Θ.[1]) Die Sublimationswärmen sind berechnet worden als Differenz: Fester Zustand Zimmertemperatur bis dampfförmiger Zustand Zimmertemperatur mittels der im Landolt-Börnstein und in den Critical Tables gegebenen Daten für Schmelz- und Verdampfungswärme und die spezifischen Wärmen. Für die Verdampfungswärmen sind, soweit Unterlagen vorhanden waren, die nach der Hildebrandschen Regel[2]) berechneten Werte als die sichersten betrachtet worden. Trotzdem sind die Sublimationswärmen natürlich sehr unsicher, ebenso die Eigenfrequenzen.

Tabelle 1

Metall	Wärmeleitfläche $\varkappa \cdot 10^3$	Mittlerer Atomabstand $b \cdot 10^8$	Eigenschwingungen $\nu_m \cdot 10^{-11}$	Sublimationswärme pro Mol $W_s = q_a \cdot N_0$ kcal.
Hg	2	1,3	—	16,6
K	28	4,2	—	25
Na	32	3,4	35	30
Cd	22	1,3	34	30
Zn	26	1,2	48	34,5
Mg	37	2,8	—	39,5
Li	71	2,8	—	49,5
Tl	9,2	1,4	20	50
Bi	1,9	1,5	—	52
Sb	4,2	$1,4_5$	—	53
Pb	8,3	$1,4_5$	18	58
Al	48	2,5	82	66
Mn	—	1,1	—	70
Ag	100	1,2	44	73
Sn	15	1,4	—	80
Cr	—	1,1	—	80
Cu	92	$1,0_5$	65	86
Au	70	1,2	—	95
Ni	14	1,0	—	92
Fe	12	1,05	89	99
Pd	17	1,15	—	112,5
Pt	17	1,15	—	155 (?)

Aus Tab. 1 geht hervor, daß im allgemeinen entsprechend unserer Annahme in der III. Mitteilung die im Exponenten auftretende Sublimationswärme den Ausschlag gibt, daß jedoch Umordnung benachbarter Elemente durch die anderen Faktoren bewirkt werden kann (z. B. Na–Cd, Tl–Bi). Ob sie

1) Vgl. E. Schrödinger, Phys. Ztschr. 20. S. 476. 1919.
2) J. H. Hildebrand, Journ. Amer. Chem. Soc. 40. S. 45. 1918.

stattfindet, läßt sich bei den weiteren Fehlergrenzen der Daten vorerst nicht sagen.

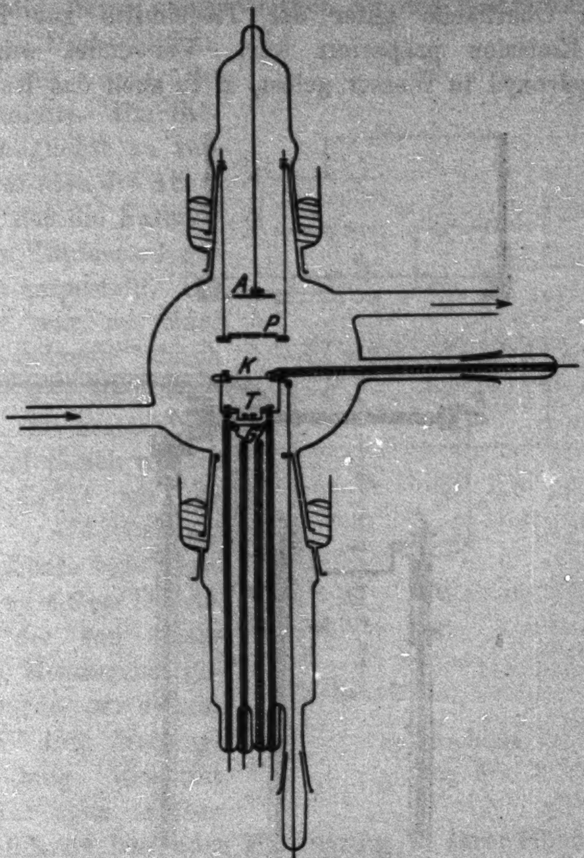
Die bisher tatsächlich von uns beobachtete Zerstäubbarkeitsreihe lautet nach der III. Mitteilung: Cd, Ag, Cu, Au, Bi, Ni, Sb, Pb, Sn, Pt, Fe, W, Zn, nach sinkender Zerstäubung geordnet. Sie muß entsprechend der schon früher ausgesprochenen Annahme bei den unedlen Metallen völlig gefälscht sein durch Oberflächenschichten, falls die Verdampfungstheorie richtig ist. So wurde die folgende Experimentaluntersuchnng angesetzt mit dem Ziel, die Zerstäubung an *reinen* Metalloberflächen zu messen.

II. Die experimentelle Methode

Die *Kathode* wurde *im Hochvakuum durch Verdampfen hergestellt*, dann die *Zerstäubung in strömendem Neon—Heliumgemisch* vorgenommen, wobei das Gas dauernd *durch gekühlte Adsorptionskohle filtriert* wurde. Damit ist die Hauptfehlerquelle aller bisherigen Messungen beseitigt, bei denen grundsätzlich die Metallkathode aus Luft in das Vakuum gebracht wird und, soweit es sich um unedle Metalle handelt, überhaupt nicht mehr von den Oberflächenschichten zu befreien ist.

Die Versuchsanordnung sah entsprechend folgendermaßen aus (Fig. 1—3): Als Zerstäubungsraum diente ein kugelförmiges Gefäß von 12 cm Durchmesser mit je einem etwa 6—7 cm weiten Schliffansatz oben und unten, um eine leichte Auswechselbarkeit der inneren Teile zu gewährleisten. Die Verdampfungsanordnung (Fig. 2) war auf dem von unten einzuführenden Innenschliff aufgebaut. Als Verdampfungsraum diente ein kleiner Topf *M* aus Jenaer Tempaxglas von 3,5 cm Innendurchmesser und 2,2 cm Höhe. Aus dem Boden war eine kreisrunde Scheibe von 1,5 cm Durchmesser ausgeschnitten. In diese Öffnung wurde ein entsprechender Tiegel *T* aus Tantal, später auch aus Nickel, von etwa 5 mm Höhe eingesetzt. Der Topf wurde getragen von zwei in den Schliffansatz eingeschmolzenen und verglasten Molybdändrähten *C* von 2 mm Stärke, die vermittelst einer Kupferhülse *D* mit Gewindeansatz durch den Boden des Topfes hindurchgeführt und mit diesem durch eine Mutter *E* verschraubt waren. Der Topfboden war durch Schleifen entsprechend vorbereitet. Mit diesen Drähten wurde auch der Tiegel *T* zum Anlegen der

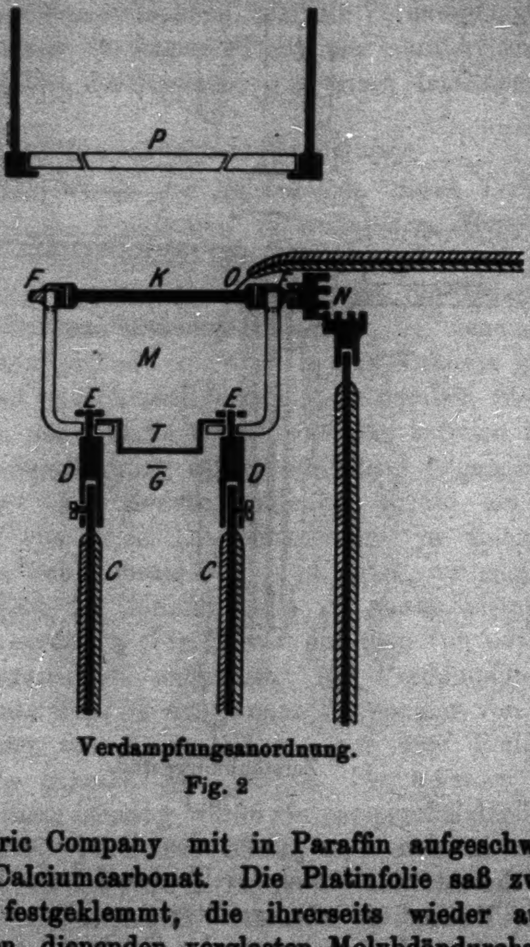
Spannung verbunden. Den oberen Abschluß des Topfes bildete ein Deckel *K*, auf dem sich das verdampfende Metall niederschlagen konnte, der also als Unterlage für die spätere Kathode diente. Der Deckel war drehbar angeordnet, die Achsen *F*



Zerstäubungsgefäß.
Fig. 1

lagerten in den dazu passenden Aussparungen des Topfes. Die Deckeloberfläche und der Topfrand befanden sich in der gleichen Ebene, um etwaige Störungen bei der Zerstäubung zu vermeiden. Ein zwischen der Topfwand und dem Deckel notwendiger Spalt war so eng, daß während der Verdampfung kein Metalldampf durch ihn hindurch treten konnte. Er erwies sich aber auch als notwendig, damit die während der Verdampfung mit einer Metallschicht bedeckten Gefäßwände nicht

am Zerstäubungsprozeß teilnehmen. Der Tiegel wurde durch Elektronenbombardement von einer Glühkathode *G* geheizt, die sich in etwa 2—3 mm Abstand unter dem Tiegel befand. Hierzu diente eine Platinfolie, 5 μ dick und 3 mm breit, die auf ihrer Oberfläche unter der Tiegelmitte zur Erzielung höherer Emission präpariert war. Verwendet wurde hier Bariumhydroxyd in Wasser gelöst, z. T. auch das Rezept der



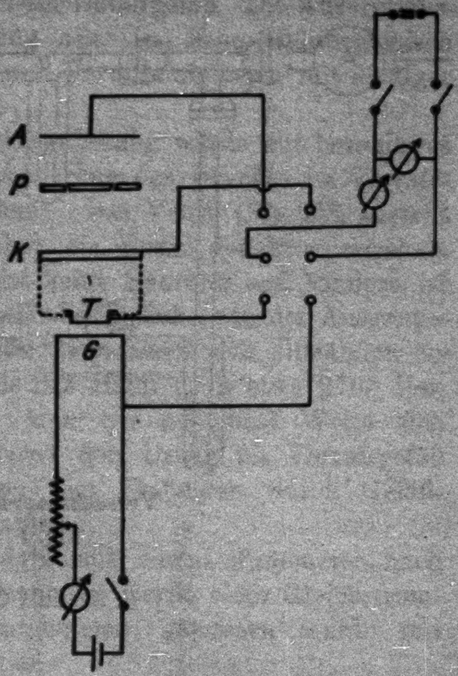
Verdampfungsanordnung.

Fig. 2

Western Electric Company mit in Paraffin aufgeschwemmte Barium- und Calciumcarbonat. Die Platinfolie saß zwischen zwei Backen festgeklemmt, die ihrerseits wieder auf den als Zuleitungen dienenden verglasten Molybdändurchschmelzungen befestigt waren.

Die Zerstäubungsanlage baute sich über der Verdampfungsanordnung auf. Demgemäß mußte die auf der Innenseite des Topfdeckels niedergeschlagene Kathode zunächst einmal herum-

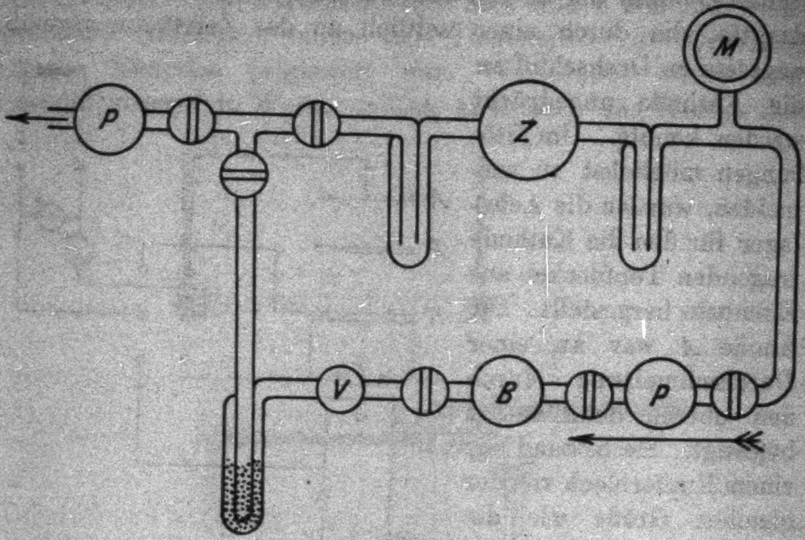
gedreht werden. Dazu saß auf einer Achse *F* des Deckels ein Zahnrad *N*, das von außen durch einen Drehschliff betätigt werden konnte. Die Kontaktgebung erfolgte durch die Spitze *O* eines bis an das äußerste Ende verglasten Molybdändrahtes, die durch einen seitlich an das Zerstäubungsgefäß angesetzten Drehschliff an die Kathode angedrückt werden konnte. Um Störungen möglichst zu vermeiden, wurden die Achslager für den die Kathode tragenden Topfdeckel aus Elfenbein hergestellt. Die Anode *A* war an einer Durchschmelzung durch den oberen Schliffansatz befestigt. Sie bestand aus einem Kupferblech von der gleichen Größe wie die Kathode. Als Auffangplatte *P* diente eine Glasscheibe von 4,5 cm Durchmesser, die von einem schmalen Messingring getragen wurde, der seinerseits an drei Messingdrähten hing, die mit einem auf dem oberen Innenschliffrand lagernden Messingring, in ihrer Höhe verstellbar, verschraubt waren. Zur Bestimmung der Beschlagsdichte wurde ein mittlerer Ausschnitt der Auffangplatte von 2,5 cm Durchmesser verwendet, der durch konischen Schliff in dem äußeren ringförmigen Teil der Platte saß und mit ihr während der Zerstäubung eine einheitliche Fläche bildete.



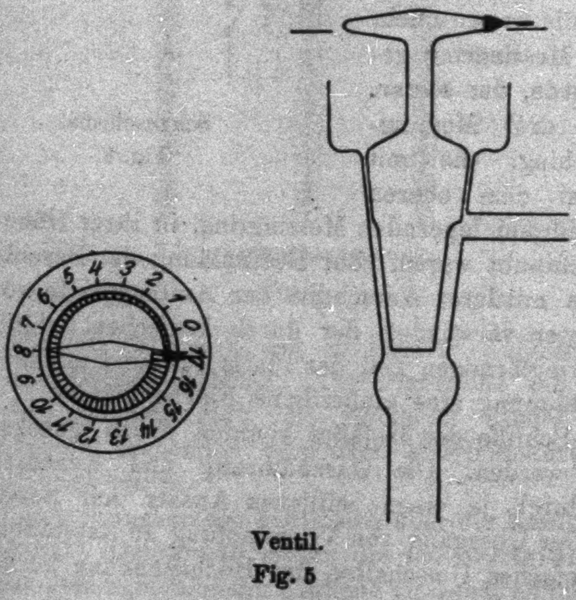
Schaltschema.
Fig. 3

Die Schliffe des Gefäßes konnten durch Quecksilber abgedichtet werden. Die Gaszuführung und Evakuierung erfolgten durch je einen seitlichen Ansatz am Zerstäubungsgefäß. Der Übergang von Verdampfung zu Zerstäubung wurde durch einfaches Umschalten der Hochspannung herbeigeführt.

Für Versuche mit einem Neon–Heliumgemisch wurde eine besondere Kreislaufanordnung verwendet, die Fig. 4 zeigt. Das in dem Vorratsgefäß *B* aufbewahrte Neon–Heliumgemisch



Versuchsanordnung.
Fig. 4



Ventil.
Fig. 5

konnte über ein Ventil *V* und durch ein mit Adsorptionskohle gefülltes Dewargefäß in die zuvor hochevakuierte Zerstäubungskammer *Z* einströmen, und wurde von hier aus vorbei an dem Manometer *M* von der Pumpe *P* in das Vorratsgefäß zurückgepumpt. Vor und hinter dem Zerstäubungsraum befanden sich noch je ein Dewargefäß. Die Adsorptionskohle wurde zur Beseitigung aller im Neon–Heliumgemisch enthaltenen Beimischungen und Verunreinigungen mit flüssiger Luft gekühlt.

Zum Zwecke der Druckregulierung wurde ein besonderes Ventil angefertigt, da eine Änderung des Druckes im Vorratsgefäß hier nicht in Frage kam. Das Ventil (Fig. 5)[1]) besteht vollständig aus Glas und hat die Form der Pumpenhähne. Das Küken des Hahnes weist keine Bohrung auf, sondern ist in seinem unteren Teil so geschliffen, daß es in der Ausgangsstellung vollständig abschließt, dann einen sich allmählich erweiternden Spalt freigibt, bis der Hahn nach etwa 270° Umdrehung ganz geöffnet ist. Man hat auf diese Weise eine Regulierbarkeit, die nur durch den Druck im Vorratsgefäß begrenzt ist, abgesehen von den Einflüssen durch Gefäßdimensionen und Pumpenleistung.

Die Druckmessung erfolgte mit einem Manometer nach Reden (bis 10^{-3} mm), die Spannung wurde einer Gleichstrommaschine (bis 5000 Volt) entnommen, gemessen wurde mit Drehspulpräzisionsinstrumenten.

An Versuchsgasen kamen Argon und ein Neon–Heliumgemisch[2]) zur Verwendung, die beide von der Linde-Eismaschinen-Gesellschaft in Höllriegelsgreuth zur Verfügung gestellt wurden.

Die Bestimmung der Beschlagsdichte erfolgte in der gleichen Weise wie bei unseren früheren Arbeiten mit einer Mikrowaage von **Sartorius**, die uns von der Notgemeinschaft überlassen wurde.

III. Die Versuchsergebnisse

a) Prüfung der Methode

Zunächst mußte festgestellt werden, ob Kathoden, die durch Verdampfung hergestellt waren, anders zerstäuben als

---

1) Vgl. auch E. **Blechschmidt**, Phys. Ztschr. **29**. S. 441. 1928.

2) Auf Grund einer Gasdichtemessung bestimmt zu etwa 83 Proz. Ne und 17 Proz. He.

gewöhnliche Bleche. Gleichzeitig war zu untersuchen, welchen Anteil die Reinheit des Füllgases hierbei hat. Als Material kam für alle diese Versuche Zink zur Verwendung, bei dem nach unseren früheren Erfahrungen ein Unterschied am ehesten in Erscheinung treten mußte. Zuerst in Argon vorgenommene Versuche zeitigten dieselben Resultate wie früher: Zn zerstäubte nur sehr schwach. Die Ursache dieses Versagens der Methode in Argon kann auf ungenügende Reinheit des Gases zurückgeführt werden, da man hier nicht mit flüssiger Luft ausfrieren kann, ohne gleichzeitig das Ar mit zu kondensieren.

Die Reinigungsmöglichkeiten für Neon und Helium sind bei weitem günstigere, da man ihnen alle Verunreinigungen durch Fremdgase nehmen kann, wenn man sie durch Adsorptionskohle strömen läßt, die mit flüssiger Luft gekühlt ist. Versuche mit einer normalen Zn-Kathode zeigten jedoch auch im Neon—Heliumgemisch keine nennenswerte Zerstäubung. Gearbeitet wurde dabei mit einer Stromstärke von 10 mA., einer Spannung von 900 Volt und einem Druck von etwa 0,2 mm. Die Versuchsdauer währte über eine Stunde. Äußerlich zeigte dieses Blech während der Glimmentladung eine grüngelbe Fluoreszenz, wie wir sie bereits in unserer früheren Arbeit als Kennzeichen für verunreinigte Oberflächen gefunden hatten. Bei den durch Verdampfung hergestellten Kathoden trat eine derartige Erscheinung dagegen niemals auf. Außerdem ergab sich bei Verwendung derartiger Kathoden von vornherein eine regelmäßige Zerstäubung. In dem zur Verdampfung verwendeten Tiegel zeigte sich übrigens bei Zn stets ein Rückstand, obwohl das Material chemisch rein sein sollte.

b) Die Fehlerquellen

Die Messungen sind mit folgenden Fehlern behaftet: Die Spannung ließ sich auf $\pm$ 2 Proz., die Stromstärke auf $\pm$ 5 Proz. konstant halten; diese Fehler kompensieren sich allerdings z. T durch Gegenläufigkeit. Die Einstellung des Gasdruckes ist damit zwangsläufig festgelegt. Nicht unerheblich ist die Ungenauigkeit, die durch die Wägung bedingt wird. Die Genauigkeit der Waage betrug $\pm$ 0,01 mg. Je nach dem spezifischen Gewicht des Metalls bewegt sich demnach der Fehler für die niedergeschlagene Menge bei einer auswertbaren Gesamt-

oberfläche von etwa 5 qcm und einer durchschnittlichen Schichtdicke von 50 $\mu\mu$ zwischen ± 4 und ± 6 Proz., für Al würde er sogar ± 18 und für Mg ± 28 Proz. betragen. Der Dunkelraum konnte auf $^1/_2$ mm genau gemessen werden. Die Fehler sind trotzdem nicht so groß, daß sie den gesuchten Effekt etwa vollständig überdecken könnten, wenn auch kleinere Umstellungen in der Reihenfolge besonders bei Metallen, die in der Reihe der Zerstäubbarkeit an sich sehr nahe beieinander stehen, sehr wohl möglich sind.

c) Die Ergebnisse

Für alle Versuche wurden Spannung und Stromstärke konstant gehalten, ferner der Abstand Auffangeplatte-Kathode (etwa 2 cm) und Auffangeplatte-Anode (8 cm). Gemessen wurden außerdem Druck und Dicke des Kathodendunkelraumes. Die Zerstäubung fand bei strömendem Gas statt, um auch Verunreinigungen durch Gasabgabe aus den Apparatteilen des Zerstäubungsraumes auf ein Minimum herabzusetzen. Die Werte für die niedergeschlagenen Mengen sind zunächst der größeren Anschaulichkeit wegen, wie in unseren früheren Arbeiten in $\mu\mu$-Schichtdicke angegeben. Sie stellen das Mittel aus jeweils einer Anzahl von Messungen dar.

Als Vergleichsmaterial diente Silber, das für die Kontrollmessungen sowohl nach vorheriger Verdampfung als auch als gewöhnliches Blech verwendet wurde. Ein durch Vorzerstäubung gereinigtes Blech gab gegenüber der verdampften Schicht innerhalb der Fehlergrenzen dieselben Resultate. Als Betriebsdaten wurden gewählt: 10 mA und 900 Volt.[1]) Höhere Werte wurden vermieden, um eine Erwärmung der Apparatur zu verhindern, die unter Umständen zu Gasabgaben hätten führen können; insbesondere würden auch bei niedrigeren Drucken solche Fremdgase einen doppelt schädlichen Einfluß ausüben.

Zink. Auf den Einfluß von Oberflächenschichten bei Zink hat bereits Kohlschütter in seiner zusammenfassenden Darstellung hingewiesen.[2]) Genauere Messungen sind allerdings

---

1) In den unter 1) und 2) zitierten Arbeiten steht an einigen Stellen bei den Angaben über die Stromstärke die Bezeichnung μ A. Es muß natürlich m A heißen.

2) V. Kohlschütter, Jahrb. d. Radioakt. u. Elektr. 9. S. 355. 1912.

erst in neuerer Zeit vorgenommen worden. In unseren Mitteilungen 2 und 3 über Kathodenzerstäubungsprobleme haben wir bereits erwähnt, daß Zn normalerweise nur sehr schwach zerstäubt, daß bei ungekühlter Kathode aber nach längerem Ionenbombardement plötzlich nach Erreichung einer bestimmten Temperatur eine sehr intensive Niederschlagsbildung einsetzt, die die bei Zerstäubung vorkommenden Intensitäten weit übertrifft. Ganz ähnliche Beobachtungen hat auch Güntherschulze[1]) gemacht. Bei diesen Versuchen kann eine einfache Sublimation durch die Erhitzung der Kathode vorliegen, es könnte auch das oben besprochene Abdestillieren der Oberflächenschicht den reinen Zerstäubungseffekt gleichzeitig freigeben.

Im Gegensatz zu diesen früheren Messungen verlief die Zerstäubung im Neon–Heliumgemisch von vornherein regelmäßig, die Schichten waren außerdem bis auf einige $\mu\mu$-Differenz, also innerhalb der Fehlergrenzen, reproduzierbar. Sie wiesen ferner ein hohes Reflexionsvermögen auf, während die bei den oben beschriebenen Versuchen entstandenen Niederschläge fast immer vollständig matt waren. Daß es sich in unserem Falle nicht um eine reine Temperaturverdampfung handeln konnte, geht daraus hervor, daß die zum Vergleich verwendete Zn-Platte bei einem zeitlich dreifachen Ionenbombardement eine nur unwesentliche Zerstäubung zeigte. Obendrein hätte sich die Zn-Platte wesentlich stärker erwärmen müssen als die auf Cu als Unterlage verdampfte Zn-Schicht, da die Zn-Platte nur halb so dick war als die entsprechende Kupferplatte.

Die erhaltenen Werte sind aus der Tab. 2, S. 1021, zu entnehmen. Die in $\mu\mu$-Schichtdicke gefundene Niederschlagsmenge ist nach dem in der III. Mitteilung gegebenen Verfahren auf die Zahl I_d der pro qcm und sec abgelagerten Atome und schließlich auf die Zahl I der pro qcm und sec von der Kathode emittierten Atome umgerechnet und auf die gleiche Aufprallspannung V_k bezogen worden. Da die Zerstäubungsintensitäten in dem hier in Frage kommenden Bereich etwa proportional V_k sind[2]), so wird eine derartige Umrechnung ohne erheblichen Fehler ein richtiges Bild geben.

1) A. Güntherschulze, Ztschr. f. Phys. 36. S. 563. 1926.

2) Vgl. hierzu Fig. 9 der Arbeit 3 von A. v. Hippel.

Die Werte in der Tab. 2 sind bezogen auf eine Aufprallspannung $V_k = 250$ Volt.

Nach der Verdampfungstheorie ist für Zn eine wesentlich bessere Zerstäubung wie für Silber zu erwarten. Wir ersehen aus der Tabelle, daß das tatsächlich zutrifft. Wenn der Wert auch hinter dem quantitativ zu erwartenden etwas zurückbleibt, so ist doch auf alle Fälle qualitativ eine gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment vorhanden. Bei einer Reihe weiterer Metalle ist die Übereinstimmung jedoch so gut, daß ein Zweifel an der Richtigkeit der theoretischen Vorstellung kaum noch möglich ist.

Cadmium. Auch Cd zeigt unter normalen Bedingungen bekanntlich einen bedeutenden Zerstäubungsverzug, in einzelnen Gasen ist eine erhebliche Zerstäubung überhaupt nicht zu erzielen, so in H und N, während in Ar der Wert wohl in der erwarteten Richtung lag, aber doch noch verhältnismäßig viel zu tief. Die Zerstäubung im Neon–Heliumgemisch einer

Tabelle 2

Die Zerstäubungsintensität in Abhängigkeit von den Materialkonstanten

Metall	p mm	D cm	$\lambda \cdot 10^8$	I_d $\mu\mu$	$\pm F$ Proz.	$I_d \cdot 10^{-13}$ Atome	$I \cdot 10^{-14}$ Atome	V_k Volt	$I \cdot 10^{-14}$ für $V_k = 250$	W_s Kilo-cal.
Cd	0,28	1,4	38	214	1	9,6	32,3	220	36,7	30
Sb	0,27	1,8	39	70	4	2,9	10,4	183	14,2	53
Bi	0,39	1,1	28	70	3	1,7	8,5	164	13,0	52
Pb	0,48	0,8	23	59	3	1,4	8,7	176	12,4	58
Zn	0,18	1,4	60	47	6	3,6	8,4	256	8,2	34,5
Ag	0,18	1,5	59	68	3	3,0	6,4	242	6,6	73
Cu	0,20	1,3	55	30	7	2,4	5,3	257	5,2	86
Mg	0,16	1,6	46	5—10[1])	100	0,7 bis 1,4	2,2 bis 4,2	182	3,0 bis 5,8	39,5
(Al	0,17	1,6	65	1[1])	100	1,9	1,4	246	0,4	66)

Konstanten: $t = 20$ min, $i = 10$ mA, $V = K$(Kathodenfall) = 900 Volt (für Sb = 1300 Volt), Abstand Auffangeplatte-Kathode: 2,0—2,2 cm, Stromdichte = 1 mA/qcm, $\lambda_0 = 1348 \cdot 10^{-8}$ cm (0°, 760 mm Hg). D = Dunkelraumdicke, λ = freie Weglänge, I_d = Beschlagsintensität in $\mu\mu$ bzw. in Atomen/qcm sec, I = Emission der Kathode in Atomen/qcm sec, V_k = Aufprallspannung in Volt, W_s = Sublimationswärme in Kilo-cal, F = Wägefehler in Proz.

1) Geschätzt.

durch Verdampfung entstandenen Kathode, zeigte in der gleichen Weise wie bei Zn von Beginn des Versuches an einen regelmäßigen Verlauf, ohne daß auch nur die Andeutung einer Verzugserscheinung vorhanden gewesen wäre. Die erzeugten Spiegel erwiesen sich als hochreflektierend. Die Intensität macht etwa den fünffachen Betrag derjenigen für Silber aus. Cd ist damit in Übereinstimmung mit der Theorie von den untersuchten Metallen das bestzerstäubende.

Zu einer gleich guten Bestätigung der Theorie führten auch die Messungen an *Antimon*, *Wismut* und *Blei*.

Die Werte von *Magnesium* weisen eine ziemlich hohe Unsicherheit auf, da die Wägungen mit einem sehr großen Fehler behaftet sind infolge des geringen spezifischen Gewichtes. Die angegebene Schichtdicke ist daher geschätzt, die daraus berechneten Intensitäten können darum nur etwas über die Größenordnung aussagen. Man sieht aber, daß auch bei diesem Metall der Wert in der erwarteten Richtung liegt. Während der Zerstäubung fehlten hier natürlich die sonst bei Magnesium so störenden Gasausbrüche, auch fehlte jede Fluoreszenz, die sich bei unseren früheren Messungen auch nach sehr langem Ionenbombardement nicht vollständig hatte beseitigen lassen.

Bei *Aluminium* war eine Verdampfung, die in nicht allzu langen Zeiträumen zur Herstellung einer ausreichend dicken Kathode geführt hätte, mit den erreichbaren Tiegeltemperaturen nicht zu erzielen. Die in der Tabelle angegebenen Werte gelten für eine Kathode aus normalem chemisch reinen Aluminiumblech. Sie besitzen daher keine wesentliche Bedeutung.

Um noch einen weiteren Kontrollpunkt zu erhalten, wurde auch *Kupfer* zerstäubt. Da der Siedepunkt von Cu oberhalb der mit der Apparatur erreichbaren Temperaturen liegt, so wurde ein Kupferblech verwendet, das durch Vorzerstäubung gereinigt war. Da sich Kupfer gegenüber der kathodischen Zerstäubung wie die Edelmetalle verhält, so dürften die erzielten Intensitäten mit den übrigen Meßresultaten vergleichbar sein.

Zinn, das ursprünglich in die Meßreihe mit einbezogen werden sollte, konnte nicht untersucht werden, da die Sublimation bzw. Verdampfung erst oberhalb von 1500° einsetzt.

Andererseits ergibt sich daraus, daß die früher an Zinn gemessenen Intensitäten unter keinen Umständen auf eine rein thermische Verdampfung zurückzuführen sind.

Unsere Apparatur enthält vorerst noch zwei Fehlerquellen, die bei den besonders empfindlichen Metallen keine völlig einwandfreien Messungen zulassen: Es ist beim Verdampfen des Metalles nicht zu verhindern, daß aus dem Schmelzmetall und den Tiegelwänden Spuren von Verunreinigungen frei werden. Es ist ferner die Unterlagsscheibe für den Metallniederschlag noch nicht ausheizbar. Das erklärt wohl sicher die noch vorliegenden Abweichungen in der vorausgesagten Reihenfolge der Metalle, während das Gesamtbild, wenn man unsere jetzt erhaltenen Resultate mit den früheren vergleicht, ganz eindeutig für die von A. v. Hippel entwickelte Verdampfungstheorie spricht.

Zusammenfassung

In der hier vorgelegten IV. Mitteilung wird zuerst die in der III. Mitteilung entwickelte Theorie der Kathodenzerstäubung erweitert. Verdampfungsgeschwindigkeit und Wärmeableitung des Kathodenmetalls, sowie der Einfluß von Oberflächenschichten finden in den Gleichungen quantitative Berücksichtigung. Ein anschließender experimenteller Teil untersucht die Zerstäubungsintensität unedler Metalle mit neuen, besseren Methoden und findet bei allen Metallen, die mit sauberen Oberflächen erhalten werden konnten, die theoretischen Voraussagen bestätigt.

Wir möchten nicht versäumen, Hrn. Geheimrat M. Wien für sein reges Interesse am Fortschreiten unserer Arbeit verbindlichst zu danken. Desgleichen schulden wir Dank der Linde-Eismaschinengesellschaft Höllriegelsgreuth für Überlassung der Edelgase, sowie der Notgemeinschaft Deutscher Wissenschaft für die uns zur Verfügung gestellte Mikrowaage.

Jena, Physikalisches Institut der Universität und
Berkeley (Cal.), Department of Physics, im April 1928.

Nachschrift bei der Korrektur

Auf zwei Beobachtungen sei noch hingewiesen, die im Rahmen der Verdampfungstheorie ihre zwanglose Aufklärung finden:

a) Wie die Verfasser schon vor drei Jahren bemerkten, wird durch das Ionenbombardement im Zerstäubungsprozeß die Kristallstruktur der Kathode zuerst wie durch Anätzen freigelegt, dann durch eine Art Trichterstruktur verwischt. Unabhängig hiervon ist darauf von V. Kohlschütter und seinen Schülern sowie von Th. Baum[1]) ausführlicher eingegangen worden. Die Erklärung erscheint jetzt sehr einfach: Die Kristallaggregate leiten die Wärme anisotrop, zerstäuben also maximal, wenn ihre thermische Hauptachse parallel zur Oberfläche liegt, während sie bei einer Orientierung senkrecht dazu der Zerstäubung am längsten widerstehen. Direkt experimentell belegt wird diese Auffassung, wie mir Hr. Dr. Goetz kürzlich in Pasadena mitteilte, durch seine Versuche an Bi-Kristallen, bei denen sich die geschilderte Richtungszerstäubung am Einzelkristall verfolgen ließ.

b) Setzt man die Wärmeleitfähigkeit einer Kathode herab, so muß entsprechend (6) bei sonst identischen Bedingungen eine verstärkte Zerstäubung eintreten. Dieser Effekt liegt offenbar bei Messungen von Hrn. Prof. Ingersoll vor, die ich vor einigen Wochen in Madison (Wisconsin) sehen durfte; es zeigte sich, daß nicht entgaste und damit schlechter leitende Kathoden stärker zerstäubten als entgaste. Prof. Ingersoll scheint auch das oben vorausgesagte Ansteigen der Zerstäubung mit der Kathodentemperatur, hervorgerufen durch Abdestillieren von Oberflächenschichten, beobachtet zu haben. v. Hippel.

1) Ztschr. f. Phys. 40. S. 686. 1927.

(Eingegangen 28. Mai 1928.)

1928 № 16

ANNALEN DER PHYSIK

VIERTE FOLGE. BAND 86

1. *Einzelstreuung von H-Kernen in festen Körpern;*

von Chr. Gerthsen

1. Einleitung

In einer früheren Arbeit[1]) habe ich gezeigt, daß bei der Reflexion von Wasserstoffkanalstrahlen an Metallen für die mit nahezu unveränderter Geschwindigkeit gestreuten Teilchen sich wesentliche Züge der Zerstreuungsgesetze der α-Strahlen bei großen Ablenkungswinkeln wiederfinden. Die Intensität der an verschiedenen Metallen gestreuten Teilchen ist dem Quadrate der Ordnungszahl und der im Kubikzentimeter enthaltenen Zahl von Atomen proportional. Für das Kraftgesetz, welches zwischen dem streuenden Atomkern und dem gestreuten Kanalstrahlenteilchen wirkt, kann man aus diesem Befunde nicht mehr schließen, als daß die wirkende Kraft der Ladung des streuenden Atomkerns proportional ist. Das Abstandsgesetz kann nur aus einer Messung der Abhängigkeit der Zahl der gestreuten Teilchen vom Ablenkungswinkel geschlossen werden. Mit α-Strahlen findet man so bekanntlich das Coulombsche Gesetz.

Messungen über die Abhängigkeit des wahrscheinlichsten Ablenkungswinkels für $\overset{+}{H}$-Kanalstrahlen beim Durchgang durch dünne Goldfolien von Schichtdicke und Teilchengeschwindigkeit sind von E. Homma[2]) durchgeführt. Die gefundenen Zerstreuungsgesetze sind scheinbar in bemerkenswerter Übereinstimmung mit den von H. Geiger für α-Strahlen gefundenen Gesetzen der Vielfachstreuung.[3])

1) Chr. Gerthsen, Ann. d. Phys. 85. S. 881. 1928.

2) E. Homma, Ann. d. Phys. 80. S. 609. 1926.

3) In der Arbeit fehlt freilich eine Angabe über die Messung der Geschwindigkeit der Teilchen. Es ist auffallend, daß die Geschwindigkeiten den Entladungsspannungen direkt proportional gesetzt werden. Wäre die Geschwindigkeit, wie zu erwarten, und von Rausch v. Traubenberg und J. Hahn an dem gleichen Rohr in einer früheren Arbeit

Die Bedingungen der Einzelstreuung von $\overset{+}{H}$-Kanalstrahlen herzustellen, ist bisher nur noch für den Durchtritt durch Gase gelungen. G. P. Thomson[1]), der ihre Streuung in Wasserstoff untersucht hat, glaubt, zeigen zu können, daß für den Zusammenstoß zweier Wasserstoffkerne das Coulombsche Gesetz keine Gültigkeit besitzt. Im Gegensatz zu ihm findet R. Conrad[2]) der jedoch nicht immer die Bedingungen für Einzelstreuung innehält, für die Streuung von $\overset{+}{H}$-Teilchen einheitlicher Geschwindigkeit in Wasserstoff freilich nur unter Einführung von Zusatzannahmen, die Gültigkeit des Coulombschen Gesetzes bestätigt.

Nach der Rutherfordschen Streutheorie ändert sich bei kleinen Winkeln die Wahrscheinlichkeit der Streuung zwischen ψ und $\psi + d\psi$ mit $1/\psi^3$; unter Voraussetzung ihrer Gültigkeit fällt also die Intensität der gestreuten Teilchen mit zunehmendem Ablenkungswinkel außerordentlich steil ab. Mit den bisher bekannten Methoden für die Messung von Kanalstrahlen war es daher auch aussichtslos, unter den Bedingungen für Einzelstreuung über große Winkelbereiche die Verteilung der gestreuten Intensität zu untersuchen. Daher mußten sich sowohl Thomson als Conrad auf sehr kleine Streuwinkel beschränken. Bei den Untersuchungen von Conrad beträgt der maximale Streuwinkel etwa $2^\circ 20'$, bei denen von Thomson sogar nur $1^\circ 10'$. Innerhalb eines solch kleinen Winkelbereichs eine sichere Entscheidung über das Zerstreuungsgesetz herbeizuführen, ist natürlich außerordentlich schwierig, und die vollkommen auseinandergehenden Ergebnisse zweier mit großer Sorgfalt durchgeführter Arbeiten zeigen, daß man sich hier an der Grenze des mit den bisherigen Mitteln des Kanalstrahlennachweises Erreichbaren befindet.

2. Der Spitzenzähler als Nachweis für Kanalstrahlen

Die Messung der Winkelabhängigkeit ließ sich über größere Bereiche nur durchführen, wenn es gelang, das ein-

---

(Ztschr. f. Phys. 9. S. 359. 1922) bestätigt, der Quadratwurzel aus der Entladungsspannung proportional, so hätte man eine Proportionalität mit $1/v^6$, also ein von dem an α-Strahlen beobachteten gänzlich abweichendes Verhalten.

1) G. P. Thomson, Ztschr. f. Phys. 46. S. 93. 1928.

2) R. Conrad, Ztschr. f. Phys. 35. S. 73. 1925; 38. S. 465. 1926.

zelne Kanalstrahlenteilchen zu beobachten, die Messung von Kanalstrahlenströmen mußte durch statistische Beobachtung der elementaren Teilchen ersetzt werden. Auch hier hat sich die universelle Verwendungsmöglichkeit des Geigerschen Spitzenzählers bewährt, der für die Beobachtung atomistischer Elementarprozesse ein unentbehrliches Hilfsmittel darstellt. Der Zähler gestattet eine quantitative Auszählung von Kanalstrahlenteilchen. Der dadurch zugänglich gewordene Intensitätsbereich entspricht einer Stromstärke von 10^{-19} bis 10^{-21} Ampere. Somit sind naturgemäß für die Untersuchung von Kanalstrahleneigenschaften eine große Zahl neuer Möglichkeiten erschlossen.

3. Ziel der vorliegenden Untersuchung

Bei den bisher von anderen Autoren durchgeführten Streuungsmessungen wurden ausschließlich Goldfolien benutzt. Infolge der hohen Ordnungszahl des Goldes ($Z = 79$) ist das Streuvermögen des Goldkerns aber so hoch, daß auch bei den dünnsten bisher benutzten Schichten die Bedingung der Einzelstreuung der $\overset{+}{H}$-Kanalstrahlen einer Geschwindigkeit von 30 bis 50 kV nicht erreicht waren. Da das Streuvermögen mit dem Quadrate der Ordnungszahl heruntergeht, so bietet die Wahl von Zerstreuungsfolien niedrigen Atomgewichts die größten Aussichten, in den Bereich der Einzelstreuung vorzudringen. Erfreulicherweise kennt man heute Verfahren, auch von leichteren Metallen so dünne Folien herzustellen, daß für sie die Verhältnisse der Einfachstreuung von $\overset{+}{H}$-Kanalstrahlen im bequem zugänglichen Geschwindigkeitsbereich gewährleistet sind.

Die Untersuchung der Einzelstreuung von Wasserstoffkanalstrahlen etwa in Nickelfolien bietet die Aussicht, die Felder im Atominneren auch in erheblich größeren Abständen vom Kern auszutasten, als dieses mit den außerordentlich harten α-Strahlen möglich ist.

Bevor aber eine solche Untersuchung unternommen werden kann, müssen die Gesetze der Zerstreuung sichergestellt werden. Es muß der Nachweis gebracht werden, daß auch für die Streuung von Wasserstoffkanalstrahlen die

Winkelabhängigkeit gültig ist, die nach der Rutherfordschen Streuformel durch die Proportionalität mit $1/\sin^4 \psi/_2$ gegeben ist und deren strenge Gültigkeit für die Streuung von α-Strahlen durch H. Geiger und E. Marsden[1]) bewiesen ist.

Da die Winkelabhängigkeit von der Reinheit der streuenden Substanz unabhängig ist, wurden die im folgenden mitgeteilten Messungen mit Zerstreuungsfolien aus Zelluloid ausgeführt. Für die chemische Zusammensetzung dieser Substanz kann eine bei Dammer[2]) angegebene Analyse zugrunde gelegt werden, aus der man die in Tab. 1 mitgeteilte prozentuale Zusammensetzung des Zelluloids ermittelt.

Tabelle 1

	Gew.-Proz.	Zahl der Grammatome/ccm für $d = 1$
Wasserstoff	5,6	0,056
Kohlenstoff	45,5	0,038
Stickstoff	7,4	0,005
Sauerstoff	41,5	0,026

Eine Diskussion des Einflusses der Mitbewegung der gestoßenen Atomkerne dieser leichten Elemente auf die Winkelabhängigkeit der gestreuten Intensität wird im Anschluß an die Darstellung der Versuchsanordnung und der gewonnenen Meßergebnisse gegeben.

4. Apparaturbeschreibung

Die Apparatur zur Erzeugung der Kanalstrahlen ist bereits beschrieben[3]) und dort in Fig. 1 dargestellt. Die durch den Schliffkonus S_1 austretenden Kanalstrahlen werden durch ein Magnetfeld in der Kammer M um 30° abgelenkt und treten durch ein Blendensystem von 1,3 mm Durchmesser in den Beobachtungsraum. Dieser besteht aus einem großen Messingtopf von 19 cm Durchmesser und 10 cm Höhe, der durch eine aufgelegte Glasplatte verschlossen wird. Im Boden befindet sich ein zentral angebrachter Schliff S_2, dessen Konus im Inneren auf einem radial angebrachten Arm den Zähler trägt. Er enthält

1) H. Geiger und E. Marsden, Phil. Mag. 25. S. 604. 1913.
2) O. Dammer, Chem. Technologie der Neuzeit, S. 55. 1911.
3) Vgl. Ann. d. Phys. 85. S. 883. 1928.

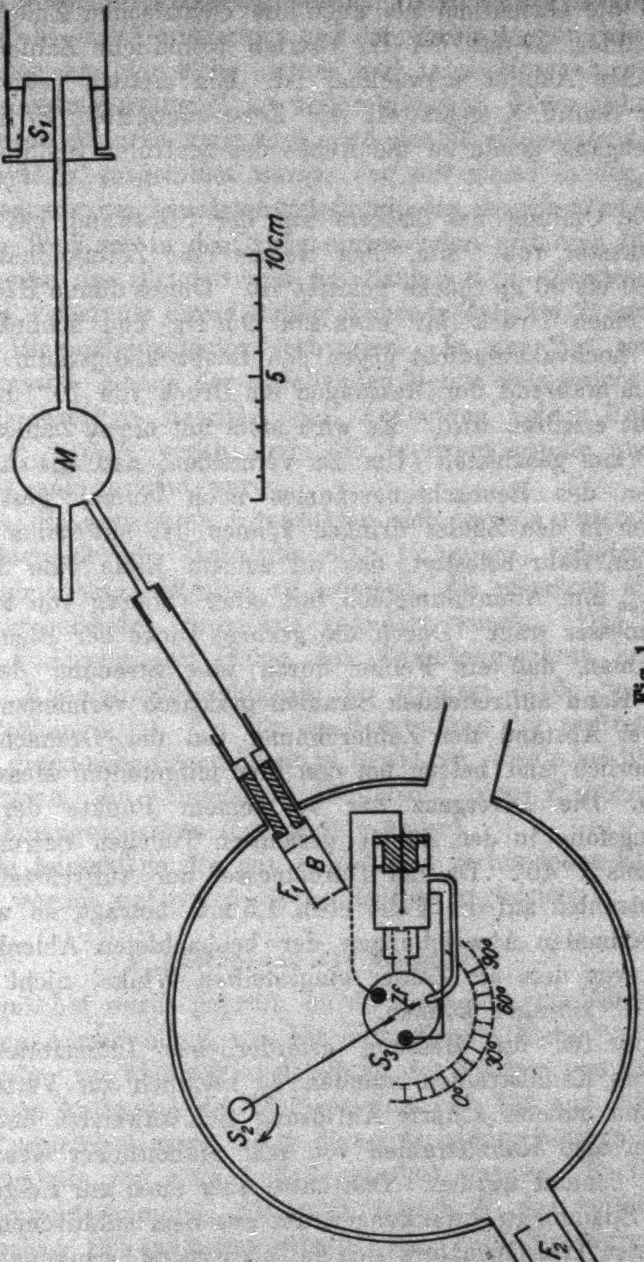


Fig. 1

sowohl die Gasleitung als auch die elektrischen Zuleitungen zum Zähler, so daß der im Betrieb befindliche Zähler über das ganze Azimut schwenkbar ist. Ein seitlich befindlicher kleiner Schliff S_2 gestattet, die Zerstreuungsfolie Zf in den Strahlengang genau in die Achse des zentralen Schliffes einzuführen.

Die Öffnung des Zählers auf der Stirnwand hat einen Durchmesser von 1 mm, über welche eine Zelluloidhaut von etwa 80 bis 90 $\mu\mu$ Stärke gekittet ist. Dieses dünne Häutchen trägt einen Druck bis etwa 200 mm Hg und schließt den Zähler hochvakuumdicht gegen den Beobachtungsraum ab, in welchem während der Messungen ein Druck von 10^{-6} mm Hg aufrecht erhalten wird. Es wird stets mit einem Zählerdruck von 80 mm gearbeitet. Um zu vermeiden, daß die an den Wänden des Beobachtungsraumes noch einmal gestreuten Teilchen in den Zähler dringen können, ist auf seiner Stirnwand ein Rohr befestigt, das an seinem Ende eine Blende aus $^2/_{100}$ mm Aluminiumblech mit einer Öffnung von 2,5 mm Durchmesser trägt. Durch die geringe Dicke der Blende erreicht man, daß ein Fehler durch eine Streuung der auf seinen Rand auftreffenden Strahlen praktisch vermieden wird.

Der Abstand der Zähleröffnung von der Drehachse ist veränderlich und betrug bei den hier mitgeteilten Messungen 33 mm. Die Divergenz der von einem Punkte der Zerstreuungsfolie in den Zähler gesandten Teilchen betrug also höchstens $1^{\circ}40'$. Da der Durchmesser der Auftreffstelle der Kanalstrahlen auf die Folie etwa 1,5 mm beträgt, so werden die maximalen Abweichungen der beobachteten Ablenkungswinkel von dem am Zähler eingestellten Winkel nicht mehr als $\pm 2^{\circ}$ betragen können.

Die für die Messung erforderlichen Intensitäten der primären Kanalstrahlen standen so reichlich zur Verfügung, daß eine äußerst scharfe Auflösung sich anwenden ließ. Es konnten also Kanalstrahlen von sehr einheitlicher Geschwindigkeit benutzt werden. Das hatte aber auch zur Folge, daß kleine Spannungsschwankungen des aus dem städtischen Netz gespeisten Transformators sich in Intensitätsschwankungen der in den Beobachtungsraum eintretenden Kanalstrahlen bemerkbar machten. Man konnte daher nicht die primär auffallenden Mengen der Zeit proportional setzen, sondern diese

mußten gesondert gemessen werden. Infolge der Zerstreuung in der Folie, der Umladungen und der Auslösung von Sekundärelektronen aus der Folie erwies sich eine Messung in dem hinteren Faradaykäfig F_2 als undurchführbar. Diese Schwierigkeit wurde dadurch umgangen, daß das Blendensystem B als Faradaykäfig ausgebildet wurde, der mit einem in der Figur nicht gezeichneten geerdeten Schutzzylinder umgeben war. Der zentrale Teil des in den Käfig eintretenden primären Bündels durchsetzte die Blenden und fiel dann auf die Zerstreuungsfolie Zf. Der als Faradaykäfig dienende Zylinder F_1 war mit einem Binantelektrometer verbunden. In der Tat war die durchtretende Menge der einfallenden Menge stets proportional, wie gleichzeitige Messung der Aufladung beider Faradaykäfige F_1 und F_2 ergab, wenn die Zerstreuungsfolie aus dem Strahlengang entfernt wurde.

Da die gestreuten Intensitäten sich in dem untersuchten Winkelbereich im Verhältnis 800 : 1 ändern, mußten, um zu vergleichbaren Werten zu kommen, die primären Mengen im entsprechenden Verhältnis geändert werden. Das wurde durch Änderung der Härte des Entladungsrohres erreicht, dessen Kanalstrahlergiebigkeit in starkem Maße von der Härte abhängig ist. Um für die Beurteilung der auftretenden Menge die gleiche Genauigkeit zu bewahren, wurde bei höheren Intensitäten die Mengenempfindlichkeit des Elektrometers durch hinzugeschaltete Kapazität geändert.

Die Ausschläge des mit dem Zähler verbundenen Elektrometers wurden auf einem Bromsilberfilm registriert.

5. Ausführung der Messungen

Zunächst wurde geprüft, ob die Zahl der vom Zähler angezeigten Atome allein von der auftreffenden Menge abhängt. So wurden bei einer Winkelstellung des Zählers von 30° für die gleiche Aufladung des Elektrometers 141, 136 und 138 Ausschläge registriert, wenn die zu dieser Aufladung nötigen Zeiten im Verhältnis von etwa 1 : 2 : 6 geändert wurden. Es ist das eine Übereinstimmung, die weit innerhalb der zulässlichen statistischen Schwankungen liegt. Die Zahl der durch die natürliche Zerstreuung bedingten spontanen Ausschläge war äußerst gering und betrug nicht mehr als im Mittel einen Ausschlag in 2—3 Minuten. Diese Zahl veränderte sich nicht,

wenn nach Entfernung der Zerstreuungsfolie aus dem Strahlengang die volle Kanalstrahlenintensität in den Beobachtungsraum trat, wie auch die Winkelstellung des Zählers innerhalb des untersuchten Winkelbereichs gewählt wurde. Es war also an der beobachteten Zahl von Ausschlägen infolge von Fehlausschlägen keine merkliche Korrektur anzubringen.

Die Messungen geschahen in der Weise, das für zwei zu vergleichende Winkelstellungen des Zählers das Binantelektrometer mit geeignet zugeschalteter Kapazität auf die gleiche Spannung aufgeladen wurde. Die Tab. 2 zeigt die an einer Folie von etwa 50 $\mu\mu$ Dicke gewonnenen Resultate. Die Geschwindigkeit der Kanalstrahlen betrug 30 kV.

Tabelle 2

1 ψ_1 gegen	ψ_2	2 Gezählte Ausschl. n_{ψ_1}	 n_{ψ_2}	3 Beobacht. $\frac{n_{\psi_1}}{n_{\psi_2}}$	4 $\frac{\sin^4 \frac{\psi_2}{2}}{\sin^4 \frac{\psi_1}{2}}$
20°	30°	1272	260	4,90	4,94
30	40	136	44	3,09	3,05
30	50	1144	$^1/_2\cdot 650$	7,09	7,14
60	90	$^4/_3\cdot 951$	318	4,0	4,0
70	90	1613	668	2,42	2,32
105	135	1884	$^1/_2\cdot 2096$	1,80	1,83
120	135	735	573	1,28	1,30

Die in der Hauptspalte 2 an einigen Ziffern angebrachten Faktoren rechnen die Zahl der durch den Versuch ermittelten Ausschläge um auf die Zahl, die der primären Intensität entspricht, auf welche die Angaben für die zugeordnete Winkelstellung sich beziehen.

Man erkennt aus dieser Tabelle eine überraschend gute Übereinstimmung mit der theoretischen Erwartung: Die in dem Winkelbereich von 20—135° gestreuten H-Teilchen sind der 4. Potenz vom Sinus des halben Ablenkungswinkel umgekehrt proportional.

Messungen an einer Zerstreuungsfolie von 100 $\mu\mu$ Dicke ergaben die gleiche Winkelabhängigkeit für die gestreute Intensität. Damit ist der experimentelle Nachweis für die Existenz der Einzelstreuung von H-Kanalstrahlen einer Geschwindigkeit von 30 kV in Zelluloidfolien bis zu 100 $\mu\mu$ Dicke gebracht.

6. Diskussion des Einflusses der Mitbewegung der gestoßenen Atomkerne auf die beobachtete Winkelverteilung

Es muß noch der Nachweis geführt werden, daß die Berücksichtigung der Mitbewegung des gestoßenen Atomkerns, der einen Teil des Impulses vom stoßenden Kanalstrahlenteilchen übernimmt, keine merkliche Änderung an den zugrunde gelegten Verhältnissen bedingt.

Die Berücksichtigung der Impulsübertragung auf den Kern führt nach C. G. Darwin[1]) zu folgenden Formeln:

a) die Kernmasse M sei größer als die Masse m des stoßenden Teilchens, $M > m$

$$(1\,\mathrm{a})\quad d N_M = N x\, d\Omega\, n \frac{1}{V^4} \frac{Z^2 e^4}{m^2}\, {}^1/_4 \left(\operatorname{cosec}^4 \frac{\psi}{2} - 2\left(\frac{m}{M}\right)^2 + \cdots\right).$$

b) $M = m$

$$(1\,\mathrm{b})\quad d N_m = N x\, d\Omega\, n \frac{1}{V^4} \frac{e^4}{m^2}\, 4 \cos\psi \operatorname{cosec}^4 \psi (1 + \operatorname{tg}^4 \psi).$$

Hier bedeuten N die Zahl der auffallenden, dN die Zahl der in den Raumwinkel d Ω gestreuten Teilchen, e die Elementarladung, Z die Ordnungszahl, V die Geschwindigkeit des stoßenden Teilchens, ψ den Ablenkungswinkel und x die Dicke der durchsetzten Schicht, die im Kubikzentimeter n Atome enthält.

Für den Stoß gegen die schweren Atomkerne ist also von den 4. Potenzen der Cosecanten des halben Ablenkungswinkels der Ausdruck $2\left(\frac{m}{M}\right)^2$ zu subtrahieren. Man rechnet leicht nach, daß die in der letzten Spalte der Tab. 2 angegebenen Zahlen auch bei den größten Winkeln für das leichteste der gestoßenen schweren Atome, den Kohlenstoff, noch nicht einmal um 5 Promille verändert werden.

Etwas eingehenderer Diskussion bedürfen die Verhältnisse bei dem Zusammenstoß der H-Teilchen mit den im Zelluloidhäutchen enthaltenen Wasserstoffatomen. Die auf gleiche Zahl streuender Teilchen von der Masse m und M, letztere mit der Kernladung Ze, bezogenen, unter dem Ablenkungswinkel gestreuten Mengen verhalten sich nach Gleichungen (1 a) und (1 b) wie folgt

$$(2)\quad \frac{d N_M}{d N_m} = \frac{Z^2 \operatorname{cosec}^4 \frac{\psi}{2}}{16 \cos\psi \operatorname{cosec}^4 \psi (1 + \operatorname{tg}^4 \psi)}.$$

1) C. G. Darwin, Phil. Mag. 27. S. 499. 1914.

Führt man für einen Ablenkungswinkel $\psi = 30^0$ und Zelluloid, für dessen Zusammensetzung die Angaben der Tab. 1 zugrunde gelegt werden, die Rechnung durch, so erkennt man, daß auf 306 in diesen Winkelbereich gestreute Teilchen fünf an Wasserstoffkernen abgelenkte Teilchen, also etwa 1,6 Proz. der Gesamtzahl entfallen. Für $\psi = 20^0$ beträgt der Anteil an Teilchen, die an Wasserstoffatomen gestreut sind, 1,4 Proz. Das in Spalte 4 mitgeteilte Verhältnis wäre daher durch das Verhältnis

$$\frac{\frac{1}{\sin^4 \frac{\psi_1}{2}}(1 + 0{,}014)}{\frac{1}{\sin^4 \frac{\psi_2}{2}}(1 + 0{,}016)} = \varrho \cdot 0{,}998$$

zu ersetzen. Auch hier wird also eine Korrektur vollkommen zu vernachlässigen sein, da sie weniger als 2 Promille des angegebenen Verhältnisses ausmacht. Ganz entsprechend überlegt man, daß für $\varrho_{M,30,50}$ eine Korrektur anzuwenden ist, die zwischen 0,5 und 1 Proz. liegt.

Mit zunehmendem Winkel nimmt nun freilich die Zahl der von einem Zusammenstoß mit einem Wasserstoffatom herrührenden H-Teilchen wieder zu; zu den abgelenkten primären treten gestoßene Wasserstoffatome des Zelluloids.[1]) Da aber die Geschwindigkeit dieser in der Richtung ψ fliegenden H-Teilchen aus Energie- und Impulserhaltungsrücksichten $V \cos \psi$ ist, so nimmt mit zunehmendem Ablenkungswinkel auch ihre Energie sehr stark ab, so daß sie aus diesem Grunde bald nicht mehr die Zerstreuungsfolie verlassen bzw. die Abschlußfolie des Zählers durchsetzen können und daher nicht mehr zur Registrierung gelangen. Jenseits von 90^0 kommen nur solche Teilchen in Frage, die an den schweren Atomkernen

1) Bei 60^0 müßten sie schon 14 Proz. aller beobachteten Teilchen ausmachen. Die Geschwindigkeit dieser Teilchen beträgt aber nur noch 7,5 kV. Aus früheren nicht veröffentlichten Messungen können wir schließen, daß für die Geschwindigkeit von 7 kV. höchstens der 5. Teil dieser Atome die Zelluloidfolien zu durchdringen vermögen, außerdem ist es durchaus möglich, daß der Wirkungsgrad des Zählers für so langsame Teilchen erheblich nachläßt. Die Energie der unter 70^0 gestreuten Atome liegt etwas unter 3,5 kV; nach unseren früher gemachten Erfahrungen werden sie überhaupt nicht mehr zum Verlassen der Zerstreuungsfolie bzw. zum Eintritt in den Zähler befähigt sein.

gestreut sind, da eine Rückwärtsstreuung an Wasserstoffkernen nach der Stoßmechanik ausgeschlossen ist.

7. Experimentelle Ermittlung des Verhältnisses der Zahl der gestreuten Teilchen zur Zahl der einfallenden Teilchen

Der Bruchteil der Gesamtzahl von Teilchen, welche bei der Durchquerung der Folie in den Raum zwischen den beiden Kegeln mit den Öffnungswinkeln ψ_1 und ψ_2 abgelenkt werden, beträgt

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{\pi}{4} x \left(\operatorname{ctg}^2 \frac{\psi_1}{2} - \operatorname{ctg}^2 \frac{\psi_2}{2}\right) \sum ni\, b^2 i \tag{3}$$

wo ni die Zahl der Atome der i-ten Art im Kubikzentimeter bedeutet und bi den nächsten Abstand angibt, auf den bei zentralem Stoß die Teilchen bei der gegebenen Anfangsgeschwindigkeit gegen den Atomkern der i-ten Art herangeschossen werden können.

Wir wählen als Ablenkungswinkel den Winkel 90°, weil wir es dann allein mit den an *C*, *N* und *O* gestreuten Teilchen zu tun haben. Es sind dann gemäß den mitgeteilten Abmessungen des Apparats

$$\psi_1 = 90^0 - 50', \qquad \psi_2 = 90^0 + 50'.$$

Das Häutchen von der Dicke $5 \cdot 10^{-6}$ cm war unter einem Winkel von 45° in den Strahlengang gestellt. Aus der in der Tab. 1 angegebenen Zahl von Grammatomen im Kubikzentimeter findet man:

$$\sum ni\, b^2 i = 44{,}7.$$

Durch Einsetzen dieser Werte in (3) erhält man

$$\frac{\Delta N}{N} = 15{,}5 \cdot 10^{-6}.$$

In die Zähleröffnung tritt hiervon jedoch nur der Bruchteil $3{,}8 \cdot 10^{-3}$, so daß von *N*-Atomen des primären Strahls

$$\underline{\Delta N_z = N \cdot 0{,}6 \cdot 10^{-7}}$$

vom Zähler angezeigt werden sollten.

Beobachtet wurden unter den angegebenen Bedingungen 310 Ausschläge, wenn das mit dem Faradaykäfig F_1 und einer zugeschalteten Kapazität von $^1/_{100}$ μF verbundene Binantelektrometer auf 0,34 Volt aufgeladen wurde. Der 5,8. Teil der in F_1 aufgefangenen Menge tritt durch die Blendenöffnung. Man

berechnet leicht, daß von N auf die Zerstreuungsfolie auffallenden Atomen

$$\Delta N_s = N \cdot 0{,}8 \cdot 10^{-7}$$

Atome vom Zähler angezeigt worden sind. Man kann bei der Unsicherheit, die über die Zusammensetzung des benutzten Zelluloid und seine willkürlich gleich 1 gesetzte Dichte herrscht, wohl keine bessere Übereinstimmung mit der Theorie erwarten.

Wir glauben aber durch diese Übereinstimmung auch gezeigt zu haben, daß der Wirkungsgrad des von uns benutzten Zählers nahe an 1 liegt. Gerade die hier mitgeteilten Messungen der Zerstreuung an dünnen Zelluloidhäutchen zeigen, daß der Bruchteil der durch Rückwärtsstreuung verloren gehenden neben den das Verschlußhäutchen durchsetzenden Strahlen völlig zu vernachlässigen ist. Daß aber auch kleine Ionenmengen vom Zähler mit einem Wirkungsgrad nachgewiesen werden, der je nach den individuellen Eigenschaften des Zählers zwischen 0,5 und 1 liegt, hat M. Steenbeck[1]) für absorbierte Strahlungsquanten der K-Strahlung des Chroms und des Kupfers nachgewiesen. Zweifellos liegen die Verhältnisse in dem von uns benutzten Zähler noch günstiger.

8. Zusammenfassung

Der Nachweis einzelner Kanalstrahlenteilchen wurde durch die Anwendung des Geigerschen Spitzenzählers ermöglicht.

Hierdurch konnte die Einzelstreuung von Wasserstoffkanalstrahlen untersucht werden. Die Winkelabhängigkeit der in verschiedene Richtungen und die absolute Zahl der in einen bestimmten Raumwinkel gestreuten Atome wird mit sehr guter Übereinstimmung durch die Rutherfordsche Streuformel wiedergegeben.

Hrn. Prof. Kossel sowie Hrn. Prof. Geiger möchte ich für das meiner Arbeit entgegengebrachte Interesse herzlich danken. Hr. cand. phys. H. Hansen hat mich in dankenswerter Weise bei der Ausführung von Messungen unterstützt.

Kiel, Physik. Instit. d. Univers., den 8. Juni 1928.

1) W. Kossel u. M. Steenbeck, Ztschr. f. Phys. 42. 832. 1927.

(Eingegangen 11. Juni 1928)

2. *Folgerungen aus der atomistischen Konstitution der Lichtenergie;*
von J. Stark

Aus mehreren Erfahrungen läßt sich folgern[1]), daß die elektromagnetische Energie des Lichtes in der Form von individuellen Körpern raumzeitlich verteilt ist, welchen eine bestimmte Frequenz n und ein bestimmter Energiebetrag $h \cdot n$ (h Plancksche Konstante) eigentümlich ist. An anderer Stelle[1]) habe ich den strukturellen und genetischen Zusammenhang zwischen einem Lichtwirbel und dem elektromagnetischen Feld eines Elektrons (Quantenwirbel) dargelegt; hier sei auf Folgerungen hingewiesen, die sich aus der individuellen Struktur der Lichtenergie ergeben.

Da die Energie eines Lichtwirbels ausschließlich durch seine Frequenz bestimmt ist, so dürfen wir wohl folgern, daß Lichtwirbel, welche zwar von verschiedenen Emissionsquellen kommen, aber gleiche Frequenz und gleiche Polarisation (Winkel zwischen Fortpflanzungsachse und Drehachse) haben, eine kongruente Struktur besitzen. Gleichfrequente und gleichpolarisierte Lichtwirbel tragen also in ihrer Struktur keine Erinnerung an ihre Emissionsquellen mit sich. Hieraus folgt weiter, daß der Vorgang der Emission, in welchem sich ein Lichtwirbel aus den elektromagnetischen Feldern von Elektronen und Archionen ablöst, bei gleicher Frequenz und Polarisation in verschiedenen Emissionsquellen der gleiche ist. Diese Übereinstimmung gilt auch für die Zeitdauer dieses Vorganges. Ob also ein Lichtwirbel beim Schwanken eines Elektrons von einer höheren nach einer niedrigeren Gleichgewichtslage an einem Atom (Frequenz eines Serienspektrums) oder beim Stoß

---

1) J. Stark, Atomstruktur und Atombindung, Polytechnische Buchhandlung A. Seydel, Berlin 1928.

eines Kathodenstrahlelektrons auf ein Atom (Frequenz eines kontinuierlichen Spektrums) emittiert wird, in beiden Fällen ist die Emissionszeit und die Struktur der emittierten Lichtwirbel die gleiche, wenn diese gleiche Frequenz und gleiche Polarisation haben. Gemäß dieser Auffassung können die Abklingzeiten, welche W. Wien[1]) und H. Kerschbaum[2]) an Kanalstrahlen für Serienlinien ermittelt und für angenähert gleich große Frequenzen verschieden groß gefunden haben, nicht die Zeitdauer der Ablösung der Lichtenergie aus dem elektromagnetischen Atomfeld charakterisieren, sondern sie beschreiben die unmittelbare Vorgeschichte dieses Vorganges im Durchschnitt über das Aggregat der an der Emission beteiligten Atome.

Die vorstehende Folgerung ist im Einklang mit dem Bild, das ich von dem elementaren Vorgang der Lichtemission in meiner Schrift über die Atomstruktur entworfen habe.

Eine weitere Folgerung betrifft die Struktur der Lichtenergie in dem Falle, daß sie von einem bewegten Atom (Geschwindigkeit v) emittiert wird. Gemäß der Ätherwellentheorie ist die Länge der Kugelwelle, welche von einem bewegten Emissionszentrum weg nach allen Seiten sich ausbreitet, für eine jede Emissionsachse abhängig von dem Winkel zwischen dieser Achse und der Geschwindigkeitsachse; es werden gleichzeitig alle Frequenzen zwischen $n_0\left(1+\frac{v}{c}\right)$ und $n_0\left(1-\frac{v}{c}\right)$ emittiert. Hierbei ist v die Geschwindigkeit des emittierenden materiellen Körpers in bezug auf das als ruhend angenommene Lichtwellenmedium Äther, n_0 die für $v = 0$ emittierte Frequenz.

Gemäß der von mir vertretenen Auffassung von der atomistischen Konstitution der Lichtenergie wird auch in diesem Falle nur eine einzige Frequenz emittiert, nämlich die Frequenz $n_0\left(1+\frac{v}{c}\cos\varphi\right)$, worin φ der Winkel zwischen der Geschwindigkeitsrichtung und der Emissionsrichtung oder $v\cos\varphi$ die Geschwindigkeitskomponente nach der Emissions-

1) W. Wien, Ann. d. Phys. **60**. S. 597. 1919; **66**. S. 229. 1920; **73**. S. 483. 1924; **83**. S. 1. 1927,

2) H. Kerschbaum, Ann. d. Phys. **79**. S. 465. 1926; **83**. S. 287. 1927; **84**. S. 930. 1927.

richtung ist. Gemäß dieser Auffassung stellt sich die Frequenz und somit die Energie des zur Emission kommenden Lichtwirbels auf eine Geschwindigkeit des emittierenden Körpers ein. Damit diese Einstellung erfolgen kann, muß für die beiden Körper eine Festsetzung darüber bestehen, was als Geschwindigkeit des emittierenden Körpers zu gelten hat. Die bisherige Erfahrung legt folgende Antwort auf die vorstehende Frage nahe, unter Verzicht auf die Hilfsvorstellung des Äthermediums.

Ein kugelförmiger Körper soll an allen Stellen seiner Oberfläche chemisch und physikalisch gleich beschaffen sein; er soll in zeitlich konstanter Stärke Licht emittieren; außer von seiner eigenen Gesamtstrahlung E soll er von der Strahlung keines anderen materiellen Körpers eine Kraft erfahren. Es soll die Kraft $\mathfrak{K}$ auf den Körper ermittelt werden, welche er von seiten seiner eigenen Strahlung E erfährt, und zwar im Unterschied von dem Falle, daß seine Strahlung Null ist. Aus den Werten von E, $\mathfrak{K}$ und der Lichtgeschwindigkeit c kann dann die eigene Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des Körpers, welche die Wechselwirkung zwischen ihm und seiner Lichtemission bestimmt, berechnet werden gemäß der Beziehung:

$$\mathfrak{K} = -\frac{\mathfrak{v}}{c^2} E.$$

Die im Vorstehenden definierte Eigengeschwindigkeit eines Körpers kann man auch als absolut bezeichnen, insofern sie allein auf den Körper und seine Eigenstrahlung, unabhängig von einem weiteren materiellen Körper, bezogen ist und den absoluten Betrag der Energie des Körpers mitbestimmt. Sie ist identisch mit der sogenannten absoluten Geschwindigkeit in bezug auf den Lichtäther, die ich noch in meiner Axialitätsschrift[1]) der Definition des absoluten Dopplereffektes zugrunde legte. Wie ich in dieser Schrift gezeigt habe, läßt sich an der Frequenz der Strahlung in der optischen Beziehung zwischen zwei materiellen Körpern mit Hilfe des beobachtbaren Dopplereffektes nicht die absolute Geschwindigkeit eines der zwei

---

1) J. Stark, Die Axialität der Lichtemission und Atomstruktur, Polytechnische Buchhandlung A. Seydel, Berlin 1927.

Körper, sondern nur ihre relative Geschwindigkeit nachweisen. Dagegen wird es einmal möglich sein, die absolute oder eigene Geschwindigkeit eines Körpers, die er gemeinsam mit der Erde besitzt, aus der Messung der Kraft $\mathfrak{K} = -\frac{\mathfrak{v}}{c^2} E$ auf einen emittierenden Körper innerhalb eines Laboratoriumsraumes zu ermitteln, sobald eine hinreichend empfindliche Methode zur Messung dieser Kraft gefunden ist.

Ullersricht bei Weiden, Oberpfalz.

(Eingegangen 20. Juni 1928

---

3. *Über das Verhalten der radiotelegraphischen Wellen in der Umgebung des Gegenpunktes der Antenne und über die Analogie zu den Poissonschen Beugungserscheinungen;*

von Johann Gratsiatos

§ 1. Einleitung

Das Problem der Ausbreitung der Wellen der drahtlosen Telegraphie über die Erdkugel auf Grund der Maxwellschen Gleichungen ist in den letzten 20 Jahren von verschiedenen Autoren mit verschiedenen Resultaten behandelt worden.

Die Durchführung der Rechnung im Falle der vollkommen leitenden Erde ergibt für das elektrische Potential, aus welchem das elektromagnetische Feld abgeleitet wird, die Reihe:

$$u = \frac{2i}{\varkappa a r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\zeta_n(\varkappa r)}{Z_n(\varkappa a)} P_n(\cos\vartheta). \tag{1}$$

Hier ist a der Erdradius, $\varkappa = \frac{2\pi}{\lambda}$ (λ = Wellenlänge), r und ϑ die Polarkoordinaten des Aufpunktes;

$$\zeta_n(\varkappa r) = i\sqrt{\frac{\pi}{2\varkappa r}}\, H^1_{n+\frac{1}{2}}(\varkappa r),$$

wo $H^1_{n+\frac{1}{2}}$ die erste Hankelsche Funktion vom Index $n + \frac{1}{2}$

und $Z_n(\varkappa r) = \frac{d}{d(\varkappa r)}\left(\varkappa r\, \zeta_n(\varkappa r)\right)$.

Um die Lösung zu diskutieren, muß man aber obige Reihe wegen ihrer schlechten Konvergenz transformieren, was ziemlich lange Rechnungen erfordert und die verschiedenen Autoren zu ganz verschiedenen Ergebnissen geführt hat.

So fanden Poincaré[1]), Nicholson[2]), und Macdonald[3]), daß die Amplitude der Wellen von ϑ exponentiell abhängt und

1) H. Poincaré, Rendiconti Palermo **29**. 1910.

2) J. W. Nicholson, Phil. Mag. **20**. S. 157. 1910; **21**. S. 62. 1910.

3) H. M. Macdonald, Proc. Roy. Soc. **90**. S. 50. 1914.

infolgedessen sehr stark adgedämpft wird. Für den Dämpfungskoeffizienten gab Poincaré keinen numerischen Wert. Bei Nicholson und Macdonald war die Dämpfung so stark, daß die praktischen Ergebnisse der drahtlosen Telegraphie nicht erklärt werden konnten.

March[1]) benutzte eine Integraldarstellung willkürlicher Funktionen auf der Kugel und brachte dadurch das elektrische Potential auf die Form eines bestimmten Integrals. Die approximative Berechnung des letzteren schien für u einen Ausdruck ohne exponentielle Dämpfung zu geben. Durch eine etwas verschiedene Annäherung fand Rybczinsky[2]) wieder eine Dämpfung, wobei aber der Dämpfungskoeffizient viel kleiner war als bei Macdonald.

Love[3]) veröffentlichte einen zusammenfassenden Bericht, in welchem er die Richtigkeit der Marchschen Integraldarstellung bezweifelte. Er berechnete numerisch die Reihe (1) für die Wellenlänge $\lambda = 5$ km und verschiedene Werte von ϑ und fand Zahlenwerte, die mit Macdonalds Formel übereinstimmten.

Die erste einwandfreie Methode zur Diskussion der Reihe (1) hat Watson[4]) angegeben. Er hat die Reihe in ein komplexes Integral transformiert, das sich näherungsweise in eine schnell konvergierende Reihe entwickeln läßt. Auf Grund der letzteren läßt sich dann das Potential leicht diskutieren.

In einer zweiten Abhandlung hat Watson[5]) dasselbe Problem unter Annahme einer leitenden oberen Luftschicht (Heavisideschicht) behandelt. Er konnte zeigen, daß wenn die Heavisideschicht als unvollkommener Leiter angesehen wird, die Ergebnisse der Erfahrung völlig erklärt werden können. Während sich nämlich aus der früheren Theorie ein zu großer Dämpfungskoeffizient ergibt, erhielt Watson unter geeigneten Annahmen über die Heavisideschicht eine den Beobachtungen entsprechende Dämpfung.

---

1) H. W. March, Diss. München 1911.
2) W. v. Rybczinsky, Ann. d. Phys. 41. S. 191. 1913.
3) A. E. H. Love, Phil. Trans. Roy. Soc. A. 215. S. 105. 1915.
4) G. N. Watson, Proc. Roy. Soc. A. 95. S. 83. 1918.
5) G. N. Watson, Proc. Roy. Soc. A. 95. S. 546. 1919.

Laporte[1]) hat endlich gezeigt, daß die Marchsche Integraldarstellung mit der Watsonschen komplexen Integraldarstellung identisch ist, nur ist die von March und Rybczinsky benutzte Approximation auf kleine Entfernungen vom Sender beschränkt und gibt daher, allgemein angewendet, unrichtige Resultate, woraus sich die Abweichungen obiger Autoren erklären.

In dieser Arbeit, die ich auf Veranlassung von Hrn. Professor Sommerfeld unternahm, wird das elektromagnetische Feld einer linearen Antenne in der Umgebung des Antipodenpunktes des Senders abgeleitet und diskutiert. Die Formel, welche für das elektrische Potential u gewonnen wird, zeigt ein starkes Anwachsen desselben in der Umgebung der Stelle $\vartheta = \pi$, da sie den Faktor $\frac{1}{\sqrt{\sin \vartheta}}$ enthält. Bei der Ableitung dieser Formel wird allerdings von der asymptotischen Darstellung der Kugelfunktion $P_n(-\cos\vartheta)$ Gebrauch gemacht, welche für $\vartheta = \pi$ nicht mehr gültig ist. Das Anwachsen des Potentials deutet aber immerhin auf die Existenz eines Gegenpols hin, wo das Potential zwar nicht unendlich groß wird, wohl aber ein Maximum besitzt und infolgedessen eine Konzentration von elektromagnetischer Energie stattfindet. Die Diskussion zeigt, daß dieses Maximum (sowie ein Maximum der elektrischen Feldstärke) tatsächlich existiert, daß wir es also mit einer Beugung der elektromagnetischen Wellen durch die Erdkugel und mit einer Verstärkung derselben im Antipodenpunkte des Senders zu tun haben. Diese Erscheinung wird dann mit den Beugungserscheinungen hinter einem runden undurchsichtigen Schirme, den sogenannten Poissonschen Beugungserscheinungen verglichen. Es wird eine große Ähnlichkeit zwischen beiden festgestellt. Hierbei wird von der Berücksichtigung einer atmosphärischen Inhomogenität (Heavisideschicht) abgesehen.

Wir knüpfen an die Darstellung an, die Hr. Professor Sommerfeld[2]) kürzlich gegeben hat, der wir auch in den Bezeichnungen folgen.

---

1) O. Laporte, Ann. d. Phys. 70. S. 595. 1923.

2) Riemann-Webers Differentialgleichungen der Physik, II. Teil, Braunschweig 1927 S. 583.

§ 2. Ableitung des elektrischen Potentials

Die Sendeantenne wird, wie gewöhnlich, zu einem vertikal und harmonisch schwingenden elektrischen Dipol idealisiert.

Wir benutzen Polarkoordinaten r, ϑ, φ, wobei der Koordinatenanfangspunkt mit dem Erdmittelpunkt die Achse $\vartheta = 0$ mit der Dipolachse zusammenfällt.

Das elektromagnetische Feld in der Luft berechnet sich aus einem Potential u durch die Gleichungen:

$$(2)\quad \begin{cases} \mathfrak{E}_r = \varkappa^2 r u + \dfrac{\partial^2 (r u)}{\partial r^2}, & \mathfrak{E}_\vartheta = \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial^2 (r u)}{\partial r \, \partial \vartheta}, \quad \mathfrak{E}_\varphi = 0, \\ \mathfrak{H}_r = \mathfrak{H}_\vartheta = 0, & \mathfrak{H}_\varphi = -\dfrac{i c}{\omega} \varkappa^2 \dfrac{\partial (r u)}{\partial \vartheta}. \end{cases}$$

Hier ist $\mathfrak{E}$ die elektrische, $\mathfrak{H}$ die magnetische Feldstärke, $\omega = \varkappa c$ die Kreisfrequenz der Dipolschwingung. Es wurde für die Luft die Dielektrizitätskonstante ε und die magnetische Permeabilität μ gleich 1 gesetzt, die elektrische Leitfähigkeit $\sigma = 0$ und der Zeitfaktor $e^{-i \omega t}$ überall weggelassen.

Wenn noch die Erde als idealer Leiter mit $\sigma = \infty$ und $\mu = 1$ und der elektrische Dipol als auf der Erdoberfläche befindlich angenommen wird, so läßt sich u durch die schon angeführte Reihe darstellen:

$$(1)\quad u = \frac{2 i}{\varkappa a r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\zeta_n(\varkappa r)}{Z_n(\varkappa a)} P_n(\cos \vartheta).$$

Diese Reihe wird durch Anwendung des Residuensatzes in das komplexe Integral verwandelt:

$$(3)\quad u = \frac{1}{\varkappa a} \int t \, dt \, \frac{\zeta_{t-1/2}(\varkappa r)}{Z_{t-1/2}(\varkappa a)} \, \frac{P_{t-1/2}(-\cos \vartheta)}{\cos \pi t},$$

genommen längs einer Schleife S um die positiv reelle t-Achse, oder längs einer Parallelen zur reellen t-Achse, oberhalb derselben (Fig. 1). Durch Verlegung des letzten Integrationsweges ins Unendliche und nochmalige Anwendung des Residuensatzes läßt sich das Integral (3) in die Reihe transformieren

$$(4)\quad u = \frac{2 \pi i}{\varkappa a} \sum_{n=0}^{\infty} t_n \frac{\zeta_{t_n - 1/2}(\varkappa r)}{\left\{\dfrac{d}{dt} Z_{t-1/2}(\varkappa a)\right\}_{t = t_n}} \cdot \frac{P_{t_n - 1/2}(\cos \vartheta)}{\cos \pi t_n}.$$

t_n bedeutet die n-te Wurzel von $Z_{t-1/2}(\varkappa a)$, als Funktion von t betrachtet, und zwar die in der positiv-imaginären t-Ebene gelegene, ϑ' ist gleich $\pi - \vartheta$ gesetzt.

Die Wurzeln t_n ergeben sich angenähert aus der asymptotischen Darstellung von $Z_{t-1/2}(\varkappa a)$ für große Werte des Argu-

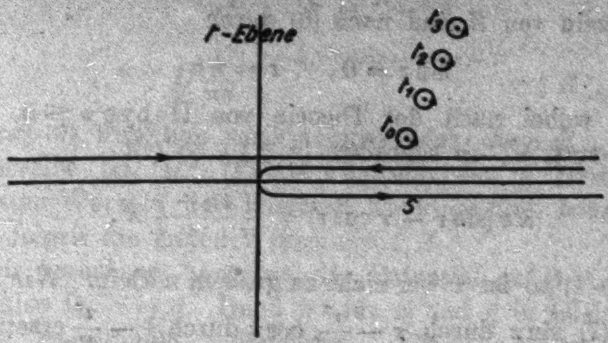


Fig. 1

mentes und des Index. Zunächst gilt für $H_t^1(x)$ die asymptotische Darstellung

$$(5)\qquad H_t^1(x) = -\frac{2i}{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\sin\tau\right)^{1/2}}\cos\left\{\frac{\pi}{4} + (\sin\tau - \tau\cos\tau)\right\},$$

welche nach Debye[1]) aus der Integraldarstellung von $H_t(x)$ durch die Methode der Sattelpunkte gewonnen wird. Die Lage des Sattelpunktes τ in der Integrationsebene folgt aus der Gleichung

$$\cos\tau = \frac{t}{x}\,.$$

Aus (5) ergibt sich als asymptotische Darstellung für $\zeta_{t-1/2}(\varkappa r)$ und $Z_{t-1/2}(\varkappa a)$:

$$(6)\quad\left\{\begin{aligned} \zeta_{t-1/2}(\varkappa r) &= i\sqrt{\frac{\pi}{2\varkappa r}}\,H_t^1(\varkappa r)\\ &= \frac{2}{\varkappa r(\sin\tau')^{1/2}}\cos\left\{\frac{\pi}{4} + \varkappa r(\sin\tau' - \tau'\cos\tau')\right\}\\ Z_{t-1/2}(\varkappa a) &= \frac{d}{d(\varkappa a)}\left(\varkappa a\,\zeta_{t-1/2}(\varkappa a)\right) = 2(\sin\tau)^{1/2}\sin z\,, \end{aligned}\right.$$

1) Sitzungsber. d. Bayer. Akad. 1910. 5. Abhandl.

mit $z = \frac{\pi}{4} + \varkappa a(\sin\tau - \tau\cos\tau)\cdot\tau$ und τ' sind nach dem oben Gesagten aus den Gleichungen zu berechnen

$$\cos\tau = \frac{t}{\varkappa a}, \quad \cos\tau' = \frac{t}{\varkappa r}.$$

Die Wurzeln von Z sind nach (6) durch

$$\sin z = 0, \quad z = n\pi$$

gegeben, wobei nach der Theorie von Debye $n \leqq 0$. Wenn wir also statt n $-n$ schreiben ($n \geqq 0$), so gilt

$$\varkappa a(\sin\tau - \tau\cos\tau) = -\frac{4n+1}{4}\pi. \tag{7}$$

Da $\varkappa a \gg 1$, so ist τ bei nicht zu großem n klein. Wir können also in (7) $\sin\tau$ durch $\tau - \frac{\tau^3}{6}$, $\cos\tau$ durch $1 - \frac{\tau^2}{2}$ ersetzen und nach τ auflösen. Es ergibt sich

$$\left\{\begin{aligned} \tau_n &= (4n+1)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{3\pi}{4\varkappa a}\right)^{\frac{1}{3}} e^{-i\frac{\pi}{3}} \\ t_n &= \varkappa a\cos\tau_n = \varkappa a\left(1 - \frac{\tau_n^2}{2}\right) \\ &= \varkappa a + \frac{1}{2}(4n+1)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{3\pi}{4}\right)^{\frac{2}{3}}(\varkappa a)^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{\pi}{3}} \\ n &= 0, 1, 2 \ldots . \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Bei der Berechnung der ersten Wurzeln von $Z_{t-\frac{1}{2}}(\varkappa a)$, die uns hier gerade interessieren, ergibt sich aber τ so klein, daß die Darstellungen (5) und (6) nicht mehr gültig sind. Für solche kleine Werte von τ gibt Watson[1]) für $H_t^1(x)$ die asymptotische Formel

$$H_t^1(x) = e^{ix(\sin\tau - \tau\cos\tau)}\,\frac{i\,\mathrm{tg}\,\tau}{\sqrt{3}}\, e^{-\frac{\pi i}{3} - i\xi}\, H_{\frac{1}{3}}^1(\xi), \tag{9}$$

wobei $\xi = \frac{1}{3}x\frac{\sin^3\tau}{\cos^2\tau}$ gesetzt ist.

---

1) G. N. Watson, Cambridge Phil. Soc. Proc. 19. S. 103. 1917; Roy. Soc. Proc. A. 95. S. 95. 1918. Schon Debye (Math. Annalen 67. S. 557. 1909) unterscheidet den Fall kleiner, τ, d. h. $t \cong x$ besonders und gibt dafür eine eigene Näherungsformel, die sich von der Watsonschen nur in der Schreibweise unterscheidet.

Aus (8) folgt (mit Vernachlässigung kleiner Größen):

$$(10)\quad \begin{cases} Z_{t-1/2}(\varkappa a) = -\frac{1}{\sqrt{8\varkappa a}}\, e^{-i\frac{\pi}{8} + i z(\sin\tau - \tau\cos\tau) - i\xi} \\ \qquad \cdot \left\{ H^1_{1/3}(\xi) + 3\xi \frac{d}{d\xi} H^1_{1/3}(\xi) \right\} \\ \quad = -\sqrt{\frac{8}{\varkappa a}}\, e^{-i\frac{\pi}{8} + i z(\sin\tau - \tau\cos\tau) - i\xi} \cdot \xi H^1_{-2/3}(\xi). \end{cases}$$

$Z_{t-1/2}(\varkappa a)$ als Funktion von t verschwindet, wenn $H^1_{-2/3}(\xi)$ oder, was dasselbe ist, $H^2_{-2/3}(\xi)$ als Funktion von ξ verschwindet. Die ersten Wurzeln der letzteren Funktion sind bekannt und daraus folgen die ersten Wurzeln von Z.

Wir berechnen zunächst das Potential auf der Erdoberfläche also für $r = a$. Dann ist für Z und ζ in Gleichung (4) derselbe Sattelpunkt maßgebend. Für $t = t_n$ ist $z = n\pi$. Andererseits ergibt sich aus (6):

$$\frac{d}{dt} Z_{t-1/2}(\varkappa a) = 2\left\{ \sin\tau^{1/2} \cos z \frac{dz}{dt} + \sin z \frac{d}{dt}(\sin\tau)^{1/2} \right\},$$

$$\frac{dz}{dt} = \varkappa a \sin\tau \frac{d\tau}{dt} = -\tau.$$

Es folgt:

$$(11)\quad \begin{cases} \left\{\frac{d}{dt} Z_{t-1/2}(\varkappa a)\right\}_{t=t_n} = 2\cos n\pi(-\tau_n)(\sin\tau_n)^{1/2} \\ \qquad = 2(-1)^{n+1}\,\tau_n\,(\sin\tau_n)^{1/2}. \end{cases}$$

Für $\zeta_{t_n-1/2}(\varkappa a)$ gilt asymptotisch:

$$(12)\quad \zeta_{t_n-1/2}(\varkappa a) = \frac{2}{\varkappa a}(-1)^n (\sin\tau_n)^{-1/2}.$$

Für die ersten Glieder der Reihe (4) hätten wir eigentlich die aus Formel (9) folgende Darstellung von ζ und zur Berechnung des Residuums von Z für diese Funktion den Ausdruck (10) benutzen müssen. Es zeigt sich aber, daß mit der hier angestrebten Annäherung die Darstellung (6) dasselbe Resultat ergibt wie (9) und (10).

Wenn wir in die Gleichung (4) die Werte (11) und (12) einsetzen, bekommen wir

$$(13)\quad u = -\frac{2\pi i}{\varkappa^2 a^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t_n}{\tau_n \sin\tau_n} \frac{P_{t_n-1/2}(\cos\vartheta)}{\cos\pi t_n}.$$

Da $|t_n|$ eine große Zahl ist, können wir in der Umgebung des Antipodenpunktes des Senders $\vartheta' = 0$ für $P_{t_n - 1/2}(\cos\vartheta')$ die Mehlersche Approximation[1]) benutzen und schreiben

$$P_{t_n - 1/2}(\cos\vartheta') = P_{t_n - 1/2}\left(\cos\frac{\left(t_n - \frac{1}{2}\right)\vartheta'}{t_n - \frac{1}{2}}\right)$$

$$= J_0\left\{\left(t_n - \frac{1}{2}\right)\vartheta'\right\} \cong J_0(t_n\vartheta').$$

(J_0 = Besselsche Funktion nullter Ordnung.)

Wenn wir noch $\cos\pi t_n$ angenähert durch $\frac{e^{-i\pi t_n}}{2}$ ersetzen, so wird der Ausdruck (13) für das Potential:

$$(14) \qquad u = -\frac{4\pi i}{\varkappa^2 a^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t_n}{\tau_n \sin\tau_n} e^{i\pi t_n} J_0(t_n\vartheta').$$

Wenn ϑ' nicht zu klein, so daß $|t_n|\vartheta'$ groß gegen 1 ist (aber jedenfalls klein gegen $|t_n|$), können wir in (14) den asymptotischen Ausdruck für J_0 einsetzen:

$$J_0(t_n\vartheta') = \sqrt{\frac{2}{\pi t_n\vartheta'}}\cos\left(t_n\vartheta' - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cong \sqrt{\frac{2}{\pi t_n\vartheta'}}\,\frac{e^{-i\left(t_n\vartheta' - \frac{\pi}{4}\right)}}{2},$$

und erhalten

$$(15) \qquad u = \frac{2\sqrt{2\pi}}{\varkappa^2 a^2} e^{-i\frac{\pi}{4}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{t_n}}{\tau_n\sin\tau_n}\,\frac{e^{i t_n(\pi - \vartheta')}}{\sqrt{\vartheta'}}.$$

Übrigens stimmt Formel (15) mit derjenigen überein, die sich ergibt, wenn wir für nicht sehr kleine ϑ' die Kugelfunktion $P_{t - 1/2}(\cos\vartheta')$ durch

$$\sqrt{\frac{2}{\pi t\sin\vartheta'}}\cos\left(t\vartheta' - \frac{\pi}{4}\right)$$

approximieren.

Bei der Berechnung von u können wir uns auf das erste Glied der Reihe beschränken, da die übrigen dagegen exponen-

---

1) Heine, Handb. d. Theorie der Kugelfunktionen, Berlin 1878. Bd. I. S. 184.

tiell sehr klein sind. (Für $\lambda = 10$ km z. B. beträgt das zweite Glied dem absoluten Betrage nach $\frac{1}{1000}$ des ersten, für kleinere Wellenlängen ist es noch kleiner.) Es gilt also in der Nähe von $\vartheta' = 0$:

(16)
$$u = -\frac{4\pi i}{\varkappa^2 a^2} \frac{t_0}{\tau_0 \sin \tau_0} e^{i\pi t_0} J_0(t_0 \vartheta')$$

oder auch (wenn $|t_0| \vartheta' \gg 1$)

(16')
$$u = -\frac{2\sqrt{2\pi}}{\varkappa^2 a^2} e^{-i\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{t_0}}{\tau_0 \sin \tau_0} \frac{e^{i t_0(\pi - \vartheta')}}{\sqrt{\vartheta'}}$$

und es beträgt

$$t_0 = \varkappa a + 0{,}808 (\varkappa a)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{i\pi}{3}}.$$

Für $\lambda = 10$ km z. B. ist

$$t_0 = 4007 + i \cdot 10{,}75.$$

§ 3. Diskussion des elektrischen Potentials

Auf der Erdoberfläche ist das Potential u eine Funktion von ϑ' allein, seine Abhängigkeit von ϑ' wird in der Nähe des Punktes $\vartheta' = 0$ durch die Besselsche Funktion J_0 vom komplexen Argument $t_0 \vartheta'$ gegeben.

Für $\vartheta' = 0$ ist $J_0(t_0 \vartheta') = 1$. Aus (16) folgt also für das Potential im Gegenpunkte des Senders:

(17)
$$u_0 = -\frac{4\pi i}{\varkappa^2 a^2} \frac{t_0}{\tau_0 \sin \tau_0} e^{i\pi t_0}.$$

Mit wachsendem ϑ' nimmt $|J_0(t_0 \vartheta')|$ zunächst ab, für große $|t_0| \vartheta'$ nimmt es dagegen zu, wie aus der Reihen- bzw. asymptotischen Darstellung von $J_0(t_0 \vartheta')$ ersichtlich ist. Infolgedessen hat $|u|$ bei $\vartheta' = 0$ ein Maximum und für $\vartheta' > 0$ mindestens *ein* Minimum. Wenn $|t_0| \vartheta'$ groß ist (NB. bei kleinem ϑ') können wir den Verlauf von u auf Grund der asymptotischen Darstellung von $J_0(t_0 \vartheta')$ verfolgen. Wir setzen

$$t_0 = t_1 + i t_2.$$

Dann folgt aus (16), wenn wir von einem konstanten (von ϑ' unabhängigen) Faktor absehen

(18)
$$|u|^2 = \frac{e^{2 t_2 \vartheta'} + e^{-2 t_2 \vartheta'} + 2 \cos 2\left(t_1 \vartheta' - \frac{\pi}{4}\right)}{|t_0| \vartheta'}.$$ [1]

1) Formel (18) gilt auch für große ϑ', wenn wir in ihr im Nenner ϑ' durch $\sin \vartheta'$ ersetzen.

Wenn wir die ϑ' als Abszissen, $|u|^2$ als Ordinaten einer Kurve auftragen, so verläuft dieselbe zwischen den Kurven mit den Ordinaten

$$(18') \qquad \frac{e^{2t_2\vartheta'} + e^{-2t_2\vartheta'} - 2}{|t_0|\,\vartheta'} \quad \text{und} \quad \frac{e^{2t_2\vartheta'} + e^{-2t_2\vartheta'} + 2}{|t_0|\,\vartheta'}.$$

Sie hat einen oszillierenden Charakter, die Periode einer Oszillation ist, wegen der schnellen Veränderlichkeit des Cosinus, von $\frac{\pi}{t_1}$ sehr wenig verschieden. Für so große ϑ', daß $e^{2t_2\vartheta'} \gg 1$ kann die Oszillation vernachlässigt werden, für kleine ϑ' ist sie aber merklich, da in diesem Falle $e^{2t_2\vartheta'} + e^{-2t_2\vartheta'}$ und $\cos\left(2t_1\vartheta' - \frac{\pi}{4}\right)$ von derselben Größenordnung sind. Die Minima von $|u|^2$ (und auch von $|u|$) liegen auf der ersten, seine Maxima auf der zweiten der oben erwähnten Kurven. Die letztere hat für einen Wert $\vartheta' > 0$ ein Minimum. Wegen der Kleinheit von $\frac{\pi}{t_1}$ dürfen wir annehmen, daß das kleinste Maximum von $|u|$ mit diesem Minimum zusammenfällt (der dabei begangene Fehler ist nicht größer als $\frac{\pi}{2t_1}$). Die Lage des Minimums ergibt sich aus der Gleichung

$$\frac{d}{d\vartheta'}\,\frac{e^{2t_2\vartheta'} + e^{-2t_2\vartheta'} + 2}{\vartheta'} = 0,$$

oder

$$2t_2\vartheta'_{\min} = \operatorname{Cotg} 2t_2\vartheta'_{\min} + \frac{2}{\operatorname{Sin} 2t_2\vartheta'_{\min}},$$

woraus folgt:

$$2t_2\vartheta'_{\min} = 1{,}32.$$

Wenn wir den entsprechenden Wert von $|u|$, d. h. den Wert des kleinsten Maximums von $|u|$ mit $|u|_{\min}$ bezeichnen, so gilt

$$(19) \qquad \frac{|u|_{\min}}{|u_0|} = \sqrt{\frac{e^{2t_2\vartheta'_{\min}} + e^{-2t_2\vartheta'_{\min}} + 2}{2\pi\,|t_0|\,\vartheta'_{\min}}}.$$

Im Falle, wo $\lambda = 10$ km, bekommen wir

$$\vartheta'_{\min} = 0{,}0614 = 3^0\,30',$$

$$\frac{|u|_{\min}}{|u_0|} = 0{,}23.$$

Für $0 < \vartheta' < \vartheta'_{\min}$ nehmen also mit wachsendem ϑ' die Maxima von $|u|$ ab, während seine Minima zunehmen. Für

$\vartheta' > \vartheta'_{\min}$ nehmen sowohl die Maxima als auch die Minima zu und die Amplitude der Oszillation wird immer kleiner.

Für kleine $|t_0|\vartheta'$ hört natürlich die Gültigkeit obiger Darstellung auf und $|u|$ ist aus der Reihenentwicklung von $J_0(t_0\,\vartheta')$ zu entnehmen. Da $t_2 \ll t_1$, so werden die ersten Minima bzw. Maxima von $|u|$ mit den ersten Nullstellen bzw.

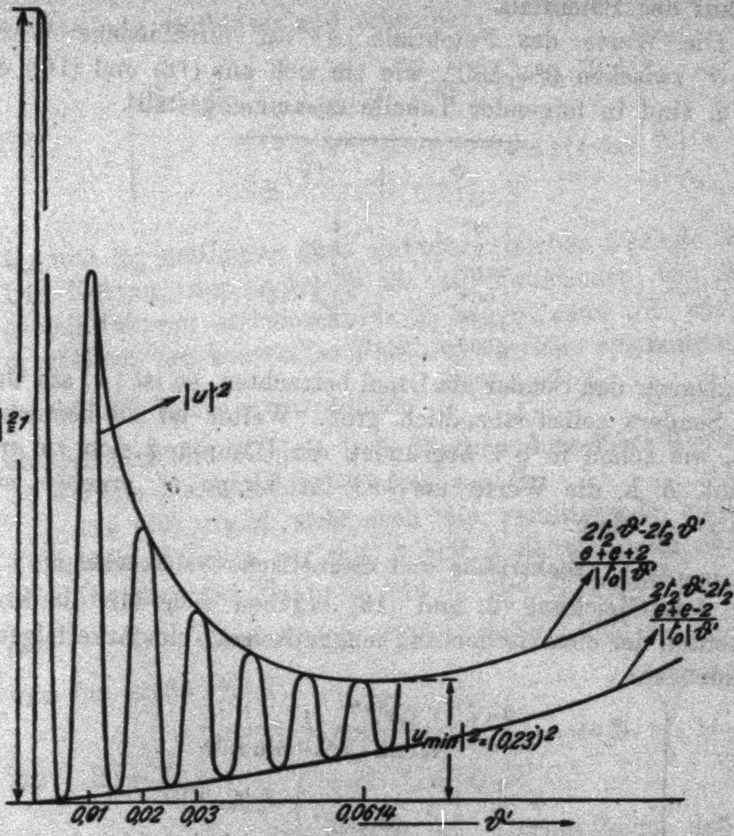


Fig. 2

Maxima von $J_0(t_1\,\vartheta')$ zusammenfallen. $|u|$ wird übrigens nirgends Null, da $J_0(t_0\,\vartheta')$ als Funktion von ϑ' keine reellen Wurzeln hat.

Der Verlauf des Potentials im Falle $\lambda = 10$ km wird qualitativ durch Fig. 2 dargestellt. Als Abszisse wurde ϑ' ($\frac{1}{100} = 1$ cm), als Ordinate $|u|^2$ aufgetragen (oszillierende Kurve). Die beiden Grenzkurven sind die Kurven (18). Der Maßstab der Ordinaten wurde so gewählt, daß $|u|^2_{\min} = (0{,}23)^2 \cdot |u_0|^2$,

2,3 cm beträgt. $|u_\cdot|^2$ wird dann 43,4 cm und konnte in dieser Größe nicht aufgetragen werden, was durch eine Unterbrechung der Kurve (20) für $|u|^2$ angedeutet wird. Ebenso ist die Anzahl der Oszillationen von $|u|^2$ viel zu groß und ihre Breite viel zu klein, als daß sie alle in der Figur aufgetragen werden könnten. Fig. 2 gibt also nur ein qualitatives Bild von dem Verlauf des Potentials.

Die Werte des Potentials $|u|$ für verschiedene Werte von ϑ' zwischen 0°—180°, wie sie sich aus (16) und (16') ergeben, sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

ϑ'	$\lvert u \rvert$
0°	1
8° 30′	0,23
45°	36
90°	$1{,}4 \cdot 10^3$
135°	$5.6 \cdot 10^8$
180°	∞

Da wir den Sender als Dipol betrachten, so ist $|u|$ am Orte des Senders selbst unendlich groß. Weiter ist zu bemerken, daß, wie schon in § 1 begründet, die Dämpfung sich zu groß ergibt, d. h. die Werte um $|u|$ für kleine ϑ' ergeben sich relativ zu klein.

§ 4. Elektrische und magnetische Feldstärke

Aus Gleichung (2) und (16) ergeben sich für die Komponenten der elektrischen und magnetischen Feldstärke folgende Ausdrücke:

$$
(20)\quad \left\{
\begin{aligned}
\mathfrak{E}_r &= -\frac{2\pi i}{a}\cdot\frac{t_0\, e^{i\varkappa t_0}}{\tau_0(\sin\tau_0)^{1/2}}\left\{\frac{1}{(\sin\tau_0)^{1/2}}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{1}{\varkappa^2}\,\frac{\partial^2}{\partial a^2}\,\frac{1}{(\sin\tau_0)^{1/2}}\right\} J_0(t_0\,\vartheta')\\
\mathfrak{E}_\vartheta &= \frac{2\pi i}{\varkappa^2 a^2}\,\frac{t_0^2\, e^{i\varkappa t_0}}{\tau_0(\sin\tau_0)^{1/2}}\,\frac{\partial}{\partial a}\,\frac{1}{(\sin\tau_0)^{1/2}}\cdot J_0'(t_0\,\vartheta')\\
&= -\frac{2\pi i}{\varkappa^2 a^2}\,\frac{t_0^2\, e^{i\varkappa t_0}}{\tau_0(\sin\tau_0)^{1/2}}\,\frac{\partial}{\partial a}\,\frac{1}{(\sin\tau_0)^{1/2}}\cdot J_1(t_0\,\vartheta')\\
\mathfrak{H}_\varphi &= \frac{2\pi}{\varkappa a}\,\frac{t_0^2}{\tau_0\sin\tau_0}\,e^{i\varkappa t_0}\cdot J_0'(t_0\,\vartheta')\\
&= -\frac{2\pi}{\varkappa a}\,\frac{t_0^2}{\tau_0\sin\tau_0}\,e^{i\varkappa t_0} J_1(t_0\,\vartheta').
\end{aligned}
\right.
$$

Die Abhängigkeit des $\mathfrak{E}_r$ von ϑ' ist durch J_0 gegeben. $\mathfrak{E}_r$ verläuft also wie das Potential und hat bei $\vartheta' = 0$ ein Maximum. Der Verlauf von $\mathfrak{E}_\vartheta$ und $\mathfrak{H}_\varphi$ als Funktionen von ϑ' wird durch $J_1(t_0\,\vartheta')$ dargestellt. Für $\vartheta' = 0$ ist also $\mathfrak{E}_\vartheta = \mathfrak{H}_\varphi = 0$, was aus der Symmetrie des Feldes unmittelbar folgt. Für große $|t_0|\,\vartheta'$ können wir statt $J_1(t_0\,\vartheta')$ seine asymptotische Darstellung einführen und schreiben:

$$(21)\quad \begin{cases} \mathfrak{E}_\vartheta^2,\ \mathfrak{H}_\varphi^2 \sim \dfrac{2}{\pi\,|t_0|\,\vartheta'}\left|\cos\left(t_0\,\vartheta' - \dfrac{3\pi}{4}\right)\right|^2 \\ \sim \dfrac{e^{2t_2\vartheta'} + e^{-2t_2\vartheta'} - 2\cos 2\left(t_1\,\vartheta' - \dfrac{\pi}{4}\right)}{|t_0|\,\vartheta'}. \end{cases}$$

$\mathfrak{E}_\vartheta$ und $\mathfrak{H}_\varphi$ oszillieren also mit der gleichen Periode wie $\mathfrak{E}_r$. Die Kurven, durch welche sie als Funktionen von ϑ' dargestellt werden und die Kurve $\mathfrak{E}_r$ liegen (wenn wir, wie in (21) geschehen, von konstanten Faktoren absehen) symmetrisch, bezüglich der Kurve mit Ordinaten $\dfrac{e^{2t_2\vartheta'} + e^{-2t_2\vartheta'}}{|t_0|\,\vartheta'}$. Infolgedessen entsprechen ihre Minima bzw. Maxima denselben Werten von ϑ' wie die Maxima bzw. Minima von $\mathfrak{E}_r$.

Aus (20) ergibt sich auch die resultierende elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$, wenn wir mit A und B die Quadrate der absoluten Beträge der Faktoren von J_0 und J_1 bezeichnen, zu

$$(22)\qquad \mathfrak{E}^2 = A\,|J_0(t_0\,\vartheta')|^2 + B\,|J_1(t_0\,\vartheta')|^2$$

und für große $|t_0|\,\vartheta'$:

$$(22')\quad \mathfrak{E}^2 = \frac{2}{\pi}\,\frac{(A+B)(e^{2t_2\vartheta'} + e^{-2t_2\vartheta'}) + 2(A-B)\cos 2\left(t_1\,\vartheta' - \dfrac{\pi}{4}\right)}{|t_0|\,\vartheta'}.$$

Man sieht leicht, daß $A > B$ ist. Daraus folgt, daß $\mathfrak{E}$ für $\vartheta' = 0$ ein Maximum hat und daß sein Verlauf demjenigen von $\mathfrak{E}_r$ ähnlich ist.

§ 5. Berechnung des Potentials über der Erdoberfläche

Wir gehen von Gleichung (4) aus und beschränken uns wieder auf das erste Glied dieser Reihe. Es sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem $\dfrac{r-a}{a} \ll 1$ oder $\gg 1$ ist.

1. Fall. $\frac{r-a}{a} \ll 1$.

Für den Nenner gilt wie früher:

$$\frac{d}{dt}\{Z_{t-1/2}(\varkappa a)\}_{t=t_0} = -2\tau_0 (\sin\tau_0)^{1/2}.$$

Dagegen für den Zähler

$$\zeta_{t_0-1/2}(\varkappa r) = \frac{2}{\varkappa r (\sin\tau_0')^{1/2}} \cos\left\{\frac{\pi}{4} + \varkappa r (\sin\tau_0' - \tau_0' \cos\tau_0')\right\},$$

wobei τ_0' aus der Gleichung

$$\cos\tau_0' = \frac{t_0}{\varkappa r}$$

zu berechnen ist.

Auf Grund der gemachten Annahme können wir τ_0' im cos {} bis auf Größen 3. Ordnung in τ_0 durch τ_0 ersetzen, da τ_0 selbst eine kleine Größe ist. Für $\sin\tau_0$, $\sin\tau_0'$ gilt:

$$\sin\tau_0 = \sqrt{1 - \frac{t_0^2}{\varkappa^2 a^2}} \qquad \sin\tau_0' = \sqrt{1 - \frac{t_0^2}{\varkappa^2 r^2}},$$

folglich:

$$\sin\tau_0' \cong \sin\tau_0 \sqrt{\frac{a}{r}\,\frac{t_0 - \varkappa r}{t_0 - \varkappa a}}.$$

Da

$$\frac{\pi}{4} + \varkappa a (\sin\tau_n - \tau_n \cos\tau_n) = n\pi,$$

so ist:

$$\cos\left\{\frac{\pi}{4} + \varkappa r (\sin\tau_0 - \tau_0\cos\tau_0)\right\}$$
$$= \cos\left\{\varkappa (r-a)(\sin\tau_0 - \tau_0\cos\tau_0)\right\}.$$

Wenn wir den letzten cos in eine Reihe entwickeln und

$$\sin\tau_0 - \tau_0\cos\tau_0$$

durch $-\frac{\pi}{4}$ ersetzen, so erhalten wir:

$$\cos\left\{\frac{\pi}{4} + \varkappa r (\sin\tau_0 - \tau_0\cos\tau_0)\right\} = 1 - \frac{(r-a)^2}{a^2}\,\frac{\pi^2}{32} + \cdots.$$

Hiermit ergibt Gleichung (4), wenn wir wieder für $P_{t_0-1/2}(\cos\vartheta')$ die Approximation $J_0(t_0\vartheta')$ benutzen:

$$(23)\quad \begin{cases} u = -\dfrac{2\pi i t_0}{\varkappa^2 a^{5/4} r^{3/4}} \left(\dfrac{t_0 - \varkappa a}{t_0 - \varkappa r}\right)^{1/4} \dfrac{e^{i\varkappa t_0}}{\tau_0 \sin\tau_0} \\ \quad \cdot \left\{1 - \dfrac{(r-a)^2}{a^2}\,\dfrac{\pi^2}{32} + \cdots\right\} J_0(t_0\vartheta'). \end{cases}$$

2. Fall. $\frac{r-a}{a} > 1$.

Der für $\zeta_{t_0 - 1/2}(\varkappa r)$ maßgebende Sattelpunkt ergibt sich jetzt aus der Gleichung

$$\cos \tau_0' = \frac{t_0}{\varkappa r} \simeq 0.$$

Wir können also $\tau_0' = \frac{\pi}{2}$ setzen.

Der asymptotische Ausdruck für $H^1_{t_0}(\varkappa r)$ lautet[1]):

$$H^1_{t_0}(\varkappa r) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{\varkappa r}{2}\sin\tau_0'\right)^{1/2}} \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\pi} e^{i\varkappa r(\sin\tau_0' - \tau_0'\cos\tau_0')}, \tag{24}$$

oder, da $\sin \tau_0' = 1$, $\varkappa r \tau_0' \cos \tau_0' = \frac{\pi}{2} t_0$,

$$H^1_{t_0}(\varkappa r) = \sqrt{\frac{2}{\pi \varkappa r}}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}\, e^{i\varkappa r - i\frac{\pi}{2}t_0}$$

und

$$\zeta_{t_0 - 1/2}(\varkappa r) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\varkappa r}\, e^{i\varkappa r - i\frac{\pi}{2}t_0}. \tag{25}$$

Für den Nenner in Gleichung (4) gilt dieselbe asymptotische Formel wie früher. Damit ergibt sich das Potential in großen Entfernungen von der Erdoberfläche zu

$$u = -\frac{2}{\varkappa^2 a r} \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\tau_0(\sin\tau_0)^{1/2}} e^{i\varkappa r + i\frac{\pi}{2}t_0} \cdot J_0(t_0\,\vartheta). \tag{26}$$

§ 6. Vergleich mit den Poissonschen Beugungserscheinungen

Die Beugungserscheinungen, die hinter einer undurchsichtigen Kreisscheibe auftreten, wurden im allgemeinen Falle, wo Lichtquelle und Beobachtungsschirm sich in endlicher Entfernung von der beugenden Scheibe befinden, von Lommel[2]) auf Grund der Wellentheorie des Lichtes abgeleitet und experimentell geprüft.

---

1) Vgl. P. Debye, Math. Ann. 67. S. 555. Gl. (52). 1909.

2) E. Lommel, Die Beugungserscheinungen einer kreisrunden Öffnung und eines kreisrunden Schirmchens, Abh. d. Bayr. Akad. II. Kl. XV. Bd. München 1884.

Wir betrachten zunächst den Fall einer kreisförmigen Öffnung. Seien R der Radius derselben, a und b die Abstände des Lichtpunktes bzw. Beobachtungsschirmes von ihrer Ebene, ζ der Abstand des Aufpunktes P von der Achse der Öffnung. Der Lichtpunkt O liege auf dieser Achse. Im Aufpunkte P wird der Lichtvektor v nach dem Huygens-Kirchhoffschen Prinzip gegeben durch

$$i\lambda v = \frac{\overline{\cos(n\,r)}}{\overline{r\,r_1}} \int e^{i\varkappa(r+r_1)}\,d\sigma. \tag{27}$$

Hier ist λ die Wellenlänge des Lichtes, $\varkappa = \frac{2\pi}{\lambda}$, r und r_1 der Abstand eines beliebigen Punktes der Öffnung vom Auf- bzw. Lichtpunkte, $(n\,r)$ der Winkel von r mit der Normalen der Öff-

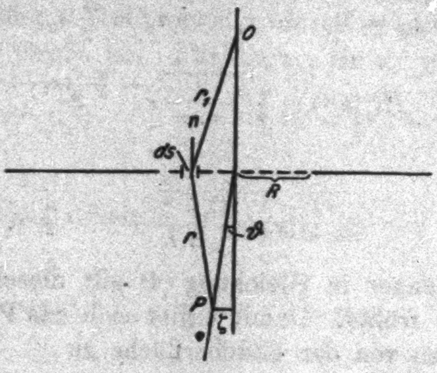


Fig. 3

nungsebene. Die Integration ist über die Öffnung zu erstrecken. Die Querstriche bedeuten Mittelwerte über die Öffnung.

Wenn ϱ, φ Polarkoordinaten in der Integrationsebene bedeuten, so gilt

$$d\sigma = \varrho\,d\varrho\,d\varphi, \qquad r^2 = (\zeta - \varrho\cos\varphi)^2 + \varrho^2\sin^2\varphi + b^2,$$
$$r_1^2 = \varrho^2 + a^2,$$

oder, wenn wir $\varrho \ll a$, $\zeta \ll b$ annehmen:

$$r = b\left(1 + \frac{\varrho^2}{2b^2} - \frac{\zeta\,\varrho\cos\varphi}{b^2}\right),$$
$$r_1 = a\left(1 + \frac{\varrho^2}{2a^2}\right).$$

Mit diesen Werten von r und r_1 wird das Integral:

$$\int e^{i\varkappa(r+r_1)}\,d\sigma = \int\limits_0^R\int\limits_0^{2\pi} e^{i\varkappa\left(a+b+\frac{\varrho^2}{2a}+\frac{\varrho^2}{2b}-\frac{\zeta\varrho\cos\varphi}{b}\right)}\cdot\varrho\,d\varrho\,d\varphi\,.$$

Es ist aber:

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{-i\frac{\varkappa\zeta\varrho}{b}\cos\varphi}\cdot d\varphi = 2\pi J_0\left(\frac{\varkappa\varrho}{b}\zeta\right)$$

(J_0 = Besselsche Funktion vom Index 0).

Bei den angenommenen Größenverhältnissen können wir $\overline{r\,r_1} = a\,b$ setzen und so bekommen wir für den Lichtvektor

$$v = \frac{\text{const.}}{a\,b}\int\limits_0^R e^{i\varkappa\frac{a+b}{2ab}\varrho^2} J_0\left(\frac{\varkappa\zeta}{b}\varrho\right)\varrho\,d\varrho\,. \tag{28}$$

Wir setzen:

$$\varkappa\frac{a+b}{a\,b} = K\,, \qquad \frac{\varkappa\zeta}{b} = c\,. \tag{28'}$$

Durch fortgesetzte Anwendung partieller Integration (nach der Exponentialfunktion) und Berücksichtigung der Formel

$$\frac{d\left(x^{-n}J_n(x)\right)}{dx} = -\,x^{-n}J_{n+1}(x)$$

können wir das letzte Integral in eine Reihe entwickeln. Es ergibt sich:

$$v = \frac{\text{const.}}{a\,b}\left\{\frac{i}{K}e^{-i\frac{c^2}{2K}} + \frac{e^{i\frac{K}{2}R^2}}{K}(V_1 - iV_0)\right\}, \tag{29}$$

wobei wir gesetzt haben:

$$V_n = \sum_{\varkappa=0}^{\infty}(-1)^{n+\varkappa}\left(\frac{c}{KR}\right)^{n+2\varkappa}J_{n+2\varkappa}(c\,R)\,. \tag{30}$$

Die Reihe (30) konvergiert für alle Werte von $\frac{c}{KR}$ und $c\,R$.

Um nun den Lichtvektor des Beugungsfeldes hinter einer Kreisscheibe mit Radius R zu finden, berechnen wir den Lichtvektor der vollen Welle und ziehen von demselben den eben abgeleiteten ab. Für die volle Welle dürfen wir die Integration in (28), trotz der Annahme $\varrho \ll a$, bis ins Unendliche erstrecken, da der Beitrag der entfernten Teile der Integrationsebene zum

Integral sehr gering ist. Der vollen Lichtwelle entspricht also das Integral

$$(31) \qquad \int_0^\infty e^{i\frac{K}{2}\varrho^2} J_0(c\varrho)\varrho\, d\varrho = \frac{i}{K} e^{-i\frac{c^2}{2K}}.$$

Aus (31) und (32) bekommen wir für den Lichtvektor hinter der Kreisscheibe

$$(32) \qquad v_{\text{sch.}} = \frac{\text{const.}}{a\,b} \frac{e^{i\frac{K}{2}R^2}}{K} (V_1 - i V_0),$$

und hieraus die Lichtintensität

$$(33) \qquad I = \frac{\text{const.}}{a^2 b^2} (V_0^2 + V_1^2).$$

Als Analogon zur drahtlosen Telegraphie um die Erde betrachten wir in dieser Beugungstheorie den Fall $a = R$, entsprechend dem Umstand, daß der Sender auf der Erdoberfläche liegt, und $b \geqq R$. Wir dürfen $a = R$ aus demselben Grund setzen, aus welchem wir in (32) die Integration bis ins Unendliche erstreckt haben.[1])

In der Nähe der Achse ist $\frac{c}{KR}$ eine sehr kleine Zahl

$$(34) \qquad \frac{c}{KR} = \frac{a\zeta}{(a+b)R} = \frac{\zeta}{R+b} < \frac{\zeta}{b}.$$

Nun ist $\frac{\zeta}{b} = \operatorname{tg} \vartheta' \cong \vartheta'$, wenn wir uns auf kleine ϑ' beschränken. Also:

$$\frac{c}{KR} < \vartheta'.$$

Mit Rücksicht auf (30) kann dann in (33) V_1^2 vernachlässigt werden, sowie alle Glieder der Reihe für V_0 außer dem ersten.

---

1) Im Falle der vollen Lichtwelle darf die Integration nach ϱ trotz der Annahme $\varrho \ll a, b$, auf Grund deren die Reihenentwicklung von r und r_1 erfolgte, bis ins ∞ erstreckt werden, weil der wesentliche Teil der Intensität von den zentralen Teilen der Welle geliefert wird, für welche diese Annahme zutrifft. Bei der Scheibe hebt sich aber beim Abziehen des Lichtvektors (30) von (31) die Wirkung dieser zentralen Teile auf. Infolgedessen ist die Approximation nicht mehr so gut, wie im Falle der vollen Lichtwelle oder der Öffnung. Weiter unten wird aber gezeigt, daß wir dieselbe Intensitätsverteilung bekommen wenn $a \gg R$, unter der Bedingung, daß gleichzeitig $b \cong a$ oder $b > a$ ist.

Mit diesen Annäherungen finden wir für die Intensität des Lichtes

$$I = \frac{\text{const.}}{a^2 b^2} J_0^{\,2}(c\,R) = \frac{\text{const.}}{a^2 b^2} J_0^{\,2}(\varkappa\, R\, \vartheta'). \tag{35}$$

Die Lichtintensität hinter der Scheibe wird also als Funktion von ϑ' oder ζ durch die Besselsche Funktion J_0 vom Argument $\varkappa R \vartheta'$ gegeben. Unser elektrisches Potential im Falle der drahtlosen Telegraphie um die Erde in der Umgebung des Gegenpunktes des Senders war in (16) durch dieselbe Funktion dargestellt, nur mit komplexem Koeffizienten von ϑ'. Dasselbe gilt für die radiale Komponente der elektrischen Feldstärke in (20). Nun wird in der optischen Beugungstheorie das Problem sehr weitgehend idealisiert, indem der beugende Körper als vollkommen schwarz, d. h. von elektromagnetisch ganz unbestimmten Eigenschaften angenommen und sein Volumen vernachlässigt wird. Ein solcher Körper bringt einen Teil des elektromagnetischen Feldes zum Verschwinden, ohne auf dasselbe zu reagieren.

Bei dem Problem der Beugung der radiotelegraphischen Wellen durch die Erdkugel haben wir es dagegen mit einem elektromagnetisch wohldefinierten beugenden Körper von endlichem Volumen zu tun. Dieser verursacht auch, wenn er, wie wir angenommen haben, vollkommen leitend ist, eine Zerstreuung der Wellen in den Raum und als Folge davon eine Dämpfung derselben, d. h. das Auftreten des imaginären Teiles des Faktors von ϑ' in $J_0(t_0\,\vartheta')$, vgl. Gleichungen (16) und (16'). Für $\vartheta' > \vartheta_{\min}$ überwiegt die Dämpfung und die Amplitude der Wellen nimmt mit abnehmendem ϑ' (wachsendem ϑ) ab. Für $\vartheta' < \vartheta'_{\min}$ überwiegt dagegen die Konzentration derselben, welche der Konzentration im optischen Falle ganz analog ist und die Amplitude nimmt bei Annäherung an den Gegenpunkt des Senders zu. Darüber überlagert sich eine räumliche Periodizität derselben ähnlich wie bei der optischen Beugung. Die Lagen der Maxima und Minima fallen in beiden Fällen, wie schon in § 3 bemerkt, im wesentlichen zusammen.

Auch die Abhängigkeit von den Entfernungen des Senders und Empfängers vom Mittelpunkt des beugenden Körpers ist in beiden Fällen dieselbe, vgl. (23), (26), (35) bis auf einen

kleinen Unterschied in (23), der für große Entfernungen von der Erdoberfläche verschwindet.

Was den Zusammenhang dieser Analogie mit den Wellenlängen und der Größe der Beugungsscheibe betrifft, so ist im Falle der drahtlosen Telegraphie für $\lambda = 10$ km, $\frac{a}{\lambda} = 630$. Wenn wir bei der optischen Beugung $\lambda = 6 \cdot 10^{-5}$ cm annehmen, so werden wir ähnliche Verhältnisse haben, wenn der Radius der Scheibe $R = 6 \cdot 630 \cdot 10^{-5}$ cm $= 0{,}378$ mm. Das ist übrigens nur für die Lage der Beugungsmaxima und -minima von Bedeutung. Der Abstand a braucht nicht unbedingt gleich R zu sein. Damit (35) gilt, muß $\frac{c}{KR}$ (vgl. 28') klein gegen 1 sein. Nun folgt aus (34), daß $\frac{c}{KR} < \frac{\zeta}{R}$ ist, es kann also $a > R$ sein, wenn nur $\frac{\zeta}{R} \ll 1$ ist, d. h. wenn wir uns hinreichend nahe bei der optischen Achse befinden. Wenn wir auch b größer werden lassen, z. B. in demselben oder größeren Verhältnis wie a, so bleibt $\frac{c}{KR}$ konstant oder nimmt ab, und dann ist die letzte Bedingung nicht mehr notwendig. Wir können also sagen, daß die beiden Beugungsphänomene ähnlich sind, wenn im Falle der optischen Beugung $a \cong b$ oder $a < b$ unabhängig von der Größe der Scheibe.

Da die Verstärkung der Wellen nicht nur im Antipodenpunkte, sondern auf der ganzen Geraden $\vartheta' = 0$ stattfindet, wie aus (23) und (26) hervorgeht, so handelt es sich wirklich um Beugung, die Verstärkung im Antipodenpunkt des Senders kommt nicht durch eine Art Brennpunktswirkung, sondern durch Beugungswirkung zustande.

Zusammenfassung

Das elektrische Potential im Gegenpunkte des Senders und dessen Umgebung wird auf Grund der allgemeinen Watsonschen Darstellung abgeleitet; daraus wird die elektrische und magnetische Feldstärke gewonnen. Ferner wird das Potential für Punkte über der Erdoberfläche in der Umgebung des durch den Gegenpunkt gehenden Radiusvektors berechnet, bei kleinen und großen Entfernungen von der Erdoberfläche. Sein Verlauf

als Funktion von $\vartheta' (= \pi - \vartheta)$ und der Entfernung des Aufpunktes von der Erdoberfläche wird diskutiert und mit dem Verlauf der Lichtintensität hinter einer kreisförmigen Beugungsscheibe (Poissonsche Beugung) verglichen, wobei sich herausstellt, daß eine weitgehende Analogie zwischen beiden Erscheinungen besteht.

Zum Schlusse möchte ich Hrn. Geheimrat Sommerfeld meinen wärmsten Dank aussprechen für das fördernde Interesse, das er dieser Arbeit entgegengebracht hat.

München, Institut für Th. Physik der Universität.

(Eingegangen 6. Juli 1928)

4. *Ein Röhrenoszillator für sehr kurze ungedämpfte Wellen;*
von H. E. Hollmann

(Hierzu Tafel XXVI)

In einer kürzlich erschienenen Arbeit beschreibt Bergmann (1) einen Kurzwellensender, mit dem ihm durch Verwendung der französischen Kurzwellenröhre der Type Métal TMC die Erzeugung ungedämpfter Wellen bis zu 82 cm gelang. Die Wirkungsweise seiner Schaltung beruht auf Rückkoppelung, wie es an anderer Stelle schon ausführlich diskutiert worden ist (2).

In meiner in diesen Annalen erschienenen Arbeit: „Über den Mechanismus von Elektronenschwingungen“ (3) habe ich bereits kurz darauf hingewiesen, daß sich die französische TMC-Röhre in gleicher Weise wie die Senderöhren der Firma „Schott“ zur Erzeugung von Elektronenschwingungen nach Gill und Morrell eignet. Als kürzeste Welle fand ich 38 cm, wobei die Intensität der Schwingungen noch einen Nachweis in einem Dipolempfänger mit Detektor und Spiegelgalvanometer im Abstand von 10 Wellenlängen erlaubte. Ausführlicher ist der von mir benutzte Senderaufbau an anderer Stelle beschrieben (4).

Im folgenden soll nun über weitere Versuche mit der französischen Kurzwellenröhre berichtet werden; in deren Verlauf wurden Schwingungen von minimal 13 cm Wellenlänge und gut meßbarer Intensität beobachtet.

In meiner Dissertation (a. a. O.) habe ich ausführlich klargelegt, wie sich Elektronenschwingungen nach Barkhausen-Kurz unter der Einwirkung von zwischen den Elektroden auftretenden Wechselfeldern hochzuschaukeln vermögen, bis sie die Eigenfrequenz des die Wechselfelder hervorbringenden Schwingungssystems erreichen und in Schwingungen nach Gill und Morrell übergehen. In Fig. 1 sind die mit einer französischen TMC-Röhre in der Schaltung von Gill und Morrell,

wie sie in der Figur oberhalb der Kurven angegeben ist, aufgenommenen Frequenzkurven wiedergegeben. Dem Gitter wurden verschiedene Spannungen erteilt, während die Anode mit dem negativen Pol der Kathode verbunden war; der Emissionsstrom wurde auf 40 mA konstant gehalten. Die Wellenlängen sind mit dem früher beschriebenen Lechersystem mit Detektor und Galvanometer gemessen.

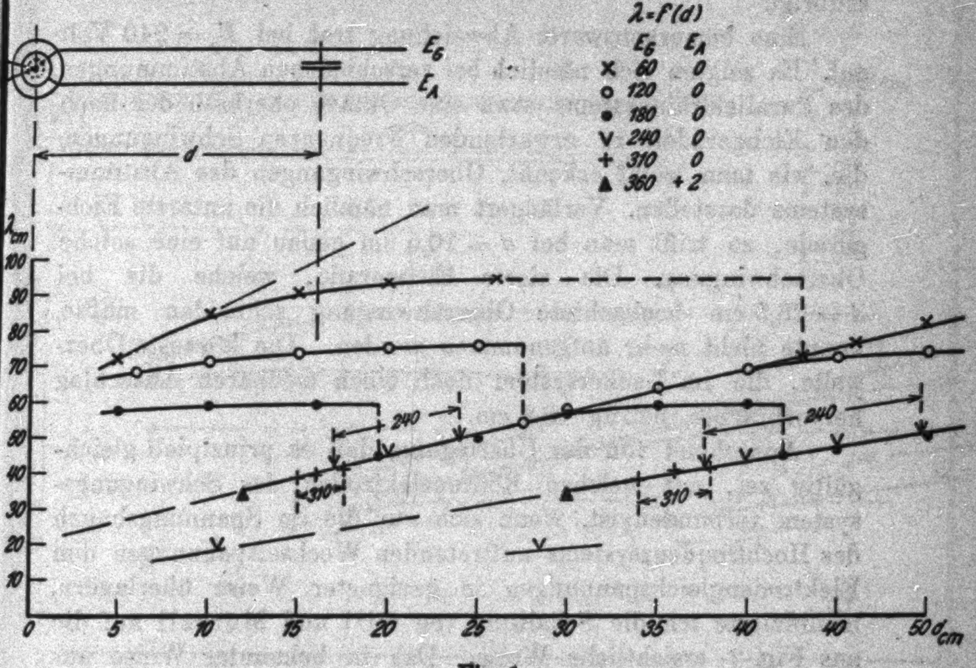


Fig. 1

Stimmen die Kurven im Bereich niedriger Gitterspannungen in ihrem Verlauf im wesentlichen mit den an „Schott“-Röhren beobachteten Kurven überein, und sind hier deutlich die Bereiche der Barkhausen-Kurz- und der Gill und Morrell-Schwingungen zu erkennen, so treten im Bereich höherer Gitterspannungen die B.-K.-Schwingungen immer mehr zurück, während G.-M.-Schwingungen zwar noch auftreten, ihre Schwingungsbereiche sich jedoch immer weiter verkleinern, bis schließlich oberhalb $E_g = 310$ Volt keinerlei Schwingungen mehr festgestellt werden konnten. Erhielt die Anode ein schwach positives Potential, so setzten die G.-M.-Schwingungen

bei höheren Spannungen wieder ein; so sind in der Figur die für $E_g = 360$ und $E_a = +24$ Volt gefundenen Werte noch eingezeichnet. Ersichtlich hat sich der Schwingungsbereich bei dem geringen positiven Anodenpotential nach höheren Frequenzen hin erweitert. Damit stimmen die Beobachtungen, was die Natur der Schwingungen betrifft, mit den früher mitgeteilten Verhältnissen völlig überein, so daß sich ein weiteres Eingehen erübrigt.

Eine bemerkenswerte Abweichung trat bei $E_g = 240$ Volt auf. Es zeigten sich nämlich bei verschiedenen Abstimmungen des Paralleldrahtsystems etwa eine Oktave oberhalb der nach den Eichgeraden zu erwartenden Frequenzen Schwingungen, die, wie man leicht erkennt, Oberschwingungen des Abstimmsystems darstellen. Verlängert man nämlich die unterste Eichgerade, so trifft man bei $d = 10{,}5$ cm genau auf eine solche Oberschwingung. Die vierte Eichgerade, welche die bei $d = 28{,}5$ cm beobachtete Oberschwingung schneiden müßte, konnte nicht mehr aufgenommen werden. Die kürzeste Oberwelle, die im Lechersystem noch einen meßbaren Ausschlag hervorbrachte, betrug 18,2 cm.

Ausgehend von der Überlegung, daß es prinzipiell gleichgültig sei, mit welchen Röhrenelektroden das Schwingungssystem verbunden ist, wenn sich nur die im Spannungsbauch des Hochfrequenzsystems auftretenden Wechselspannungen den Elektrodengleichspannungen in geeigneter Weise überlagern, modifizierte ich die Schaltung von Gill und Morrell auf die aus Fig. 2 ersichtliche Weise. Das in bekannter Weise aus zwei Paralleldrähten mit verschiebbarer Kondensatorbrücke bestehende Hochfrequenzsystem ist einerseits mit der Anode, andererseits jedoch an Stelle des Gitters mit der Kathode verbunden. Die Zuführungen des Heizstromes dürfen den Schwingungsvorgang natürlich nicht stören, was z. B. durch Drosselspulen verhindert werden könnte. Dieselben bringen aber eine gewisse Unsicherheit mit sich, die vermieden wird, wenn man das Parallelsystem aus Metallrohr verfertigt, so daß eine Heizleitung über das eine Rohr, die andere durch einen im Innern dieses Rohres isoliert laufenden Draht geführt werden kann. In die Gitterzuleitung war zunächst eine Drosselspule eingeschaltet.

Die Versuche bestätigen obige Überlegung, denn die neue Anordnung verhielt sich völlig analog der Gill und Morrell-Schaltung: Es traten sowohl Schwingungen nach Barkhausen-Kurz, als auch nach Gill und Morrell auf, und auch die äußeren Kennzeichen, das plötzliche Ansteigen des Anoden- und Abfallen des Gitterstromes waren die gleichen. In der Fig. 2 sind die in der abgeänderten Schaltung unter sonst

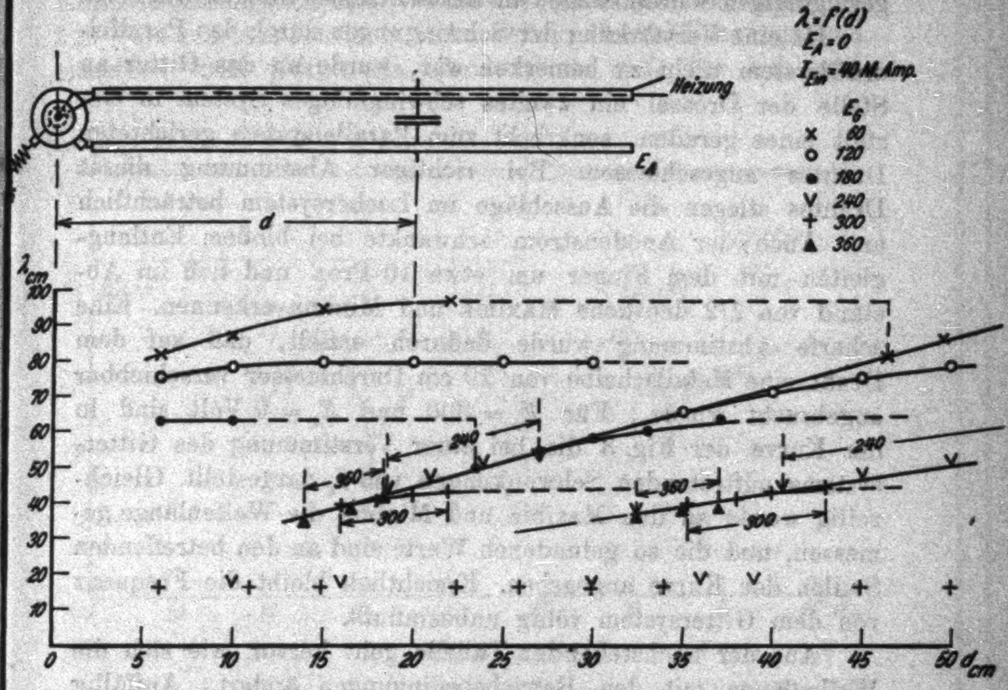


Fig. 2

gleichen Bedingungen und mit derselben Röhre wie in Fig. 1 aufgenommenen Frequenzkurven wiedergegeben.

Was die Eichkurven sowie die Schwingungsbereiche betrifft, so besteht kein grundlegender Unterschied gegenüber der Gill und Morrell-Schaltung. Lediglich bei höheren Gitterspannungen sind die Schwingungsbereiche etwas erweitert. Eine bemerkenswerte Änderung haben dagegen die vorher nur vereinzelt als Oberschwingungen auftretenden kurzen Wellen erfahren. Dieselben zeigen sich nämlich in dem ganzen Bereich zwischen $E_g = 240$ und 300 Volt und zwar jeweils in

einem Zwischenraum zwischen den G.-M.-Bereichen, also in einem Gebiet, in dem B.-K.-Schwingungen von 45—55 cm Länge, wie aus dem Abbiegen der entsprechenden Frequenzkurven zu entnehmen ist, zu erwarten sind. Die Energie der Schwingungen war, soweit aus den Angaben des Lechersystems zu entnehmen ist, konstant. Die Frequenz wurde durch das Abstimmsystem nicht meßbar beeinflußt, nur der Anodenstrom ließ an geringfügigen Schwankungen die Resonanzeinstellungen erkennen.

Da eine Verstärkung der Schwingungen durch das Paralleldrahtsystem nicht zu bemerken war, wurde an das Gitter an Stelle der Drossel ein zweites schwingfähiges System in Gestalt eines geraden, senkrecht zum Parallelsystem gerichteten Drahtes angeschlossen. Bei richtiger Abstimmung dieses Drahtes stiegen die Ausschläge im Lechersystem beträchtlich an. Auch der Anodenstrom schwankte bei bloßem Entlanggleiten mit dem Finger um etwa 10 Proz. und ließ im Abstand von $\lambda/2$ deutliche Maxima und Minima erkennen. Eine scharfe Abstimmung wurde dadurch erzielt, daß auf dem Draht eine Metallscheibe von 20 cm Durchmesser verschiebbar angebracht wurde. Für $E_g = 300$ und $E_a = 0$ Volt sind in der Kurve der Fig. 3 die bei einer Verstimmung des Gittersystems auftretenden Schwankungen von I_a dargestellt. Gleichzeitig wurde an den Maxima und Minima die Wellenlänge gemessen, und die so gefundenen Werte sind an den betreffenden Stellen der Kurve angegeben. Ersichtlich bleibt die Frequenz von dem Gittersystem völlig unbeeinflußt.

Aus der nachstehenden Tabelle geht hervor, wie sich die Wellenlänge mit den Betriebsbedingungen ändert. Auffällig ist der äußerst geringe Spannungsbereich, in dem Schwingungen überhaupt auftreten. Die größte Wellenlänge beläuft sich auf 0,7 cm bei einem Spannungsunterschied von $\Delta E_g = 80$ Volt; der Bereich der Anodenspannnng erstreckt sich sogar nur über $+4$ Volt. Bei Erhöhung des Emissionsstromes verschiebt sich der Schwingungsbereich nach kürzeren Wellen hin; eine exakte Ausmessung ist jedoch infolge Überlastung der Röhre nicht möglich.

Betrachtet man den Anodenstrom als Funktion der Gitterspannung, so machen sich die Schwingungsbereiche auch hier bemerkbar. Ist die Spannung der Anode gegen das negative

E_g	E_a	λ (cm)	E_a	λ (cm)	E_a	λ (cm)
330	0	—	+2	—	+4	—
320		16,7		16,9		17,8
300		17,0		17,1		—
270		17,1		17,4		
240		17,2		17,6		
220		—		—		

Kathodenende gleich Null, so ist bei Gitterspannungen bis zu 240 Volt kein Anodenstrom festzustellen. Sobald Schwingungen einsetzen, tritt jedoch ein Anodenstrom auf, der bei etwa

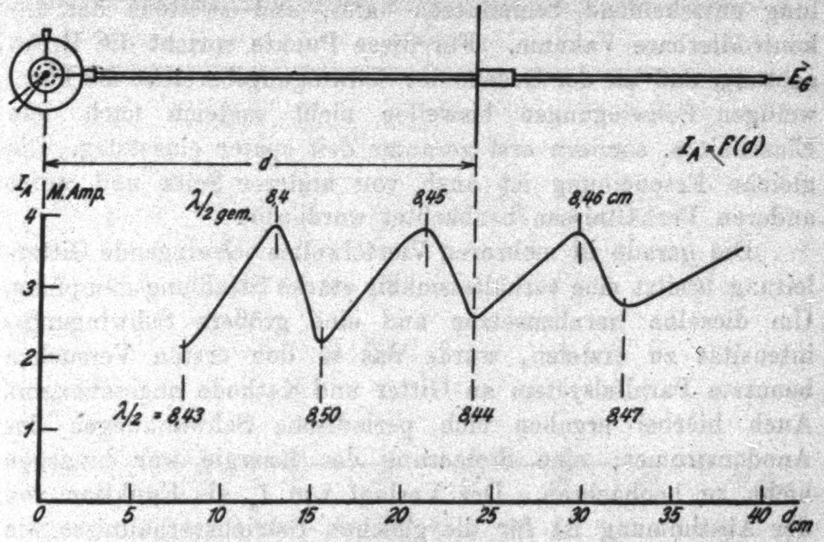


Fig. 3

300 Volt sein Maximum mit 4 mA erreicht, und bei höheren Gitterspannungen wieder auf Null zurückgeht. Bei schwach positiver Anode überlagert sich dem immer geringer werdenden Anstieg im Schwingungsbereich ein Ruhestrom, welcher in bekannter Weise mit zunehmender Gitterspannung abnimmt.

Danach liegt die Annahme nahe, daß die kurzwelligen Schwingungen ihrer Natur nach mit den früher gefundenen „Elektronenschwingungen höherer Frequenz“ (a. a. O.) identisch sind. Sie steht jedoch mit den früheren Experimenten insofern im Widerspruch, als die französische Röhre ein sehr grobmaschiges Spiralgitter von wenigen Windungen enthält, während in meinen früheren Untersuchungen die „Schwingungen

höherer Frequenz" an ein engmaschiges Gitter gebunden waren; auch die beschränkten Spannungsbereiche, sowie die geringe Abhängigkeit der Frequenz von den Spannungen entsprechen in keiner Weise den früher beobachteten Beziehungen.

Es hat somit den Anschein, als ob die Elektronenbewegung im Innern der Röhre nicht mehr von einfachen Gesetzmäßigkeiten beherrscht wird, sondern daß unübersichtliche Faktoren die Verhältnisse trüben. Als solche seien hier nur genannt erstens die hohe Temperatur des Gitters, welches im Innern der Röhre fast weißglühend wird und daher die Elektronenverteilung entscheidend beeinflussen kann, und zweitens das unkontrollierbare Vakuum. Für diese Punkte spricht die Beobachtung, daß an der Grenze der Schwingungsbereiche die kurzwelligen Schwingungen bisweilen nicht sogleich nach dem Einschalten, sondern erst geraume Zeit später einsetzten. Die gleiche Erscheinung ist auch von anderer Seite und unter anderen Verhältnissen beobachtet worden (5).

Die gerade in mehreren Viertelwellen schwingende Gitterleitung besitzt eine verhältnismäßig starke Strahlungsdämpfung. Um dieselbe herabzusetzen und eine größere Schwingungsintensität zu erzielen, wurde das in den ersten Versuchen benutzte Parallelsystem an Gitter und Kathode angeschlossen. Auch hierbei ergaben sich periodische Schwankungen des Anodenstromes; eine Steigerung der Energie war hingegen nicht zu beobachten. Der Verlauf von I_a als Funktion von der Abstimmung ist für die gleichen Betriebsverhältnisse wie bei Kurve 3 aus Fig. 4 zu erkennen. Ersichtlich sind die Minima infolge der verminderten Dämpfung schärfer, es zeigt sich aber, daß bei Resonanz ein Absinken des Anodenstromes stattfindet. Daraus ist zu schließen, daß die Wirkung des Abstimmsystems lediglich auf Energieentziehung beruht, und dasselbe dürfte auf die abgestimmte Gitterzuleitung zutreffen. Deren verstärkende Wirkung beruht dann nur auf einer Erhöhung der Strahlung oder einer festeren Koppelung mit dem Lechersystem.

„Gill und Morrel-Schwingungen höherer Frequenz", wie sie zu erwarten sind, falls die kurzwelligen Schwingungen „Barkhausen-Kurz-Schwingungen höherer Frequenz" darstellen, wurden in keinem Fall beobachtet. Auch dieser Umstand

spricht dafür, daß die vorliegenden Schwingungen eine andere Ursache haben, als reine Elektronenpendelungen im Sinne von Barkhausen-Kurz.

In Fig. 5, Taf. XXVI ist der zur Erzeugung von Wellen von 13—18 cm Länge geeignete Oszillator abgebildet. Ein abstimmbares Anoden—Kathodensystem ist fortgelassen, vielmehr ist durch Einschalten einer Drossel vor die Anode dafür gesorgt, daß keine G.-M.-Schwingungen auftreten können. Auf den Gitteranschluß ist ein starker, senkrecht nach oben ge-

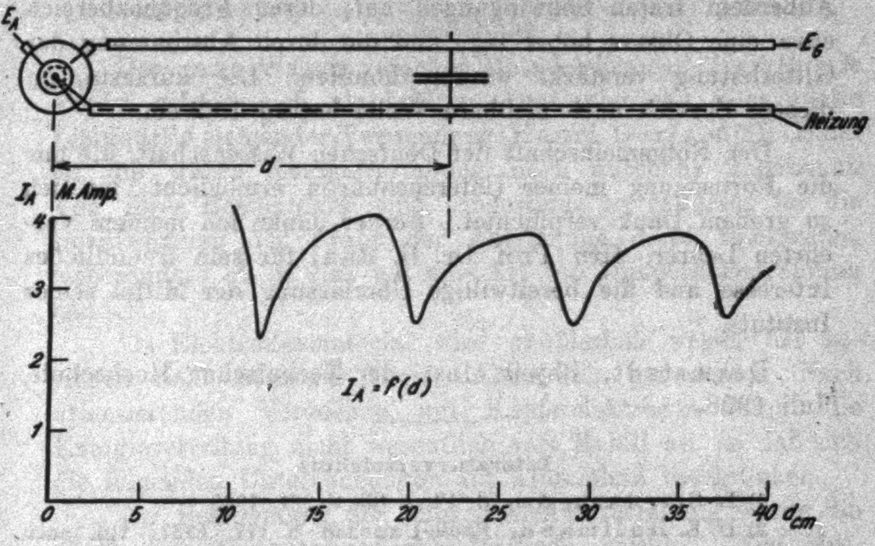


Fig. 4

führter Kupferdraht mit der zur Abstimmung dienenden Metallscheibe aufgesetzt. Die Schwingungsenergie ist im Vergleich zu Gill und Morrell-Schwingungen nur gering; so ergab das mit dem Detektor des Lechersystems verbundene Spiegelgalvanometer bei festester Ankopplung einen Maximalausschlag von 30 Skalenteilen, während es bei G.-M.-Schwingungen von 36 cm Wellenlänge etwa den 10fachen Ausschlag ergab. Es erhebt sich jedoch die Frage, ob die Angaben des Kristalldetektors bei den hohen Frequenzen noch als zuverlässig gelten können.

Die Schwingungsbereiche wiesen bei den einzelnen Röhren derselben Type geringe Unterschiede auf; Schwingungen zeigten sich jedoch bei allen mir zur Verfügung stehenden Röhren in

gleicher Weise. Als kürzeste Welle konnte ich 13,2 cm messen; dabei war die Heizung von 2,5 Amp. auf den maximal zulässigen Wert von 2,8 Amp. erhöht.

Zusammenfassung

In der Arbeit wird ein Röhrenoszillator beschrieben, mit dem durch Abstimmung eines äußeren Schwingungssystems unter entsprechender Erhöhung der Betriebsspannungen die Wellenlänge bis auf 36 cm stetig verringert werden kann. Außerdem traten Schwingungen auf, deren Frequenzbereich etwa eine Oktave höher lag, und die durch Abstimmung der Gitterleitung verstärkt werden konnten. Die kürzeste, in diesem Bereich noch meßbare Welle betrug 13,2 cm.

Der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft, die mir die Fortsetzung meiner Untersuchungen ermöglicht, bin ich zu großem Dank verpflichtet. Ferner danke ich meinem verehrten Lehrer, Hrn. Prof. Dr. H. Rau, für sein freundliches Interesse und die bereitwillige Überlassung der Mittel seines Instituts.

Darmstadt, Physik. Inst. der Technischen Hochschule, Juli 1928.

Literaturverzeichnis

1) L. Bergmann, Ann. d. Phys. 85. S. 961. 1928.

2) H. E. Hollmann, Radio-Umschau S. 177. 1927; vgl. auch A. Deubner, Ann. d. Phys. 84. S. 429. 1927.

3) H. E. Hollmann, Ann. d. Phys. 86. S. 129. 1928.

4) H. E. Hollmann, Elektrische Nachrichtentechnik 5. Juli 1928.

5) E. Pierret, Compt. rend. 184. S. 1428. 1927.

Nachtrag bei der Korrektur

In der Comptes rendus 186. S. 1284. 1928 beschreibt E. Pierret Schwingungen, die er mit denselben Röhren im gleichen Frequenzbereich erhielt, und die daher ihrer Natur nach mit den vorstehend beschriebenen identisch sein dürften. Pierret arbeitet indessen mit einem Doppeloszillator mit 2 Röhren; seine Anschauung, die kurzwelligen Schwingungen entständen durch eine Rückwirkung (réaction) zwischen beiden Röhren ist dann aber nach vorstehendem nicht aufrecht zu halten.

(Eingegangen 16. Juli 1928)

---

5. *Die Energieverteilung im kontinuierlichen Spektrum des Aluminium-Unterwasserfunkens*[1]; *von Ilse Wyneken*

1. Einleitung

Der unter Wasser zwischen Metallelektroden übergehende Funke erfreut sich als kräftige kontinuierliche ultraviolette Lichtquelle steigender Verwendung [Henri, Gerlach (1)]. Indes ist die wahre Energieverteilung noch durchaus unbekannt. Von ihrer Bestimmung sind Fingerzeige zu erwarten für die Beantwortung der Frage der Entstehung dieses Spektrums, insbesondere ob es sich um eine Art von Temperaturstrahlung handelt.

Als Elektrodenmaterial wird gewöhnlich wegen der geringen Zahl störender Linien Aluminium genommen. Nach orientierenden Versuchen mit Kupferelektroden hängt die Energieverteilung nicht wesentlich vom Metall ab, so daß sich die folgenden Untersuchungen auf Aluminium beschränken.

Zur Bestimmung der wahren Energieverteilung wurde die photographisch-photometrische Methode gewählt. Die Messungen wurden ergänzt durch subjektiven Vergleich im langwelligen Gebiet mit Hilfe eines Spektralphotometers. Da das Spektrum sich über einen großen Spektralbereich erstreckt, in welchem die Empfindlichkeit der photographischen Platte in hohem Maße variiert, kann die Intensitätskurve nur durch Vergleich mit einer Lichtquelle bekannter Intensitätsverteilung gewonnen werden. Als solche kommt nur der Kohlebogen in Frage, weil keine andere geeichte Lichtquelle in dem zu untersuchenden Spektralgebiet hinreichende Intensität besitzt.

Die schwarze Temperatur des Kohlebogens ist des öfteren bestimmt worden (2). Mit Hilfe dieser Angaben ist nach dem Planckschen Gesetz die Strahlungsenergie in Abhängigkeit

---

1) Jenaer Dissertation (I. Teil).

von der Wellenlänge bis auf eine Konstante berechenbar und die Energiekurve als Funktion der Wellenlänge gezeichnet worden.

Aus dem Vergleich der Schwärzungskurven für den Kohlebogen und den Unterwasserfunken bei verschiedenen Wellenlängen läßt sich dann die Energiekurve für den Unterwasserfunken in relativem Maße ermitteln, da ja nicht absolute Energien, sondern nur das Verhältnis der Energie zu der des Kohlebogen bestimmt werden kann. Die *Absolutwerte* der Flächenhelligkeit des Unterwasserfunkens lassen sich daraus noch nicht angeben, da die Leucht*dauer* unbekannt ist und außerdem die Flächenhelligkeit während des Leuchtens sich ändert.

2. Versuchsanordnung

a) Lichtquellen

Die Lichtquelle, deren Strahlungsenergie untersucht worden ist, ist der Unterwasserfunken in derselben Anordnung und Schaltung, die E. v. Angerer und G. Joos (3) beschreiben. Jedoch ergab sich folgende Schwierigkeit: Da die Stromzuführung in der dort beschriebenen Ausführung durch die zum Nachstellen der Elektroden dienenden Gewinde ging, die praktisch keinen vollkommenen Kontakt geben, entstand ein Funkenübergang innerhalb der Gewinde, wodurch diese zerstört wurden. Die Stromzuführung auf die Elektrodenhalter erfolgte deshalb durch Schleifkontakt, und die Elektroden selbst wurden in kleinen Bohrfuttern gehalten, wodurch eine gute Anlagefläche der Elektroden an die Halter gewährleistet war.

Die Elektroden bestanden aus Aluminiumdraht von 1,9 mm Durchmesser und 40 mm Länge außerhalb der Elektrodenhalter. Nach etwa $1^1/_2$—2stündigem Funkenübergang waren sie verbraucht und mußten erneuert werden.

Um die Elektrodenhalter vor Wasser zu schützen und das Austreten des Wassers aus dem Trog durch die Gewinde zu verhüten, waren über die Elektrodenhalter und die Durchführungsstellen in dem Kasten Hartgummibuchsen geschraubt, die mit Gummischeiben gedichtet waren. Diese Buchsen hatten aufgeschraubte Kappen, die durch den Funken stark ausgefressen wurden und deshalb so eingerichtet waren, daß sie leicht erneuert werden konnten. Dadurch war ebenfalls ein bequemes

Erneuern der Gummischeiben in den Kappen möglich, die einen Wassereintritt in die Buchsen an den Elektroden vorbei verhindern sollten.

Um stets reines Wasser zu haben, wurde der Inhalt des Troges durch fließendes destilliertes Wasser stetig erneuert; denn eine eventuelle selektive Absorption der kolloidalen Teilchen des zerstäubten Elektrodenmaterials könnte den Verlauf der Schwärzungskurven fälschen. Die Strömungsgeschwindigkeit schwankte zwischen 0,2 und 0,4 l/min.

Um von eventueller Absorption der Wasserschicht frei zu sein, wurden Vergleichsaufnahmen gemacht, in denen die Wasserschicht zwischen den Elektroden und dem Quarzfenster des Troges verdoppelt wurde, d. h. das Quarzfenster wurde statt innerhalb des Troges an der Außenwand angebracht.

Die Bogenlampe war eine selbstregulierende Lampe. Es wurden zu den Aufnahmen die von Patzelt (a. a. O.) untersuchten reinen Graphitkohlen T. 11[1]) verwandt, die im Gegensatz zu den gewöhnlichen Bogenlampenkohlen nur eine geringe Anzahl von Emissionslinien aufweisen.

Um die intermittierende Lichtquelle, den Unterwasserfunken, mit der kontinuierlichen, dem Kohlebogen, wenigstens annähernd vergleichen zu können, wurde eine rotierende Blende vor den Kohlebogen gebracht. Auf die rotierende Blende soll unten eingegangen werden.

b) Intensitätsmarken

Um gleichzeitig mit den Aufnahmen die Intensitätsmarken zu erhalten, wurde das von G. Hansen (4) angegebene Stufenblendenverfahren angewandt.

Die Versuchsanordnung ist folgende (Fig. 1):

Der Unterwasserfunken (*Li*) steht im Brennpunkte einer kurzbrennweitigen Linse (*L*). Das parallele Strahlenbündel fällt auf eine Mattscheibe (*M*), um eine möglichst gleichmäßige Beleuchtung der Stufenblende (*S*) zu bekommen. Die Stufenblende wird nun durch einen Achromaten (*A*) auf den Spalt (*Sp*) des Spektrographen abgebildet. Mit einer Zylinderlinse (*Z*) vor dem Achromaten, deren Achse vertikal steht, wird das Bild

1) Die Kohlen wurden von Gebr. Siemens, Berlin-Lichtenberg, bezogen.

der Stufenblende parallel zur Grundlinie der Stufen derart zu einer Lichtstreifenfolge auseinandergezogen, daß die Intensität der Länge der entsprechenden Stufe proportional ist. Die Brennweite der Zylinderlinse muß so gewählt sein, daß Stufenblende und Achromat im Verhältnis zur Zylinderlinse in konjugierten Ebenen liegen.

Die Stufenblende ist so eingerichtet, daß die Längen je zweier aufeinanderfolgenden Stufen, damit auch die Intensi-

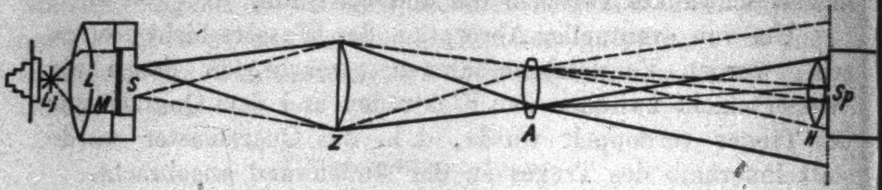


Fig. 1

täten, ein konstantes Verhältnis haben, was für die später zu besprechende Auswertung von großer Bedeutung ist.

In dem Spektralgebiet von 4500 bis 3800 ÅE wurde ein Glasachromat verwandt, da er in diesem Wellenlängenbereich über ein größeres Gebiet besser achromatisch ist als ein Quarz–Flußspatachromat.

Die Vignettierungsverhältnisse für die Stufenblendenanordnung wurden nach den Angaben von A. v. Hippel (5) und K. Schachtschabel (6) berechnet und der Achromat in entsprechender Weise abgeblendet. Die Justierung der Stufenblendenanordnung mußte mit größter Sorgfalt vorgenommen werden, da sich eine schlechte Justierung sofort in Unregelmäßigkeiten der Photometerkurven bemerkbar machte.

Der Spektrograph hatte ein Cornuprisma, schräge Kassette, Linsen mit der Brennweite von 25 cm und einer Öffnung von 2,5 cm. Die Dispersion beträgt für

$\lambda = 3090$ ÅE 40 ÅE pro Millimeter
$\lambda = 2537$ „ 18 „ „ „
$\lambda = 2370$ „ 12 „ „ „

Untersucht wurde photographisch das Spektralgebiet von 4500 bis 2400 ÅE. *Beide* Lichtquellen wurden mit der Stufenblendenanordnung photographiert, um möglichst viele Punkte und damit eine größere Genauigkeit zu bekommen.

In dem Gebiet von 2700 bis 2400 ÅE ist die Intensität des Kohlebogens bereits so gering, daß man mit der beschriebenen Stufenblendenanordnung stundenlange Belichtungen braucht, um eine derartige Schwärzung zu bekommen, daß man sich im linearen Teil der Schwärzungskurve der Platte befindet.

Die Cyanbanden im Kohlebogen zwischen 4200 und 3600 ÅE sind aber bei dieser intensiven Belichtung schon so stark, daß Reflexe innerhalb des Spektrographen, die bei normaler Belichtungszeit nicht sichtbar werden, sich störend in dem Gebiet zwischen 2600 und 2400 ÅE überlagern. Deshalb wurde eine Quarzküvette mit Nitrosodimethylanilin (7) in den Strahlengang sowohl des Bogens als auch des Funkens gebracht, um das sichtbare Licht bis zu 3500 ÅE hinunter zu absorbieren.

Für die letzten 100 ÅE (2500 bis 2400 ÅE) mußte infolge ungenügender Intensität der Kohlebogen ohne Intensitätsmarken direkt aufgenommen werden, während der Unterwasserfunken weiter in der angegebenen Weise durch die Stufenblende geschwächt wurde.

3. Gang einer Aufnahme

Nachdem die Apparatur okular auf gute Justierung geprüft war — die letzten Justierungsfeinheiten waren allerdings erst auf der Platte zu erkennen —, wurde zunächst der Kohlebogen mit vorgesetztem rotierendem Sektor aufgenommen. Die Rotationsgeschwindigkeit wurde so einreguliert, daß die Zahl der Unterbrechungen pro Sekunde ungefähr der Funkenfolge entsprach. Die Belichtungszeiten betrugen je nach dem untersuchten Spektralgebiet 2 Minuten bis 8 Stunden (letzte Zahl für $\lambda = 2500$ ÅE).

Darauf wurde der Kohlebogen und der rotierende Sektor entfernt und an seine Stelle der Unterwasserfunken gesetzt. Zur Entfernung von kolloidalen Zerstäubungsprodukten wurde der Trog mit langsam durchströmendem, destilliertem Wasser gespeist (Strömungsgeschwindigkeit 0,2—0,4 Liter pro Minute).

Um die Wellenlängen genauer zu markieren, wurde auf der Platte anschließend an die kontinuierlichen Spektren eine Aufnahme des Kupferbogens gemacht, dessen Linien zusammen

mit den im Unterwasserfunken vorhandenen Absorptionslinien und vereinzelten Emissionslinien des Kohlebogens zur Wellenlängenbestimmung diente.

Jede Platte, die zur Photometrierung kommen sollte, wurde zuerst senkrecht zur Dispersionsrichtung im Übersetzungsverhältnis 1 : 10 mit dem lichtelektrischen Registrierphotometer des Institutes (8) photometriert, um zu kontrollieren, ob die einzelnen Stufen horizontal verlaufen. Eine Photometerkurve einer Aufnahme mit schlechter Justierung der Stufenblendenanordnung, senkrecht zur Dispersionsrichtung photometriert, zeigt keinen wagerechten Verlauf der einzelnen Stufen. Findet man einen gleichmäßigen Gang in dieser Unregelmäßigkeit, so kann man mit Sicherheit auf eine ungleichmäßige Beleuchtung der Stufenblende schließen.

Dann wurden die 8 Stufen des Unterwasserfunken- und des Kohlebogenspektrums nacheinander in der Dispersionsrichtung im Verhältnis 1 : 1 photometriert. Nach den 16 Stufen mußte die Photometrierung der ersten noch einmal wiederholt werden als Kontrolle für die Konstanz der Empfindlichkeit des Photometers. Nur solche Platten, bei denen sich die Photometerkurve der ersten Stufe mit der am Schlusse wiederholten Photometrierung der ersten Stufe vollkommen decken, gelangten zur weiteren Auswertung.

4. Auswertung

a) Allgemeines über den photometrischen Vergleich intermittierender und kontinuierlicher Lichtquellen

Für das Auswertungsverfahren ist von entscheidender Bedeutung, inwieweit die mit dem Kohlebogen gewonnene Eichkurve (Schwärzung—Intensität) sich auf den diskontinuierlichen Unterwasserfunken anwenden läßt.

Auf keinen Fall darf man so vorgehen, daß man den kontinuierlichen Kohlebogen mit dem Unterwasserfunken vergleicht. Aus diesem Grunde wurde wenigstens durch Einschalten eines rotierenden Sektors annähernd dieselbe Zahl von Unterbrechungen pro Sekunde wie beim Unterwasserfunken hergestellt. Es ist aber zu bedenken, daß das Intermittenzverhältnis, d. h. das Verhältnis der Zeiten „Hell : Dunkel“ in beiden Lichtquellen sehr verschieden ist. Im allgemeinen

lauten die Angaben dahin, daß dieses Intermittenzverhältnis keinen ernstlichen Einfluß auf die Eichkurve ausübt. So sagt insbesondere L. S. Ornstein (9), aus dessen Schule eine große Anzahl photographisch-photometrischer Intensitätsmessungen hervorging, zur Frage des Vergleichs von Funken und Bogen: „Bei Funken und Geisslerröhren gibt dies Schwierigkeiten. Diese kann man leicht überwinden, indem man durch eine rotierende Scheibe der kontinuierlichen Lichtquelle dieselbe Intermittenz gibt, wie sie das Rohr hat."

Im Gegensatz dazu ergaben die Aufnahmen von Unterwasserfunken und Bogen eine verschiedene Neigung der Eichkurven, welche eine besondere Korrektur erforderlich machte. Diese Korrektur wurde in folgender Weise gewonnen.

Experimentell festgestellt wurde die Gleichheit der Schwärzung einer Stufe des Unterwasserfunkens mit einer bestimmten Stufe des Kohlebogens an einer Wellenlänge λ und mit einer anderen Stufe an einer Wellenlänge λ'. Gibt man allen auf den Unterwasserfunken bezüglichen Größen den Index 1, allen auf den Kohlebogen bezüglichen den Index 2, so gelten im normalen Expositionsgebiet, das ausschließlich benutzt wurde, nach dem bekannten Schwärzungsgesetz die Gleichungen:

$$(1)\quad \begin{cases} S_1 = a_1 \log J_1 + b_1 \log t_1 + C_1 = S_2 = a_2 \log J_2 + b_2 \log t_2 + C_2 \\ S_1' = a_1' \log J_1' + b_1' \log t_1' + C_1' = S_2' = a_2' \log J_2' - b_2' \log t_2' + C_2'. \end{cases}$$

Bekannt ist das Verhältnis von J_2 zu J_2' und gesucht das Verhältnis von J_1 zu J_1'.

Berücksichtigen wir noch, daß $t_1 = t_1'$ und $t_2 = t_2'$ als Belichtungszeiten einerseits des Unterwasserfunkens, andererseits des Kohlebogens von ein und derselben Aufnahme nur an verschiedenen Wellenlängen, so folgt durch Subtraktion der Gleichungen (1):

$$(2)\quad \begin{cases} a_1 \log J_1 - a_1' \log J_1' + (b_1 - b_1') \log t_1 + C_1 - C_1' \\ = a_2 \log J_2 - a_2' \log J^{2\prime} + (b_2 - b_2') \log t_2 + C_2 - C_2'. \end{cases}$$

Damit überhaupt ein photometrischer Vergleich zwischen beiden Arten von Lichtquellen möglich ist, müssen folgende Voraussetzungen erfüllt sein:

$$(C_1 - C_1') = (C_2 - C_2') \quad \text{oder} \quad (C_1 - C_2) = (C_1' - C_2'),$$

d. h. der Unterschied in der absoluten Empfindlichkeit zwischen den beiden intermittierenden Lichtquellen darf nicht von der Wellenlänge abhängen. Nach Weber (10) ist die Empfindlichkeit schon unabhängig von der Intermittenz, so daß diese Annahme für den Gang mit der Wellenlänge eine Differenz zweiter Ordnung ist.

E. Kron (11) hat die Abhängigkeit des Koeffizienten b von der Wellenlänge in einem kleinen Spektralbereich untersucht und keine Abhängigkeit gefunden. Da auch hier nur kleine Spektralbereiche gleichzeitig zur Auswertung gelangen, kann $b_1 = b_1'$ und $b_2 = b_2'$ gesetzt werden.

Endlich ist in dieser Arbeit experimentell festgestellt worden, daß bei nicht zu großem Intervall $a_1 = a_1'$ und $a_2 = a_2'$ ist, d. h. daß die Gradation bei den beiden Lichtquellen sich nur wenig mit der Wellenlänge ändert, so daß die Gleichung (2) sich vereinfachen läßt in:

$$(3) \qquad \frac{J_1}{J_1'} = \left(\frac{J_2}{J_2'}\right)^{\frac{a_2}{a_1}}.$$

Bezeichnet man die wahre Intensität des Kohlebogens mit K_2 und K_2', und schwächt die betreffende Stufe der Blende die Intensitäten K_2 und K_2' auf den m- und m'-ten Teil, so ist

$$S_1 = S_2 \quad \text{für} \quad J_2 = \frac{K_2}{m}$$

und

$$S_1' = S_2' \quad \text{für} \quad J_2' = \frac{K_2'}{m'}$$

Setzen wir die Werte für J_2 und J_2' in Gleichung (3) ein, so erhalten wir:

$$(4) \qquad \frac{J_1}{J_1'} = \left(\frac{m'}{m}\right)^{\frac{a_2}{a_1}} \cdot \left(\frac{K_2}{K_2'}\right)^{\frac{a_2}{a_1}}.$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich das Verhältnis der Strahlungsenergien für den Unterwasserfunken an zwei verschiedenen Wellenlängen. Die Strahlungsenergien sind also nur bis auf eine Konstante bestimmt.

Das untersuchte Spektralgebiet wurde in einzelne kleinere Gebiete unterteilt, da die Stufenblendenanordnung nur für einen kleinen Wellenlängenbereich scharf zeichnet.

Die Wellenlänge $\lambda = 2905$ ÅE war auf verschiedenen Platten vorhanden, so daß der Maßstab so festgelegt wurde, daß die Strahlungsenergie J_1' für $\lambda = 2905$ ÅE gleich 1 gesetzt wurde.

Die weiteren Werte lassen sich dann aus (4) berechnen.

b) Spezielle Auswertung der Photometerkurven

Die 16 Photometerkurven, die durch die Photometrierung der je 8 Stufen von Unterwasserfunken und Kohlebogen in der

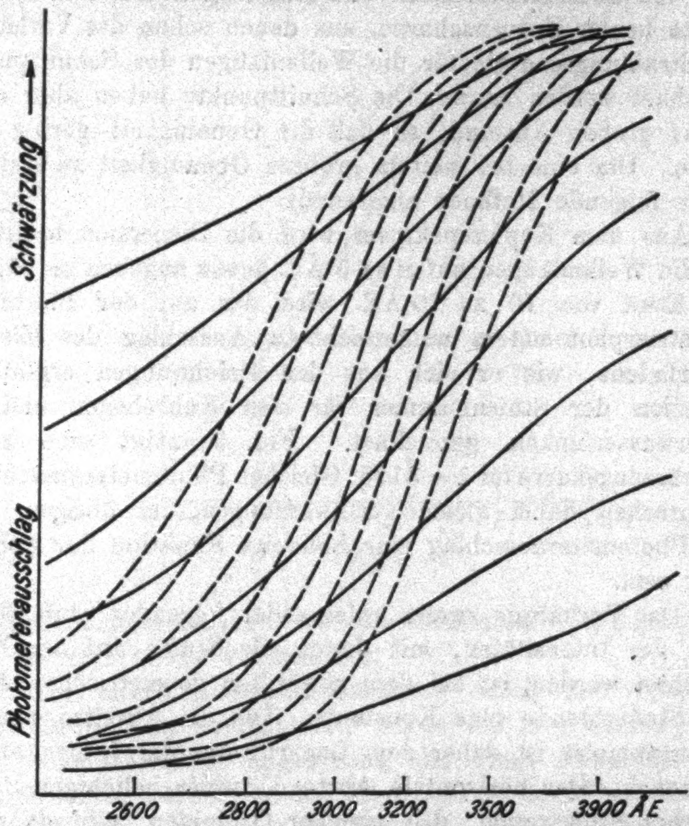


Fig. 2

Dispersionsrichtung gewonnen worden sind, wurden mit Hilfe einer Projektionslampe vierfach vergrößert gezeichnet. Man brachte die auf den Platten angebrachten Marken, d. h. die einzelnen Spektrallinien zur Deckung und zeichnete unter Aus-

gleich der kleinen Schwankungen nacheinander diese 16 Kurven auf Koordinatenpapier übereinander.

Fig. 2 gibt eine solche ausgeglichene Kurvenschar. Die ausgezogenen Kurven sind die des Unterwasserfunkens, die punktiert gezeichneten die des Kohlebogens.

Man kann deutlich erkennen, daß die Kurven für den Kohlebogen steiler als die des Unterwasserfunkens verlaufen, d. h. die Strahlungsenergie des Kohlebogens klingt rascher ab als die des Unterwasserfunkens. Die Punkte gleicher Schwärzung von Unterwasserfunken und Kohlebogen sind die Schnittpunkte beider Kurvenscharen, aus denen schon das Verhältnis der Strahlungsenergie für die Wellenlängen der Schnittpunkte berechnet werden kann. Die Schnittpunkte haben aber einen relativ großen Abstand, so daß die Genauigkeit gering sein würde. Um eine bei weitem größere Genauigkeit zu erzielen, wurde folgende Methode angewandt:

Aus dem Kupferspektrum wird die Dispersion bestimmt, um die Wellenlängen auf etwa 5 ÅE. genau angeben zu können.

Etwa von 70 zu 70 ÅE. wird der auf der Platte des Registrierphotometers aufgezeichnete Ausschlag des Elektrometerfadens, wie er sich aus den Zeichnungen ergibt, als Funktion der Stufennummer für den Kohlebogen und den Unterwasserfunken gezeichnet. Fig. 3 zeigt eine solche Schwärzungskurve für $\lambda = 3195$. Gleichen Photometerausschlägen entsprechen dabei gleiche Schwärzungen; im übrigen kann der Photometerausschlag eine beliebige Funktion der Schwärzung sein.

Das Verhältnis zweier aufeinander folgender Stufenlängen bzw. der Intensitäten, mit denen die Stufen auf der Platte belichtet werden, ist bei dem gewählten geometrischen Abfall der Stufenblende eine Konstante. Die als Abszisse gewählte Stufennummer ist daher dem Logarithmus der Intensität proportional. Der horizontale Abstand zweier beliebiger Punkte gleicher Schwärzung, d. h. gleicher Ordinaten, gibt dann das Verhältnis der zugehörigen Intensitäten an. Ist der horizontale Abstand der beiden Schwärzungskurven für Unterwasserfunken und Kohlebogen konstant, so ist auch das Verhältnis der Intensitäten für gleiche Photometerausschläge längs der ganzen Kurve konstant. In Wirklichkeit ergab sich infolge der ver-

schiedenen Gradation *a* keine strenge Konstanz dieser Abstände, d. h. das Intensitätsverhältnis hing von der Stelle der Kurve ab, an welcher gemessen wurde.

Wir legen also Parallelen zur Abszissenachse, auf der die Stufen aufgetragen sind, und bestimmen die Länge dieser Parallelen in Stufen. Diese so erhaltene Stufendifferenz wird durch Division der ihnen entsprechenden Stufenlängen umgerechnet auf das Intensitätsverhältnis m zwischen Kohlebogen

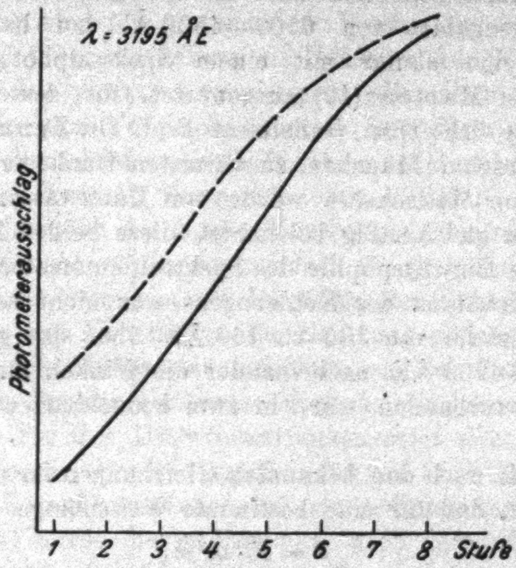


Fig. 3

und Unterwasserfunken für eine bestimmte Wellenlänge, bzw. m' für eine zweite Wellenlänge.

Da dieses Intensitätsverhältnis durch die verschiedene Gradation nicht konstant ist, wurde die in Gleichung (3) angegebene Korrektur angebracht, die diese Abweichungen im wesentlichen aufhob, so daß innerhalb der Meßfehler Konstanz eintrat. Es werden also die Größen m und m', bzw. das Verhältnis m'/m für zwei bestimmte Wellenlängen durch den Exponenten a_2/a_1 korrigiert und der Mittelwert für das betreffende Wellenlängenpaar gebildet, da ja das Verhältnis $\left(\frac{K_2}{K_2'}\right)^{\frac{a_2}{a_1}}$ konstant ist.

Es wird nun nach Gleichung (4) das Intensitätsverhältnis des Unterwasserfunkens an den beiden Wellenlängen ausgerechnet. Endlich werden unter Berücksichtigung der Festsetzung des Maßstabes, daß J_1' für $\lambda = 2905$ ÅE. gleich 1 gesetzt ist, die sich so ergebenden relativen Intensitäten als Funktion der einzelnen Wellenlängen aufgetragen.

5. Messungen im sichtbaren Spektralgebiet

Um einen Überblick über die Energieverteilung auch im Wellenlängengebiet von 6500—4500 ÅE. zu haben, wurde dieser Bereich okular mit einem Spektralphotometer nach König und Martens (12) ausgewertet, für dessen leihweise Überlassung ich Hrn. Geheimrat Prof. Dr. Zenneck, Technische Hochschule München, zu wärmstem Danke verbunden bin.

Je eine Mattscheibe wurde von Unterwasserfunken und Kohlebogen gleichmäßig beleuchtet, diese beiden Mattscheiben dann in die Eintrittspupille des Spektralphotometers abgebildet.

Die Konstanz des Kohlebogens war nicht sehr gut. Es wurden deshalb von 100 zu 100 ÅE. über das ganze Gebiet von 6500—4200 ÅE. nacheinander die Winkel, für die gleiche Helligkeit vorhanden war, in zwei benachbarten Quadranten bestimmt.

Es gilt nach den bekannten Gleichungen für das Spektralphotometer, daß für eine bestimmte Wellenlänge

$$J = K \cdot \mathrm{tg}^2 \alpha, \tag{5}$$

wobei J wieder die Intensität des Unterwasserfunkens, K die des Kohlebogens bedeuten. Für eine zweite Wellenlänge gilt ebenso

$$J' = K' \cdot \mathrm{tg}^2 \alpha'. \tag{6}$$

Also ist

$$\frac{J}{J'} = \frac{K}{K'} \, \frac{\mathrm{tg}^2 \alpha}{\mathrm{tg}^2 \alpha'}. \tag{7}$$

K/K' ergibt sich wieder aus der Planckschen Formel. J' ist die Intensität des Unterwasserfunkens für $\lambda = 4500$ ÅE. Sie wurde ermittelt zu 0,32 aus der Kurve, die sich aus den Messungen für das ultraviolette Gebiet ergeben hatte.

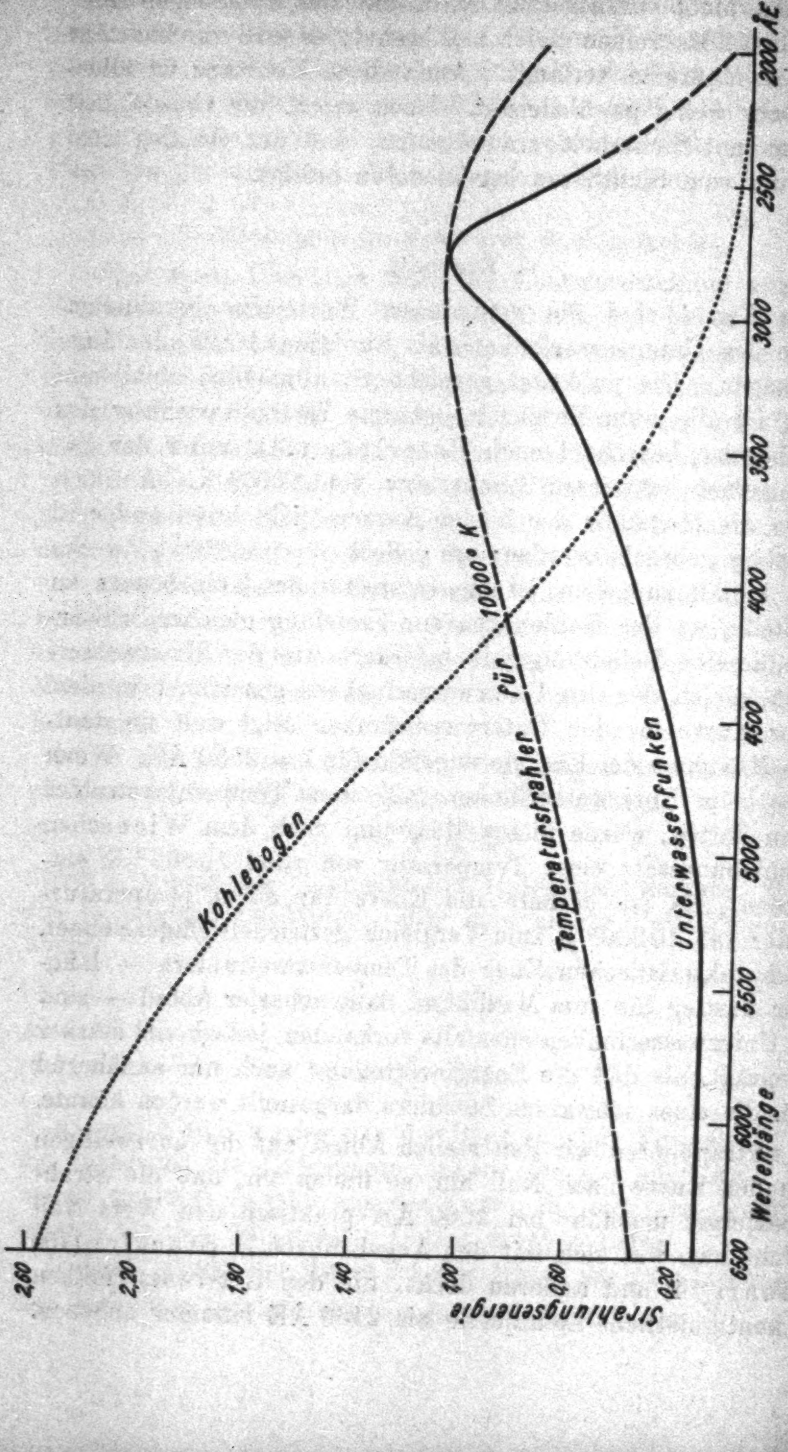
Jeder Punkt der Kurve ist das Mittel aus 12 Ablesungen. Die Mitteilung erfolgte erst über das Verhältnis von $\frac{\mathrm{tg}^2 \alpha}{\mathrm{tg}^2 \alpha'}$, da

nur dann nicht vorausgesetzt wird, daß der Kohlebogen über sämtliche 12 Meßreihen gleich hell brennt; es wird nur konstant über *eine* Meßreihe verlangt. Auch diese Konstanz ist allerdings sehr wenig gewährleistet. Doch reicht die Genauigkeit aus, um mit Sicherheit zu erkennen, daß der Anstieg zum Maximum vom Sichtbaren her monoton erfolgt.

6. Ergebnis

In Fig. 4 sind die gefundenen Werte der Strahlungsenergie des Unterwasserfunkens als Funktion der Wellenlänge aufgetragen. Die punktiert gezeichnete, allmählich abfallende Kurve ist die zum Vergleich benutzte Energieverteilung des Kohlebogens, berechnet nach Patzelt (a. a. O.) unter der Annahme einer schwarzen Temperatur von 3775° K. An sich können die Maßstäbe der beiden Kurven nicht miteinander in Beziehung gebracht werden; um jedoch für praktische Zwecke einen Anhalt zu geben, ist die Intensität des Kohlebogens an der Stelle, wo der Kohlebogen zur Erzielung gleicher Schwärzung dieselbe Belichtungszeit erfordert wie der Unterwasserfunken, gleich der des Unterwasserfunkens gezeichnet worden. In der Kurve für den Unterwasserfunken zeigt sich ein deutliches Maximum der Energie ungefähr für $\lambda = 2850$ ÅE. Wenn wir es beim Unterwasserfunken mit einem Temperaturstrahler zu tun hätten, würde dieses Maximum nach dem Wienschen Verschiebungssatz einer Temperatur von rund 10000° K entsprechen. Es ist deshalb die Kurve für einen Temperaturstrahler von 10000° K zum Vergleich gestrichelt eingezeichnet. Die charakteristischen Züge des Temperaturstrahlers — langsamer Anstieg bis zum Maximum, dann scharfer Abfall — sind beim Unterwasserfunken ebenfalls vorhanden, jedoch viel stärker ausgeprägt, als daß die Energieverteilung auch nur annähernd durch die eines schwarzen Strahlers dargestellt werden könnte.

Extrapolieren wir den steilen Abfall auf der kurzwelligen Seite der Kurve nach Null hin, so finden wir, daß die Strahlungsenergie ungefähr bei 2000 ÅE praktisch den Wert Null erreicht hat, was sich mit den Angaben von H. Stücklen (13) V. Henri (14) und anderen deckt, die den Unterwasserfunken als kontinuierliche Lichtquelle bis 2100 ÅE hinunter angeben.



(Die Maßstäbe für Kohlebogen und Unterwasserfunken sind verschieden!)

Fig. 4

Aufnahmen mit Kupferelektroden statt der Aluminiumelektroden im mittleren Wellenlängengebiet — 3200 bis 2700 ÅE — ergaben keinen, die Fehlergrenzen überschreitenden Unterschied in der Energieverteilung, doch störten hier die zahlreichen Linien.

Man könnte auch noch nach einer Abhängigkeit der Energieverteilung von der Spannung fragen, jedoch ergibt eine einfache Überlegung, daß hier so gut wie keine Variationsmöglichkeiten bestehen. Da für den Funkenüberschlag die Feldstärke maßgebend ist, so würde eine Erhöhung der Funkenspannung durch größere Entfernung der Elektroden am Potentialabfall nichts ändern. Außerdem ist die freie Weglänge etwaiger im Feld beschleunigter Ladungen in der Flüssigkeit sicher außerordentlich klein, so daß die Geschwindigkeit der Ladungen auf diese Weise nicht variiert werden kann.

7. Fehlerquellen

Es bestand die Möglichkeit, daß der steile Abfall der Energieverteilungskurve von 2800 ÅE an nach kürzeren Wellenlängen hin durch eine Absorption des Wassers, bzw. der darin enthaltenen kolloidalen Teilchen vorgetäuscht wurde. Um diese eventuelle Absorption nachzuprüfen, wurde der Trog mit auswechselbaren Quarzfenstern mit kurzem und langem Tubus versehen, so daß die Wasserschicht zwischen den Elektroden und dem Quarzfenster im Verhältnis 1 : 2 geändert werden konnte.

Es zeigte sich kein Unterschied in den Photometerkurven dieser beiden Aufnahmen mit einfacher und doppelter Wasserschicht, so daß man mit Sicherheit sagen kann, daß der Energieabfall nicht durch Absorption des Wassers, bzw. der darin gelösten Teilchen bedingt ist.

Eine Fehlerquelle liegt in den Unregelmäßigkeiten der Stufen, hervorgerufen durch nicht vollkommen gleichmäßige Ausleuchtung der Stufenblende oder in Unregelmäßigkeiten der photographischen Schicht. Dieser Fehler läßt sich auf ein gewisses Maß beschränken, aber nicht vollkommen beseitigen. Man hat eine Kontrolle über diesen Fehler durch die Photometrierungen jeder Platte senkrecht zur Dispersionsrichtung. Platten, bei denen diese Unregelmäßigkeiten größer waren als

10 Proz. der Schwärzungsunterschiede zweier aufeinander folgender Stufen, wurden nicht ausgewertet. Dieser Unregelmäßigkeit von 10 Proz. entspricht im Endresultat der Strahlungsenergie ein Fehler von ungefähr 5 Proz.

Eine eventuelle Inkonstanz des Photometers, die zu ganz unübersehbaren Fehlern führen würde, wurde durch die Wiederholung der Photometrierung der ersten Stufe kontrolliert. War aber eine momentane Inkonstanz — hervorgerufen durch Schwankungen der Lichtquelle — vorhanden, die sich über die Photometrierung einer oder mehrerer Stufen erstreckte, so konnte sie nicht kontrolliert werden. Dauerte sie aber kürzere Zeit als die Photometrierung einer Stufe in Anspruch nahm, die zweimal in derselben Richtung photometriert wurde, so deckten sich die Photometerkurven nicht, die Photometrierung mußte wiederholt werden.

In den vergrößert übereinander gezeichneten Photometerkurven mußten die Kornschwankungen sowie die Emissions- und Absorptionslinien und die Emissionsbanden ausgeglichen werden. Die hierdurch hereinkommenden Fehler wurden zum Teil behoben durch das Zeichnen der Schwärzungskurven — Photometerausschläge gegen Stufen — für die einzelnen Wellenlängen.

Als systematischer Fehler, der durch die Mittelwertbildung nicht aufgehoben wird, kommt die Unsicherheit durch die verschiedene Gradation hinein, die zwar durch die in § 4a angegebene Korrektur zum Teil behoben wird. Immerhin sind die Annahmen, auf denen das ganze Verfahren beruht, nicht restlos gesichert, so daß es nützlich ist zu überlegen, welcher Unterschied entstünde, wenn man die verschiedene Gradation ganz unberücksichtigt ließe. Die dann eintretende Änderung beträgt 10 Proz., welche wir als maximale Unsicherheit annehmen können.

Jeder Punkt der endgültigen Energieverteilungskurve des Unterwasserfunkens ergibt sich als Mittelwert vieler einzelner Werte, die aus den Schwärzungskurven ausgerechnet werden. Die Abweichungen der einzelnen Werte von dem Mittelwert betragen ungefähr 8 Proz.

Durch das Zeichnen der ausgeglichenen Kurve wird der Fehler der für die einzelnen Wellenlängen gefundenen Energie-

werte sehr stark weiter reduziert, so daß der durch Meßungenauigkeiten bedingte Fehler 5 Proz. kaum übersteigen dürfte.

8. Zusammenfassung

Es ist die Energieverteilung des Unterwasserfunkenspektrums aus dem Vergleich mit der bekannten Energieverteilung des Kohlebogens photographisch-photometrisch ermittelt worden. Ein deutliches Maximum bei 2850 AE, das dem 3,5fachen Werte der bei 4500 ÅE herrschenden Energie entspricht, würde, wenn wir es mit einem Temperaturstrahler zu tun hätten, auf eine Temperatur von 10000° K schließen lassen. Jedoch verläuft die entsprechende Kurve des schwarzen Strahlers sehr viel flacher.

Eine Abhängigkeit vom Elektrodenmaterial konnte beim Vergleich von Aluminium und Kupfer nicht nachgewiesen werden.

Der Abfall der Kurve nach dem äußersten Ultraviolett hin ist nicht durch Absorption des Wassers vorgetäuscht.

Diese Arbeit wurde im Physikalischen Institut der Universität Jena auf Anregung von Hrn. Prof. G. Joos ausgeführt, dem ich für sein stetes Interesse und zahlreiche Anregungen zu größtem Danke verpflichtet bin.

Ebenso herzlich danke ich Hrn. Geheimrat Prof. Dr. M. Wien für sein großes Interesse am Fortschreiten der Arbeit und für die bereitwillige Unterstützung mit den Mitteln des Instituts.

An dieser Stelle möchte ich auch Hern. Dr. G. Hansen und Frl. Dr. A. Schrammen für wertvolle Anregungen und Ratschläge meinen herzlichen Dank aussprechen.

Literaturverzeichnis

1) W. Gerlach, Festschrift des Phys. Vereins Frankfurt 1924; V. Henri, Phys. Ztschr. 14. S. 516. 1913.

2) F. Patzelt, Ztschr. f. techn. Phys. 4. S. 66. 1923; H. Cohn u. M. Guckel, Ztschr. f. Phys. 27. S. 305. 1924.

3) E. v. Angerer u. G. Joos, Ann. d. Phys. 74. S. 743. 1924.

4) G. Hansen, Ztschr. f. Phys. 29. S. 356. 1924.

5) **A. v. Hippel**, Ann. d. Phys. **80**. S. 672. 1926.
6) **K. Schachtschabel**, Ann. d. Phys. **81**. S. 929. 1926.
7) **E. v. Angerer**, Handbuch der Experimentalphysik Bd. 21. S. 814.
8) **G. Hansen**, Ann. d. Phys. **78**. S. 558. 1925.
9) **L. S. Ornstein**, Phys. Ztschr. **28**. S. 688. 1927.
10) **A. E. Weber**, Über die Anwendung des rotierenden Sektors zur photographischen Photometrie. Dissertation München 1918.
11) **E. Kron**, Über das Schwärzungsgesetz photographischer Platten. Publikationen des astrophys. Observ. Potsdam. Bd. 22. Nr. 67. 1913.
12) **F. F. Martens u. F. Grünbaum**, Ann. d. Phys. **12**. S. 984. 1903.
13) **H. Stücklen**, Ztschr. f. Phys. **30**. S. 24. 1924.
14) **V. Henri**, Phys. Ztschr. **14**. S. 516. 1913.

(Eingegangen 6. Juli 1928)

6. *Über die Stromdichte des normalen Kathodenfalls II;*

von M. Reger und R. Seeliger

Vor einiger Zeit haben wir über Messungen der normalen Stromdichte an Zylinderkathoden berichtet[1]), die unter Beachtung aller Vorsichtsmaßregeln durchgeführt waren und, wie wir glauben, die hauptsächlichsten Fehlerquellen früherer Untersuchungen, vor allem nämlich die aus Temperatur- und Randeffekten entspringenden, vermieden haben; sie haben deshalb unseres Erachtens zum erstenmal zu wirklich quantitativ verbürgbaren Zahlenwerten geführt. In der vorliegenden Arbeit haben wir nun nach derselben Methode der „variablen Bedeckungslänge" weiter Messungen zur Ergänzung nach zwei Seiten hin angestellt. Zunächst schien es wünschenswert zu sein, die Untersuchung auszudehnen auf Kathoden von verschiedener Dicke. Denn trotz der durch die Holmschen Ähnlichkeitsbetrachtungen bereits betonten theoretischen Bedeutung scheinen Untersuchungen über die Abhängigkeit der Stromdichte vom Kathodendurchmesser in einwandfreier Weise überhaupt noch nicht angestellt worden zu sein; Messungen von Güntherschulze an Zylinderkathoden sowohl wie eigene Messungen an Kugelkathoden[2]) bezogen sich nicht auf dieselbe konstante Kathodentemperatur, sondern nur auf den jeweiligen thermischen Endzustand und sind deshalb, wie man inzwischen erkannt hat, für alle theoretischen Schlüsse nur sehr bedingt zu verwerten. Unsere neuen Messungen, über die hier kurz berichtet werden soll, haben wir nun vorläufig beschränkt auf Eisen als Kathodenmaterial und zuerst Wasserstoff als Füllgas benutzt. Eisen wurde gewählt in Hinblick auf die zweite wünschenswerte Ergänzung, nämlich auf die Messung der Stromdichte in Quecksilberdampf. Denn in Quecksilberdampf

1) R. Seeliger u. M. Reger, Ann. d. Phys. 83. S. 535. 1927.

2) R. Seeliger u. J. Schmekel, Ann. d. Phys. 73. S. 249. 1924.

ist — trotz der Wichtigkeit für eine Reihe technischer Fragen und der besonderen Stellung, die dieser Dampf als Metalldampf unter den Gasen einnimmt — die normale Stromdichte bisher erst einmal, nämlich in einer nunmehr fünf Jahre zurückliegenden Arbeit[1]) von Güntherschulze, gemessen worden; wenn auch diese Arbeit eine Reihe interessanter Feststellungen enthält, so können ihre Ergebnisse quantitativ doch wohl nur als orientierende gelten.

Die Methode der Messungen ist bereits in unserer ersten Arbeit genau beschrieben worden; die einzige Änderung gegen früher bestand darin, daß wir zur Veränderung der Stromstärke nicht einen mit der Entladung in Serie liegenden veränderlichen Widerstand, sondern eine auf Sättigung beanspruchte Glühkathodenröhre benutzten, deren Anode und Gitter kurzgeschlossen waren. Im übrigen waren die Messungen wegen der notwendigen Vorbereitung der Kathode durch Zerstäubung ebenso mühevoll und zeitraubend wie früher.

1. Wir hatten früher gefunden, daß sich in dem untersuchten Druckbereich von etwa 2—10 mm Hg die Stromdichte in Abhängigkeit vom Druck darstellen läßt durch einen Ausdruck von der Form

$$j = a \cdot p^b,$$

wo für eine und dieselbe Dicke der Kathode a und b sowohl für das Kathodenmaterial als wie für das Gas charakteristische Konstanten sind. Allgemeiner wird man zu erwarten haben, daß a und b auch noch vom Durchmesser ($2r$) der Kathode abhängen und wird insbesondere für b aus den Überlegungen von Holm anzunehmen haben, daß es — zunehmend mit zunehmendem r — stets zwischen den Werten 1 und 2 liegt; für a lassen die bisherigen Messungen nur erkennen, daß es mit zunehmendem r abnimmt. Unsere neuen Messungen in Wasserstoff an Eisen konnten durchgeführt werden für die Drucke zwischen 2 und 10 mm Hg und für Kathodendurchmesser zwischen 0,5 und 10 mm (gemessen wurde für $r = 0{,}25$; 0,6; 1,0; 1,5; 2,25; 5,0) und haben nun in der Tat ergeben, daß sich die Stromdichte darstellen läßt durch einen Ausdruck der Form

$$j = a(r) \cdot p^{b(r)}.$$

---

1) A. Güntherschulze, Ztschr. f. Phys. 15. S. 244. 1923.

Die Genauigkeit der Messungen und der formelmäßigen Darstellung ist eine recht große, da die Fehler in j nicht mehr als höchstens 3 Proz. betragen. Nur bei der dünnsten Kathode von 0,25 mm Radius ist die Genauigkeit wahrscheinlich etwas geringer anzusetzen, da sich hier wegen der kleinen Wärmekapazität der Kathode und der großen Stromdichtewerte die Kathode rasch erwärmte und deshalb die Messung der Bedeckungslänge mit größtmöglicher Schnelligkeit vorgenommen

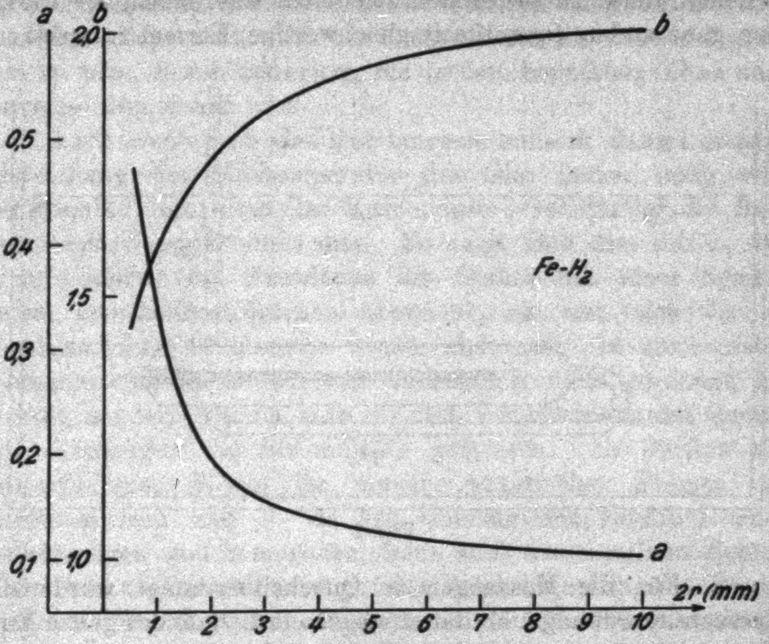


Fig. 1

werden mußte. Für p in mm Hg und j in mA/cm² sind die Werte von a und b in Abhängigkeit von r (mm) in der Fig. 1 angegeben. Die Übereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung zeigt an, daß die Voraussetzungen der Ähnlichkeitsbetrachtung hier offenbar sehr gut erfüllt sind; denn wie die Figur zeigt, wird der obere Grenzwert 2 für b tatsächlich genau erreicht und es sind jedenfalls keine Anzeichen dafür vorhanden, daß bei einer zwanglosen Extrapolation dies nicht auch für den unteren Grenzwert 1 der Fall sein würde. Darüber hinausgehend möchten wir allerdings, wie ausdrücklich

bemerkt sei, der hier benutzten einfachen analytischen Darstellung der gemessenen Stromwerte durch unsere Potenzformel vorläufig noch keine tiefere Bedeutung zuschreiben, sondern sie nur als eine recht brauchbare und genaue Formel zur Berechnung der Stromdichte etwa in den Bereichen $0{,}25 \leqq r \leqq 5{,}0$ (mm) und $2 \leqq p \leqq 10$ (mm Hg) aufgefaßt wissen. Der weiteren Entwicklung der Theorie der Vorgänge im Kathodenfallgebiet muß es vorbehalten bleiben, die Potenzformel vielleicht tiefer zu begründen, vielleicht aber auch, sie durch eine ganz andere (quantitativ gleichwertige) Formel zu ersetzen.

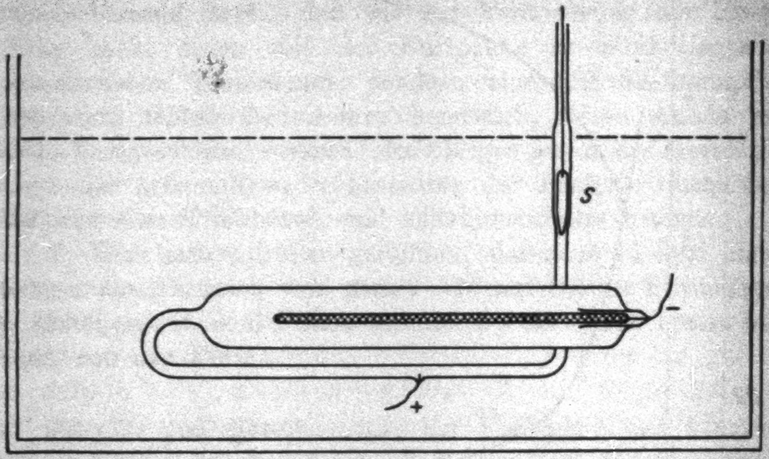


Fig. 2

2. Für die Messungen in Quecksilberdampf wurde die Versuchsanordnung nur dahin abgeändert, daß das ganze Entladungsrohr in einem Bad aus elektrisch geheiztem Öl untergebracht war. Nach der üblichen Reinigung und Entgasung, die hier natürlich besonders sorgfältig vorgenommen werden mußte, konnte es durch einen (ungefetteten) noch innerhalb des Bades liegenden Innenschliff *S* abgesperrt werden (Fig. 2), so daß sich sicher in seinem ganzen Inneren dieselbe konstante Dampfdichte einstellte. Um eine gleichmäßige Bedeckung der Kathode, mit wachsender Stromstärke vom Kathodenende her wachsend, zu erzielen, mußte die Anode wie aus der Figur ersichtlich, in einem genügend langen Ansatzrohr untergebracht werden. Das Quecksilber wurde nach sorgfältigster Reinigung in solcher Menge in das Entladungsrohr eingefüllt, daß einer-

seits bei allen Temperaturen noch flüssiges Quecksilber als Bodenkörper vorhanden war, andererseits es nicht direkt von der Entladung berührt und dadurch u. U. erwärmt werden konnte. Da die maßgebende Variable nicht der Dampfdruck, sondern die Dampfdichte ist, wurden die aus den Temperaturen des Bades und den Dampfdruckangaben von Knudsen folgenden Dampfdrucke reduziert auf eine Temperatur von 18° C. Unter einen Druck von etwa 2 mm herunterzukommen, war auch in Quecksilberdampf aus den früher bereits geschilderten Gründen nicht möglich; nach oben hin beschränkten wir uns auf Drucke bis zu etwa 6 mm reduziert, die in dem benutzten Ölbad noch zu erreichen waren.

Auch wenn man das Bad langsam anheizt, dauert es nach Erreichung der Endtemperatur des Öles immer noch etwa 10 Minuten, bis auch der Kathodenstab vollständig die Badtemperatur angenommen hat. Es zeigt sich dies darin, daß sich zunächst die Oberfläche des Stabes mit einer Schicht feiner Quecksilbertröpfchen überzieht, die erst nach Verlauf der genannten 10 Minuten wieder abdampft. In einer ersten Versuchsreihe haben wir nun absichtlich nicht so lange gewartet, sondern jeweils kurz vor dem Verschwinden des Quecksilberüberzuges die Stromdichte gemessen. Es dürften die so erhaltenen Werte für manche praktischen Fragen von Interesse sein und — da der Überzug den Eindruck einer vollständigen und homogenen, wenn auch aus einzelnen kleinen Tröpfchen zusammengesetzten Oberflächenbedeckung macht und dies auch durch die gute Proportionalität der Bedeckungslänge mit der Stromstärke zum Ausdruck kommt — die für Quecksilberdampf an Quecksilber charakteristischen darstellen. Die Messungen sind aber naturgemäß nicht sehr genau, da man den Zeitpunkt der Messung, d. h. die Homogenität der Temperatur im ganzen Entladungsrohr nicht in stets ganz derselben Weise festlegen kann; wir haben wohl deshalb auch Abweichungen der Einzelmessungen voneinander bis zum Betrag von etwa 15 Proz. erhalten, es scheint aber auch hier das Potenzgesetz zu gelten. Die Berechnung der Größen a und b führte zu den in Fig. 3 punktiert eingezeichneten Werten. Wir haben sie nur bis herab zu einem Kathodenradius von 1,5 mm eingetragen, da sich bei noch dünneren Kathoden — vermutlich

wegen der zu kleinen Wärmekapazität — der Quecksilberbelag nicht lange genug aufrechterhalten ließ. Wie aus einem Vergleich mit Fig. 1 hervorgeht, ist die Stromdichte unter sonst denselben Bedingungen also für Hg an Hg ungefähr 5—10 mal kleiner (je nach dem Absolutwert des Druckes) als für H an Fe; es ist dies in größenordnungsmäßiger Übereinstimmung

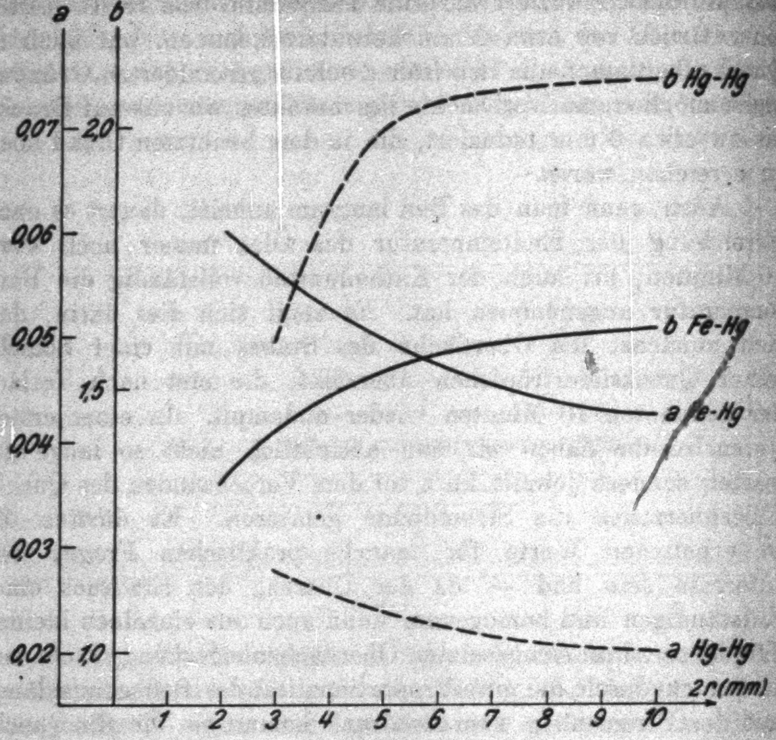


Fig. 8

mit einem schon von Güntherschulze mitgeteilten Befund. Bemerkt sei noch, daß die Genauigkeit dieser Messungen nicht ausreicht, um mit Sicherheit zu entscheiden, ob die bei großen Werten von $2r$ gefundene Überschreitung der theoretischen b-Grenze 2 reell ist.

3. Wenn man nach dem Anheizen des Ölbades genügend lange wartet oder einige Zeit die Entladung durch das Rohr gehen läßt und hierdurch die Kathodentemperatur in die Höhe treibt, verschwindet der Quecksilberbelag auf der Kathodenoberfläche wieder vollkommen und man hat es dann also mit

einer Entladung in Quecksilberdampf an reinem Eisen zu tun. Dann kann man natürlich auch wieder die vollkommene Einstellung des thermischen Gleichgewichtszustandes im ganzen Rohr abwarten, so daß die Messungen dieselbe Genauigkeit beanspruchen können wie die oben beschriebenen in Wasserstoff. Unter einen Kathodenradius von 1 mm herabzukommen, ist uns jedoch auch hier nicht gelungen, da die Bedeckung bei den dünnsten Kathoden stets unmittelbar nach der Zündung der Entladung an irgendeiner Stelle aufriß. Bei dieser Gelegenheit sei auch auf eine eigentümliche, des öfteren, wenn auch noch nicht beliebig reproduzierbar beobachtete und deshalb noch genauer zu untersuchende Form der Kathodenbedeckung hingewiesen. Wir glauben nämlich neben der in unseren Messungen erfaßten regulären normalen Kathodenbedeckung in reinem Quecksilberdampf an reinem Eisen noch eine andere Form beobachtet zu haben, die bei relativ sehr kleinen Stromstärken die Kathode schwach leuchtend überzieht. Sie ist vielleicht identisch mit dem in unserer ersten Mitteilung (S. 547) erwähnten „Nebelschwanz“ in Neon und ist deshalb interessant, weil sie auf die Möglichkeit unternormaler Stromdichtewerte hinweist.

Auch in Hg an Fe erwies sich das Potenzgesetz innerhalb der oben genannten Druck- und Kathodendickegrenzen als brauchbar. Die Werte von a und b sind in der Fig. 3 durchgezogen eingetragen und sind ganz verschieden von den für Hg an Hg gefundenen. Bemerkenswert ist, daß b auch bei einem Kathodendurchmesser von 10 mm noch weit entfernt von dem für ebene Kathoden zu erwartenden Wert 2 bleibt und daß es auch keine Neigung zu zeigen scheint, sich mit wachsendem r überhaupt diesem Wert zu nähern.

Zur Orientierung und zur Ergänzung der graphischen Darstellung von a und b seien zum Schluß noch die Stromdichtewerte selbst in mA/cm² in einer Tabelle zusammengefaßt. Sie sind berechnet aus den a- und b-Werten und geben, wie bereits angegeben wurde, für H_2 an Fe und Hg an Fe die gemessenen Stromdichten mit derselben Genauigkeit von 3 Proz. wieder, die wir bei den Messungen erreicht haben; nur für Hg an Hg ist die Genauigkeit geringer und zu nicht mehr als etwa 10 Proz. zu veranschlagen.

Tabelle

Druck in mm Hg	Durchmesser der Kathode in mm 0,5	1	2	4	6	8	10	
2	1,32	1,0	0,66	0,54	0,45	0,42	0,4	Fe—H_2
	—	—	0,154	0,148	0,14	0,137	0,128	Fe—Hg
	—	—	0,07	0,098	0,096	0,09	0,088	Hg—Hg
4	3,6	3,0	2,25	2,0	1,78	1,68	1,6	Fe—H_2
	—	—	0,38	0,43	0,42	0,42	0,39	Fe—Hg
	—	—	0,176	0,33	0,4	0,39	0,37	Hg—Hg
	6,5	5,8	4,6	4,3	3,9	3,7	3,6	Fe—H_2
	—	—	0,66	0,76	0,78	0,8	0,76	Fe—Hg
	—	—	0,3	0,7	0,94	0,9	0,88	Hg—Hg
8	9,8	9,3	7,6	7,4	6,9	6,6	6,4	Fe—H_2
	—	—	—	—	—	—	—	—
	—	—	—	—	—	—	—	—
10	13,8	13,2	11,2	11,1	10,5	10,5	10,0	Fe—H_2
	—	—	—	—	—	—	—	—
	—	—	—	—	—	—	—	—

Greifswald, 6. Juli 1928.

(Eingegangen 10. Juli 1928)

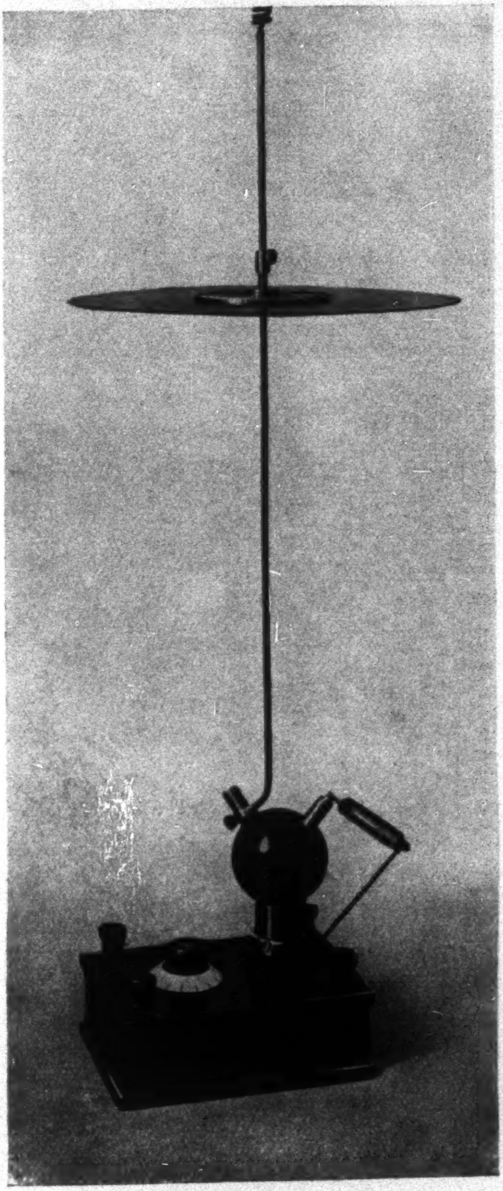


Fig. 5

H. E. Hollmann